< 정답표>

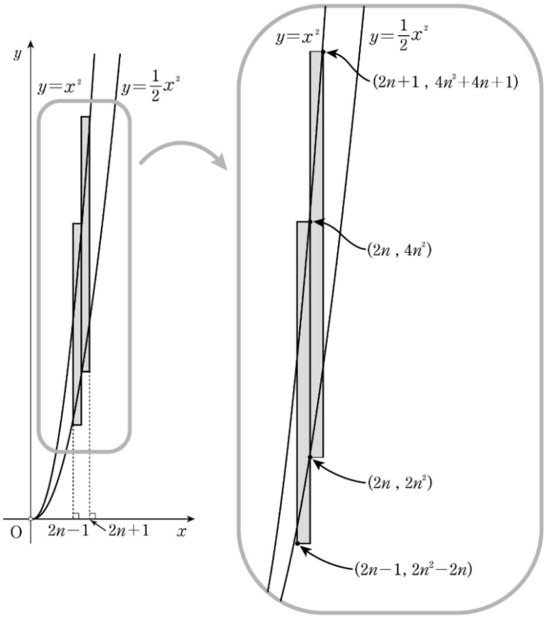
1.	4	**2.**	137	**3.**	②	**4.**	25	**5.**	43
6.	320	**7.**	64	**8.**	9	**9.**	⑤	**10.**	132
11.	50	**12.**	19	**13.**	⑤	**14.**	②	**15.**	②
16.	117	**17.**	⑤	**18.**	9	**19.**	8	**20.**	725
21.	④	**22.**	④	**23.**	②	**24.**	200	**25.**	13

1

[출제의도] 조건을 만족시키는 정사각형의 개수를 추론하여 수열의 극한값을 구한다.

$S_{n+1}-S_n$ 의 값은 $2n-1 \le x < 2n+1$ 에서 조건을 만족시키는 정사각형의 개수와 같다.

$f(x)=x^2$, $g(x)=\dfrac{1}{2}x^2$ 이라 하자.



(i) $2n-1 \le x < 2n$ 일 때,

$f(2n)=(2n)^2=4n^2$,

$g(2n-1)=\dfrac{1}{2}\times(2n-1)^2=2n^2-2n+\dfrac{1}{2}$

이므로 조건을 만족시키는 정사각형의 개수는 $2n^2-2n$ 보다 크거나 같고 $4n^2$ 보다 작은 자연수의 개수와 같다. 즉, 정사각형의 개수는 $4n^2-(2n^2-2n)=2n^2+2n$

(ii) $2n \le x < 2n+1$ 일 때,

$f(2n+1)=(2n+1)^2=4n^2+4n+1$,

$g(2n)=\dfrac{1}{2}\times(2n)^2=2n^2$

이므로 조건을 만족시키는 정사각형의 개수는 $2n^2$ 보다 크거나 같고 $4n^2+4n+1$ 보다 작은 자연수의 개수와 같다. 즉, 정사각형의 개수는 $(4n^2+4n+1)-2n^2=2n^2+4n+1$

(i), (ii)에서

$S_{n+1}-S_n=(2n^2+2n)+(2n^2+4n+1)=4n^2+6n+1$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}-S_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+6n+1}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=4$$

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}-S_n}{n^2}=4$

[다른 풀이]

자연수 m에 대하여

$2m-2 < x < 2m-1$과 $\dfrac{1}{2}x^2 < y < x^2$ 에서 조건을 만족시키는 정사각형의 개수를 a_{2m-1} 이라 하면

$$a_{2m-1}=(2m-1)^2-\frac{(2m-2)^2}{2}$$

$$=2m^2-1$$

$2m-1 \le x < 2m$과 $\dfrac{1}{2}x^2 < y < x^2$ 에서 조건을 만족시키는 정사각형의 개수를 a_{2m} 이라 하면

$$a_{2m}=(2m)^2-\frac{(2m-1)^2-1}{2}=2m^2+2m$$

그러므로

$$S_n=\sum_{m=1}^{n-1}(2m^2+2m)+\sum_{m=1}^{n}(2m^2-1)$$

$$=\frac{n(4n^2+2)}{3}+n^2-2n$$

$$S_{n+1}-S_n=\frac{(n+1)\{4(n+1)^2+2\}}{3}+(n+1)^2-2(n+1)$$

$$-\left\{\frac{n(4n^2+2)}{3}+n^2-2n\right\}$$

$$=4n^2+6n+1$$

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}-S_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+6n+1}{n^2}=4$

2

[출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x+1)-1 & (-1 \le x < 0) \\ f(x) & (0 \le x < 1) \\ f(x-1)+1 & (1 \le x < 2) \\ \vdots & \\ f(x-4)+4 & (4 \le x < 5) \end{cases}$$

이다. 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$g(1)=\lim_{x\to 1-} g(x)$이다.

$g(1)=f(0)+1$이고

$\lim_{x\to 1-} g(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)=f(1)=1$이므로

$f(0)+1=1$에서 $f(0)=0$ …… ㉠

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$ 이다.

$\lim_{x\to 1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{f(x-1)+1-g(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1+}\frac{f(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x}=f'(0)$이고

$\lim_{x\to 1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=1$

이므로 $f'(0)=1$ …… ㉡

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$라 하자.

㉠, ㉡에 의하여 $c=1$, $d=0$

조건 (나)에 의하여

$f(1)=1+a+b+1=1$ …… ㉢

$f'(1)=4+3a+2b+1=1$ …… ㉣

㉢, ㉣에 의하여 $a=-2$, $b=1$

$f(x)=x^4-2x^3+x^2+x$

$$\int_0^4 g(x)dx=\int_0^1 g(x)dx+\int_1^2 g(x)dx+\int_2^3 g(x)dx+\int_3^4 g(x)dx$$

$$=\frac{8}{15}+\left(\frac{8}{15}+1\right)+\left(\frac{8}{15}+2\right)+\left(\frac{8}{15}+3\right)=\frac{122}{15}$$

그러므로 $p=15$, $q=122$

따라서 $p+q=137$

3

[출제의도] 수열의 극한 문제해결하기

집합 S_n의 부분집합 중 원소의 개수가 두 개인 집합에 대하여 이 두 원소의 차가 $2n$보다 큰 임의의 두 원소를 a, $b(a<b)$라 하자.

$b-a>2n$이므로 $b>a+2n$ (단, $1\le a<b\le 3n$)

$a=1$일 때, $b=2n+2$, $2n+3$, $\cdots$, $3n$

$\{1, 2n+2\}$, $\{1, 2n+3\}$, $\cdots$, $\{1, 3n\}$: $(n-1)$개

$a=2$일 때, $b=2n+3$, $2n+4$, $\cdots$, $3n$

$\{2, 2n+3\}$, $\cdots$, $\{2, 3n\}$: $(n-2)$개

$\vdots$

$a=n-1$일 때, $b=3n$

$\{n-1, 3n\}$: 1개

$n\le a<3n$일 때, b는 없으므로 0개

그러므로 원소의 개수가 두 개이고, 이 두 원소의 차가 $2n$보다 큰 집합 S_n의 모든 부분집합의 개수 a_n은

$$a_n=(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k-1)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}\right\}=\frac{n^3-n}{6}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}\times\frac{n^3-n}{6}\right)$$

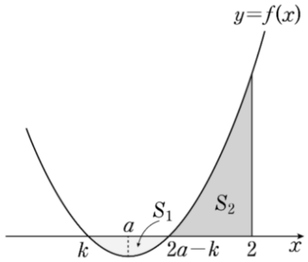
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^2}}{6}=\frac{1}{6}$$

4

[출제의도] 적분을 활용하여 조건을 만족시키는 함수의 적분값을 구하는 문제를 해결한다.

함수 $f(x)$는 이차함수이고 조건 (가)에서 $\int_0^t f(x)dx = \int_{2a-t}^{2a} f(x)dx$ 이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{0+2a}{2}=a$에 대하여 대칭이다.

조건 (나)에서 $0<\int_a^2 f(x)dx<\int_a^2 |f(x)|dx$ 이므로 $a<2$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 두 점 $(k,\ 0)$, $(2a-k,\ 0)$에서 만난다.



위의 그림에서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면

$\int_k^a f(x)dx = \int_a^{2a-k} f(x)dx = -\frac{S_1}{2}$ 이므로

$\int_a^2 f(x)dx = -\frac{S_1}{2}+S_2 = 2$

$\int_a^2 |f(x)|dx = \frac{S_1}{2}+S_2 = \frac{22}{9}$

따라서 $S_1=\frac{4}{9}$, $S_2=\frac{20}{9}$이다.

$\int_k^2 f(x)dx = -S_1+S_2 = \frac{16}{9}$

$p=9$, $q=16$이므로 $p+q=25$

5

출제의도 : 정적분과 관련된 함수의 최솟값 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$0 \le a \le 4$에서

$g(a)=\int_a^{a+4} f(x)dx$라 하자

(i)$a=0$일 때,

$$g(0)=\int_0^4 f(x)dx$$
$$=\int_0^4 \{-x(x-4)\}dx$$
$$=\int_0^4 (-x^2+4x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4$$
$$=-\frac{64}{3}+32=\frac{32}{3}$$

(ii) $0<a<4$일 때,

$$g(a)=\int_a^4 f(x)dx+\int_4^{a+4} f(x)dx$$
$$=\int_a^4 \{-x(x-4)\}dx+\int_4^{a+4}(x-4)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_a^4+\left[\frac{1}{2}x^2-4x\right]_4^{a+4}$$
$$=\frac{32}{3}+\frac{1}{3}a^3-2a^2$$
$$+\frac{1}{2}(a+4)^2-4(a+4)-(8-16)$$
$$=\frac{1}{3}a^3-\frac{3}{2}a^2+\frac{32}{3}$$

(iii) $a=4$일 때,

$g(a)=\int_4^8 f(x)dx$

$=\int_4^8 (x-4)dx=\left[\frac{1}{2}x^2-4x\right]_4^8$

$=32-32-(8-16)$

$=8$

$0<a<4$ 에서

$g(a)=\frac{1}{3}a^3-\frac{3}{2}a^2+\frac{32}{3}$ 이므로

$g'(a)=a^2-3a=a(a-3)$

$g'(a)=0$ 에서

$0<a<4$ 이므로 $a=3$

함수 $g(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	3	$\cdots$	(4)
$g'(a)$		$+$	0	$-$	
$g(a)$	$\frac{32}{3}$	↘	극소	↗	8

따라서 $g(a)$는 $a=3$ 에서 최솟값

$g(3)=\frac{1}{3}\times 3^3-\frac{3}{2}\times 3^2+\frac{32}{3}$

$=9-\frac{27}{2}+\frac{32}{3}$

$=\frac{54-81+64}{6}$

$=\frac{37}{6}$

을 가지므로

$p=6,\ q=37$

$p+q=43$

정답 43

6

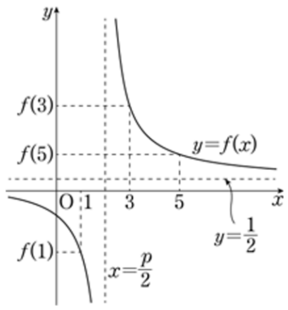
[출제의도] 유리함수의 그래프와 수열의 합을 이용하여 문제를 해결한다.

$f(x)=\frac{x+2n}{2x-p}=\frac{\frac{1}{2}(2x-p)+\frac{p}{2}+2n}{2x-p}=\frac{1}{2}+\frac{\frac{p}{2}+2n}{2x-p}$

이고 $\frac{p}{2}+2n>0$ 이므로

$f(1)<f(5)<f(3)$ …… ㉠

이 성립하려면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같아야 한다.



$1<\frac{p}{2}<3$ 이어야 하므로 $2<p<6$ 에서 자연수 p 의 최솟값 m 은 3

함수 $g(x)=\frac{2x+n}{x+q}=\frac{2(x+q)+n-2q}{x+q}=2+\frac{n-2q}{x+q}$

이므로 곡선 $y=g(x)$ 의 두 점근선의 방정식은

$x=-q,\ y=2$

$p=3$ 일 때 $f(x)=\frac{x+2n}{2x-3}$ 에 대하여

$x_1=f(1)=-2n-1$

$x_2=f(5)=\frac{2n+5}{7}$

$x_3=f(3)=\frac{2n+3}{3}$

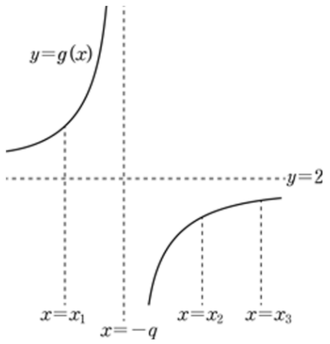
이라 하면 ㉠으로부터

$x_1<x_2<x_3$

이때 문제의 조건에서

$g(x_2)<g(x_3)<g(x_1)$ 이 성립해야 하므로

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같아야 한다.



그러므로 $x_1<-q<x_2$ 이고 $n-2q<0$ 이어야 한다.

즉 $-2n-1<-q<\dfrac{2n+5}{7}$ 이고 $q>\dfrac{n}{2}$ 이어야 하므로

$\dfrac{n}{2}<q<2n+1$

(ⅰ) $n=2l-1$ (l은 자연수)일 때

$\dfrac{2l-1}{2}<q<2(2l-1)+1$ 에서

$l-\dfrac{1}{2}<q<4l-1$ 이므로

$q=l,\ l+1,\ \cdots,\ 4l-2$

그러므로 정수 q의 개수는 $3l-1$

(ⅱ) $n=2l$ (l은 자연수)일 때

$\dfrac{2l}{2}<q<2\times2l+1$ 에서

$l<q<4l+1$ 이므로

$q=l+1,\ l+2,\ \cdots,\ 4l$

그러므로 정수 q의 개수는 $3l$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a_{2l-1}=3l-1,\ a_{2l}=3l$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20}a_k&=\sum_{l=1}^{10}(a_{2l-1}+a_{2l})\\&=\sum_{l=1}^{10}(3l-1+3l)\\&=\sum_{l=1}^{10}(6l-1)\\&=6\sum_{l=1}^{10}l-\sum_{l=1}^{10}1\\&=6\times\frac{10\times11}{2}-10\\&=330-10=320\end{aligned}$$

7

[출제의도] 도형의 평행이동과 함수의 미분가능성을 이해하여 주어진 문제를 해결한다.

함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이면

$\lim\limits_{x\to0+}g(x)=9,\ \ \lim\limits_{x\to0-}g(x)=\dfrac{3}{2}|3k-9|$ 이므로

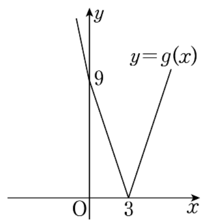
$9=\dfrac{3}{2}|3k-9|$

$|k-3|=2$

$k=1$ 또는 $k=5$

(ⅰ) $k=1$ 인 경우

함수 $g(x)h(x)$ 가 $x=3$ 에서 미분가능하므로



$$\begin{aligned}&\lim_{x\to3+}\frac{g(x)h(x)-g(3)h(3)}{x-3}\\&=\lim_{x\to3+}\frac{(3x-9)h(x)}{x-3}\\&=\lim_{x\to3+}3h(x)=3h(3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to3-}\frac{g(x)h(x)-g(3)h(3)}{x-3}\\&=\lim_{x\to3-}\frac{(9-3x)h(x)}{x-3}\\&=\lim_{x\to3-}\{-3h(x)\}=-3h(3)\end{aligned}$$

$3h(3)=-3h(3)$ 이므로

$h(3)=0$ …… ㉠

함수 $g(x)h(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0+}\frac{g(x)h(x)-g(0)h(0)}{x-0}\\&=\lim_{x\to0+}\frac{(9-3x)h(x)-9h(0)}{x}=9h'(0)-3h(0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0-}\frac{g(x)h(x)-g(0)h(0)}{x-0}\\&=\lim_{x\to0-}\frac{\frac{3}{2}(6-3x)h(x)-9h(0)}{x}\\&=9h'(0)-\frac{9}{2}h(0)\end{aligned}$$

$9h'(0)-3h(0)=9h'(0)-\dfrac{9}{2}h(0),\ \ h(0)=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $h(x)=x(x-3)(x+\alpha)$

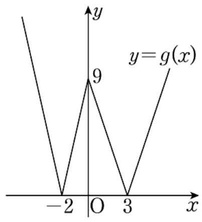
(단, α는 상수)이고, 조건 (나)에 의해

$h'(3)=27+6(\alpha-3)-3\alpha=15,\ 3\alpha=6,\ \alpha=2$

$h(x)=x(x-3)(x+2)=x^3-x^2-6x$

그러므로 $k=1$일 때 $h(1)=-6$

(ii) $k=5$인 경우



(i)과 같은 방법으로

$h(3)=h(0)=h(-2)=0$ 이고

$h(x)=x^3-x^2-6x$

그러므로 $k=5$일 때 $h(5)=70$

(iii) $k\neq 1$, $k\neq 5$인 경우

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이 아니고

함수 $g(x)h(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 0-} g(x)h(x)=g(0)h(0)$

$\frac{3}{2}|3k-9|\times h(0)=9h(0)$

$h(0)=0$ …… ㉢

함수 $g(x)h(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to 0-}\frac{g(x)h(x)-g(0)h(0)}{x-0}=\frac{3}{2}|3k-9|\times h'(0)$

$\lim\limits_{x\to 0+}\frac{g(x)h(x)-g(0)h(0)}{x-0}=9h'(0)$

$\frac{3}{2}|3k-9|\times h'(0)=9h'(0)$이므로 $h'(0)=0$ …… ㉣

함수 $g(x)h(x)$가 $x=3$에서 미분가능하므로

㉠과 같은 방법으로 $h(3)=0$ …… ㉤

㉢, ㉣, ㉤에 의하여 $h(x)$는 x^2과 $x-3$을 인수로 가지므로 $h(x)=x^2(x-3)$, $h'(3)=9$

조건 (나)를 만족시키지 않으므로 $h(x)$는 존재하지 않는다.

따라서 (i), (ii), (iii)에 의해 모든 $h(k)$의 값의 합은 $(-6)+70=64$

8

출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 함수에 대하여 수열 $\{a_n\}$을 정하고, 극한값을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직선 $y=x$와 x축 및 직선 $x=n$으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\frac{n^2}{2}$이다.

$2\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{n^2}{2}\right)=\frac{241}{768}$이므로

$F(x)=h(x)-x$

$=\begin{cases} g(x)-x & (0\le x<5 \text{ 또는 } x\ge k) \\ x-g(x) & (5\le x<k)\end{cases}$

로 놓으면

$2\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n F(x)\,dx=\frac{241}{768}$이다.

$n\le x<n+1$일 때

$g(x)-x=\frac{1}{2^n}\{f(x-n)-(x-n)\}$

$=\frac{1}{2^n}\left\{\frac{3}{2}(x-n)-\frac{1}{2}(x-n)^2-(x-n)\right\}$

$=\frac{1}{2^n}\left\{\frac{1}{2}(x-n)-\frac{1}{2}(x-n)^2\right\}$

$=\frac{1}{2^{n+1}}(x-n)(1+n-x)$

$=-\frac{1}{2^{n+1}}(x-n)(x-(n+1))$

이므로

$\int_n^{n+1}\{g(x)-x\}\,dx$

$=\int_n^{n+1}\left\{-\frac{1}{2^{n+1}}(x-n)(x-(n+1))\right\}dx$

$=\int_0^1\left\{-\frac{1}{2^{n+1}}x(x-1)\right\}dx$

$=-\frac{1}{2^{n+1}}\int_0^1 x(x-1)\,dx$

$=\frac{1}{2^{n+1}}\times\frac{1}{6}$ …… ㉠

한편, $\int_0^n F(x)\,dx$

$=\int_0^1(g(x)-x)\,dx+\cdots+\int_4^5(g(x)-x)\,dx$

$+\int_5^6(x-g(x))\,dx+\cdots+\int_{k-1}^{k}(x-g(x))\,dx$

$+\int_k^{k+1}(g(x)-x)\,dx+\cdots+\int_{n-1}^{n}(g(x)-x)\,dx$

이때, ㉠은 $n=0$일 때도 성립하므로 ㉠에서

$2\int_0^n F(x)\,dx$

$=\frac{1}{3}\times\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}$

$-\frac{1}{3}\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^6+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}$

$+\frac{1}{3}\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

$=\frac{1}{3}\times\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

$-\frac{2}{3}\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^6+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}$

$=\frac{1}{3}\times\frac{\frac{1}{2}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}$

$-\frac{2}{3}\times\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}\right\}}{1-\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{3}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

$-\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^5\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}\right\}$

$=\frac{1}{3}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}-\frac{1}{48}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}\right\}$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$이므로

$2\lim_{n\to\infty}\int_0^n F(x)\,dx$

$=\frac{1}{3}-\frac{1}{48}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}\right\}$

$=\frac{15}{48}+\frac{1}{48}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}$

즉 $\frac{15}{48}+\frac{1}{48}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}=\frac{241}{768}$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}=\frac{1}{16}$이므로

$k-5=4$에서 $k=9$

정답 9

9

[출제의도] 함수의 연속을 활용하여 문제해결하기

$\left|\dfrac{x-1}{k}\right|<1$일 때,

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{k}\right)^{2n}=0$이므로

$1-k<x<1+k$에서

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}-1}{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

$\left|\dfrac{x-1}{k}\right|>1$일 때,

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{k}\right)^{2n}=\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{k}{x-1}\right)^{2n}=0$이므로

$x<1-k$ 또는 $x>1+k$에서

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}-1}{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{k}{x-1}\right)^{2n}}{1+\left(\frac{k}{x-1}\right)^{2n}}$$
$$=\frac{1-0}{1+0}=1$$

$\left|\dfrac{x-1}{k}\right|=1$일 때,

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{k}\right)^{2n}=1$이므로

$x=1-k$ 또는 $x=1+k$에서

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}-1}{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}+1}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

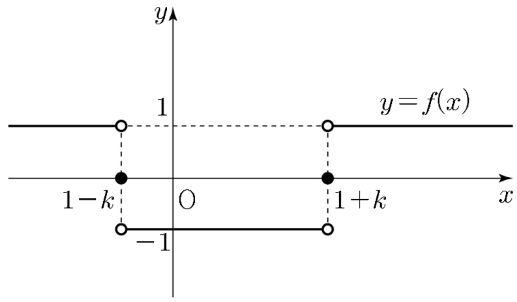
따라서

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x<1-k \text{ 또는 } x>1+k)\\ 0 & (x=1-k \text{ 또는 } x=1+k)\\ -1 & (1-k<x<1+k)\end{cases}$$

$y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to k}g(x)=g(k)$가 성립한다.



$\lim\limits_{x\to k}g(x)=\lim\limits_{x\to k}(x-k)^2=0$, $g(k)=(f\circ f)(k)$이므로

$(f\circ f)(k)=0$

$f(1-k)=f(1+k)=0$이므로

$f(k)=1-k$ 또는 $f(k)=1+k$

$k>0$, $1+k>1$이고

$f(x)$의 치역은 $\{-1, 0, 1\}$이므로

$1+k$는 치역에 속하지 않는다.

$\therefore\ f(k)=1-k$

(i) $1-k=1$인 경우

$k=0$이므로 조건에 맞지 않는다.

(ii) $1-k=0$인 경우

$k=1$이므로

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x<0 \text{ 또는 } x>2)\\ 0 & (x=0 \text{ 또는 } x=2)\\ -1 & (0<x<2)\end{cases}$$

$f(f(1))=f(-1)=1\neq 0$이므로

조건에 맞지 않는다.

(iii) $1-k=-1$인 경우

$k=2$이므로

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x<-1 \text{ 또는 } x>3)\\ 0 & (x=-1 \text{ 또는 } x=3)\\ -1 & (-1<x<3)\end{cases}$$

$f(f(2))=f(-1)=0$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $k=2$

$(g\circ f)(k)=g(f(2))=g(-1)=(-1-2)^2=9$

10

[출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 항의 값을 추론한다.

점 P_1의 좌표는 $(1, 0)$, 두 점 Q_1, Q_2의 좌표가 각각 $(0, 0)$, $(1, -1)$이고 점 P_1이 삼각형 $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2\mathrm{Q}_3$의 무게중심이므로 Q_3의 좌표는 $(2, 1)$이다.
점 P_2의 좌표는 $(2, a)$, 두 점 Q_2, Q_3의 좌표가 각각 $(1, -1)$, $(2, 1)$이고 점 P_2는 삼각형 $\mathrm{Q}_2\mathrm{Q}_3\mathrm{Q}_4$의 무게중심이므로 Q_4의 좌표는 $(3, 3a)$이다.
같은 방법으로 Q_7의 좌표를 구하면 $(6, 6a)$이고
Q_{10}의 좌표를 구하면 $(9, 9a)$이므로 $9a=90$, $a=10$
따라서 Q_{13}의 좌표는 $(12, 120)$이므로 $p+q=132$

11

[출제의도] 수열의 극한의 성질을 활용하여 문제해결하기

접선 l_n의 방정식은 $y=2nx-n^2$이므로
$\mathrm{Y}_n(0, -n^2)$
직선 l_n이 x축과 만나는 점을 X_n이라 하면
$\mathrm{X}_n\left(\frac{1}{2}n, 0\right)$
$\overline{\mathrm{OX}_n}=\frac{1}{2}n$
$\overline{\mathrm{X}_n\mathrm{Q}_n}=\overline{\mathrm{X}_n\mathrm{P}_n}=\sqrt{n^4+\frac{1}{4}n^2}$
$\overline{\mathrm{Y}_n\mathrm{R}_n}=\overline{\mathrm{Y}_n\mathrm{P}_n}=\sqrt{4n^4+n^2}$
이므로

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{OQ}_n}}{\overline{\mathrm{Y}_n\mathrm{R}_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{OX}_n}+\overline{\mathrm{X}_n\mathrm{Q}_n}}{\overline{\mathrm{Y}_n\mathrm{R}_n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n+\sqrt{n^4+\frac{1}{4}n^2}}{\sqrt{4n^4+n^2}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n}+\sqrt{1+\frac{1}{4n^2}}}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{2}$$

따라서 $100\alpha=50$

12

[출제의도] 함수의 연속을 활용하여 문제해결하기

$$f(x)=\frac{-ax-b+1}{ax+b}=\frac{1}{ax+b}-1$$

함수 $y=g(x)$의 그래프는
$f(x)<k$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프를
x축에 대하여 대칭이동하고
y축의 방향으로 $2k$만큼 평행이동한 그래프이고,
$f(x)\ge k$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 같다.

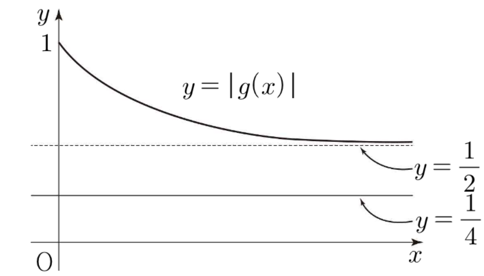
$$g(x)=\begin{cases}2k-f(x) & (f(x)<k)\\ f(x) & (f(x)\ge k)\end{cases}$$ 이므로

$\lim_{x\to\infty}|g(x)|=\lim_{x\to\infty}|f(x)|$ 또는
$\lim_{x\to\infty}|g(x)|=\lim_{x\to\infty}|2k-f(x)|$이다.

(가)에서 $\lim_{x\to\infty}|g(x)|=\frac{1}{2}$이므로

$\lim_{x\to\infty}|g(x)|=\lim_{x\to\infty}|f(x)|=\frac{1}{2}$이라 하면
$\lim_{x\to\infty}|g(x)|=\lim_{x\to\infty}\left|\frac{1}{ax+b}-1\right|=1\ne\frac{1}{2}$이므로
조건에 맞지 않는다.
한편 $\lim_{x\to\infty}|g(x)|=\lim_{x\to\infty}|2k-f(x)|$라 하면
$\lim_{x\to\infty}|g(x)|=\lim_{x\to\infty}\left|2k-\frac{1}{ax+b}+1\right|=|2k+1|=\frac{1}{2}$
이므로 $k=-\frac{1}{4}$ 또는 $k=-\frac{3}{4}$이다.
(나)에서 $|g(0)|=1$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 한 점근선 $x=-\frac{b}{a}$는 $ab>0$이므로 $-\frac{b}{a}<0$이다.

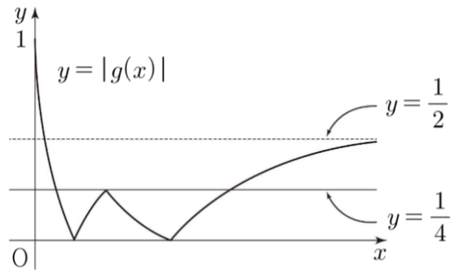
(ⅰ) $k=-\frac{1}{4}$, $a<0$일 때
함수 $y=|g(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y=|g(x)|$의 그래프와 직선 $y=-k$는 만나지 않으므로 조건 (다)에 맞지 않는다.

(ii) $k=-\frac{1}{4}$, $a>0$ 일 때

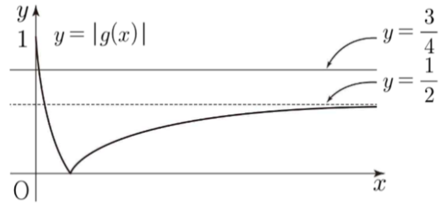
함수 $y=|g(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y=|g(x)|$의 그래프와
직선 $y=-k$는 서로 다른 세 점에서 만나므로
조건 (다)에 맞지 않는다.

(iii) $k=-\frac{3}{4}$, $a<0$ 일 때

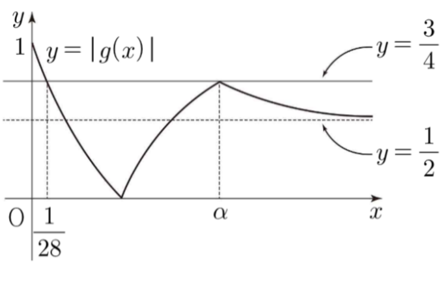
함수 $y=|g(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y=|g(x)|$의 그래프와
직선 $y=-k$는 한 점에서 만나므로 조건 (다)에
맞지 않는다.

(iv) $k=-\frac{3}{4}$, $a>0$ 일 때

함수 $y=|g(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y=|g(x)|$의 그래프와
직선 $y=-k$는 서로 다른 두 점에서만 만나므로
조건 (다)를 만족시킨다.

(i), (ii), (iii), (iv)에 의하여 $k=-\frac{3}{4}$, $a>0$

이때 $|g(0)|=f(0)=1$이므로 $b=\frac{1}{2}$이고

$\left|g\left(\frac{1}{28}\right)\right|=f\left(\frac{1}{28}\right)=-k=\frac{3}{4}$에서 $a=2$이다.

두 함수 $y=|g(x)|$, $y=f(x)$의 그래프의 x절편이

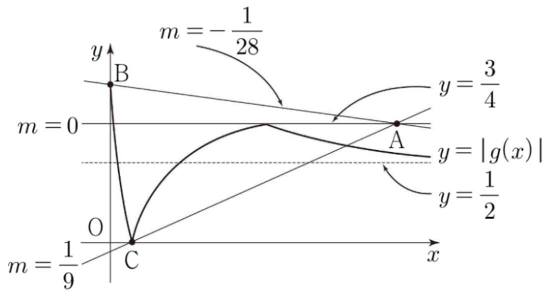
같으므로 $0=\dfrac{1}{2x+\frac{1}{2}}-1$에서 $x=\frac{1}{4}$이다.

또한 $|g(\alpha)|=\frac{3}{4}$에서 $f(\alpha)=-\frac{3}{4}$이고 $\alpha=\frac{7}{4}$

직선 $y=m(x-4\alpha)+\frac{3}{4}$이 지나는 점 $\left(4\alpha, \frac{3}{4}\right)$

즉, $\left(7, \frac{3}{4}\right)$을 점 A라 하고 B$(0, 1)$, C$\left(\frac{1}{4}, 0\right)$이라

하면 두 직선 AB, AC와 함수 $y=|g(x)|$의
그래프는 그림과 같다.



두 직선 AB, AC의 기울기는 각각 $-\frac{1}{28}$, $\frac{1}{9}$

이고 함수 $h(m)$은 다음과 같다.

$$h(m)=\begin{cases} 1 & \left(m<-\frac{1}{28}\right) \\ 2 & \left(-\frac{1}{28}\le m\le 0\right) \\ 3 & \left(0<m<\frac{1}{9}\right) \\ 2 & \left(m=\frac{1}{9}\right) \\ 1 & \left(m>\frac{1}{9}\right) \end{cases}$$

함수 $h(m)$이 불연속이 되는 실수 m의 값은

$m=-\dfrac{1}{28}$, $m=0$, $m=\dfrac{1}{9}$이므로

모든 실수 m의 값의 합

$M=-\dfrac{1}{28}+0+\dfrac{1}{9}=\dfrac{19}{252}$이다.

따라서 $252M=19$

13

출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 미지수의 값을 구하고, 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1+a-2$에서

$a=1$

한편, $\dfrac{d}{dt}f(t)=f'(t)$이므로

$$\int_1^x \left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt=\int_1^x f'(t)\,dt$$
$$=[f(t)]_1^x=f(x)-f(1)$$

이때 $\displaystyle\int_1^x \left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt=x^3+x^2-2$에서

$f(x)-f(1)=x^3+x^2-2$

따라서 $f'(x)=3x^2+2x$이므로

$f'(a)=f'(1)=3+2=5$

정답 ⑤

14

[출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

삼각형 POQ가 이등변삼각형이므로

점 Q의 좌표는 $(2t, 0)$

삼각형 POQ의 넓이는

$S(t)=\dfrac{1}{2}\times 2t\times t^2=t^3$

삼각형 PRO가 이등변삼각형이므로 선분 OP의 수직이등분선이 y축과 만나는 점이 R이다.

선분 OP의 중점을 M이라 하면 $\mathrm{M}\left(\dfrac{t}{2}, \dfrac{t^2}{2}\right)$이고

직선 MR의 기울기는 $-\dfrac{1}{t}$이므로

직선 MR의 방정식은

$y-\dfrac{t^2}{2}=-\dfrac{1}{t}\left(x-\dfrac{t}{2}\right)$

$y=-\dfrac{1}{t}x+\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \mathrm{R}\left(0, \dfrac{t^2}{2}+\dfrac{1}{2}\right)$

삼각형 PRO의 넓이는

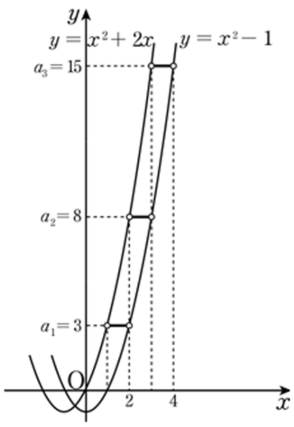
$T(t)=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{1}{2}\right)\times t=\dfrac{1}{4}(t^3+t)$

따라서 $$\lim_{t\to 0+}\frac{T(t)-S(t)}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{\frac{1}{4}(t^3+t)-t^3}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\left(-\frac{3}{4}t^2+\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{4}$$

15

[출제의도] 집합으로 정의된 부등식의 성질을 이용하여 급수 문제를 해결한다.

두 함수 $y=x^2+2x$, $y=x^2-1$의 그래프는 그림과 같다.



자연수 1, 2는 $x=1$일 때 $1^2-1=0$과 $1^2+2\times1=3$ 사이의 수이다. 이때 $1\in A$이므로 $A\neq\varnothing$이다.

그러므로 1, 2는 수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 될 수 없다.

그런데 $a=3$일 때, 부등식 $x^2-1<a<x^2+2x$를 만족시키는 자연수 x가 존재하지 않으므로 $\mathrm{A}=\varnothing$이다. 즉, $a_1=3$

자연수 4, 5, 6, 7은 $x=2$일 때 $2^2-1=3$과 $2^2+2\times2=8$ 사이의 수이다. 이 때 $2\in A$이므로 $A\neq\varnothing$이다. 따라서 4, 5, 6, 7은 수열 $\{a_n\}$의 둘째 항이 될 수 없다.

그런데 위 그림에서 $x^2-1<8<x^2+2x$를 만족시키는 자연수 x가 존재하지 않으므로 $a_2=8$이다.

마찬가지로 자연수 9, 10, 11, 12, 13, 14는 $x=3$일 때 $3^2-1=8$과 $3^2+2\times3=15$ 사이의 수이다. 이 때 $3\in A$이므로 $A\neq\varnothing$이다.

따라서 9, 10, 11, 12, 13, 14는 수열 $\{a_n\}$의 셋째 항이 될 수 없다.

그런데 위 그림에서 $x^2-1<15<x^2+2x$를 만족시키는 자연수 x가 존재하지 않으므로 $a_3=15$이다.

$\vdots$

위의 과정을 통해 집합 A를 공집합이 되도록 하는 자연수 a는 k^2-1 또는 k^2+2k (k는 자연수)의 값임을 알 수 있다.

그런데 $x=k$(k는 자연수)일 때 k^2+2k의 값은 $x=k+1$(k는 자연수)일 때 $(k+1)^2-1$의 값과 같고, $x=1$일 때, $1^2-1=0$은 자연수가 아니므로 $x=k$(k는 자연수)일 때 k^2+2k인 자연수를 나열하면 된다.

따라서 n번째 나열된 수는 n^2+2n이므로 $a_n=n^2+2n$이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-0-0\right)=\frac{3}{4}$$

[다른풀이]

$x^2-1<a<x^2+2x$를 정리하면

$x^2<a+1<x^2+2x+1$

$x^2<a+1<(x+1)^2$

$a+1$이 자연수 x에 대해 x^2 또는 $(x+1)^2$이면 부등식 $x^2-1<a<x^2+2x$의 해 중 자연수는 존재하지 않으므로 A가 공집합이다.

이 때, $a+1=k^2$(k는 2 이상의 자연수)를 만족시키는 자연수 a를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것이 수열 $\{a_n\}$이다.

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2-1}$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{3}{4}$$

16

출제의도 : 등차수열과 등비수열의 합을 이용하여 특정한 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)와 조건 (나)에서

$$\sum_{n=1}^{5}(a_n+|b_n|)-\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=67-27$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{5}(|b_n|-b_n)=40 \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편, 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r(r는 음의 정수)라 하면

$b_1>0,\ b_2<0,\ b_3>0,\ b_4<0,\ b_5>0$

이므로 ㉠에서

$-2(b_2+b_4)=40$

즉, $b_1r+b_1r^3=-20 \quad \cdots\cdots ㉡$

$b_1r(1+r^2)=-20$

이다. 이때 b_1r는 음의 정수이고, $1+r^2$은 자연수이므로 $1+r^2$은 20의 양의 약수이어야 하다.

20의 양의 약수는 1, 2, 4, 5, 10, 20이고, r가 음의 정수이므로

$r=-1$ 또는 $r=-2$ 또는 $r=-3$

이다. ㉡에서

$r=-1$일 때, $b_1=10$

$r=-2$일 때, $b_1=2$

$r=-3$일 때, $b_1=\dfrac{2}{3}$

이때, b_1은 자연수이므로

$b_1=10,\ r=-1$ 또는 $b_1=2,\ r=-2$

(ⅰ) $b_1=10,\ r=-1$일 때

$\sum_{1}^{5}b_n=10$이므로

조건 (가)에서

$$\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=27$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{5}a_n+\sum_{n=1}^{5}b_n=27$$

$$\sum_{n=1}^{5}a_n+10=27$$

$$\sum_{n=1}^{5}a_n=17$$

이때, $\sum_{n=1}^{5}a_n=5a_3=17$에서

$a_3=\dfrac{17}{5}$

한편, 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 자연수이고 공차가 음의 정수이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 정수이다.

따라서 $b_1=10,\ r=-1$은 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(ⅱ) $b_1=2,\ r=-2$일 때

$$\sum_{1}^{5}b_n=\frac{2\{1-(-2)^5\}}{1-(-2)}=22$$

조건 (가)에서

$$\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=27$$

이므로

$\sum_{n=1}^{5} a_n + 22 = 27$

$\sum_{n=1}^{5} a_n = 5$

이때, $\sum_{n=1}^{5} a_n = 5a_3 = 5$에서

$a_3 = 1$

또, $\sum_{1}^{5} |b_n| = \frac{2\{1-|-2|^5\}}{1-|-2|} = 62$

조건 (다)에서

$\sum_{n=1}^{5} (|a_n| + |b_n|) = 81$

이므로

$\sum_{n=1}^{5} |a_n| + \sum_{n=1}^{5} |b_n| = 81$

$\sum_{n=1}^{5} |a_n| + 62 = 81$

$\sum_{n=1}^{5} |a_n| = 19$ ⋯⋯ ㉢

한편, 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d(d는 음의 정수)라 하면

$a_3 = 1$

이므로

$a_1 > a_2 > a_3 > 0 \geq a_4 > a_5$

이다. 이때,

$a_1 = 1 - 2d$

$a_2 = 1 - d$

$a_4 = 1 + d$

$a_5 = 1 + 2d$

이므로 ㉢에서

$(1-2d) + (1-d) + 1 - (1+d) - (1+2d) = 19$

$1 - 6d = 18$

$d = -3$

따라서 $a_1 = 1 - 2 \times (-3) = 7$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$a_1 = 7$, $d = -3$, $b_1 = 2$, $r = -2$

등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n = 7 + (n-1) \times (-3) = -3n + 10$

등비수열 $\{b_n\}$의 일반항 b_n은

$b_n = 2 \times (-2)^{n-1}$

따라서

$a_7 + b_7 = -11 + 128 = 117$

정답 117

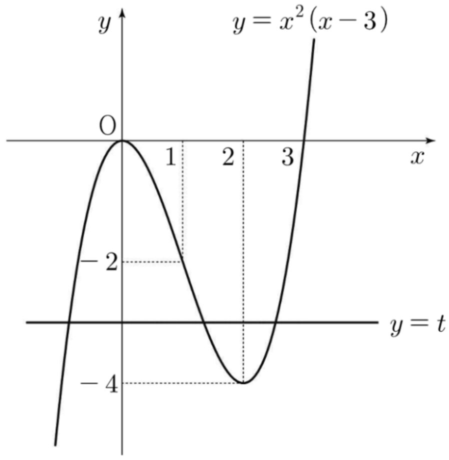
17

[출제의도] 함수의 연속성을 활용하여 추론하기

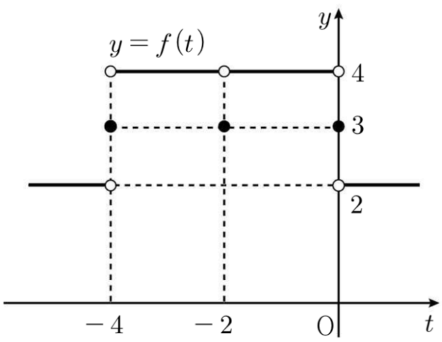
$(x-1)\{x^2(x-3)-t\}=0$

$x=1$ 또는 $x^2(x-3)-t=0$

$x^2(x-3)-t=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 $y=x^2(x-3)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 의 교점의 개수와 같다.



따라서 $y=f(t)$ 의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(t)$ 가 $t=-4$, -2, 0 에서 불연속이다.

함수 $f(t)g(t)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $t=-4$, -2, 0 에서 연속이어야 한다.

$t=-4$일 때,

$\lim_{t\to-4-} f(t)g(t)=2g(-4)$,

$\lim_{t\to-4+} f(t)g(t)=4g(-4)$,

$f(-4)g(-4)=3g(-4)$ 이고

함수 $f(t)g(t)$ 가 $t=-4$ 에서 연속이므로

$2g(-4)=4g(-4)=3g(-4)$

따라서 $g(-4)=0$

같은 방법으로 $g(-2)=g(0)=0$

(가)에서 $g(x)$ 가 삼차 이하의 다항함수이므로

$g(x)=ax(x+2)(x+4)$ $(a\neq0)$ 이라 하면

(나)에서 $g(-3)=6$ 이므로 $a=2$

$g(x)=2x(x+2)(x+4)$

따라서 $g(1)=30$

18

[출제의도] 미분과 적분의 관계를 이해하여 함숫값을 구한다.

$\int_a^x f(t)dt=\frac{1}{3}x^3-9$ 에서 $x=a$ 를 대입하면

$0=\frac{1}{3}a^3-9$, a 는 실수이므로 $a=3$

$\int_3^x f(t)dt=\frac{1}{3}x^3-9$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$f(x)=x^2$ 이므로 $f(a)=f(3)=9$

19

출제의도 : 수열의 합의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

점 A_0에서 점 A_n까지 점 P가 경로를 따라 이동한 거리는

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{25}=\frac{1}{25}\left\{2\times\frac{n(n+1)}{2}-n\right\}$$
$$=\frac{n^2}{25}=\left(\frac{n}{5}\right)^2$$

점 A_n이 직선 $y=x$ 위에 있기 위해서는 점 A_0에서 점 A_n까지 점 P가 경로를 따라 이동한 거리가 짝수이어야 한다.

$\left(\frac{n}{5}\right)^2$이 짝수이면 $\frac{n}{5}$도 짝수이므로

$\frac{n}{5}=2m$ (단, m은 자연수)

에서 $n=10m$이다.

따라서 점 A_n 중 직선 $y=x$ 위에 있는 두 번째 점은 $m=2$, 즉 $n=20$일 때이므로 점 A_{20}이다.

경로를 따라 이동한 거리가 $2k$(k는 자연수)일 때 점 P의 x좌표는 k이다.

점 A_0에서 점 A_{20}까지 점 P가 경로를 따라 이동한 거리가 $\left(\frac{20}{5}\right)^2=4^2=16$이므로 점 A_{20}의 x좌표는 8이다. 즉,

$a=8$

정답 8

20

[출제의도] 수열의 합 문제해결하기

기울기가 1이고 y절편이 양수인 원 $x^2+y^2=\frac{n^2}{2}$의 접선의 방정식은 $y=x+\frac{n}{\sqrt{2}}\sqrt{1+1^2}$

$\therefore\ y=x+n$

직선 $y=x+n$이 x축, y축과 만나는 점은 각각 $\mathrm{A}_n(-n, 0)$, $\mathrm{B}_n(0, n)$이고,

점 A_n을 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식은 $y=-2x-2n$이므로 $\mathrm{C}_n(0, -2n)$

삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n\mathrm{B}_n$과 그 내부의 점들 중 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수 a_n은

$n=1$일 때, x좌표가 0인 점의 개수는 4,

x좌표가 -1인 점의 개수는 1 이므로

$a_1=1+4=5$

$n=2$일 때, x좌표가 0인 점의 개수는 7,

x좌표가 -1인 점의 개수는 4,

x좌표가 -2인 점의 개수는 1 이므로

$a_2=1+4+7=12$

$n=3$일 때, x좌표가 0인 점의 개수는 10,

x좌표가 -1인 점의 개수는 7,

x좌표가 -2인 점의 개수는 4,

x좌표가 -3인 점의 개수는 1 이므로

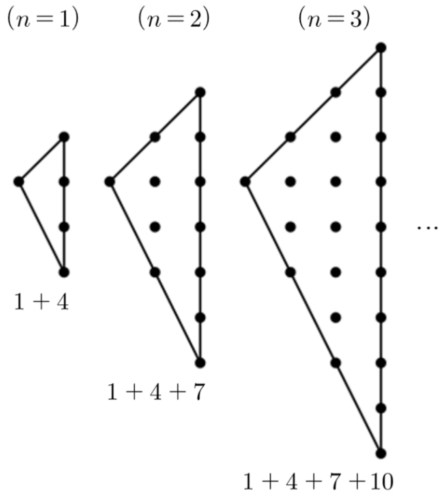
$a_3=1+4+7+10=22$

$\vdots$

$$\therefore\ a_n=1+\{4+7+10+\cdots+(3n+1)\}$$
$$=1+\sum_{k=1}^{n}(3k+1)=\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n+1$$

따라서

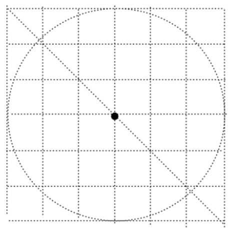
$$\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n+1\right)$$
$$=\frac{3}{2}\times\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{5}{2}\times\frac{10\times11}{2}+1\times10$$
$$=725$$



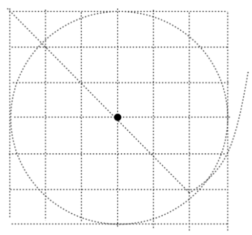
21

출제의도 : 조건을 만족시키는 점의 개수의 합을 구할 수 있는가?

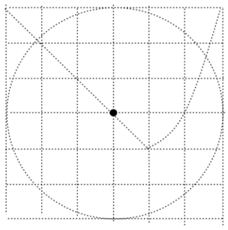
정답풀이 :
각 경우로 나누면 다음과 같다.
(ⅰ) $n \le 7$일 때,
대칭성을 이용하여 조사하면 원 O_n의 내부에 있고 곡선 $y=f(x)$의 아랫부분에 있는 점의 개수와 원 O_n의 내부에 있고 곡선 $y=f(x)$의 윗부분에 있는 점의 개수가 같으므로
$A_n - B_n = 0$



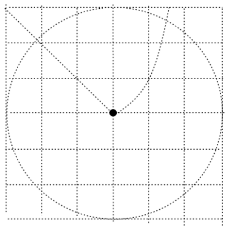
(ⅱ) $n=8$일 때,
아래 그림에서 대칭성을 이용하여 조사하면
$A_8 - B_8 = 0$



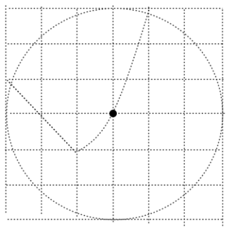
(ⅲ) $n=9$일 때,
아래 그림에서
$A_9 - B_9 = 12 - 8 = 4$



(ⅳ) $n=10$일 때,
아래 그림에서
$A_{10}-B_{10}=17-4=13$

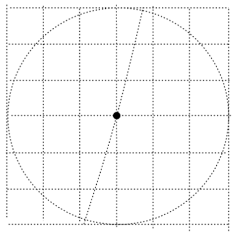


(ⅳ) $n=11$일 때,
아래 그림에서
$A_{11}-B_{11}=15-7=8$



(ⅴ) $12 \leq n \leq 20$일 때,
대칭성을 이용하여 조사하면 원 O_n의 내부에 있고 곡선 $y=f(x)$의 아랫부분에 있는 점의 개수와 원 O_n의 내부에 있고 곡선 $y=f(x)$의 윗부분에 있는 점의 개수가 같으므로

$A_n-B_n=0$



따라서, 구하는 값은

$$\sum_{n=1}^{20}\left(A_n-B_n\right)= 4+13+8=25$$

정답 ④

22

출제의도 : 사차함수의 그래프의 특징과 정적분으로 정의된 함수의 조건을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^4+ax^2+b$에서 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로 사차함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

이때 $f(t)\geq 0$인 구간에서는

$f(t)-|f(t)|=0$,

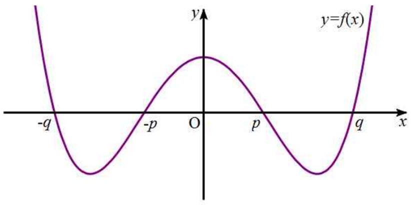
$f(t)<0$인 구간에서는

$f(t)-|f(t)|=2f(t)<0$

이고, 조건 (가)에 의하여 $-1\leq t\leq 2$일 때 $f(t)\geq 0$이어야 한다.

또, 조건 (나)에 의하여 $f(t)<0$인 구간이 있어야 한다.

따라서 $f(0)>0$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



위 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 네 점의 x좌표를 각각 $-q$, $-p$, p, q $(0<p<q)$라 하자.

(ⅰ) $0<x<\frac{p}{2}$일 때, 구간 $[-x, 2x]$에서 $f(x)\geq 0$이므로

$$g(x)=\int_{-x}^{2x} 0dt=0$$

조건 (가)에 의하여 $0<x<1$일 때 $g(x)=c_1$ (c_1은 상수)이므로

$\frac{p}{2}\geq 1$, 즉 $p\geq 2$

(ⅱ) $\frac{p}{2}<x<q$일 때, 구간 $[-x, 2x]$에서 $f(x)<0$인 구간이 점점 커지므로 $g(x)$는 감소한다.

조건 (나)에 의하여 $1<x<5$일 때 $g(x)$는 감소하므로

$\frac{p}{2}\leq 1$, $q\geq 5$

즉, $p\leq 2$, $q\geq 5$

(ⅲ) $x>q$일 때, 구간 $[-x, -q]$와 구간 $[q, 2x]$에서 $f(x)\geq 0$이므로

$g(x)=g(q)$

조건 (다)에 의하여 $x>5$일 때 $g(x)=c_2$ (c_2는 상수)이므로

$q\leq 5$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

$p=2$, $q=5$

따라서

$$\begin{aligned}f(x)&=(x+2)(x-2)(x+5)(x-5)\\&=(x^2-4)(x^2-25)\end{aligned}$$

이므로

$f(\sqrt{2})=(-2)\times(-23)=46$

정답 ④

23

출제의도 : 합성함수와 역함수의 성질을 이용하여 역함수가 존재하기 위한 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(i)$b=0$일 때,

$-1 \le x < 1$이면

$(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(0)=0$

이므로 합성함수 $g \circ f$는 일대일대응이 아니므로 합성함수 $g \circ f$의 역함수는 존재하지 않는다.

(ii) $b>0$일 때,

$(g \circ f)(x)=b$를 만족시키는 x의 값이 존재하지 않으므로 합성함수 $g \circ f$는 실수 전체의 집합에서 정의된 역함수를 갖지 않는다.

(iii) $b<0$일 때,

$x< -1$일 때, $f(x)< -1+a$

$-1 \le x <1$일 때, $b<f(x) \le -b$

$x \ge 1$일 때, $f(x) \ge 1+c$

이때, $b< -1$이면 합성함수 $g \circ f$는 실수 전체의 집합에서 정의된 역함수를 갖지 않는다.

따라서 $-1 \le b <0$일 때, 합성함수 $g \circ f$는 실수 전체의 집합에서 정의된 역함수를 갖는지 알아보자.

$f(-1)=-b,\ \lim_{x\to1-}f(x)=b$이므로

$x< -1$일 때

$g(x)=-x-2=-b$에서

$x=b-2$

$x \ge 1$일 때,

$g(x)=-x+2=b$에서

$x=-b+2$

따라서 합성함수 $g \circ f$가 실수 전체의 집합에서 정의된 역함수를 가지려면

$\lim_{x\to-1-} f(x)=b-2,\ f(1)=-b+2$

이어야 한다.

$\lim_{x\to-1-} f(x)=b-2$에서

$-1+a=b-2,\ a=b-1$ …… ㉠

$f(1)=-b+2$에서

$1+c=-b+2, c=-b+1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a+b+2c$
$=(b-1)+b+2(-b+1)$
$=1$

정답 ②

24

출제의도 : 두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이가 최소가 될 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x-a)=\begin{cases} 0 & (x \le a) \\ x-a & (x > a) \end{cases}$

$f(x-b)=\begin{cases} 0 & (x \le b) \\ x-b & (x > b) \end{cases}$

$f(x-2)=\begin{cases} 0 & (x \le 2) \\ x-2 & (x > 2) \end{cases}$

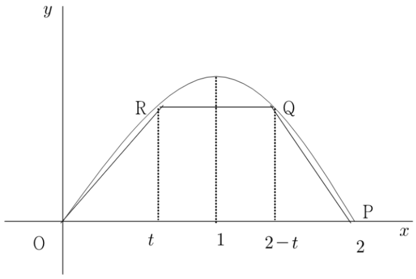
이므로 $0 \le x \le 2$에서

$h(x)=\begin{cases} kx & (0 \le x \le a) \\ ak & (a < x \le b) \\ k(-x+a+b) & (b < x \le 2) \end{cases}$

따라서 모든 실수 x에 대하여

$0 \le h(x) \le g(x)$ 이고

$\int_0^2 \{g(x)-h(x)\}dx$ 의 값이 최소가 되기 위해서는 두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프가 그림과 같아야 한다.



따라서 $\mathrm{R}(t,\ t(2-t))$(단, $0<t<1$)이라 하면

$\mathrm{Q}(2-t,\ t(2-t))$이고

사다리꼴 OPQR의 넓이 $S(t)$가 최대가 되어야 하므로

$S(t)=\frac{1}{2}\times\{2+(2-2t)\}\times t(2-t)$

$=t^3-4t^2+4t$

$S'(t)=3t^2-8t+4=(3t-2)(t-2)$

따라서 $S(t)$는 $t=\frac{2}{3}$에서 극대이면서 최댓값을 가지고 그때

$\int_0^2 \{g(x)-h(x)\}dx$

의 값은 최솟값을 가지므로

$k=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{4}{3},\ a=\frac{2}{3},\ b=\frac{4}{3}$

따라서

$60(k+a+b)=60\times\frac{10}{3}=200$

정답 200

25

출제의도 : 귀납적으로 주어진 수열의 특정한 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d(d \neq 0)$라 하자.

$b_2 = b_1 + a_2 = a_1 + (a_1 + d) = 2a_1 + d$

$b_3 = b_2 - a_3 = (2a_1 + d) - (a_1 + 2d) = a_1 - d$

$b_4 = b_3 + a_4 = (a_1 - d) + (a_1 + 3d) = 2a_1 + 2d$

$b_5 = b_4 + a_5 = (2a_1 + 2d) + (a_1 + 4d) = 3a_1 + 6d$

$b_6 = b_5 - a_6 = (3a_1 + 6d) - (a_1 + 5d) = 2a_1 + d$

$b_7 = b_6 + a_7 = (2a_1 + d) + (a_1 + 6d) = 3a_1 + 7d$

$b_8 = b_7 + a_8 = (3a_1 + 7d) + (a_1 + 7d) = 4a_1 + 14d$

$b_9 = b_8 - a_9 = (4a_1 + 14d) - (a_1 + 8d) = 3a_1 + 6d$

$b_{10} = b_9 + a_{10} = (3a_1 + 6d) + (a_1 + 9d) = 4a_1 + 15d$

이때, $b_{10} = a_{10}$이므로

$4a_1 + 15d = a_1 + 9d$

$a_1 = -2d$

이다.

따라서

$$\frac{b_8}{b_{10}} = \frac{4a_1 + 14d}{4a_1 + 15d} = \frac{4 \times (-2d) + 14d}{4 \times (-2d) + 15d} = \frac{6}{7}$$

이므로

$p = 7,\ q = 6$

이다.

따라서

$p + q = 7 + 6 = 13$

정답 13