

기 초 전 자 기 학

《INTRODUCTION TO ELECTRODYNAMICS》 《FOUNDATIONS OF ELECTROMAGNETIC THEORY》

본 노트는 대학전형 특기자료 제출용이 아닙니다.

<ELECTROSTATICS>

□□과학고등학교 1학년 □□□
2016. 05. 13 - 2017. 04. 10

제 2장 정전기학

2. 1. 정전기장

① 쿨롱의 법칙

$$F_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2}$$

※중첩의 원리: 어느 두전하의 상호작용은 다른 전하의 영향을 받지 않음

② 전기장

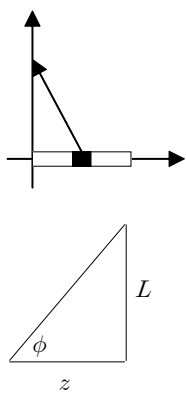
$$F_E = QE$$

*전기장의 세기는 시험전하의 전하량 Q 와는 무관하다

③ 연속전하분포가 만드는 전기장

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(r')}{r^2} d\tau'$$

Example 1



$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{z\lambda dx}{(x^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \leftarrow x = z \tan\theta \text{의 치환}$$

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\phi}^{\phi} \frac{z \sec^2\theta}{\sec^3\theta} d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} [\sin\theta]_{-\phi}^{\phi}$$

$$\sin\phi = \frac{L}{\sqrt{z^2 + L^2}}$$

$$\therefore E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{2L}{\sqrt{z^2 + L^2}}$$

2. 2. 정전기장의 발산과 가우스 법칙

①장선과 가우스법칙

$$1. \text{ 적분형: } \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$2. \text{ 미분형: } \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{enc}}{\epsilon_0}$$

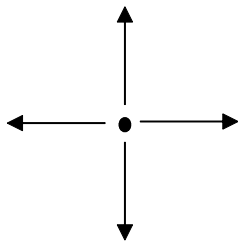
※가우스법칙의 적분형과 미분형의 상호변환

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_V (\nabla \cdot \vec{E}) d\tau \quad \leftarrow \text{발산정리}$$

$$Q_{enc} = \int_V \rho d\tau \quad (\text{연속 전하분포})$$

$$\Rightarrow \int_V (\nabla \cdot \vec{E}) d\tau = \int_V \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \right) d\tau, \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{enc}}{\epsilon_0}$$

② 점전하가 만드는 전기장



점전하의 정전기장의 발산을 조사하면

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{1}{r^2} \right) = 0 \text{ 이다.}$$

$$r \neq 0 \text{인 공간에서 } \nabla \cdot \vec{E} = 0 \text{이고, } r = 0 \text{인 점에서 } \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{enc}}{\epsilon_0} \text{의 모든 값이 나온다.}$$

*이는 $r=0$ 에서 전기장이 발산하기 때문인데, ‘디랙-델타함수’를 이용하여 해결할 수 있다.

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_V (\nabla \cdot \vec{E}) d\tau = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \nabla \cdot \left(\frac{1}{r^2} \right) d\tau = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V 4\pi\delta^3(r) d\tau = \frac{q}{\epsilon_0}$$

③ 전기장 E 의 회전

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

※전기장은 회전성분이 없다!

2. 3. 전위

① 전위

$$V(r) = - \int_o^r \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

* o 는 미리 정해놓은 기준점이다.

※전위와 전기장의 관계: $\vec{E} = -\nabla V$ (전기장은 전위의 기울기이다.)

Proof 1

$$\begin{aligned} V(b) - V(a) &= - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \leftarrow \text{전위의 정의} \\ V(b) - V(a) &= \int_a^b (\nabla V) \cdot d\vec{l} \quad \leftarrow \text{'기울기의 기본정리'} \\ \therefore \vec{E} &= -\nabla V \end{aligned}$$

② 푸아송방정식과 라플라스방정식

(1) 푸아송방정식(Poisson's Equation): $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ $\leftarrow$ 전하 有

(2) 라플라스방정식(Laplace's Equation): $\nabla^2 V = 0$ $\leftarrow$ 전하 無

2. 4. 정전기학의 일과 에너지

① 전하를 옮기면서 한 일

$$W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = -Q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = Q(V(b) - V(a))$$

② 전하분포의 에너지

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

③ 연속전하분포의 에너지와 에너지 밀도

(1) 연속전하분포의 에너지

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho V d\tau$$

※ 이 수식은 연속전하분포의 경우로서, 점전하계의 경우에는 잘 들어맞지 않는다.

(2)에너지 밀도

Proof 2

$$W = \frac{1}{2} \int \rho V d\tau = \frac{1}{2} \int (\nabla \cdot \vec{E}) V d\tau \quad \leftarrow \text{'미분형 가우스법칙'}$$

$$\text{발산의 곱 정리: } \nabla \cdot (V\vec{E}) = \nabla V \cdot \vec{E} + V(\nabla \cdot \vec{E})$$

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left[\oint_S V\vec{E} \cdot d\vec{a} - \int_V \vec{E} \cdot \nabla V d\tau \right], \quad \text{모든 공간: } \oint_S V\vec{E} \cdot d\vec{a} \rightarrow 0$$

$$\therefore W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V E^2 d\tau = \int_V u_E d\tau, \quad u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

<에너지에서의 중첩원리>

$W_{tot} = \frac{1}{2} \epsilon_0 (E_1 + E_2)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_1^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 E_2^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 E_1 E_2$ 로 교차항이 존재하여 중첩원리는 적용되지 않는다.

2. 5. 도체

㉠ 기본성질

1. 도체내부의 알짜 전기장은 없다. → 핵심성질
2. 도체 내부의 전위는 어디에서나 같다.
3. 알짜전하는 표면에만 있다.
4. 도체 밖의 전기장은 도체의 표면에 항상 수직이다.

제 3장 전위

3. 1. 라플라스 방정식

Ⅰ 라플라스 방정식의 해의 성질

(1) 구면(또는 원)상의 전위 평균값은 다음과 같다.

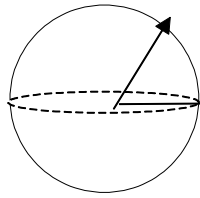
$$\langle \phi_{sphere} \rangle = \phi_{out} + k_e \frac{Q_{enc}}{R}$$

〈평균값 정리의 의미〉

1. 전하가 없는 공간에서 한 점의 전위는 점을 중심으로 하는 구면상의 전위의 평균값이다.
2. 전하가 있는 경우(내부)에는 구면상의 전위의 평균값은 전하의 위치에 관계없다.

(2) 언쇼정리(Earnshaw's Thm.) : 라플라스방정식의 함수해는 극값을 가지지 않는다.

Proof 3



$$\langle \phi_{sphere} \rangle = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_S V da = \frac{k_e}{4\pi R^2} \oint_S \frac{q}{|\vec{x} - \vec{d}|} da$$

$$|\vec{x} - \vec{d}| = \sqrt{x^2 + d^2 - 2xd \cos \theta}, \quad da = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$\langle \phi_{sphere} \rangle = \frac{k_e}{4\pi R^2} \int_0^\pi \frac{2\pi q R^2 \sin \theta d\theta}{\sqrt{x^2 + d^2 - 2xd \cos \theta}}$$

$Y = x^2 + d^2 - 2xd \cos \theta$ 라 치환하면, $dY = 2xd \sin \theta d\theta$ 이다.

$$\therefore \langle \phi_{sphere} \rangle = \frac{k_e 2\pi q R^2}{4\pi R^2} \frac{1}{2xd} \int_{(x-d)^2}^{(x+d)^2} \frac{dY}{\sqrt{Y}} = \frac{k_e 2\pi q R^2}{4\pi R^2} \frac{1}{2xd} [2\sqrt{Y}]_{(x-d)^2}^{(x+d)^2} \text{가 되어}$$

$$\therefore \langle \phi_{sphere} \rangle = \frac{k_e q}{2xd} (|x+d| - |x-d|) = \frac{k_e q}{2Rd} (|R+d| - |R-d|) \text{이 된다.}$$

구간별로 나누어 정리하면

$$1. d > R \text{인 경우} \quad \langle \phi_{sphere} \rangle = \frac{k_e q}{d}$$

$$2. d < R \text{인 경우} \quad \langle \phi_{sphere} \rangle = \frac{k_e q}{R}$$

② 경계조건과 유일성 정리

1. 제 1 유일성 정리

해 V 의 값이 어떤 부피의 경계면에서 명시되면, 내부영역의 전위는 유일하게 결정된다.

즉, 경계조건과 라플라스방정식만 일치하면 전위는 항상 동일하다.

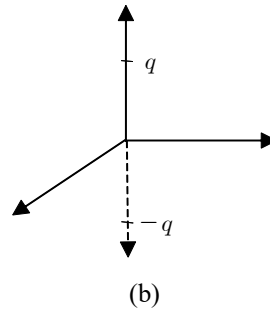
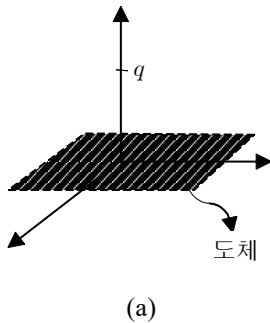
※이 정리는 ‘영상법’의 물리적 근거가 된다.

2. 제 2 유일성 정리

도체에서 전하분포 ρ 의 부피영역 V 에서의 총 전하량을 알면 전기장은 유일하게 결정된다.

3. 2. 영상법

① 전형적인 영상문제



<영상법의 결론> : (a)와 (b)의 상황 모두 $z > 0$ 인 어디에서나 전위가 같다.

제 1 기본정리

· 전하분포: $z > 0$ 에서 동일한 위치에 q 만 위치하여 공간의 전하분포가 같다.

· 라플라스방정식의 경계조건: $z = 0$ 에서 $V = 0$, $z \rightarrow \infty$ 에서 $V = 0$

⇒ ‘제 1 유일성 정리에 의해 $z > 0$ 의 모든 지점에서 전위는 같다.

※전위가 같으므로 전기장도 같다!

② 영상전하의 유의사항

「영상전하는 반드시 셈하는 공간의 밖에 있어야 한다.1)」

<귀띔: 영상법이 가능한 각도는 180° , 90° , 60° , 45° , 30° 이다.>

1) 영상전하가 공간의 라플라스 방정식을 바꾸면 안된다.(중요!)

3. 3. 변분법

㉑구면좌표계

*라플라스방정식: $\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$

→회전대칭성: $\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$

*변분법: $V(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$

· 지름방향: $\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = l(l+1)^2$

· 각 방향: $\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -l(l+1)^3$

⇒각 미분방정식은 상수로 고정!!

※상수로서 고정되지 않으면 미분방정식을 성립시킬 수 없음

*해

· 지름방향: $R(r) = A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}$

· 각 방향: $P_l(\cos \theta)$

⇒일반해: $V(r, \theta) = \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$

㉒르장드르 다항식의 여러 가지 특성

①로드게리스의 공식: $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l$

②점화관계: $P_{n-1}'(x) = -nP_n(x) + xP_n'(x)$

③정규직교성: $\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{n,m}$ 4)

Legendre Polynomial's orthogonality

$P_{n-1}'(x) = -nP_n(x) + xP_n'(x)$, $n[P_n(x)]^2 = xP_n'(x)P_n(x) - P_{n-1}'(x)P_n(x)$ ⇒점화관계

⇒ $n \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \int_{-1}^1 xP_n'(x)P_n(x) dx - \int_{-1}^1 P_{n-1}'(x)P_n(x) dx$

2) 이 방정식은 코시-오일러 미분방정식(Cauchy-Euler Differential Equations)이다.

3) 이 방정식은 르장드르 미분방정식으로서(Legendre Differential Equations) 르장드르 다항식을 해로 가진다.

4) 이 장에서 미정계수를 결정하는데 사용되는 핵심 성질이다!!(푸리에 요령)

*르장드르 다항식의 성질: $P_n(x)$ 의 최고차수는 n 이고, n 이 홀수이면 홀수 지수항만을, n 이 짝수이면 짝수 지수항만을 가진다.

$$\therefore \int_{-1}^1 P_{n-1}'(x)P_n(x)dx = [P_{n-1}(x)P_n(x)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 P_{n-1}(x)P_n'(x)dx \Rightarrow \text{부분 적분법}$$

여기서, $P_{n-1}(x)P_n(x)$; 기함수, $P_{n-1}(x)P_n'(x)$; 우함수

$$\int_{-1}^1 P_{n-1}'(x)P_n(x)dx = 0, \quad n \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \int_{-1}^1 x P_n'(x)P_n(x)dx \Rightarrow \text{기함수의 대칭성}$$

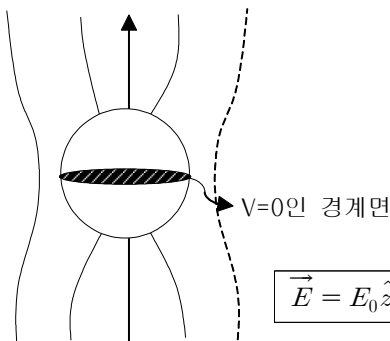
$$\therefore n \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \int_{-1}^1 x P_n'(x)P_n(x)dx = \left[\frac{x}{2} \{P_n(x)\}^2 \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \{P_n(x)\}^2 dx$$

$$P_n(1)=1, \quad P_n(-1)=-1, \quad \therefore \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{1}{2} [\{P_n(1)\}^2 + \{P_n(-1)\}^2] = 1$$

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{n,m} \quad (5) \quad (\text{정규직교성})$$

③라플라스방정식의 적용: 외부 전기장에 의한 도체표면전하밀도

Example 2



①전위: $V = -E_0 z$

②경계조건: $r = 0 \Rightarrow V = 0$

$r \rightarrow \infty \Rightarrow V = -E_0 r \cos\theta$ (평행)

<1. 구 외부의 전기장>

*일반해: $A_l R^l + \frac{B_l}{R^{l+1}} = 0 \quad \rightarrow \quad B_l = -A_l R^{2l+1}$

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(r^l - \frac{R^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta)$$

5) 크로네커-델타기호로서 $\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & (n=m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$ 이다.

※경계조건: $r \rightarrow \infty \Rightarrow V = -E_0 r \cos \theta$ (평행)

$$V(r, \theta) \approx \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) = -E_0 r \cos \theta \quad \rightarrow \underline{l=1 \text{ 뿐 이다}}$$

따라서, $V(r, \theta) = A_1 r \cos \theta = -E_0 r \cos \theta \quad \Rightarrow A_l = \begin{cases} -E_0 & (l=1) \\ 0 & (l \neq 1) \end{cases}$

$$\therefore V(r, \theta) = -E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta$$

※명백히, $V_1 = -E_0 r \cos \theta$ 는 외부전기장에 의한 전위이고, $V_2 = \frac{R^3}{r^2} E_0 \cos \theta$ 는 외부전기장에 의해 표면에 유도된 전하에 의한 전위이다,

*표면전하밀도

도체의 전기장: $-\nabla V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow \sigma(\theta) = -\epsilon_0 \nabla V$

$$\therefore \sigma(\theta) = -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial r} \left[-E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \right]_{r=R} = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta$$

6) $z=0$ 인 평면을 $V=0$ 의 기준점으로 삼는다.

제 4장 물질 속의 정전기장

4. 1. 편극 밀도

① 유전체

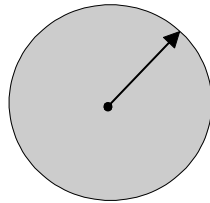
*특성 : 모든 전자가 원자 또는 분자에 구속되어 있다.

② 유도된 쌍극자

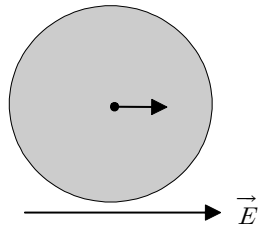
$$\vec{p} = \alpha \vec{E}$$

※유도된 쌍극자 모멘트는 가해진 전기장에 비례한다.

Example 3



<편극 되지 않은 원자>



<편극된 원자>

전기장을 걸어 원자를 편극 시키면, 원자핵과 전자구름은 반대방향으로 약간 밀린다.

평형상태에 도달하면 다음과 같다:

$$\vec{E} = \vec{E}_{electron} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{a^3} \text{ 이고, 쌍극자 모멘트는 } p = qd = (4\pi\epsilon_0 a^3) E \text{이다.}$$

원자 편극성:

$$\alpha = 4\pi\epsilon_0 a^3 = 3\epsilon_0 v \quad (v \text{는 원자의 부피})$$

③ 극성분자의 정렬

(1) 전기장 속의 쌍극자가 받는 힘

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}$$

(2) 전기장 속의 쌍극자가 받는 토크

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E} + \vec{p} \times \vec{E}$$

④ 편극밀도

$$\vec{P} \equiv \text{단위부피속의 쌍극자 모멘트}$$

4. 2. 편극된 물체가 만드는 전기장

① 속박전하

Proof 3

$$\text{전위: } V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\nu} \frac{\vec{P}(r') \cdot \hat{r}}{r^2} d\tau' \leftarrow \text{연속적인 전하분포}$$

$$\nabla' = -\nabla \text{라 두면, } V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\nu} \vec{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{r} \right) d\tau' \text{ 이것을 정리하면}$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{\nu} \nabla' \cdot \left(\frac{\vec{P}}{r} \right) d\tau' - \int_{\nu} \frac{1}{r} (\nabla' \cdot \vec{P}) d\tau' \right]$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\oint_S \frac{1}{r} \vec{P} \cdot d\vec{a}' - \int_{\nu} \frac{1}{r} (\nabla' \cdot \vec{P}) d\tau' \right] \leftarrow \text{발산정리}$$

$$\text{면전하밀도: } V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma}{r} da, \text{ 부피전하밀도: } V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\nu} \frac{\rho}{r} d\tau' \text{ 과 비교하면,}$$

$$\text{면전하밀도: } \sigma \equiv \vec{P} \cdot \hat{n}$$

$$\text{부피전하밀도: } \rho \equiv -\nabla \cdot \vec{P}$$

*속박전하는 실재하는 전하이다.

② 유전체 속의 전기장

$$\vec{E}_{avg} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}$$

※ 구내부의 전기장의 평균이 **고르게 편극된 구내부의 전하가 만드는 전기장과 같다** $\leftarrow$ 전기장의 평균치이다.

7) 이것은 구 내부의 전기장의 평균치를 셈 할 때, 고르게 편극된 구로 대체할 수 있다는 것을 의미한다.

4. 3. 대체 전기장

㉠ 유전체 속의 가우스 법칙

(1) 대체전기장

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

※ 대체전기장의 회전은 항상 0이 아니다. ($\nabla \times \vec{P} \neq 0$ 일 수 있다)

(2) 대체전기장의 가우스 법칙

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{\text{자유}}$$

Proof 4

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \rho = \rho_{\text{자유}} + \rho_{\text{속박}} \quad \leftarrow \text{가우스 법칙}$$

$$\nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E} = \rho = \rho_{\text{자유}} + \rho_{\text{속박}} = \rho_{\text{자유}} - \nabla \cdot \vec{P}$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_{\text{자유}}, \quad \vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} : \text{대체전기장의 가우스 법칙}$$

<대체전기장의 중요성질>

1. 대체전기장은 유전체의 영향을 받지 않는다.⁸⁾
2. 유전체의 경계면에서는 가우스 법칙을 적용할 수 없다. (편극밀도의 도함수가 디랙-델타함수가 되어 간단한 미적분의 연산을 할 수 없기 때문이다.)

㉡ 유전체의 경계조건

(1) 수직방향 경계조건

$$\vec{D}_{\text{위}}^{\perp} - \vec{D}_{\text{아래}}^{\perp} = \sigma_{\text{자유}}$$

*정전기학의 경계조건과 비교해 보라!

(2) 수평방향 경계조건

$$\vec{D}_{\text{위}}^{\parallel} - \vec{D}_{\text{아래}}^{\parallel} = \vec{P}_{\text{위}}^{\parallel} - \vec{P}_{\text{아래}}^{\parallel}$$

<대체전기장의 주의사항>

1. 대체전기장의 회전은 항상 0이 아니다. ($\nabla \times \vec{P} \neq 0$ 일 수 있기 때문이다.)
2. $\nabla \times \vec{P} \neq 0$ 이면 대체전기장은 ‘자유전하밀도’만으로 결정되지 않는다.

8) 따라서 놓여진 상황에서의 대체전기장을 구할 수 없다면, 진공에서의 대체전기장으로 대체하면 된다.

4. 4. 선형 유전체

① 감수율, 유전율, 유전상수

(1) 전기감수율

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

*극도로 강하지 않은 전기장에 의한 편극밀도는 전기장에 비례한다.⁹⁾¹⁰⁾

(2) 유전율

$$\epsilon \equiv \epsilon_0 (1 + \chi_e)$$

Proof 5

$$\begin{aligned} \vec{D} &\equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad \leftarrow \text{선형유전체 가정} \\ \vec{D} &\equiv \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} : \vec{D} \text{도 } \vec{E} \text{에 비례한다!} \\ \therefore \vec{D} &= \epsilon \vec{E}, \quad \epsilon \equiv \epsilon_0 (1 + \chi_e) \end{aligned}$$

(3) 유전상수

$$\epsilon_{\text{상대}} \equiv 1 + \chi_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

※ 모든 물질의 유전상수는 1보다 크다. (진공을 선형유전체로 본다는 의미는 아님!)

② 선형유전체의 경계값 문제

(1) 속박전하밀도와 자유전하밀도의 관계

$$\rho_{\text{속박}} = -\nabla \cdot \vec{P} = -\nabla \cdot \left(\frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \vec{D} \right) = \frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \rho_{\text{자유}}$$

* $\sigma_{\text{속박}}$ 에 대하여는 성립하지 않는다. (χ_e 는 미시적 구조에 따라 변하므로)

(2) 선형유전체의 경계조건

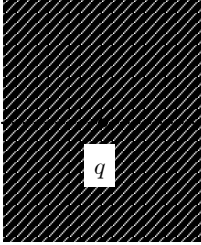
$$\epsilon_{\text{위}} \frac{\partial V_{\text{위}}}{\partial n} - \epsilon_{\text{아래}} \frac{\partial V_{\text{아래}}}{\partial n} = -\sigma_{\text{자유}}$$

9) 모든 유전체가 그렇지는 않다. 그렇기에 이를 만족시키는 물체를 특정화하여 ‘선형유전체’라 한다. 일반적인 유전체에는 다른 고차항이 더 붙는다.

10) 교재에 따라 $\vec{P} = \chi_e \vec{E}$ 로 기술하는 교재도 있다(‘Fundamentals of Electromagnetic Theory’) 본 교재에서는 전기감수율의 차원을 없애기 위해 $\epsilon_0 \chi_e$ 로 대체하였다. (–David. J. Griffiths–)

③ 유전체가 있는 경우의 영상법

Example 4



점전하의 위치: $(-d, 0, 0)$

전하량: q

$$r = \sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}$$

$$r' = \sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}$$

(1) [매질 1]의 전위

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left[\frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} \right]$$

* q' 은 [매질 1]을 셈할 때의 영상전하이다.

(2) [매질 2]의 전위

$$\varphi_2 = \frac{q''}{4\pi\epsilon_2 r}$$

* q'' 은 [매질 2]를 셈할 때의 영상전하이다.

(3) 경계조건

-제 1 경계조건

$$\frac{(q-q')d}{[d^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} = \frac{q''d}{[d^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}$$

* $\vec{D}_{1n} = \vec{D}_{2n}$ 이고, $\vec{D}_{1n} = -\epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \Big|_{x=0}$ 을 통해 얻은 결론이다.11)

-제 2 경계조건

$$\frac{(q-q')y}{\epsilon_1 [d^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} = \frac{q''y}{\epsilon_2 [d^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}$$

* $\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t}$ 이고, $\vec{E}_{1t} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \Big|_{x=0}$ 을 통해 얻은 결론이다.

(4) 영상전하의 크기

$$q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q, \quad q'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q$$

11) 영상전하를 취하는 그 순간 영상전하로 묶여진 모든 전하에 의한 효과는 무시된다.

4 유전체의 전기에너지 밀도

$$u_E = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$$

*이것은 자유전하에 대하여 해준 일이다.¹²⁾

Proof 6

$$\Delta W = \int (\Delta \rho_{\text{자유}}) V d\tau \quad \leftarrow \text{자유전자에 대하여 해준 일}^{13)}$$

$$\Delta \rho_{\text{자유}} = \nabla \cdot (\Delta \vec{D}), \quad \Delta W = \int_{\nu} [\nabla \cdot (\Delta \vec{D})] V d\tau \quad \leftarrow \text{유전체의 가우스법칙}$$

$\nabla \cdot [(\Delta \vec{D}) V] = [\nabla \cdot (\Delta \vec{D})] V + \Delta \vec{D} \cdot (\nabla V)$ 를 이용하여 부분적분 하면,

$$\Delta W = \int_{\nu} \nabla \cdot [(\Delta \vec{D}) V] d\tau + \int_{\nu} (\Delta \vec{D}) \cdot \vec{E} d\tau \quad \text{이고, 공간을 한없이 키우면}$$

$$\int_{\nu} \nabla \cdot [(\Delta \vec{D}) V] d\tau \rightarrow 0 \quad \text{이고, } \therefore \Delta W = \int_{\nu} (\Delta \vec{D}) \cdot \vec{E} d\tau \quad \text{이다.}$$

$$\text{여기서 } \frac{1}{2} \Delta (\vec{D} \cdot \vec{E}) = (\Delta \vec{D}) \cdot \vec{E} \quad \text{이므로 } \Delta W = \Delta \frac{1}{2} \int_{\nu} \vec{D} \cdot \vec{E} d\tau$$

<※ 에너지밀도 $u_E = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$ 는 비선형유전체에서는 성립하지 않는다!!>

12) 이것을 자유전하와 속박전하 모두에 대한 일이라고도 할 수 있으나, 이렇게 되면 유전체 분자를 늘이는데 필요한 에너지가 무시되었다. 따라서 계 전체의 에너지라 보기에는 다소 어폐가 있다.

반면, 자유전자에 대하여 한 일은 자유전자의 분포에 따라 편극양상이 바뀌므로 유전체분자를 늘이는데 필요한 에너지가 포함되어 있다.

13) $W = \frac{1}{2} \int \rho V d\tau$ 를 쓰지 않은 이유는, 여기서 ρ 는 자유전하가 아닌 충전하에 대한 밀도이다.

제 5장 유전체에 대한 미시적 이론

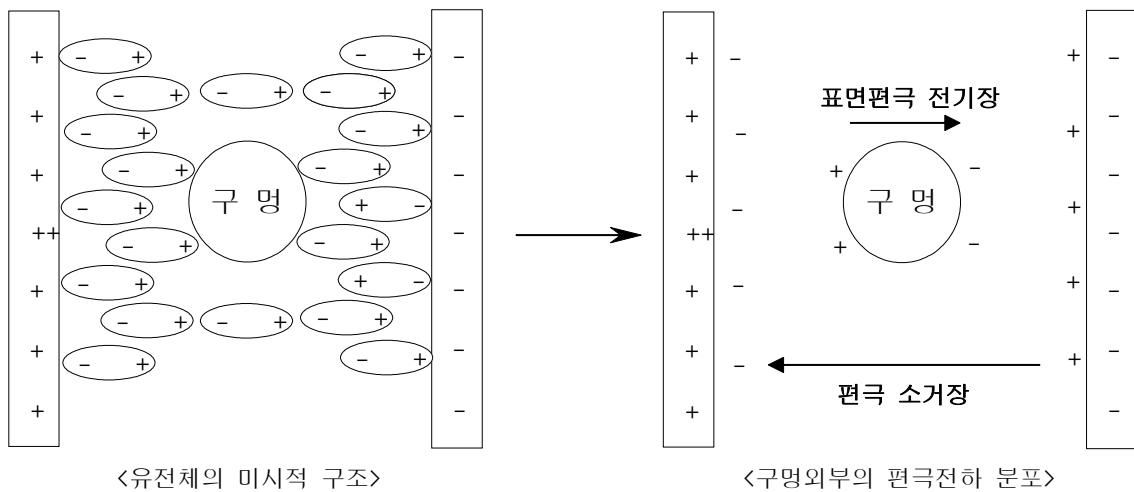
5. 1. 유전체의 분자장

① 분자장

유전체의 분자 위치에 나타나는 전기장

*셈하고자 하는 분자 그 자체에 의한 전기장이 아니다!!

② 유전체의 미시적 관점



(1) 편극 소거장

$$\vec{E}_d = -\frac{1}{\epsilon_0} \vec{P}$$

*편극 소거장은 외부전기장보다 항상 작음을 기억하라!!

(2) 유전체 내부의 거시적 전기장

$$\vec{E} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_d$$

(3) 표면편극 전기장

$$\vec{E}_s = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{P} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta d\theta = \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}$$

※표면전하밀도에 의한 전기장 $dE_s = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma}{r^2} da$ 로 얻을 수 있다. (편극전하: $\sigma = \vec{P} \cdot \vec{n}$)

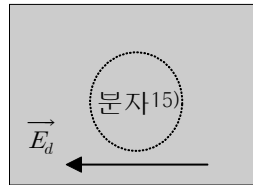
(4) 분자장과 거시적 전기장

$$E_m = E + E_s = E + \frac{1}{3\epsilon_0}P$$

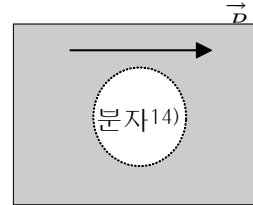
<※분자장과 거시적 전기장의 차이>

→거시적 전기장은 유전체 전체의 알짜 전기장 (분자자체의 전기적 효과 고려)

→미시적 전기장은 셈하는 분자이외의 모든 미시적 전기장 (분자자체의 전기적 효과 무시)



<거시적 전기장>



<분자장>

③ 클라지우스-모소티 방정식¹⁶⁾

$$\alpha = \frac{3\epsilon_0}{N} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}$$

*원자편극성: $P_m = \alpha E_m$ (분자장)

*선형유전체: $P = \chi E$ (거시적 전기장)

14) 미시적 전기장; 분자자체의 어떠한 전기적인 효과도 무시. 유전체 구멍의 전기장

15) 거시적 전기장; 셈하고자 하는 분자의 편극에 의한 전기장도 셈함. 유전체 위의 전기장

16) 비등방성, 비선형유전체, 쌍극자에 대하여는 적용되지 않는 모형이다.