2019년 수학 모의고사 mixed by MPP

수학 영역

19년 03월 30번 나형

1. 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 정사각형의 개수를 S_n이라 하자.

(가) 정사각형은 한 변의 길이가 1이고 꼭짓점의 x좌표와 y좌표가 모두 정수이다.

(나) 연립부등식 $\frac{1}{2}x^2 < y < x^2$, $0 < x < 2n-1$을 만족시키는 점 (x, y) 중에는 정사각형의 내부에 있는 점이 있다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}-S_n}{n^2}$의 값을 구하시오. [4점]

16년 07월 30번 나형

2. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^4}=1$

(나) $f(1)=f'(1)=1$

$-1 \le n \le 4$인 정수 n에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x-n)+n \ (n \le x < n+1)$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 열린구간 $(-1, 5)$에서 미분가능할 때 $\int_0^4 g(x)dx=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

수학 영역

16년 04월 21번 나형

3. 자연수 n에 대하여 집합 $S_n = \{x | x\text{는 } 3n\text{이하의 자연수}\}$의 부분집합 중에서 원소의 개수가 두 개이고, 이 두 원소의 차가 $2n$보다 큰 원소로만 이루어진 모든 집합의 개수를 a_n이라 하자.

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}a_k$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{5}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

18년 10월 29번 나형

4. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 t에 대하여 $\int_0^t f(x)\,dx = \int_{2a-t}^{2a} f(x)\,dx$이다.

(나) $\int_a^2 f(x)\,dx = 2$, $\int_a^2 |f(x)|dx = \frac{22}{9}$

$f(k)=0$이고 $k<a$인 실수 k에 대하여 $\int_k^2 f(x)\,dx = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

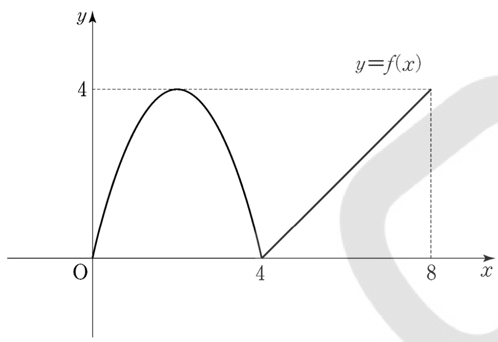
수학 영역

16년 09월 29번 나형

5. 구간 $[0,\ 8]$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} -x(x-4) & (0 \le x < 4) \\ x-4 & (4 \le x \le 8) \end{cases}$$

이다. 실수 $a\,(0 \le a \le 4)$에 대하여 $\int_a^{a+4} f(x)\,dx$의 최솟값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



18년 03월 30번 나형

6. n이 자연수일 때, 함수 $f(x)=\frac{x+2n}{2x-p}$이

$$f(1)<f(5)<f(3)$$

을 만족시키도록 하는 자연수 p의 최솟값을 m이라 하자. 자연수 n에 대하여 $p=m$일 때의 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=\frac{2x+n}{x+q}$이

$$g(f(5))<g(f(3))<g(f(1))$$

을 만족시키도록 하는 자연수 q의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값을 구하시오. [4점]

수학 영역

17년 10월 30번 나형

7. 함수 $f(x)=|3x-9|$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 는

$$g(x)=\begin{cases} \frac{3}{2}f(x+k) & (x<0) \\ f(x) & (x \geq 0) \end{cases}$$

이다. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $h(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, 모든 $h(k)$ 의 값의 합을 구하시오. (단, $k>0$) [4점]

(가) 함수 $g(x)h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) $h'(3)=15$

17년 11월 30번 나형

8. 이차함수 $f(x)=\dfrac{3x-x^2}{2}$ 에 대하여 구간 $[0, \infty)$ 에서 정의된 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \leq x < 1$ 일 때, $g(x)=f(x)$ 이다.
(나) $n \leq x < n+1$ 일 때,

$$g(x)=\frac{1}{2^n}\{f(x-n)-(x-n)\}+x$$

이다. (단, n은 자연수이다.)

어떤 자연수 $k\,(k \geq 6)$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 는

$$h(x)=\begin{cases} g(x) & (0 \leq x < 5 \text{ 또는 } x \geq k) \\ 2x-g(x) & (5 \leq x < k) \end{cases}$$

이다. 수열 $\{a_n\}$ 을 $a_n=\displaystyle\int_0^n h(x)dx$ 라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(2a_n-n^2\right)=\frac{241}{768}$ 이다. k의 값을 구하시오. [4점]

수학 영역

19년 04월 21번 나형

9. 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}-1}{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}+1}\ (k>0)$$

에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}(f\circ f)(x) & (x=k)\\ (x-k)^2 & (x\neq k)\end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이다. 상수 k에 대하여 $(g\circ f)(k)$의 값은? [4점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

17년 10월 29번 나형

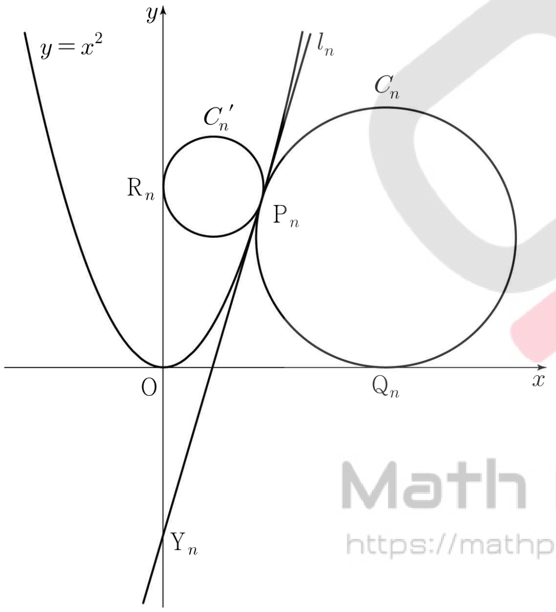
10. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 P_n의 좌표를 $(n,\ an-a)$라 하자. 두 점 Q_n, Q_{n+1}에 대하여 점 P_n이 삼각형 $\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+2}$의 무게중심이 되도록 점 Q_{n+2}를 정한다. 두 점 Q_1, Q_2의 좌표가 각각 $(0,0)$, $(1,-1)$이고 점 Q_{10}의 좌표가 $(9,90)$이다. 점 Q_{13}의 좌표를 (p,q)라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, $a>1$) [4점]

수학 영역

17년 07월 29번 나형

11. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}_n(n,\ n^2)$에서의 접선을 l_n이라 하고, 직선 l_n이 y축과 만나는 점을 Y_n이라 하자. x축에 접하고 점 P_n에서 직선 l_n에 접하는 원을 C_n, y축에 접하고 점 P_n에서 직선 l_n에 접하는 원을 $C_n{}'$이라 할 때, 원 C_n과 x축과의 교점을 Q_n, 원 $C_n{}'$과 y축과의 교점을 R_n이라 하자.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\overline{\mathrm{OQ}_n}}{\overline{\mathrm{Y}_n\mathrm{R}_n}}=\alpha$라 할 때, 100α의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, 점 Q_n의 x좌표와 점 R_n의 y좌표는 양수이다.) [4점]



18년 04월 30번 나형

12. 두 실수 a, b에 대하여 정의역이 $\{x\,|\,x\geq 0\}$인 함수

$$f(x)=\frac{-ax-b+1}{ax+b}\quad(ab>0)$$

이 있다. 실수 k에 대하여 정의역이 $\{x\,|\,x\geq 0\}$인 함수

$$g(x)=\begin{cases}2k-f(x) & (f(x)<k)\\ f(x) & (f(x)\geq k)\end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim\limits_{x\to\infty}|g(x)|=\dfrac{1}{2}$

(나) $|g(0)|=1$

(다) 함수 $y=|g(x)|$의 그래프와 직선 $y=-k$는 두 점 $\left(\dfrac{1}{28},\ -k\right)$, $(\alpha,\ -k)$에서만 만난다. (단, $\alpha>\dfrac{1}{28}$)

직선 $y=m(x-4\alpha)+\dfrac{3}{4}$이 함수 $y=|g(x)|$의 그래프와 만나 서로 다른 점의 개수를 $h(m)$이라 할 때, 함수 $h(m)$이 불연속이 되는 모든 실수 m의 값의 합은 M이다. $252M$의 값을 구하시 [4점]

수학 영역

18년 11월 14번 나형

13. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x \left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt = x^3 + ax^2 - 2$$

를 만족시킬 때, $f'(a)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

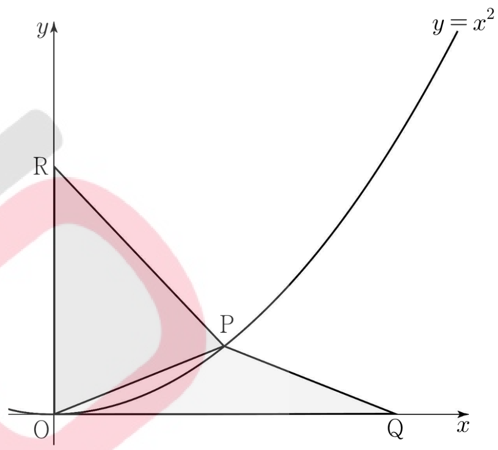
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

17년 04월 21번 나형

14. 그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2)\,(t>0)$에 대하여 x축 위의 점 Q, y축 위의 점 R가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 삼각형 POQ는 $\overline{\mathrm{PO}}=\overline{\mathrm{PQ}}$인 이등변삼각형이다.
(나) 삼각형 PRO는 $\overline{\mathrm{RO}}=\overline{\mathrm{RP}}$인 이등변삼각형이다.

삼각형 POQ와 삼각형 PRO의 넓이를 각각 $S(t)$, $T(t)$라 할 때 $\lim_{t\to 0+}\frac{T(t)-S(t)}{t}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

수학 영역

16년 03월 21번 나형

15. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

집합 $A=\{x|x^2-1<a<x^2+2x,\ x$는 자연수$\}$

가 공집합이 되도록 하는 자연수 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자.

예를 들어, $a=3$은 $x^2-1<a<x^2+2x$를 만족시키는 자연수 x가 존재하지 않는 첫 번째 수이므로 $a_1=3$이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

18년 11월 29번 나형

16. 첫째항이 자연수이고 공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$과 첫째항이 자연수이고 공비가 음의 정수인 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_7+b_7의 값을 구하시오. [4점]

(가) $\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=27$

(나) $\sum_{n=1}^{5}(a_n+|b_n|)=67$

(다) $\sum_{n=1}^{5}(|a_n|+|b_n|)=81$

수학 영역

17년 07월 21번 나형

17. 실수 t에 대하여 x에 대한 사차방정식

$$(x-1)\{x^2(x-3)-t\}=0$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $f(t)$라 하자. 다항함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^4}=0$

(나) $g(-3)=6$

함수 $f(t)g(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $g(1)$의 값은? [4점]

① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

18년 10월 25번 나형

18. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_a^x f(t)dt=\frac{1}{3}x^3-9$$

를 만족시킬 때, $f(a)$의 값을 구하시오. (단, a는 실수이다.) [3점]

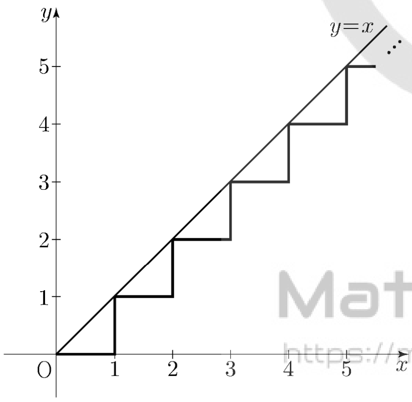
수학 영역

18년 09월 29번 나형

19. 좌표평면에서 그림과 같이 길이가 1인 선분이 수직으로 만나도록 연결된 경로가 있다. 이 경로를 따라 원점에서 멀어지도록 움직이는 점 P의 위치를 나타내는 점 A_n을 다음과 같은 규칙으로 정한다.

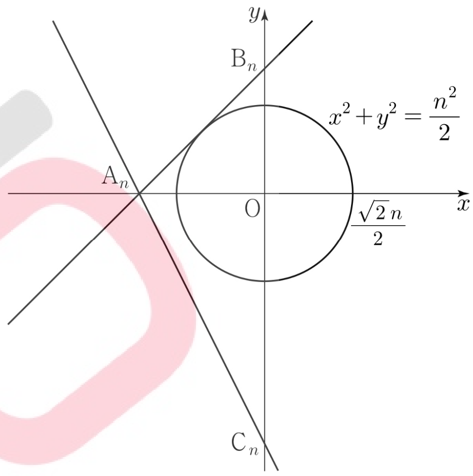
> (i) A_0은 원점이다.
> (ii) n이 자연수일 때, A_n은 점 A_{n-1}에서 점 P가 경로를 따라 $\frac{2n-1}{25}$ 만큼 이동한 위치에 있는 점이다.

예를 들어, 점 A_2와 A_6의 좌표는 각각 $\left(\frac{4}{25}, 0\right)$, $\left(1, \frac{11}{25}\right)$이다. 자연수 n에 대하여 점 A_n 중 직선 $y=x$ 위에 있는 점을 원점에서 가까운 순서대로 나열할 때, 두 번째 점의 x좌표를 a라 하자. a의 값을 구하시오. [4점]



16년 04월 29번 나형

20. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 기울기가 1이고 y절편이 양수인 직선이 원 $x^2+y^2=\frac{n^2}{2}$에 접할 때, 이 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A_n, B_n이라 하자. 점 A_n을 지나고 기울기가 -2인 직선이 y축과 만나는 점을 C_n이라 할 때, 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n\mathrm{B}_n$과 그 내부의 점들 중 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 구하시오. [4점]



수학 영역

16년 11월 21번 나형

21. 좌표평면에서 함수

$$f(x)=\begin{cases}-x+10 & (x<10)\\ (x-10)^2 & (x\geq 10)\end{cases}$$

과 자연수 n에 대하여 점 $(n, f(n))$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 O_n이 있다. x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점 중에서 원 O_n의 내부에 있고 함수 $y=f(x)$의 그래프의 아랫부분에 있는 모든 점의 개수를 A_n, 원 O_n의 내부에 있고 함수 $y=f(x)$의 그래프의 윗부분에 있는 모든 점의 개수를 B_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{20}(A_n-B_n)$의 값은? [4점]

① 19 ② 21 ③ 23 ④ 25 ⑤ 27

18년 09월 21번 나형

22. 사차함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$에 대하여 $x\geq 0$에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_{-x}^{2x}\{f(t)-|f(t)|\}dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0<x<1$에서 $g(x)=c_1$ (c_1은 상수)
(나) $1<x<5$에서 $g(x)$는 감소한다.
(다) $x>5$에서 $g(x)=c_2$ (c_2는 상수)

$f(\sqrt{2})$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① 40 ② 42 ③ 44 ④ 46 ⑤ 48

17년 09월 21번 나형

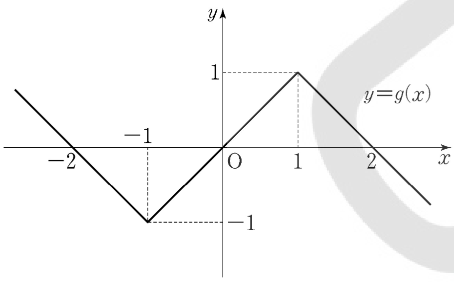
23. 실수 a, b, c와 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+a & (x<-1) \\ bx & (-1\le x<1) \\ x+c & (x\ge 1) \end{cases},$$

$$g(x)=|x+1|-|x-1|-x$$

에 대하여, 합성함수 $g\circ f$는 실수 전체의 집합에서 정의된 역함수를 갖는다. $a+b+2c$의 값은? [4점]

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2



17년 09월 30번 나형

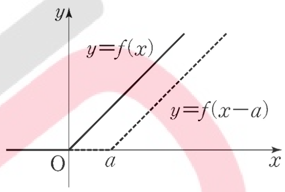
24. 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가

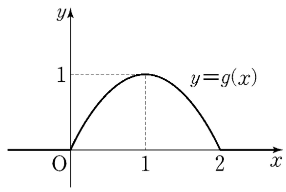
$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x\le 0) \\ x & (x>0) \end{cases}, \quad g(x)=\begin{cases} x(2-x) & (|x-1|\le 1) \\ 0 & (|x-1|>1) \end{cases}$$

이다. 양의 실수 k, a, b $(a<b<2)$에 대하여, 함수 $h(x)$를

$$h(x)=k\{f(x)-f(x-a)-f(x-b)+f(x-2)\}$$

라 정의하자. 모든 실수 x에 대하여 $0\le h(x)\le g(x)$일 때, $\int_0^2\{g(x)-h(x)\}dx$의 값이 최소가 되게 하는 k, a, b에 대하여 $60(k+a+b)$의 값을 구하시오. [4점]





수학 영역

17년 06월 29번 나형

25. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 수열 $\{b_n\}$은

$$b_1 = a_1$$

이고, 2이상의 자연수 n에 대하여

$$b_n = \begin{cases} b_{n-1}+a_n & (n\text{이 } 3\text{의 배수가 아닌 경우}) \\ b_{n-1}-a_n & (n\text{이 } 3\text{의 배수인 경우}) \end{cases}$$

이다. $b_{10}=a_{10}$일 때, $\frac{b_8}{b_{10}}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]