

5지선다형

1. 두 벡터 $\vec{a} = (1, -2)$, $\vec{b} = (-1, 4)$ 에 대하여
벡터 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 의 모든 성분의 합은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

> 벡터의 실수배, 합, 성분.

$$> (1-2) + 2(-1+4).$$

$$= -1 + 6 = 5$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 5x}{\ln(1+3x)}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ 2 ⑤ $\frac{7}{3}$

> 함수의 극한, '0' 꼴

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \ln(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = 1$$

$$> \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha(\alpha+5)}{\ln(1+3\alpha)} = \frac{5}{3}$$

$$> \alpha \rightarrow 0 \text{ 일때 } \ln(1+\alpha) = \alpha$$

$$e^{\alpha} - 1 = \alpha$$

$$\sin \alpha = \alpha$$

$$1 - \cos \alpha = \frac{1}{2} \alpha^2$$

$$\tan \alpha = \alpha$$

3. 좌표공간의 두 점 $A(2, a, -2)$, $B(5, -2, 1)$ 에 대하여
선분 AB를 2:1로 내분하는 점이 x 축 위에 있을 때,
 a 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

> 내분점

$$> \frac{-4+a}{3} = 0, \quad a = 4$$

> 계산이 필요한 성분만 골라치!

cf) $\square$ 축, $\square$ 평면 위에 있다? = $\square$ 제외 나머지 성분 0

4. 두 사건 A, B 에 대하여 A 와 B^c 은 서로 배반사건이고

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(A^c \cap B) = \frac{1}{6}$$

일 때, $P(B)$ 의 값은? (단, A^c 은 A 의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{7}{12}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

> 배반사건

$$> \begin{array}{c} \emptyset \mid \frac{1}{3} \mid \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \mid \frac{1}{2} \end{array}$$

> 배반 = 교집합이 $\emptyset$

$$\frac{P(A \cap B^c)}{P(A)} \mid \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \mid \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)}$$

cf) 로피탈? 이 세글자를 떠올리기도 전에 답이 나온다.
교과외가 괜히 멋있어 보이지만 수능에서는 힘을 잃는다.

5. 함수 $y=2^x+2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동한 그래프가 함수 $y=\log_2 8x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프와 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭일 때, 상수 m 의 값은? [3점]

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

> 지수·로그 함수, 평행이동, 대칭 이동

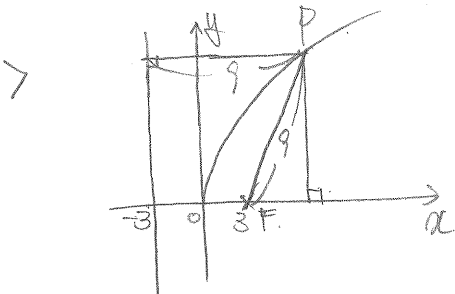
$$\begin{aligned} &> y = 2^{x-m} + 2 \\ & \quad y = \log_2(x-2) + 3 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} y=x \text{ 대칭}$$

$$m = 3$$

6. 초점이 F인 포물선 $y^2=12x$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{PF}=9$ 일 때, 점 P의 x 좌표는? [3점]

① 6 ② $\frac{13}{2}$ ③ 7 ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 8

> 포물선의 성질



> 이차곡선들은 굳이 정리하자면 많은 성질들이 있지만 수능은 일단 '정의'를 생각해야 한다.

7. 곡선 $e^x - xe^y = y$ 위의 점 $(0, 1)$ 에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $3-e$ ② $2-e$ ③ $1-e$ ④ $-e$ ⑤ $-1-e$

> 음함수 미분

$$\begin{aligned} &> e^x - e^y - xe^y \cdot y' = y' \\ & \quad 1 - e = y' \end{aligned}$$

> 식정리는 말도 안되는 소리다. 고민할 게 아니다.

(f) 수능은 당연히도 사실에서도 양함수를 저 따위로 주지 않는다. 코 박고 미분이나 하자.

8. 확률변수 X 가 이항분포 $B(n, \frac{1}{2})$ 을 따르고

$E(X^2) = V(X) + 25$ 를 만족시킬 때, n 의 값은? [3점]

- ① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

> 이항 분포의 정규화

> $X \sim B(n, \frac{1}{2})$

$\sim N(\frac{n}{2}, (\frac{\sqrt{n}}{2})^2)$

$$E(X^2) = E(X^2) - \frac{n^2}{4} + 25$$

$$\therefore n^2 = 4 \times 25, \quad n = 10$$

> $m = np, \quad \sigma^2 = np(1-p)$

$$= \text{제곱의 평균} - \text{평균의 제곱}$$

9. 함수 $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때,

$g'(f(-1))$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{(1+e)^2}$ ② $\frac{e}{1+e}$ ③ $(\frac{1+e}{e})^2$
④ $\frac{e^2}{1+e}$ ⑤ $\frac{(1+e)^2}{e}$

> 역함수 미분

$$g(f(a)) = a, \quad g'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}, \quad f'(a) = \frac{e^{-a}}{(1+e^{-a})^2}$$

$$\therefore g'(f(-1)) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{(1+e)^2}{e}$$

> $g(f(a)) = a$. That is A to Z .

10. 주머니 속에 2부터 8까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 구슬 7개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 구슬을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 구슬에 적힌 두 자연수가 서로소일 확률은? [3점]

- ① $\frac{16}{21}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{4}{7}$ ④ $\frac{10}{21}$ ⑤ $\frac{8}{21}$

> 수학적 확률, 서로소

$$\frac{14}{{}^7C_2}$$

2 3 4 5 6 7 8

$$= \frac{14}{\frac{7 \times 6}{2}} = \frac{2}{3}$$

> '2부터 8까지 1개'로 제시한 것이 인상적.
모든 자연수와 서로소인 1은 제외되어 있다.

다) 서로소의 정의는 일대일로

'두 수의 최대공약수가 1이라는 뜻의 표현'로 알려져 있지만

'두 수의 공통소인수가 없는 관계'

라고 하며

후자의 경우 '1은 소수인가?'라는 문제에 직면하는데 소수의 정의상 1은 소수가 될 수 있지만 '산술의 기본 정리'라는 '소인수 분해의 유일성'을 위해 1은 소수가 아니라고 약속한 것이다.

굳이 위 문제에서 1을 제외한 것은 이러한 맥락 때문일 가능성이 매우 높다.

문제 풀 때 1이 등장했다면

① 1은 소수도, 합성수도 아니다.

② 1은 모든 자연수와 서로소이다.

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

정도로만 생각하자.

11. $0 \leq \theta < 2\pi$ 일 때, x 에 대한 이차방정식

$$6x^2 + (4\cos\theta)x + \sin\theta = 0$$

이 실근을 갖지 않도록 하는 모든 θ 의 값의 범위는
 $\alpha < \theta < \beta$ 이다. $3\alpha + \beta$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{5}{6}\pi$ ② π ③ $\frac{7}{6}\pi$ ④ $\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $\frac{3}{2}\pi$

> 이차방정식의 실근 개수, 삼각함수의 실근

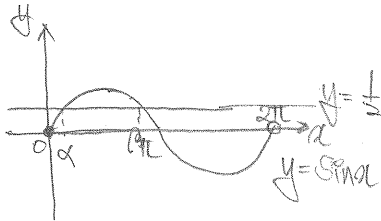
$$> D/4 = 4\cos^2\theta - 6\sin\theta < 0$$

$$4 - 4\sin^2\theta - 6\sin\theta < 0$$

$$0 < 2\sin^2\theta + 3\sin\theta - 2$$

$$\begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

$$\sin\theta < -2 \text{ or } \frac{1}{2} < \sin\theta$$



$$\alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \pi - \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore 3\alpha + \beta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$$

cf) 왜 2π 는 제외했을까?

사인 함수의 주기가 2π 이기 때문일 것이다.

주기가 2π 니까 2π 도 포함해야 한다고 생각한다면

$0 \leq n < 3$ 인 정수 n 의 개수와

$0 \leq n \leq 3$ 인 정수 n 의 개수中

어느 것이 3개인지 헷갈리는 것과 같다.

잘 생각해봅시다.

12. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 같은 종류의 초콜릿 8개를
 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? [3점]

(가) 각 학생은 적어도 1개의 초콜릿을 받는다.

(나) 학생 A는 학생 B보다 더 많은 초콜릿을 받는다.

- ① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

> 중복 조합, 경우의 수

$$> a + b + c + d = 8$$

$$a' + b' + c' + d' = 4$$

$$a' > b'$$

$$1 \ 0 \rightarrow 2H_3 = 4C_3 = 4$$

$$2 \ 0 \rightarrow 2H_2 = 3C_2 = 3$$

$$1 \ 1 \rightarrow 2H_1 = 2C_1 = 2$$

$$3 \ 0 \rightarrow 2H_1 = 2$$

$$1 \ 1 \rightarrow 1$$

$$4 \ 0 \rightarrow 1$$

$$\therefore 13$$

13. 좌표공간에서 점 $(2, 0, 5)$ 를 지나고 직선

$$x-1=2-y=\frac{z+1}{2}$$

을 포함하는 평면이 x 축과 만나는 점의

- x 좌표는? [3점]
- ① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

> 평면의 결정조건

$$\left. \begin{array}{l} (2, 0, 5) \\ (1, 2, -1) \end{array} \right\} (1, -2, 6)$$

$$\vec{u} = (1, -1, 2)$$

$$\begin{cases} a-2b+6c=0 \\ a-b+2c=0 \end{cases}$$

$$b-4c=0; \quad b=4c$$

$$a=b-2c=2c$$

$$\therefore \vec{n} = (2, 4, 1)$$

$$2(x-2)+4y+z-5=0$$

$$2x+4y+z=9$$

$$2x=9, \quad x=\frac{9}{2}$$

> $\vec{n}$ 를 구하기 위해 외적을 사용할 수도 있으나

내적에 비해 비효율적인 풀이가 된다.

서로 다른 두 벡터를 각각 "계수"라고 생각하면

$\vec{n} = (a, b, c)$ 라고 써가며 계산하는 것을 암산할 수 있다. 자명하지만 굳이 공식화하면 다음과 같다.

Step 01. x, y, z 중 한개를 알차서고

Step 02. 전체를 빼고

Step 03. 0이 아닌 성분끼리 자리바꿔주면서 둘 중 하나에 (-1)곱함

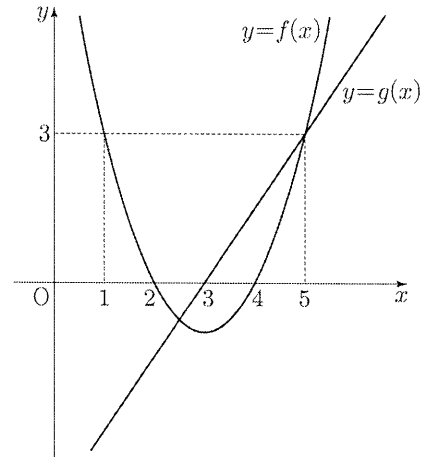
Step 04. 평한 결과 벡터 하나꼴라 내적=0 해주면 남은 한 성분도 땀!

(+) 두개가 일치된다? $\Rightarrow$ 일치 안되는 놈은 일단 0, 나머지 두놈은 자리바꿔 한쪽에 (-1)곱하기!

14. 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 일차함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 부등식

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{g(x)}$$

을 만족시키는 모든 자연수 x 의 값의 합은? [4점]



- ① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

> 지수 함수값 대소 비교, 평행이동

$$2^{-f(x)g(x)} \geq 2^{-3g(x)}$$

$$-f(x)g(x) \geq -3g(x), \quad 0 \geq g(x) \{f(x)-3\}$$

$$\therefore x \leq 1 \text{ or } 3 \leq x \leq 5$$

$$1+3+4+5=13$$

> 단순히 만나는 점에 대한 그림은 수식으로 써주지 않는다.

$f(x), g(x)$ 를 결정하기 위해서 $(2,0), (4,0), (5,3), (3,0)$

으로 충분하지만 $(1,3)$ 을 추가로 제시한 것은

대소 비교시 반드시 필요할 것이기 때문.

15. 어느 회사 직원들의 어느 날의 출근 시간은 평균이 66.4분, 표준편차가 15분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 날 출근 시간이 73분 이상인 직원들 중에서 40%, 73분 미만인 직원들 중에서 20%가 지하철을 이용하였고, 나머지 직원들은 다른 교통수단을 이용하였다. 이 날 출근한 이 회사 직원들 중 임의로 선택한 1명이 지하철을 이용하였을 확률은? (단, Z 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(0 \leq Z \leq 0.44) = 0.17$ 로 계산한다.) [4점]

- ① 0.266 ② 0.276 ③ 0.286 ④ 0.296 ⑤ 0.306

> 정규 분포, 조건부 확률

> $X \sim N(66.4, 15^2)$

$$P(X \geq 73) = P(Z \geq \frac{73-66.4}{15}) \\ = P(Z \geq 0.44) = 0.33$$

$$\therefore 0.33 \times 0.4 + 0.67 \times 0.2$$

$$= 0.132 + 0.134 = 0.266$$

16. $x > 0$ 에서 정의된 연속함수 $f(x)$ 가 모든 양수 x 에 대하여

$$2f(x) + \frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

을 만족시킬 때, $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x)dx$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{2\ln 2}{3} + \frac{3}{2}$ ② $\frac{2\ln 2}{3} + 1$ ③ $\frac{\ln 2}{3} + 1$

- ④ $\frac{2\ln 2}{3} + \frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\ln 2}{3} + \frac{1}{2}$

> 정적분, 치환적분법, 항등식

$$> \int_{\frac{1}{2}}^2 2f(x) + \frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} dx$$

$$\Leftrightarrow 2 \int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} dx$$

$$\Leftrightarrow 3 \int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) dx = \left[\ln|x| - \frac{1}{x} \right]_{\frac{1}{2}}^2 = \ln 2 - \frac{1}{2} + \ln 2 + 2$$

$$\therefore \int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) dx = \frac{1}{3} \left(2\ln 2 + \frac{3}{2} \right) = \frac{2\ln 2}{3} + \frac{1}{2}$$

> " $2f(x) + \frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ (단, $x > 0$)"은

일종의 항등식이다.

따라서 상수 대입해보기는 NO!

부정적분, 정적분 모두 항등식이 나왔다면

일단 적분 연산을 진행하는 것이 맞다.

(f) 항등식의 성질을 이용해 $f(x)$ 를 구할 수도 있다.

x 자리에 $\frac{1}{x}$ 를 대입해 연립을 통해 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 를 소거하면 된다.

하지만 이 시험지 2번에서도 알 수 있듯이

항등식이라면 일단 적분을 하는 것이 바람직하다.

17. 다음은 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 과 함수 $f: X \rightarrow X$ 에 대하여 합성함수 $f \circ f$ 의 치역의 원소의 개수가 5인 함수 f 의 개수를 구하는 과정이다.

함수 f 와 함수 $f \circ f$ 의 치역을 각각 A 와 B 라 하자.
 $n(A) = 6$ 이면 함수 f 는 일대일 대응이고, 함수 $f \circ f$ 도 일대일 대응이므로 $n(B) = 6$ 이다.
 또한 $n(A) \leq 4$ 이면 $B \subset A$ 이므로 $n(B) \leq 4$ 이다.
 그러므로 $n(A) = 5$, 즉 $B = A$ 인 경우만 생각하면 된다.

- (i) $n(A) = 5$ 인 X 의 부분집합 A 를 선택하는 경우의 수는 (가) 이다.
 (ii) (i)에서 선택한 집합 A 에 대하여, X 의 원소 중 A 에 속하지 않는 원소를 k 라 하자.
 $n(A) = 5$ 이므로 집합 A 에서 $f(k)$ 를 선택하는 경우의 수는 (나) 이다.
 (iii) (i)에서 선택한 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ 와 (ii)에서 선택한 $f(k)$ 에 대하여, $f(k) \in A$ 이며 $A = B$ 이므로 $A = \{f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_4), f(a_5)\} \dots (*)$ 이다. (*)을 만족시키는 경우의 수는 집합 A 에서 집합 A 로의 일대일 대응의 개수와 같으므로 (다) 이다.

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 함수 f 의 개수는 (가) $\times$ (나) $\times$ (다) 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r 라 할 때, $p+q+r$ 의 값은? [4점]

- ㉠ 131 ㉡ 136 ㉢ 141 ㉣ 146 ㉤ 151

> 경우의 수, 일대일 대응, 조건에 맞는 부분집합

> $p = 6, q = 5, r = 5!$

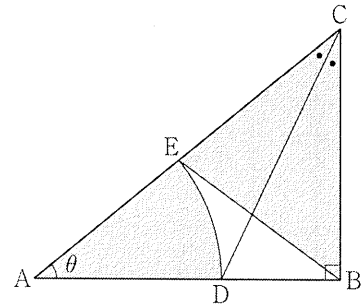
$\therefore 6 + 5 + 120 = 131$

> 반드시 이해 가능한 풀이를 써준다.

? 찍지 말고 천천히 읽자.

사실과 달리 계산량도 깔끔하게 주신다.

18. 그림과 같이 $\overline{AB} = 1, \angle B = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형 ABC 에서 $\angle C$ 를 이등분하는 직선과 선분 AB 의 교점을 D , 중심이 A 이고 반지름의 길이가 $\overline{AD}$ 인 원과 선분 AC 의 교점을 E 라 하자. $\angle A = \theta$ 일 때, 부채꼴 ADE 의 넓이를 $S(\theta)$, 삼각형 BCE 의 넓이를 $T(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)}$ 의 값은? [4점]



- ㉠ $\frac{1}{4}$ ㉡ $\frac{1}{2}$ ㉢ $\frac{3}{4}$ ㉣ 1 ㉤ $\frac{5}{4}$

> 5형의 극한, 각의 이등분선의 성질

> $BC = \tan \theta, AC = \frac{1}{\cos \theta}$

$AD : DB = \frac{1}{\cos \theta} : \tan \theta, AB = 1$

$\therefore AD = \frac{\frac{1}{\cos \theta}}{\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta} = \frac{1}{1 + \sin \theta}$

$S(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + \sin \theta} \right)^2 \theta$

$T(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos \theta} - \frac{1}{1 + \sin \theta} \right) \cdot \tan \theta \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$
 $= \frac{1}{2} \frac{\sin \theta + 1 - \cos \theta}{\cos \theta (1 + \sin \theta)} \tan \theta \cos \theta$

$\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)} = \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$

> 각의 이등분선을 보고 중심이 D이고 DB를 반지름으로 하는 원을 생각해 AC와의 접점을 잡고 풀 수도 있다.
 사실상 풀이법에 제한이 없는 문항이다.

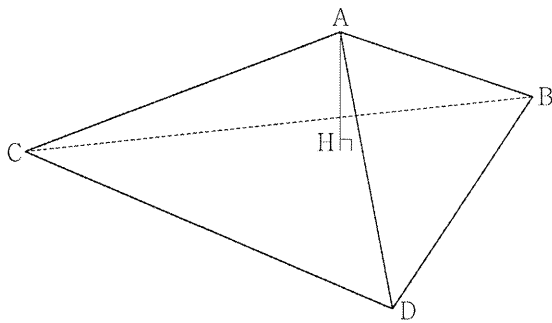
cf) $\theta \rightarrow 0+$ 일 때를 상상하는 풀이도 가능할 것이다.

이 관점은 평행선을 무한히 연장하면 만난다고 보는

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.
 「사명 가하한」의 관점으로 사실상 「유클리드 기하학」을 주로 다루는
 교과과정에서 이런 관점을 연습하는 것은 최소한 수학에서는
 바람직하지 않다고 보인다.

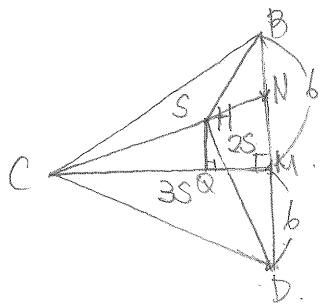
19. 한 변의 길이가 12인 정삼각형 BCD를 한 면으로 하는 사면체 ABCD의 꼭짓점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 H는 삼각형 BCD의 내부에 놓여 있다. 삼각형 CDH의 넓이는 삼각형 BCH의 넓이의 3배, 삼각형 DBH의 넓이는 삼각형 BCH의 넓이의 2배이고 $\overline{AH}=3$ 이다. 선분 BD의 중점을 M, 점 A에서 선분 CM에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, 선분 AQ의 길이는? [4점]

- ① $\sqrt{15}$ ② $\sqrt{14}$ ③ $\sqrt{13}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{11}$



> 분점에 대한 이해, 삼수선의 정리, 3가지 관점

>



직선 CH와 BD의 교점을 N
삼수선의 정리에 의해 $AH \perp CM$

$$\triangle CDH : \triangle BCH = 3 : 1 \text{ 이므로 } \overline{BN} : \overline{ND} = 1 : 3$$

$$\therefore \overline{NM} = \overline{BM} - \overline{BN} = 3$$

$$\triangle BCD : \triangle BHD = 6 : 2 = 3 : 1 \text{ 이므로}$$

$$\overline{CN} : \overline{CH} = 3 : 2 = \overline{NM} : \overline{HQ}$$

$$\therefore \overline{HQ} = 2$$

$$\overline{AQ} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

> 3가지 도구는 '벡터, 기하, 좌표'.

은근히 좌표를 등한시하는 수험생이 많지만
교수님들은 좌표를 절대 평가절하하지 않으신다.

(f) 당연한 얘기다. 필자로 삼고 있게 배운 사람은
아니지만, 좌표를 떠올리는 건 '해석 기하학'의 시작이었다
어느 학문, 이론이 더 탁월하다라는 평가가 과연 유의미한지 의심스럽고,
사실 상당히 유익으로 연결된 이 멋진 수학이라는 학문에서 그런 평가를
내려야 할 게 불가능하다고 여겨진다.

20. 점 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ 에서 곡선 $y = \sin x (x > 0)$ 에 접선을 그어

접점의 x 좌표를 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때,
 n 번째 수를 a_n 이라 하자. 모든 자연수 n 에 대하여
<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

$$\neg. \tan a_n = a_n + \frac{\pi}{2}$$

$$\neg. \tan a_{n+2} - \tan a_n > 2\pi$$

$$\neg. a_{n+1} + a_{n+2} > a_n + a_{n+3}$$

- ① $\neg$ ② $\neg, \neg$ ③ $\neg, \neg$
④ $\neg, \neg$ ⑤ $\neg, \neg, \neg$

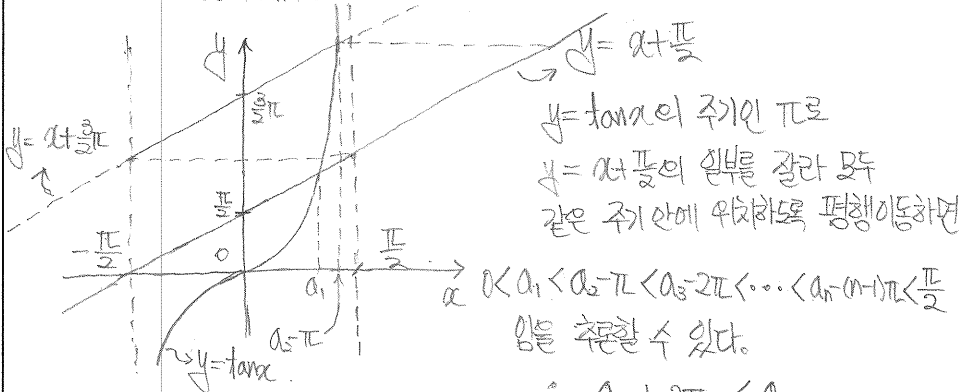
> 평면값 정리, 그래프를 통한 추론.

$$\neg. y = \cos a_n (a_n - a_n) + \sin a_n$$

$$0 = -\cos a_n (\frac{\pi}{2} + a_n) + \sin a_n$$

$$\therefore \tan a_n = \frac{\pi}{2} + a_n (\because \cos a_n \neq 0)$$

$$\neg. \tan a_{n+2} - \tan a_n = a_{n+2} - a_n$$



$$\therefore a_n + 2\pi < a_{n+2}$$

$\neg. a_{n+2} - a_n, a_{n+3} - a_{n+1}$ 에 대하여 L에서 생각한
평행 이동하는 관점으로 본다면

$$(a_{n+2} - 2\pi) - a_n = a_{n+2} - a_n - 2\pi$$

$$(a_{n+3} - 3\pi) - (a_{n+1} - \pi) = a_{n+3} - a_{n+1} - 2\pi$$

$\tan x$ 함수는 $(0, \pi)$ 에서 아래로 볼록한 (단조)증가함수이므로
동일한 Δy (y 값의 변화량)에 대하여 Δx 를 결정할 때
그 Δx 의 크기를 갖는 구간의 끝점이 증가할수록 Δx 값은
감소한다. Δx_1 Δx_2

$$\therefore a_{n+2} - a_n - 2\pi > a_{n+3} - a_{n+1} - 2\pi$$

$$a_{n+2} - a_n > a_{n+3} - a_{n+1}, a_{n+2} + a_{n+1} > a_{n+3} + a_n$$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

21. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(-1)$ 의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x 에 대하여

$$2\{f(x)\}^2 f'(x) = \{f(2x+1)\}^2 f'(2x+1) \text{이다.}$$

(나) $f(-\frac{1}{8})=1, f(6)=2$

- ① $\frac{\sqrt[3]{3}}{6}$ ② $\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$ ④ $\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$ ⑤ $\frac{5\sqrt[3]{3}}{6}$

> 부정적분, 항등식

$$> \int 2\{f(x)\}^2 f'(x) dx = \int \{f(2x+1)\}^2 f'(2x+1) dx$$

$$\frac{2}{3}\{f(x)\}^3 = \frac{1}{6}\{f(2x+1)\}^3 + C$$

$$\therefore \{f(x)\}^3 = \frac{1}{4}\{f(2x+1)\}^3 + C \dots \textcircled{A}$$

$$2(-\frac{1}{8})+1 = \frac{3}{4}$$

$$2(\frac{3}{4})+1 = \frac{5}{2}$$

$$2(\frac{5}{2})+1 = 6$$

$$\therefore 4\{4(1-C)-C\} = \frac{1}{4} \times 2^3 + C$$

$$C = \frac{2}{3}$$

①에서 $x=-1$ 대입하면

$$\{f(-1)\}^3 = \frac{1}{4}\{f(-1)\}^3 + \frac{2}{3}$$

$$\therefore f(-1) = \frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$$

> 16번과 고전의 갈수록 콜라보. (사실 16번도 고전)

부정적분, 정적분 중 택하는 과정에 개연성을

더하자면 '묻는 것이 무엇인가'를 생각해보자.

상세한 통시적 분석을 차치하더라도 명심할 것은

'식 정리에 기발한 아이디어를 요구하지 않는다'이다

단답형

22. ${}_6P_2 - {}_6C_2$ 의 값을 구하시오. [3점]

> 순열, 조합

$$> 6 \times 5 - \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

> '너 순열, 조합이 뭐지 알지?' 정도의 문제.

조금만 신경 써서 보면 6, 2 숫자조차 똑같이

출제하였다.

CF) 필자의 지인 중 실제로 수능에서 조합이

생각이 안나서 순열로 답을 써 틀렸다.

그럼에도 1등급 방어 성공. (GOAT)

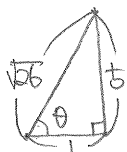
어떤 심계점을 넘어서 교수라고 자평할 수 있다면

수능 전에 반드시 이런 기초적인 정의, 정리를

점검할 필요가 있겠다.

23. $\tan \theta = 5$ 일 때, $\sec^2 \theta$ 의 값을 구하시오. [3점]

> 삼각함수

>  $\therefore \sec^2 \theta = 26$

CF) $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$

이 관계를 반대로 1인 단위원에서 피타고라스의 정리를

통해 유도하는 방법을 쓴 것이며 위에서 쓰는 경우가 많다.

$\tan \theta$ 의 도함수로 $\sec^2 \theta$ 를 볼 수도 있으나 이 관점으로

보면 '묻는 것'이 일종의 '역함수 미분'이고 제한 조건이

생기며 결국 기하적 관점으로 돌아가게 된다.

24. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 위치 (x, y) 가

$$x = 1 - \cos 4t, \quad y = \frac{1}{4} \sin 4t$$

이다. 점 P의 속력이 최대일 때, 점 P의 가속도의 크기를 구하시오. [3점]

> 매개변수 미분

$$> x' = 4 \sin 4t, \quad x'' = 16 \cos 4t$$

$$y' = \cos 4t, \quad y'' = -4 \sin 4t$$

$$V = \sqrt{16 \sin^2 4t + \cos^2 4t} = \sqrt{15 \sin^2 4t + 1}$$

$\therefore 4$

> x' 이나 $\frac{dx}{dt}$, x'' 이나 $\frac{d^2x}{dt^2}$ 같은 표현.
조금 더 쓰기 편한 뉴턴식으로 하자.

25. $\int_0^\pi x \cos(\pi - x) dx$ 의 값을 구하시오. [3점]

> 치환적분법, 부분적분법

$$\begin{array}{l} > \int \\ u & \cos(\pi - x) \\ v & -\sin(\pi - x) \\ dv & -\cos(\pi - x) \end{array}$$

$$[-x \sin(\pi - x) + \cos(\pi - x)]_0^\pi = 2$$

cf) $\pi - x = t$ 로 치환한 뒤 $t \cos t$ 에서
어차피 부분적분을 쓰게 된다.

항상 어떤 적분을 쓸지는

① 알고 있나? (= 미분의 역연산으로 이미 외워 놓은 녀석인가? ex) $\int \cos x dx = \sin x + C$

② 치환적분법

③ 부분적분법 순서로 생각해야 한다.

26. 어느 지역 주민들의 하루 여가 활동 시간은 평균이 m 분, 표준편차가 σ 분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 지역 주민 중 16명을 임의추출하여 구한 하루 여가 활동 시간의 표본평균이 75분일 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \leq m \leq b$ 이다. 이 지역 주민 중 16명을 다시 임의추출하여 구한 하루 여가 활동 시간의 표본평균이 77분일 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $c \leq m \leq d$ 이다. $d - b = 3.86$ 을 만족시키는 σ 의 값을 구하시오. (단, Z 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(|Z| \leq 1.96) = 0.95$, $P(|Z| \leq 2.58) = 0.99$ 로 계산한다.) [4점]

> 정규분포, 모평균 추정, 신뢰도

$$> X \sim N(m, \sigma^2)$$

$$n=16, \bar{X}_1, E(\bar{X}_1) = 75$$

$$n=16, \bar{X}_2, E(\bar{X}_2) = 77$$

$$b = 75 + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

$$d = 77 + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

$$\therefore 2 + 0.62 \times \frac{\sigma}{4} = 3.86, \quad \sigma = 12$$

27. 한 개의 주사위를 한 번 던진다. 홀수의 눈이 나오는 사건을 A , 6 이하의 자연수 m 에 대하여 m 의 약수의 눈이 나오는 사건을 B 라 하자. 두 사건 A 와 B 가 서로 독립이 되도록 하는 모든 m 의 값의 합을 구하시오. [4점]

> 독립

> $P(A) = \frac{1}{2}$

		1 2 3 4 5 6
		$P(A \cap B)$
$P(B) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{6} \ (m=1) \rightarrow \frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} \ (m=2) \rightarrow \frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} \ (m=3) \rightarrow \frac{2}{6} \\ \frac{3}{6} \ (m=4) \rightarrow \frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} \ (m=5) \rightarrow \frac{2}{6} \\ \frac{4}{6} \ (m=6) \rightarrow \frac{2}{6} \end{array} \right.$		

$\therefore m = 2, 6$

8

> 사건 A, B 가 독립이다 $\iff P(A)P(B) = P(A \cap B)$

독립의 '정의'는 아니지만

'필요 충분 조건'이므로 자유로운 사용이 가능하다.

> m 의 약수 중 홀수인 것 a 개, 짝수인 것 b 개로 잡고

$$\frac{1}{2} \times \frac{a+b}{6} = \frac{a}{6}, \quad a=b$$

으로 풀 수도 있다. 하지만

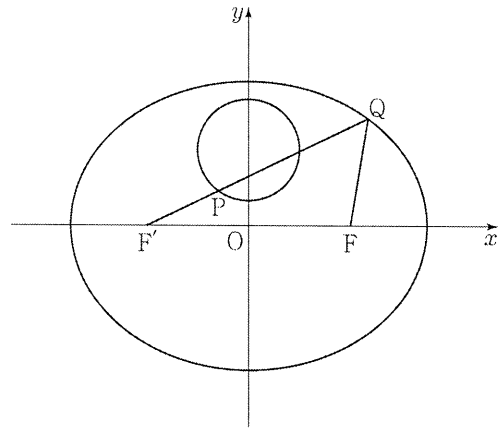
이게 안 보여도 금방 풀다. 너무 효율에만 몰두하지 말자. 탁 막하면 메탈 터리기 쉽다.

cf) 첫째마당 독립 문제 접근법은 이미 어떤

GOAT이 가르침을 배웠었다. 그 정도면 충분.

28. 두 초점이 F, F' 인 타원 $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{33} = 1$ 이 있다.

원 $x^2 + (y-3)^2 = 4$ 위의 점 P 에 대하여 직선 $F'P$ 가 이 타원과 만나는 점 중 y 좌표가 양수인 점을 Q 라 하자. $\overline{PQ} + \overline{FQ}$ 의 최댓값을 구하시오. [4점]



> 타원의 성질

> $\overline{PQ} + \overline{FQ} = \overline{F'Q} + \overline{FQ} - \overline{F'P}$
 $= 14 - \overline{F'P}$

$\therefore 14 - (5-2) = 11$

> 이차곡선... 역시 정의.

cf) 최대·최소의 모든 문제는

'무엇이 변하지 않는가?'가 핵심.

이외에는 변수를 한가지로 정리해주는 처리만 하면 된다.

29. 좌표평면에서 넓이가 9인 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA 위를 움직이는 점을 각각 P, Q, R라 할 때,

$$\overrightarrow{AX} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AR}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 영역의 넓이가 $\frac{q}{p}$ 이다.

$p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[4점]

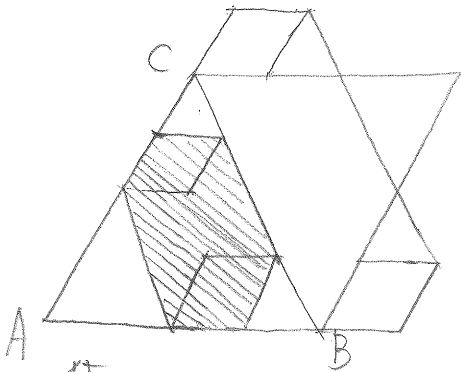
> 평면 벡터, 좌표

> $\overline{PR}$ 의 중점 M

$$\overrightarrow{AX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$$

$\overline{MQ}$ 의 중점 N

$$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AN}$$



$$\therefore 9 \times \frac{10}{16} = \frac{45}{8} \quad \underline{53.}$$

> 넓이가 9인 $\triangle ABC$ 가 인접적.

나머지 변의 길이, 각은 편하게 하라는 배려가 돋보인다. 역시 수능에서 좌표는 강하다.

(cf) 정삼각형, 직각삼각형 다 좋다.

좌표 잡을 거면 당연히 직각쪽이 편-안.

30. 최고차항의 계수가 6π 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여

함수 $g(x) = \frac{1}{2 + \sin(f(x))}$ 이 $x = \alpha$ 에서 극대 또는 극소이고,

$\alpha \geq 0$ 인 모든 α 를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \dots$ 라 할 때, $g(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\alpha_1 = 0$ 이고 $g(\alpha_1) = \frac{2}{5}$ 이다.

(나) $\frac{1}{g(\alpha_5)} = \frac{1}{g(\alpha_2)} + \frac{1}{2}$

$g'(-\frac{1}{2}) = a\pi$ 라 할 때, a^2 의 값을 구하시오.

(단, $0 < f(0) < \frac{\pi}{2}$) [4점]

> 함수의 결정

> $f(x) = 6\pi x^3 + \dots$, $g(x) = \frac{-f(x) \cos(f(x))}{\{2 + \sin(f(x))\}^2}$

$-f'(x) \cos(f(x)) = 0$ 일 때 $x = \alpha_n$

(가)에서 $g(0) = \frac{1}{2 + \sin(f(0))} = \frac{2}{5}$, $f(0) = \frac{\pi}{6}$, $f'(0) = 0$
(관호 써서)

(나)에서 $2 + \sin(f(\alpha_5)) = 2 + \sin(f(\alpha_2)) + \frac{1}{2}$

$\sin(f(\alpha_5)) - \sin(f(\alpha_2)) = \frac{1}{2}$

$\cos(f(\alpha_5)) = \cos(f(\alpha_2)) = 0$ 은 성립 안함

i) $f'(x) = 0$ 의 실근은 최대 2개

ii) $f'(0) = 0$ 에서 이미 근 1개 나옴

iii) 따라서 $f(\alpha_2), f(\alpha_5)$ 중 하나만 f' 값이 0

iv) $f'(\alpha_2) = 0$, $\cos(f(\alpha_5)) = 0$ 으로 가정

v) $f(\alpha_5) = \frac{5\pi}{2}$ 이므로 (나)에서 $\sin(f(\alpha_2)) = \frac{1}{2}$

vi) $-\frac{\pi}{2} < f(\alpha_2) < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\sin(f(\alpha_2)) \neq \frac{1}{2} \rightarrow$ 아니네?

vii) $f(\alpha_5) = 0$, $\cos(f(\alpha_2)) = 0$ 성립!

viii) $f(\alpha_2) = -\frac{\pi}{2}$, $f(\alpha_5) = -3\pi + \frac{\pi}{6}$

ix) $f(x) = 6\pi x^3 + bx^2 + \frac{\pi}{6}$, $f'(x) = 18\pi x^2 + 2bx = 2x(9\pi x + b)$

x) $\alpha_5 = -\frac{b}{9\pi}$, $f(-\frac{b}{9\pi}) = -3\pi + \frac{\pi}{6}$, $b = -9\pi$

xi) $f(x) = 6\pi x^3 - 9\pi x^2 + \frac{\pi}{6} \rightarrow g(x)$ 도 결정되었으니 이하 계산 생략

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.