2019년 일반고등학교 학생모집 전국 통일시험

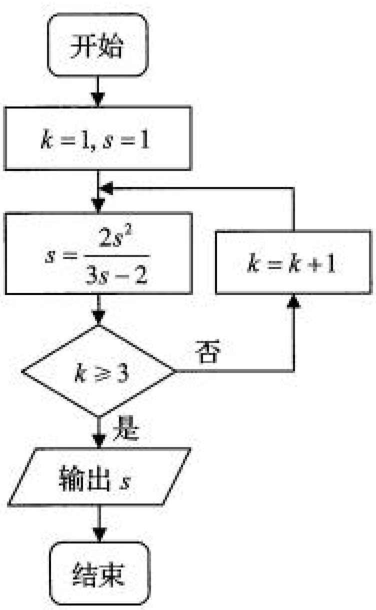
수 학 (이과) (북경권)

본 시험지는 총 5페이지가 있으며, 만점은 150점이고 시험시간은 120분입니다. 수험생은 정답을 OMR카드에 작성하고 시험지에 쓴 답안은 무효로 간주하니 반드시 OMR카드에 답안을 작성하시오. 시험이 끝난 후 시험지와 OMR카드를 같이 제출하시오.

제 1부분 (객관식, 총 40점)
객관식은 총 8문제이며, 각 문제당 5점으로 총 40점입니다. 각 문제당 제시된 4개 선지 중 문제의 답을 고르시오.

(1) 복소수 $z=2+i$일 때, $z \cdot \overline{z}$ = ?

(2) 아래와 같은 알고리즘을 수행하여 나온 s의 값은?



1) 開始(한자의 간체자) - 개시(시작)
2) 是 (옳다)
3) 否 (틀리다)
4) 輸出(수출 - s의 값)
5) 結束 (끝)

(3) 직선 l의 방정식이 $\begin{cases} x=1+3t \\ y=2+4t \end{cases}$ (t는 매개변수)로 나타날 때, 점 $(1,0)$에서 직선 l까지의 거리는?

(4) 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$의 이심률이 $\dfrac{1}{2}$일 때, 옳은 것을 고르시오.

(A) $a^2=2b^2$ (B) $3a^2=4b^2$ (C) $a=2b$ (D) $3a=4b$

(5) 실수 x, y가 다음 부등식을 만족할 때, $3x+y$의 최댓값을 찾으시오.

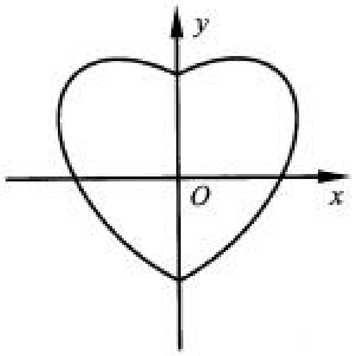
$\begin{cases} |x| \le 1-y \\ y \ge -1 \end{cases}$

(6) 천문학을 공부하면 천체의 명암 정도를 광도 혹은 광도계급으로 표현할 수 있다는 내용을 찾아볼 수 있다. 두 별의 광도계급과 광도가 $m_2 - m_1 = \frac{5}{2} log \frac{E_1}{E_2}$의 관계식을 만족한다. 그 중 광도계급은 m_k인 별의 광도는 E_k $(k=1,2)$이며, $k=1$일 때, 태양, $k=2$일 때 천왕성을 가르킨다. 태양의 광도계급은 -26.7이다. 천왕성의 광도계급은 -1.45이다. 그러면 $\frac{E_1}{E_2}$는?

(7) 점 A, B, C가 동일한 직선 위에 있지 않을 때, 명제 A를 '$\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{AC}$의 끼인 각이 예각이다'라 하고, 명제 B를 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| > |\overrightarrow{BC}|$라 하면 명제 A는 명제 B와 어떠한 조건 관계인가?

(A) 충분조건 (B) 필요조건 (C) 필요충분조건 (D) 아무 관계 없다.

(8) 수학을 공부하다 보면 여러 모양을 가지고 있고 의미가 담긴 아름다운 곡선들이 있다. 곡선 C도 그러한 곡선 중 하나이다.



C: $x^2 + y^2 = 1 + |x|y$일 때, 아래 세 결론 중 맞는 결론을 고르시오.

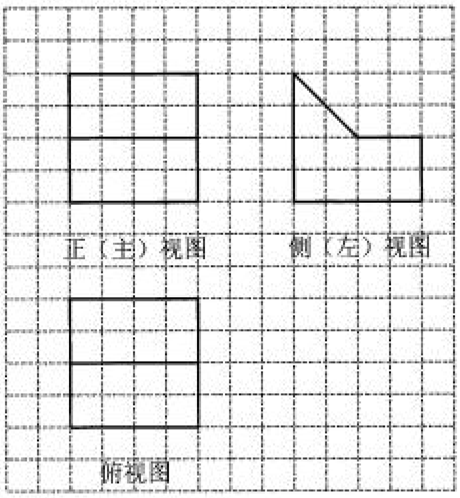
① 곡선 C에는 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점이 6개만 존재한다.
② 곡선 C 위의 어느 점도 원점 O 와의 거리가 $\sqrt{2}$를 넘지 않는다.
③ 곡선 C가 나타낸 '심장 모양'의 면적은 3보다 작다.

제 2 부분 (주관식, 총 110점)
아래의 6문제는 단답형 문제이며 각 문항당 5점으로 총 30점입니다.

(9) $f(x)=\sin^2 2x$의 주기를 구하시오.

(10) 등차수열 $\{a_n\}$의 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $a_2=-3, S_5=-10$이면
a_5를 구하고, S_n의 최솟값을 구하시오.

(11) 주어진 입체도형은 정육면체에서 사각기둥 하나를 자른 후 얻은 것이다. 그 투시도는 다음과 같다.



왼쪽 위 - 정면에서 본 그림
오른쪽 위 - 좌측에서 본 그림
왼쪽 아래 - 위에서 본 그림

그림에서 가로의 길이, 세로의 길이를 1이라 하면 입체도형의 부피는?

(12) 직선 l, m은 평면 α 밖에 있는 두 개의 서로 다른 직선이다. 아래 세 조건을 조합하여 두 개의 조건을 명제의 조건, 나머지 하나의 조건을 명제의 결론으로 올바른 명제를 나타내시오.

(ㄱ) $l \perp m$ (ㄴ) $m // \alpha$ (ㄷ) $l \perp \alpha$

(13) $f(x)=e^x+ae^{-x}$ (단, a는 상수)라 하면, $f(x)$가 기함수일 때, a를 구하시오

$f(x)$가 모든 실수에서 증가함수일 때, a의 범위를 구하시오.

(14) 민수는 인터넷에서 과일가게를 운영하며 딸기, 배, 수박, 복숭아를 판매한다. 가격은 차례대로 한 박스당 60, 65, 80, 90 위안이다. 민수는 아래와 같이 4개의 과일의 할인판매를 계획하고 있다. 한 번에 과일 구매를 하는 금액 총액이 120위안 이상일 때, 고객은 x원의 할인을 받는다. 고객이 금액을 지불하고 나서 정부에서 세금으로 수입의 20%를 가져간다.

1) $x=10$ 일 때, 고객은 딸기와 수박을 한 박스씩 샀다. 총 얼마를 지불해야 하는가?

2) 할인판매를 시작하고 나서, 민수의 수익이 항상 할인 전 판매금액의 70% 이상일 때, x의 최댓값은?

아래의 서술형 문제는 6문제로, 총 80점입니다. 문자에 대한 설명 및 계산 과정과 증명과정을 정확히 서술하시오.

(15) (13점)

$\triangle ABC$ 에서 $a=3, b-c=2, \cos B=-\frac{1}{2}$라 하자.

(1) b, c의 값을 구하시오.

(2) $\sin(B-C)$의 값을 구하시오.

(16) (14점)

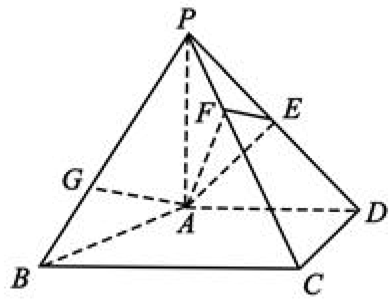
아래와 같은 사각뿔 $P-ABCD$에서 $\overline{PA}\perp$평면$ABCD$, $\overline{AD}\perp\overline{CD}$, $\overline{AD}//\overline{BC}$, $\overline{PA}=\overline{CD}=\overline{AD}=2$, $\overline{BC}=3$, 점 E는 선분 PD의 중점, 점 F는 선분 PC 위에 있다. $\frac{\overline{PF}}{\overline{PC}}=\frac{1}{3}$

(1) $\overline{CD}\perp TRIANGLEPAD$ 임을 증명하시오.

(2) 평면 AFE 와 평면 AEP 의 이면각을 θ라 할 때, $\cos\theta$를 구하시오.

(3) 점 G가 직선 PB 위에 있을 때, $\frac{\overline{PG}}{\overline{PB}}=\frac{2}{3}$

직선 AG가 평면 AEF 위에 있는지 판단하고, 그 이유를 서술하시오.



(17) (13점)

개혁 개방 이후, 인민들의 지불 방식은 커다란 변화를 맞이하였다. 최근 몇 년 사이 모바일 페이는 주요 지불방식 중 하나가 되었다. 모 학교 학생들의 저번 달 A, B 두 가지 모바일 페이 방식의 사용상황을 이해하기 위해 전교생 중 100명을 임의추출하였다. 추출한 표본 중 A, B의 지불 방식을 사용하지 않은 학생이 5명이 있고, A 혹은 B 만 사용한 학생들의 지불 금액 분포 상황은 아래 표와 같다.

지불방식 \ 지불금액	(0, 1000]	(1000,2000]	2000이상
A만 사용한 학생	18인	9인	3인
B만 사용한 학생	10인	14인	1인

(1) 전교생 중 임의추출한 1명이 저번 달에 A, B를 모두 사용했을 확률은?

(2) A 혹은 B 만 사용한 학생의 표본 중 각 한 명 씩 뽑아 두 명 중 지난 달 지불 금액이 1000원 이상인 학생의 수를 X라 할 때, X의 도수분포표를 적시하고, $E(X)$를 구하시오.

(3) 저번 달과 이번 달의 표본의 변화가 없다고 가정한다. A만 사용한 학생 중 세 명을 임의추출한 결과, 지불금액이 2000위안 이상인 것을 발견했다. 추출 결과를 통해 이번 달의 A만 사용한 학생 중 지불 금액이 2000위안 이상인 학생 인원수의 변화가 있는가?

- 답이 정해져 있지 않음 / 생각을 적는 것임.

(18) (14점)

포물선 C : $x^2 =-2py$는 점 $(2,-1)$을 지난다.

(1) 포물선 C의 방정식과 준선의 방정식을 구하시오.

(2) 포물선 C의 초점을 지나고 기울기가 0이 아닌 직선 l과 포물선 C와의 교점을 M, N이라 하자. 직선 $y=-1$은 직선 OM, ON과 A, B점에서 각각 교차한다. AB를 지름으로 하는 원이 y축에서 정점 2개를 지난다는 것을 증명하라.

(19) (13점)

$f(x)=\dfrac{1}{4}x^3-x^2+x$일 때,

(1) 곡선 $y=f(x)$의 기울기가 1인 접선의 방정식을 구하시오.

(2) 실수 $xIN[-2,4]$일 때, $x-6 \le f(x) \le x$을 증명하여라

(3) $F(x)=|f(x)-(x+a)|$ (단, a는 실수)라 하자. $F(x)$가 닫힌 구간 [-2,4]에서의 최댓값을 $M(a)$이라 하고, $M(a)$가 최소일 때, a의 값을 구하여라.

(20) (13점)

수열 $\{a_n\}$ 중에서 i_1번째, i_2번째, $\cdots$,i_m번째 항($i_1 < i_2 < \cdots < i_m$)을 뽑았을 때, $a_{i_1} < a_{i_2} < \cdots < a_{i_m}$라 하면 새롭게 정의된 수열 $\{a_{i_k}\}$을 증가차수열이라 하고 항의 개수가 m개이다. 수열 $\{a_n\}$의 항 중에 무작위로 한 항을 선택하여 나온 항을 수열 $\{a_n\}$의 항의 개수가 1인 증가차수열이라 한다.

(1) 수열 1, 8, 3, 7, 5, 6, 9 의 원소의 개수가 4인 증가차수열을 쓰시오.
(한 개만 쓰시오.)

(2) 수열 $\{a_n\}$의 항의 개수가 p인 증가차수열의 마지막 항의 최솟값을 a_{m_0}라 하자. 또, 수열 $\{a_n\}$의 항의 개수가 q인 증가차수열의 마지막 항의 최솟값을 a_{n_0}라 하자. $p < q$일 때, $a_{m_0} < a_{n_0}$을 증명하여라.

(3) 무한수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 자연수이며 어느 두 항도 같지 않다. 항의 개수가 s인 증가차수열의 마지막 항의 최솟값이 $2s-1$이다. 또, 항의 개수가 s이고 마지막 항이 $2s-1$인 증가차수열의 개수가 2^{s-1}개다. 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하시오.