< 정답표 >

1.	④	**2.**	①	**3.**	⑤	**4.**	①	**5.**	③
6.	③	**7.**	①	**8.**	④	**9.**	②	**10.**	⑤
11.	②	**12.**	③	**13.**	②	**14.**	④	**15.**	⑤
16.	④	**17.**	③	**18.**	①	**19.**	⑤	**20.**	④
21.	⑤	**22.**	4	**23.**	18	**24.**	6	**25.**	11
26.	30	**27.**	9	**28.**	4	**29.**	140	**30.**	11

1 [출제의도] 지수 계산하기

$2\times\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^3=2\times 2^2=8$

2 [출제의도] 집합의 포함관계 이해하기

$A\subset B$이므로 $A\cap B=A$

3 [출제의도] 등비수열의 항 구하기

첫째항을 a라 하면

$a_2=2a=6$이므로 $a=3$

따라서 $a_4=3\times 2^3=24$

4 [출제의도] 미분계수 계산하기

함수 $f(x)=x^4-3x^2+4$에서

$f'(x)=4x^3-6x$

따라서 $f'(1)=4-6=-2$

5 [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim_{x\to -1-}f(x)=2$, $\lim_{x\to 0+}f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to -1-}f(x)+\lim_{x\to 0+}f(x)=2-1=1$

6 [출제의도] 수열의 극한값 계산하기

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}=1$

7 [출제의도] 접선의 방정식 이해하기

$y'=3x^2+2x-2$이고,

점 $(1,\ 4)$에서의 접선의 기울기 $m=3$이므로

접선의 방정식은 $y=3x+1$

$m-n=2$

8 [출제의도] 지수와 로그 계산하기

$ab=2^8$, $\frac{a}{b}=2^2$

$a=2^2b$이므로 $2^2b^2=2^8$

따라서 $b=2^3$이고 $a=2^5$이다.

$\log_2(a+4b)=6$

9 [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim_{x\to 3}(x^2-9)=0$이므로 $\lim_{x\to 3}(2x^2+ax+b)=0$

$18+3a+b=0$

$b=-3(a+6)$

$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2+ax-3(a+6)}{(x+3)(x-3)}$

$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(2x+a+6)}{(x+3)(x-3)}$

$=\lim_{x\to 3}\frac{2x+a+6}{x+3}$

$=\frac{12+a}{6}=3$

$a=6$, $b=-36$

따라서 $a+b=-30$

10 [출제의도] 무리함수의 성질 이해하기

정의역이 $\{x|x\geq -2\}$이므로

$f(x)=-\sqrt{a(x+2)}+3$, $b=2a$

$f(1)=-\sqrt{3a}+3=0$

$\sqrt{3a}=3$

$a=3$, $b=6$

따라서 $ab=18$

11 [출제의도] 일대일 대응의 성질 이해하기

함수 $f(x)=2x+b$가 일대일 대응이므로 치역과 공역이 같다.

직선 $y=f(x)$의 기울기가 양수이므로

$f(-3)=-6+b=-a$ ⋯ ㉠

$f(5)=10+b=a$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=8$, $b=-2$

따라서 $a^2+b^2=68$

12 [출제의도] 등비수열의 성질 이해하기

$2(S_6-S_4)=3(a_6-a_4)$

$2(a_6+a_5)=3(a_6-a_4)$

$2(r^5+r^4)=3(r^5-r^3)$

$2r^4(r+1)=3r^3(r+1)(r-1)$

$r>0$이므로 $2r=3(r-1)$

따라서 $r=3$

13 **[출제의도] 부분집합의 개수 추론하기**

(i) $6 \in X$인 경우

집합 X의 개수는 $2^4 - 1 = 15$

(ii) $6 \notin X$인 경우

집합 X는 3, 4를 반드시 포함해야 하므로

$2^{4-2} = 4$

(i), (ii)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는

집합 X의 개수는 19

14 **[출제의도] 로그의 성질을 활용하여 수학 내적 문제 해결하기**

$\log a$, $\log b$, $\log c$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\log b = \log a + \log c$

$\log b^2 = \log ac$, $b^2 = ac$

$\log abc = \log b^3 = 15$이므로 $\log b = 5$이다.

$\log a + \log b + \log c = 15$를 만족시키고

공차가 자연수인 등차수열 $\log a$, $\log b$, $\log c$의

순서쌍 $(\log a, \log b, \log c)$는

$(4, 5, 6)$, $(3, 5, 7)$, $(2, 5, 8)$, $(1, 5, 9)$이다.

$$\log \frac{ac^2}{b} = \log \frac{ac}{b} + \log c$$
$$= \log b + \log c = 5 + \log c$$

따라서 $\log c = 9$일 때,

$\log \frac{ac^2}{b}$의 최댓값은 $5 + 9 = 14$

15 **[출제의도] 적분과 미분의 관계를 활용하여 수학 내적 문제 해결하기**

함수 $g(x) = \int_2^x (t-2)f'(t)dt$ 이므로

$g'(x) = (x-2)f'(x)$

함수 $g(x)$가 $x=0$에서만 극값을 가지므로 상수 a에 대하여 $g'(x) = (x-2) \times ax(x-2)$

$f'(x) = ax(x-2)$ 이고

함수 $f(x)$의 최고차항이 x^3이므로 $a = 3$

$f'(x) = 3x(x-2)$

$$\text{따라서 } g(0) = \int_2^0 3t(t-2)^2 dt$$
$$= \left[\frac{3}{4}t^4 - 4t^3 + 6t^2\right]_2^0 = -4$$

16 **[출제의도] 함수의 극한 이해하기**

$$\lim_{x \to \infty} \left\{ \sqrt{f(-x)} - \sqrt{f(x)} \right\}$$
$$= \lim_{x \to \infty} \left\{ \sqrt{a(-x-1)^2 + 1} - \sqrt{a(x-1)^2 + 1} \right\}$$
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{4ax}{\sqrt{a(x+1)^2 + 1} + \sqrt{a(x-1)^2 + 1}}$$
$$= \frac{4a}{2\sqrt{a}} = 6$$

따라서 $a = 9$

17 **[출제의도] 연속함수의 성질 이해하기**

(i) $k = 1$인 경우

$\lim_{x \to 2-} f(x)f(x) = (-2) \times (-2) = 4$

$\lim_{x \to 2+} f(x)f(x) = (-6) \times (-6) = 36$

$\lim_{x \to 2} f(x)f(x)$가 존재하지 않으므로

함수 $f(x)f(x)$는 $x = 2$에서 불연속이다.

(ii) $k = -1$인 경우

위의 (i)과 같은 방법에 의하여

함수 $f(x)f(-x)$는 $x = 2$에서 불연속이다.

(iii) $k \neq -1$, $k \neq 1$인 경우

함수 $f(kx)$는 $x = 2$에서 연속이다.

함수 $f(x)f(kx)$가 $x = 2$에서 연속이 되려면

$\lim_{x \to 2-} f(x)f(kx) = \lim_{x \to 2+} f(x)f(kx) = f(2)f(2k)$

$-2f(2k) = -6f(2k) = -2f(2k)$

따라서 $f(2k) = 0$

$x = -4, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4$에서 $f(x) = 0$이므로

$2k$는 $-4, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4$이다.

그러므로 $k = -2, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2$

(i), (ii), (iii)에 의하여 모든 상수 k의 값의 곱은 2

18 **[출제의도] 등비급수의 합 추론하기**

$p^n + 3p^{n-1} + 3^2p^{n-2} + \cdots + 3^{n-1}p + 3^n$ 은

첫째항이 p^n, 공비가 $\boxed{\dfrac{3}{p}}$ 인 등비수열의

첫째항부터 제$(n+1)$항까지의 합이고, $p \neq 3$ 이므로

$p^n + 3p^{n-1} + 3^2p^{n-2} + \cdots + 3^{n-1}p + 3^n$

$= \dfrac{p^{n+1} - 3^{n+1}}{\boxed{p-3}}$ 이다.

$0 < \dfrac{p}{p+3} < 1$, $0 < \dfrac{3}{p+3} < 1$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n + 3p^{n-1} + 3^2p^{n-2} + \cdots + 3^{n-1}p + 3^n}{(p+3)^n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{n+1} - 3^{n+1}}{(\boxed{p-3}) \times (p+3)^n}$$

$$= \frac{1}{\boxed{p-3}} \left\{ p \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p}{p+3} \right)^n - 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{p+3} \right)^n \right\}$$

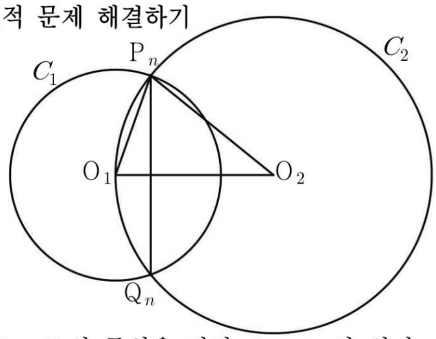
$$= \frac{p^2 + 3p + \boxed{9}}{3p}$$

이다.

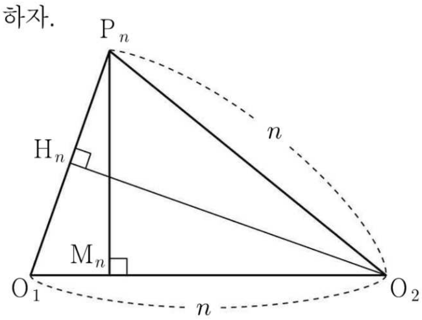
$f(p) = \dfrac{3}{p}$, $g(p) = p - 3$, $k = 9$

따라서 $f(9) \times g(9) = 2$

19 **[출제의도] 수열의 극한을 활용하여 수학 내적 문제 해결하기**



원 C_1, C_2 의 중심을 각각 O_1, O_2라 하자.
점 O_2에서 선분 $\mathrm{O}_1\mathrm{P}_n$에 내린 수선의 발을 H_n,
점 P_n에서 선분 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$에 내린 수선의 발을 M_n
이라 하자.



삼각형 $\mathrm{O}_2\mathrm{P}_n\mathrm{O}_1$ 이 이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n} = \dfrac{n-1}{2}$

직각삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n\mathrm{O}_2$에서

$\overline{\mathrm{O}_2\mathrm{H}_n} = \sqrt{n^2 - \left(\dfrac{n-1}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3n^2 + 2n - 1}}{2}$

삼각형 $\mathrm{O}_2\mathrm{P}_n\mathrm{O}_1$의 넓이는

$\dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{O}_1} \times \overline{\mathrm{O}_2\mathrm{H}_n} = \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2} \times \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{M}_n}$ 이므로

$\dfrac{1}{2} \times (n-1) \times \dfrac{\sqrt{3n^2 + 2n - 1}}{2} = \dfrac{1}{2} \times n \times \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{M}_n}$

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{M}_n} = \dfrac{(n-1)\sqrt{3n^2 + 2n - 1}}{2n}$

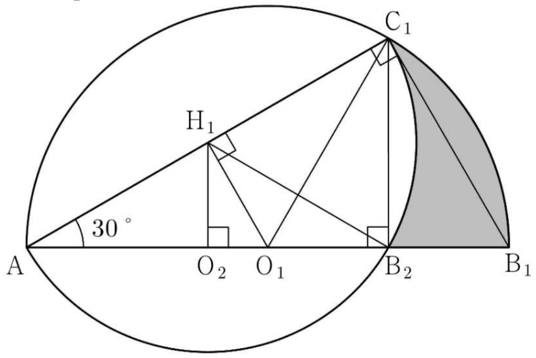
$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} = 2\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{M}_n}$ 이므로

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}}{n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{(n-1)\sqrt{3n^2 + 2n - 1}}{n^2} = \sqrt{3}$$

20 [출제의도] 등비급수를 활용하여 수학 내적 문제 해결하기

그림 R_1 에서



$\angle \mathrm{B_1AC_1} = 30^\circ$ 이므로

직각삼각형 $\mathrm{C_1AB_1}$에서 $\overline{\mathrm{AC_1}} = 4\sqrt{3}$

직각삼각형 $\mathrm{C_1AB_2}$에서 $\overline{\mathrm{AB_2}} = 6$

선분 $\mathrm{AB_1}$의 중점을 $\mathrm{O_1}$, 선분 $\mathrm{AB_2}$의 중점을 $\mathrm{O_2}$, 선분 $\mathrm{AC_1}$의 중점을 $\mathrm{H_1}$이라 하면

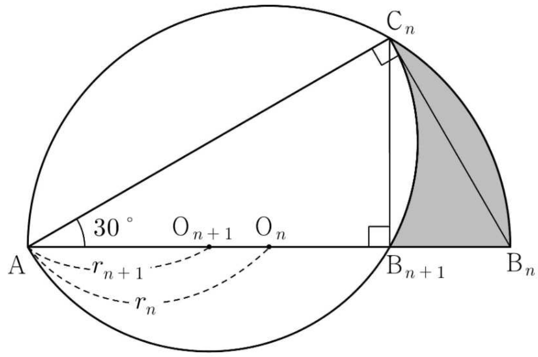
$\overline{\mathrm{O_1H_1}} = 2$, $\overline{\mathrm{H_1O_2}} = \sqrt{3}$

$S_1 =$(부채꼴 $\mathrm{O_1B_1C_1}$ + 삼각형 $\mathrm{O_1C_1A}$)

$\quad -$(부채꼴 $\mathrm{H_1B_2C_1}$ + 삼각형 $\mathrm{H_1AB_2}$)

$$= \left(16\pi \times \frac{60^\circ}{360^\circ} + \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 2\right)$$
$$- \left(12\pi \times \frac{60^\circ}{360^\circ} + \frac{1}{2} \times 6 \times \sqrt{3}\right)$$
$$= 16\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) - 12\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$
$$= \frac{1}{3}(2\pi + 3\sqrt{3})$$

다음은 그림 R_n 의 일부이다.



$\overline{\mathrm{AB}_n}$을 지름으로 하는 반원의 반지름의 길이를 r_n, $\overline{\mathrm{AB}_{n+1}}$을 지름으로 하는 반원의 반지름의 길이를 r_{n+1}이라 하자.

$\overline{\mathrm{AB}_n} = 2r_n$, $\angle \mathrm{B}_n\mathrm{AC}_n = 30^\circ$ 이므로

직각삼각형 $\mathrm{C}_n\mathrm{AB}_n$에서 $\overline{\mathrm{AC}_n} = \sqrt{3}\,r_n$

$\angle \mathrm{B}_{n+1}\mathrm{AC}_n = 30^\circ$ 이므로

직각삼각형 $\mathrm{C}_n\mathrm{AB}_{n+1}$에서 $\overline{\mathrm{AB}_{n+1}} = \frac{3}{2}r_n$

따라서 $r_{n+1} = \frac{3}{4}r_n$

그림 R_n 에서 새롭게 색칠되는 도형의 넓이를 T_n 이라 하면 $T_{n+1} = \frac{9}{16}T_n$ 이고 $S_n = \sum_{k=1}^{n} T_n$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} T_k = \frac{\frac{1}{3}(2\pi + 3\sqrt{3})}{1 - \frac{9}{16}}$$

$$= \frac{16}{21}(2\pi + 3\sqrt{3})$$

따라서 $p + q = 21 + 16 = 37$

21 [출제의도] 정적분을 활용하여 추론하기

ㄱ. $f'(x)=x^2-4tx+3t^2=(x-t)(x-3t)$ (참)

ㄴ. $f(x)=\int_{3t}^{x}(s^2-4ts+3t^2)\,ds$

$=\left[\frac{1}{3}s^3-2ts^2+3t^2s\right]_{3t}^{x}=\frac{1}{3}x^3-2tx^2+3t^2x$

$=\frac{1}{3}x(x-3t)^2$

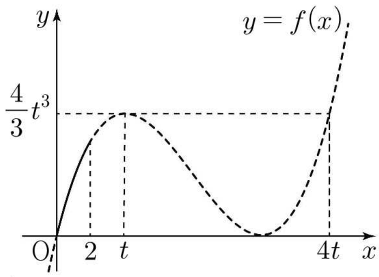
$f'(t)=0$, $f(t)=\frac{4}{3}t^3$이므로

$f(x)-\frac{4}{3}t^3=\frac{1}{3}x(x^2-6tx+9t^2)-\frac{4}{3}t^3$

$\qquad=\frac{1}{3}(x-t)^2(x-4t)$

$f(t)=f(4t)=\frac{4}{3}t^3$

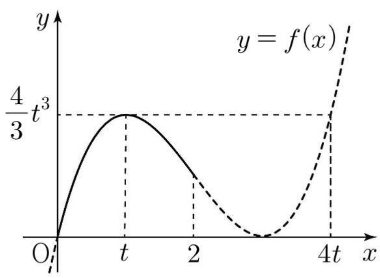
i) $t>2$일 때



함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값을 가지므로

$g(t)=f(2)=\frac{2}{3}(3t-2)^2$

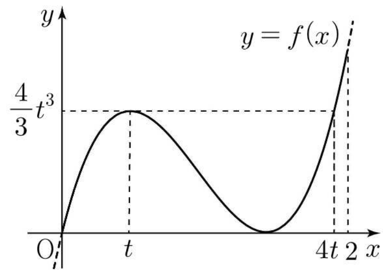
ii) $t\le 2<4t$ 즉, $\frac{1}{2}<t\le 2$일 때



함수 $f(x)$는 $x=t$에서 최댓값을 가지므로

$g(t)=f(t)=\frac{4}{3}t^3$

iii) $4t\le 2$ 즉, $0<t\le\frac{1}{2}$일 때



함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값을 가지므로

$g(t)=f(2)=\frac{2}{3}(3t-2)^2$

i), ii), iii)에 의하여

$t>2$일 때, $g(t)=\frac{2}{3}(3t-2)^2$ (참)

ㄷ. 함수

$$g(t)=\begin{cases}\frac{2}{3}(3t-2)^2 & \left(0<t\le\frac{1}{2}\right)\\ \frac{4}{3}t^3 & \left(\frac{1}{2}<t\le 2\right)\\ \frac{2}{3}(3t-2)^2 & (t>2)\end{cases}$$

의 미분가능성을 조사하면

i) $t=\frac{1}{2}$일 때,

$$\lim_{t\to\frac{1}{2}-}\frac{g(t)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{t-\frac{1}{2}}=\lim_{t\to\frac{1}{2}-}\frac{\frac{2}{3}(3t-2)^2-\frac{1}{6}}{t-\frac{1}{2}}$$

$$=\lim_{t\to\frac{1}{2}-}\frac{(2t-1)(6t-5)}{2t-1}=-2$$

$$\lim_{t\to\frac{1}{2}+}\frac{g(t)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{t-\frac{1}{2}}=\lim_{t\to\frac{1}{2}+}\frac{\frac{4}{3}t^3-\frac{1}{6}}{t-\frac{1}{2}}$$

$$=\lim_{t\to\frac{1}{2}+}\frac{(2t-1)(4t^2+2t+1)}{3(2t-1)}=1$$

따라서 $t=\frac{1}{2}$에서 미분가능하지 않다.

ii) $t=2$일 때,

$$\lim_{t\to 2-}\frac{g(t)-g(2)}{t-2}=\lim_{t\to 2-}\frac{\frac{4}{3}t^3-\frac{32}{3}}{t-2}$$
$$=\lim_{t\to 2-}\frac{\frac{4}{3}(t^3-8)}{t-2}=\lim_{t\to 2-}\frac{4(t^2+2t+4)}{3}=16$$

$$\lim_{t\to 2+}\frac{g(t)-g(2)}{t-2}=\lim_{t\to 2+}\frac{\frac{2}{3}(3t-2)^2-\frac{32}{3}}{t-2}$$
$$=\lim_{t\to 2+}\frac{2(t-2)(3t+2)}{t-2}=16$$

따라서 $t=2$에서 미분가능하다.
i), ii)에 의하여 $t>0$에서 함수 $g(t)$는
$t=\frac{1}{2}$에서만 미분가능하지 않다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

22 [출제의도] 로그 계산하기

$\log_2 48-\log_2 3=\log_2 2^4=4$

23 [출제의도] 정적분 계산하기

$$\int_0^2(5x^4-6x^2+1)\,dx=\left[x^5-2x^3+x\right]_0^2$$
$$=32-16+2=18$$

24 [출제의도] 속도와 거리의 관계 이해하기

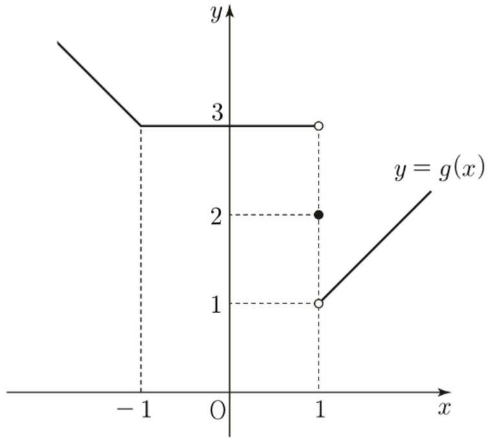
$$\int_1^3|3t^2-6t|\,dt$$
$$=\int_1^2(-3t^2+6t)dt+\int_2^3(3t^2-6t)dt$$
$$=6$$

25 [출제의도] 로그의 정의 이해하기

$49-x^2>0$, $x+6>0$, $x+6\neq 1$을 모두 만족시키는 x의 범위를 구하면
$-7<x<7$, $x>-6$, $x\neq -5$이므로
조건을 모두 만족시키는 정수 x는
-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6이다.
따라서 모든 정수 x의 값의 합은 11

26 [출제의도] 연속함수의 정의 이해하기

함수 $g(x)=\begin{cases}-x+2 & (x\leq -1)\\ 3 & (|x|<1)\\ 2 & (x=1)\\ x & (x>1)\end{cases}$
이므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서만 불연속이다.



함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로
$f(1)g(1)=\lim_{x\to 1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)g(x)$
$(3+a)\times 2=\lim_{x\to 1+}(3x+a)x=\lim_{x\to 1-}(3x+a)\times 3$
$a=-3$이므로 $f(x)=3x-3$
따라서 $f(11)=30$

27 [출제의도] 유리함수의 그래프를 활용하여 수학 내적 문제 해결하기

함수 $f(x)=\dfrac{2}{x}$ 라 하면 $f(x)=f^{-1}(x)$ 이므로

곡선 $y=\dfrac{2}{x}$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

곡선 $y=\dfrac{2}{x}$ 와 직선 $y=-x+k$ 가 제1 사분면에서 만나는 점 A 의 좌표를 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{2}{a}\right)(a\neq\sqrt{2})$ 라 하면 점 B 의 좌표는 $\mathrm{B}\left(\dfrac{2}{a},\ a\right)$ 이다.

$\angle \mathrm{ABC}=90^\circ$ 이므로 점 C 는 제3 사분면 위에 있고 점 C 의 좌표를 $\mathrm{C}\left(c,\ \dfrac{2}{c}\right)$ 라 하면 직선 BC 의 기울기는 1 이다.

$\dfrac{\frac{2}{c}-a}{c-\frac{2}{a}}=\dfrac{-a}{c}=1$, $c=-a$ 이므로

점 C 의 좌표는 $\mathrm{C}\left(-a,\ -\dfrac{2}{a}\right)$

$\overline{\mathrm{AC}}^2=\{a-(-a)\}^2+\left\{\dfrac{2}{a}-\left(-\dfrac{2}{a}\right)\right\}^2$

$=4a^2+\dfrac{16}{a^2}=20$

$a^2+\dfrac{4}{a^2}=5$

따라서 $k^2=\left(a+\dfrac{2}{a}\right)^2=a^2+\dfrac{4}{a^2}+4=9$

28 [출제의도] 함수의 극한을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

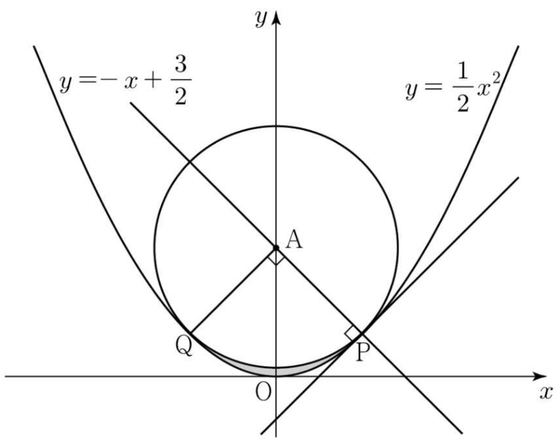
$\mathrm{A}(1,1)$를 지나고 직선 $y=x$ 와 수직인 직선은 $y=-x+2$ 이므로 점 B의 x좌표는 2이다.
$\mathrm{P}(t,\ t)$ 이므로 $\mathrm{Q}(t,\sqrt{t})$이고, R 는 직선 $y=-x+2$ 위의 점이므로 $\mathrm{R}(-t+2,\ t)$
$\overline{\mathrm{QP}}=\sqrt{t}-t$, $\overline{\mathrm{PR}}=-2t+2$이므로

$S(t)=\dfrac{1}{2}\times\{t+(1-t)\}\times(\sqrt{t}-t)=\dfrac{1}{2}(\sqrt{t}-t)$

$T(t)=\dfrac{1}{2}\times t\times(-2t+2)=t-t^2$

$\displaystyle\lim_{t\to1-}\frac{t-t^2}{\frac{1}{2}(\sqrt{t}-t)}=\lim_{t\to1-}\frac{2(t-t^2)(\sqrt{t}+t)}{(t-t^2)}=4$

29 [출제의도] 정적분의 성질을 활용하여 수학 내적 문제 해결하기



두 곡선의 교점의 좌표를 각각
$\mathrm{P}\left(\alpha,\ \dfrac{1}{2}\alpha^2\right)$, $\mathrm{Q}\left(-\alpha,\ \dfrac{1}{2}\alpha^2\right)$이라 하자. $(\alpha>0)$

함수 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 의 그래프의 접점 P에서 접선의 기울기는 α 이고 이 접선은 직선 AP와 수직이다.

즉, $\dfrac{\frac{1}{2}\alpha^2-\frac{3}{2}}{\alpha-0}=-\dfrac{1}{\alpha}$

$\alpha^2=1$ 이므로 $\mathrm{P}\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$, $\mathrm{Q}\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$

직선 AP는 $y=-x+\dfrac{3}{2}$

$\angle \mathrm{PAQ}=90^\circ$, 원의 반지름은 $\sqrt{2}$
구하는 넓이를 S 라 하면

$S=2\left\{\displaystyle\int_0^1\left(-x+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x^2\right)dx-\frac{\pi}{4}\right\}$

$=2\left\{\left[-\dfrac{1}{6}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x\right]_0^1-\dfrac{\pi}{4}\right\}$

$=\dfrac{5}{3}-\dfrac{\pi}{2}$

$a=\dfrac{5}{3}$, $b=-\dfrac{1}{2}$ 이므로
$120(a+b)=140$

30 [출제의도] 미분의 성질을 활용하여 수학 내적 문제 해결하기

두 다항식 $P_1(x)$, $P_2(x)$를

$P_1(x)=g(x)-4x-26$,

$P_2(x)=g(x)+2x^3-14x^2+12x+6$ 이라 하면

$P_1(x)=-P_2(x)$ 즉, $P_1(x)+P_2(x)=0$

따라서 $g(x)=-x^3+7x^2-4x+10$,

$$|f(x)|=\begin{cases}-(x^3-7x^2+8x+16) & (x \le a) \\ x^3-7x^2+8x+16 & (x > a)\end{cases}$$

$g(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로

$f(x)=x^3-7x^2+8x+16=(x+1)(x-4)^2$이고

$a=-1$이다.

함수 $h(x)=f(x)-(x-k)^2$라 하면

함수 $h(x)$의 극값이 존재해야 하므로

방정식 $h'(x)=3x^2-16x+(8+2k)=0$에서

판별식을 D라 하면 $D/4=64-3(8+2k)>0$

$k<\frac{20}{3}$ 이므로 k는 6이하의 자연수이다.

ⅰ) $k=1,\ 2,\ 3,\ 5$일 때

$h(-1)=-(k+1)^2<0$

$h(1)=18-(1-k)^2>0$

$h(4)=-(4-k)^2<0$

$h(6)=28-(6-k)^2>0$

사이값 정리에 의하여 삼차방정식 $h(x)=0$의 실근이 열린 구간 $(-1,\ 1)$, $(1,\ 4)$, $(4,\ 6)$에 각각 하나씩 존재한다.

ⅱ) $k=4$일 때,

$h(x)=(x+1)(x-4)^2-(x-4)^2=x(x-4)^2$

이므로 함수 $h(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

ⅲ) $k=6$일 때,

극댓값 $h(2)=-4<0$이므로 함수 $h(x)$의 그래프가 x축과 한 점에서 만난다.

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의하여 함수 $h(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 자연수 k의 값은 1, 2, 3, 5이다.

따라서 구하는 모든 자연수 k의 값의 합은 11