< 정답표>

1.	①	**2.**	④	**3.**	36	**4.**	②	**5.**	125
6.	①	**7.**	80	**8.**	83	**9.**	196	**10.**	50
11.	12	**12.**	①	**13.**	③	**14.**	25	**15.**	209
16.	243	**17.**	②	**18.**	①	**19.**	350	**20.**	②
21.	18	**22.**	②	**23.**	④	**24.**	21	**25.**	12

1

출제의도 : 조건부확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
동전의 앞면이 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 같을 사건을 A, 동전을 4번 던졌을 사건을 B라 하자.
이때, 사건 A가 일어나는 확률은

$$\mathrm{P}(A)$$
$$=\frac{6}{36}\times{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{30}{36}\times{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{6}\times\frac{3}{8}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{3+20}{48}$$
$$=\frac{23}{48}$$

또, 사건 A와 사건 B가 동시에 일어날 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{6}{36}\times{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$=\frac{1}{16}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$
$$=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{23}{48}}$$
$$=\frac{3}{23}$$

정답 ①

2

출제의도 : 함수의 그래프의 개형과 치환적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
함수 $y=f(x)$의 그래프가 닫힌 구간 $[0,1]$에서 x축과 만나는 점의 x좌표를 k라 하자.
곡선 $y=f(x)$와 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면

$\int_0^1 f(x)\,dx=2$에서

$-S_1+S_2=2$ …… ㉠

$\int_0^1 |f(x)|\,dx=2\sqrt{2}$에서

$S_1+S_2=2\sqrt{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$S_1=\sqrt{2}-1$, $S_2=\sqrt{2}+1$

(i) $0\le x\le k$인 경우

$F(x)=\int_0^x(-f(t))\,dt$이므로

$F'(x)=-f(x)$

$\int_0^k f(x)F(x)\,dx$에서

$F(x)=s$로 놓으면

$x=0$일 때 $s=0$,

$x=k$일 때 $s=\sqrt{2}-1$이고,

$F'(x)\frac{dx}{ds}=1$이므로

$\int_0^k f(x)F(x)\,dx$

$=\int_0^{\sqrt{2}-1}(-s)\,ds$

$=\left[-\frac{1}{2}s^2\right]_0^{\sqrt{2}-1}$

$=-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^2$

(ii) $k \le x \le 1$인 경우

$F(x)=(\sqrt{2}-1)\int_k^x f(t)\,dt$이므로

$F'(x)=f(x)$

$\int_k^1 f(x)F(x)\,dx$에서

$F(x)=s$로 놓으면

$x=k$일 때 $s=\sqrt{2}-1$,

$x=1$일 때 $s=2\sqrt{2}$이고,

$F'(x)\frac{dx}{ds}=1$이므로

$\int_k^1 f(x)F(x)\,dx$

$=\int_{\sqrt{2}-1}^{2\sqrt{2}} s\,ds$

$=\left[\frac{1}{2}s^2\right]_{\sqrt{2}-1}^{2\sqrt{2}}$

$=4-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^2$

(i), (ii)에서

$\int_0^1 f(x)F(x)\,dx$

$=\int_0^k f(x)F(x)\,dx+\int_k^1 f(x)F(x)\,dx$

$=-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^2+4-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^2$

$=4-(\sqrt{2}-1)^2$

$=4-(3-2\sqrt{2})$

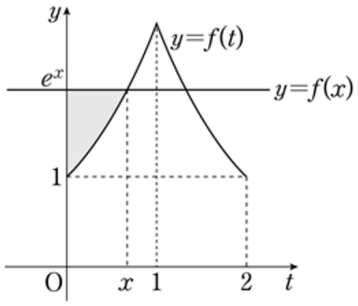
$=1+2\sqrt{2}$

정답 ④

3

[출제의도] 정적분으로 정의된 함수의 극댓값과 극솟값을 구하는 문제를 해결한다.

(i) $0<x\le 1$ 일 때,



그림에서 $0<t\le x$일 때, $f(x)\ge f(t)$이므로

$g(x)=\int_0^x |f(x)-f(t)|dt$

$=\int_0^x \{f(x)-f(t)\}dt$

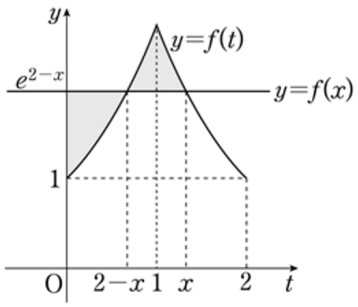
$=\int_0^x (e^x-e^t)dt$

$=\left[te^x-e^t\right]_0^x$

$=xe^x-e^x+1$

$=(x-1)e^x+1$

(ii) $1<x<2$일 때,



그림에서

$0<t<2-x$ 일 때, $f(x)\ge f(t)$

$2-x\le t<x$ 일 때, $f(x)\le f(t)$이므로

$g(x)=\int_0^x |f(x)-f(t)|dt$

$=\int_0^{2-x}\{f(x)-f(t)\}dt$

$+\int_{2-x}^x \{f(t)-f(x)\}dt$

위의 (i)에 의하여

$$\int_0^{2-x}\{f(x)-f(t)\}dt=(2-x-1)e^{2-x}+1$$
$$=(1-x)e^{2-x}+1$$

한편, 함수 $y=e^{2-x}$의 그래프는 함수 $y=e^x$의 그래프와 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로

$$\int_{2-x}^{x}\{f(t)-f(x)\}dt$$
$$=2\int_1^x\{f(t)-f(x)\}dt$$
$$=2\int_1^x\left(e^{2-t}-e^{2-x}\right)dt$$
$$=2\Big[-e^{2-t}-te^{2-x}\Big]_1^x$$
$$=2\{(-e^{2-x}-xe^{2-x})-(-e-e^{2-x})\}$$
$$=2e-2xe^{2-x}$$

따라서

$$g(x)=(1-x)e^{2-x}+1+2e-2xe^{2-x}$$
$$=(1-3x)e^{2-x}+2e+1$$

위의 (i), (ii)에서

$$g(x)=\begin{cases}(x-1)e^x+1 & (0<x\le 1)\\(1-3x)e^{2-x}+2e+1 & (1<x<2)\end{cases}$$ 이므로

$$g'(x)=\begin{cases}xe^x & (0<x<1)\\(3x-4)e^{2-x} & (1<x<2)\end{cases}$$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	(2)
$g'(x)$		$+$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

$$(\text{극댓값})=g(1)$$
$$=(1-1)e+1$$
$$=1$$
$$(\text{극솟값})=g\left(\frac{4}{3}\right)$$
$$=(1-4)e^{\frac{2}{3}}+2e+1$$
$$=2e-3e^{\frac{2}{3}}+1$$

함수 $g(x)$의 극댓값과 극솟값의 차는

$$1-\left(2e-3e^{\frac{2}{3}}+1\right)=-2e+3e^{\frac{2}{3}}$$
$$=-2e+3\sqrt[3]{e^2}$$

$a=-2,\ b=3$이므로

$(ab)^2=36$

4

출제의도 : 모평균의 신뢰구간을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

25명을 임의추출하여 구한 표본평균이 $\overline{x_1}$이므로

모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\overline{x_1}-1.96\times\frac{5}{\sqrt{25}}\le m\le\overline{x_1}+1.96\times\frac{5}{\sqrt{25}}$$
$$\overline{x_1}-1.96\le m\le\overline{x_1}+1.96$$

즉 $\overline{x_1}=80,\ a=1.96$

또, n명을 임의 추출하여 구한 표본평균이 $\overline{x_2}$이므로

모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\overline{x_2}-1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x_2}+1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}$$

따라서 $\overline{x_2}=\frac{15}{16}\overline{x_1}=\frac{15}{16}\times 80=75$이고,

$1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}=\frac{5}{7}a=\frac{5}{7}\times 1.96$에서 $n=49$

즉 $n+\overline{x_2}=49+75=124$

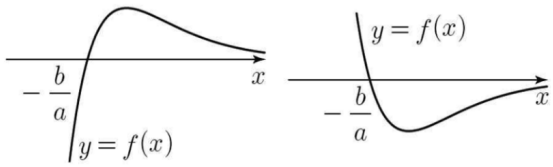
정답 ②

5

[출제의도] 정적분으로 나타내어진 함수 추론하기

함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

(ⅰ) $a>0$ (ⅱ) $a<0$



$g(x)=\int_0^x f(t)dt$ 에서 $g(0)=0$, $g'(x)=f(x)$

조건 (가)에 의하여 함수 $g(x)$는 $x=-\frac{b}{a}$ 에서 극댓값 α를 가지므로 $a<0$이고 $b>0$이다.

$g(x)-k\geq xf(x)$에서 $g(x)-xf(x)\geq k$이므로

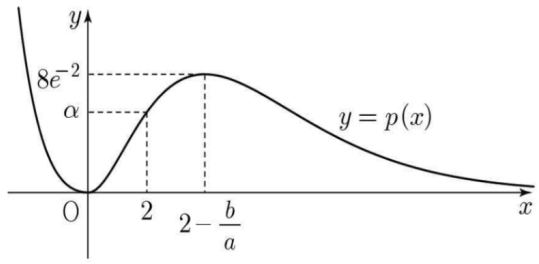
$p(x)=g(x)-xf(x)$라 하면

$p'(x)=g'(x)-f(x)-xf'(x)=-xf'(x)$

$f'(x)=-\frac{1}{2}a\left(x-2+\frac{b}{a}\right)e^{-\frac{x}{2}}$

$p'(x)=\frac{1}{2}ax\left(x-2+\frac{b}{a}\right)e^{-\frac{x}{2}}$

조건 (가), (나)를 만족시키는 함수 $p(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g\left(-\frac{b}{a}\right)=\alpha$, $f\left(-\frac{b}{a}\right)=0$에 의하여

$p\left(-\frac{b}{a}\right)=g\left(-\frac{b}{a}\right)-\left(-\frac{b}{a}\right)f\left(-\frac{b}{a}\right)=\alpha$

$2=-\frac{b}{a}$

$p(x)=g(x)-xf(x)\geq k$에서 양수 x의 범위에서 함수 $p(x)$의 최댓값은 $h(k)$의 값이 존재하는 k의 최댓값이므로 $p(4)=8e^{-2}$

$$g(4)=\int_0^4 a(t-2)e^{-\frac{t}{2}}dt$$
$$=\left[a(t-2)\left(-2e^{-\frac{t}{2}}\right)\right]_0^4-\int_0^4\left(-2ae^{-\frac{t}{2}}\right)dt$$
$$=-4ae^{-2}-4a-\left[4ae^{-\frac{t}{2}}\right]_0^4$$
$$=-4ae^{-2}-4a-4ae^{-2}+4a$$
$$=-8ae^{-2}$$

$$p(4)=g(4)-4f(4)$$
$$=-8ae^{-2}-4\times 2ae^{-2}$$
$$=-16ae^{-2}$$

$-16ae^{-2}=8e^{-2}$ 이므로 $a=-\frac{1}{2}$, $b=1$

따라서 $100(a^2+b^2)=125$

6

출제의도 : 이산확률변수의 평균에 관련된 추론문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :
자연수 $k(4 \le k \le n)$에 대하여 확률변수 X의 값이 k일 확률은 1부터 $k-1$가지의 자연수가 적혀 있는 카드 중에서 서로 다른 3장의 카드와 k가 적혀 있는 카드를 선택하는 경우의 수를 전체 경우의 수로 나누는 것이므로

$$\mathrm{P}(X=k)=\frac{\boxed{{}_{k-1}\mathrm{C}_3}}{{}_n\mathrm{C}_4}$$

이때, 자연수 $r(1 \le r \le k)$에 대하여

$${}_k\mathrm{C}_r=\frac{k}{r}\times{}_{k-1}\mathrm{C}_{r-1}$$

이 성립하므로 $r=4$를 대입하면

$${}_k\mathrm{C}_4=\frac{k}{4}\times{}_{k-1}\mathrm{C}_3$$

$$k\times\boxed{{}_{k-1}\mathrm{C}_3}=4\times\boxed{{}_k\mathrm{C}_4}$$

이다. 그러므로

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=4}^{n}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}$$

$$=\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_4}\sum_{k=4}^{n}\left(k\times\boxed{{}_{k-1}\mathrm{C}_3}\right)$$

$$=\frac{4}{{}_n\mathrm{C}_4}\sum_{k=4}^{n}\boxed{{}_k\mathrm{C}_4}$$

이다.

$$\sum_{k=4}^{n}\boxed{{}_k\mathrm{C}_4}={}_{n+1}\mathrm{C}_5$$

이므로

$$\mathrm{E}(X)=\frac{4}{{}_n\mathrm{C}_4}\times{}_{n+1}\mathrm{C}_5$$

$$=4\times\frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_5}{{}_n\mathrm{C}_4}$$

$$=4\times\frac{\dfrac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{5!}}{\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}}$$

$$=(n+1)\times\boxed{\frac{4}{5}}$$

따라서 $f(k)={}_{k-1}\mathrm{C}_3$, $g(k)={}_k\mathrm{C}_4$, $a=\frac{4}{5}$

이므로

$$a\times f(6)\times g(5)$$

$$=\frac{4}{5}\times{}_5\mathrm{C}_3\times{}_5\mathrm{C}_4$$

$$=\frac{4}{5}\times{}_5\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_1$$

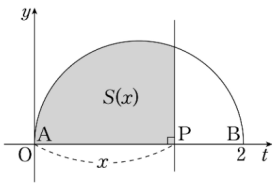
$$=\frac{4}{5}\times10\times5$$

$$=40$$

정답 ①

7

[출제의도] 함수를 구하여 정적분과 관련된 문제를 해결한다.



$S(x)=\int_0^x \sqrt{1-(t-1)^2}\,dt$ 이므로 $S'(x)=\sqrt{1-(x-1)^2}$

$f(\theta)=S(1+\sin\theta)-S(1+\cos\theta)$ 라 하면

$f'(\theta)=S'(1+\sin\theta)\cos\theta+S'(1+\cos\theta)\sin\theta$

$=\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta+\sqrt{1-\cos^2\theta}\cos\theta$

$=|\cos\theta|\cos\theta+|\sin\theta|\sin\theta$

(i) $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$ 일 때,

$f'(\theta)=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ 이므로 $f(\theta)=\theta+C_1$ (C_1 은 적분상수)

$f(0)=S(1)-S(2)=-\frac{\pi}{4}$ 이므로 $C_1=-\frac{\pi}{4}$

따라서 $f(\theta)=\theta-\frac{\pi}{4}$

(ii) $\frac{\pi}{2}\le\theta<\pi$ 일 때,

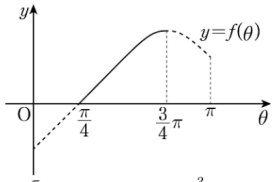
$f'(\theta)=-\cos^2\theta+\sin^2\theta=-\cos2\theta$ 이므로

$f(\theta)=-\frac{1}{2}\sin2\theta+C_2$ (C_2 는 적분상수)

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=S(2)-S(1)=\frac{\pi}{4}$ 이므로 $C_2=\frac{\pi}{4}$

따라서 $f(\theta)=-\frac{1}{2}\sin2\theta+\frac{\pi}{4}$

(i), (ii)에 의해 $y=f(\theta)$ 의 구간 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right]$ 에서의 그래프는 그림의 실선 부분이다.



$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} f(\theta)\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)d\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}\left(-\frac{1}{2}\sin2\theta+\frac{\pi}{4}\right)d\theta$$

$$=\left[\frac{1}{2}\theta^2-\frac{\pi}{4}\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+\left[\frac{1}{4}\cos2\theta+\frac{\pi}{4}\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{3}{32}\pi^2$$

따라서 $p=\frac{1}{4}$, $q=\frac{3}{32}$ 이므로 $\frac{30p}{q}=80$

8

출제의도 : 정적분의 성질을 이용하여 함수식을 만족시키는 상수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)

$$\int_x^{x+a} f(t)dt=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x+a)-f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ ⋯ ㉠

이 식의 양변에 $x=-\frac{a}{2}$를 대입하면

$f\left(\frac{a}{2}\right)-f\left(-\frac{a}{2}\right)=\cos\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

조건 (가)에서 의해

$f\left(\frac{a}{2}\right)=f\left(-\frac{a}{2}\right)$이므로

$\cos\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=0$

$0<a<2\pi$에서

$-\frac{2}{3}\pi\le-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{3}$

이므로

$-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}$

따라서 $a=\frac{5\pi}{3}$

㉠에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x+a)-f'(x)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

이 식에 $x=-\frac{a}{2}$를 대입하면

$f'\left(\frac{a}{2}\right)-f'\left(-\frac{a}{2}\right)=-\sin\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

이때, 조건 (가) $f(x)=f(-x)$에서
$f'(x)=-f'(-x)$이므로

$$2f'\left(\frac{a}{2}\right)=-\sin\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$a=\frac{5}{3}\pi$이므로

$$2f'\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\sin\left(-\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1$$

$$f'\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\ \cdots ㉡$$

$f(x)=b\cos(3x)+c\cos(5x)$에서
$f'(x)=-3b\sin(3x)-5c\sin(5x)$

$$f'\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-3b\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)-5c\sin\left(\frac{25\pi}{6}\right)$$

$$=-3b-\frac{5c}{2}=\frac{1}{2}$$

$-6b-5c=1\ \cdots ㉢$

한편,

$$\int_{x}^{x+a}f(t)dt=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

의 양변에 $x=-\frac{a}{2}$를 대입하면

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}f(t)dt=\sin\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

조건 (가)에서 함수 $f(x)$의 그래프는
y축에 대하여 대칭이므로

$$2\int_{0}^{\frac{a}{2}}f(t)dt=\sin\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$2\int_{0}^{\frac{a}{2}}\{b\cos(3t)+c\cos(5t)\}dt$$

$$=2\left[\frac{b}{3}\sin(3t)+\frac{c}{5}\sin(5t)\right]_{0}^{\frac{a}{2}}$$

$$=2\left\{\frac{b}{3}\sin\left(\frac{3a}{2}\right)+\frac{c}{5}\sin\left(\frac{5a}{2}\right)\right\}$$

$$=\sin\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

양변에 $a=\frac{5\pi}{3}$을 대입하면

$$2\left\{\frac{b}{3}\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)+\frac{c}{5}\sin\left(\frac{25\pi}{6}\right)\right\}$$

$$=\sin\left(-\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$2\left(\frac{b}{3}+\frac{c}{5}\times\frac{1}{2}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$$

$$\frac{2}{3}b+\frac{c}{5}=-1$$

$10b+3c=-15\cdots ㉣$

㉢, ㉣에서

$b=-\frac{9}{4}$, $c=\frac{5}{2}$

따라서

$$abc=\frac{5\pi}{3}\times\left(-\frac{9}{4}\right)\times\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$=-\frac{75}{8}\pi$$

$p=8$, $q=75$이므로
$p+q=83$

정답 83

9

출제의도 : 표본비율을 이용하여 모비율에 대한 신뢰구간을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

n명을 임의추출하여 얻은 표본비율을 $\hat{p}$이라 하면

$\hat{p}=\frac{1}{2}$

모비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이

$$\frac{1}{2}-1.96\times\frac{\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}}{\sqrt{n}}\le p$$

$$\le\frac{1}{2}+1.96\times\frac{\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}}{\sqrt{n}}$$

이므로 $b-a=2\times1.96\times\frac{\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}}{\sqrt{n}}$

$$=\frac{1.96}{\sqrt{n}}$$

따라서 $\frac{1.96}{\sqrt{n}}=0.14$에서 $\sqrt{n}=14$이므로

$n=196$

정답 196

10

출제의도 : 조건부확률을 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 을이 꺼낸 카드에 적힌 수보다 큰 사건을 E, 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 을과 병이 꺼낸 카드에 적힌 수의 합보다 큰 사건을 F라 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(F\mid E)=\frac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(E)}$이다.

갑, 을, 병이 한 장씩 카드를 꺼내는 경우의 수는

$6\times3\times3=54$

갑, 을, 병이 꺼낸 카드에 적힌 수를 각각 a, b, c라 하면

$a\le b$인 경우를 순서쌍 (a, b)로 나타내면

$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 3)$

의 6가지이므로

$\mathrm{P}(E)=1-\frac{6\times3}{54}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

한편, $a>b+c$인 경우는

$a=3, b=1$일 때 $c=1$

$a=4, b=1$일 때 $c=1, 2$

$a=4, b=2$일 때 $c=1$

$a=5, b=1$일 때 $c=1, 2, 3$

$a=5, b=2$일 때 $c=1, 2$

$a=5, b=3$일 때 $c=1$

$a=6, b=1$일 때 $c=1, 2, 3$

$a=6,\ b=2$일 때 $c=1,\ 2,\ 3$

$a=6,\ b=3$일 때 $c=1,\ 2$

의 18가지이므로

$\mathrm{P}(E\cap F)=\dfrac{18}{54}=\dfrac{1}{3}$

따라서

$k=\mathrm{P}(F\mid E)=\dfrac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(E)}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{2}$이므로

$100k=100\times\dfrac{1}{2}=50$

정답 50

11

출제의도 : 함수의 그래프와 정적분의 성질을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=a\sin^3x+b\sin x$ 에서

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}a+\dfrac{\sqrt{2}}{2}b=3\sqrt{2}$ 이므로

$a+2b=12$ … ㉠

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}a+\dfrac{\sqrt{3}}{2}b=5\sqrt{3}$ 이므로

$3a+4b=40$ … ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$a=16,\ b=-2$

따라서 $f(x)=16\sin^3x-2\sin x$이므로

함수 $f(x)$의 주기는 2π이고,

함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (n은 정수)에 대하여 대칭이다.

이때

$f'(x)=48\sin^2x\cos x-2\cos x$

$\quad=2\cos x(24\sin^2x-1)=0$

이므로 $f'(x)=0$에서

$\cos x=0$ 또는 $\sin x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{12}$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 14이거나 1보다 작으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $1<t<14$인 실수 t에 대하여

$1<f(x_n)<14$이고,

$x_n=(n-1)\pi+(-1)^{n-1}x_1$

(i) n이 홀수일 때

$f'(x_n)=f'(x_1)$이므로

$c_n = \int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}} \frac{t}{f'(x_n)} dt = \int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}} \frac{t}{f'(x_1)} dt$

(ii) n이 짝수일 때

$f'(x_n) = -f'(x_1)$이므로

$c_n = \int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}} \frac{t}{f'(x_n)} dt = -\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}} \frac{t}{f'(x_1)} dt$

(i), (ii)에서

$c_1 + c_2 = c_3 + c_4 = \cdots = c_{99} + c_{100} = 0$이므로

$\sum_{n=1}^{101} c_n = c_{101} = c_1$

이제 $c_1 = \int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}} \frac{t}{f'(x_1)} dt$의 값을 구하자.

$\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{3}$에서 함수 $g(x)$를

$g(x) = f(x)$로 정의하면 함수 $y = g(x)$는

일대일대응이므로 $h = g^{-1}$라 하자.

$f(x_1) = t$에서 $g(x_1) = t$이므로

$h(t) = x_1$

따라서 역함수의 미분법에 의해

$\frac{1}{f'(x_1)} = \frac{1}{g'(x_1)} = h'(t)$

이므로

$c_1 = \int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}} \frac{t}{f'(x_1)} dt = \int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}} t\,h'(t) dt$

이때 $h(t) = y$라 하면 $t = g(y) = f(y)$이고,

$t = 3\sqrt{2}$일 때 $y = \frac{\pi}{4}$ $\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}\right.$이므로)

$t = 5\sqrt{3}$일 때 $y = \frac{\pi}{3}$ $\left(f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 5\sqrt{3}\right.$이므로)

한편, $h(t) = y$에서 $\frac{dy}{dt} = h'(t)$이다.

따라서

$\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}} t\,h'(t) dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f(y) dy$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (16\sin^3 x - 2\sin x) dx$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \{16\sin x(1 - \cos^2 x) - 2\sin x\} dx$

$= 14\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx - 16\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos^2 x dx$

$= 14[-\cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} - 16\left[-\frac{1}{3}\cos^3 x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$

$= 14\left(-\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4}\right)$

$+ \frac{16}{3}\left(\cos^3\frac{\pi}{3} - \cos^3\frac{\pi}{4}\right)$

$= 14\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{16}{3}\left(\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

$= -7 + 7\sqrt{2} + \frac{2}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3}$

$= -\frac{19}{3} + \frac{17\sqrt{2}}{3}$

이므로

$c_1 = -\frac{19}{3} + \frac{17\sqrt{2}}{3}$

따라서

$\sum_{n=1}^{101} c_n = c_{101} = c_1 = -\frac{19}{3} + \frac{17\sqrt{2}}{3}$

따라서 $p = -\frac{19}{3}$, $q = \frac{17}{3}$이므로

$q - p = \frac{17 + 19}{3} = 12$

정답 12

12

출제의도 : 확률질량함수에 관한 추론 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

(i) $X=3$인 사건은 주머니에 무게가 2인 추 3개가 들어 있는 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=3)=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\boxed{\frac{8}{27}}$$

(ii) $X=4$인 사건은
세 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 4이고 네 번째 시행에서 무게가 2인 추를 넣는 경우와 세 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5인 추를 넣는 경우로 나눌 수 있다. 그러므로

$$\mathrm{P}(X=4)={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)\times\frac{2}{3}$$
$$+\ {}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2$$
$$\mathrm{P}(X=4)=\boxed{\frac{4}{27}}+\ {}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

(iii) $X=5$인 사건은
네 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 4이고 다섯 번째 시행에서 무게가 2인 추를 넣는 경우와 네 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5인 경우로 나눌 수 있다. 그러므로

$$\mathrm{P}(X=5)={}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0\times\frac{2}{3}\ +\ {}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1$$
$$\mathrm{P}(X=5)={}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0\times\frac{2}{3}\ +\ \boxed{\frac{8}{81}}$$

(iv) $X=6$인 사건은
다섯 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5인 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=6)=\left(\frac{1}{3}\right)^5$$

이상에서

$$a=\frac{8}{27},\ b=\frac{4}{27},\ c=\frac{8}{81}$$

이다.
따라서

$$\frac{ab}{c}=\frac{\frac{8}{27}\times\frac{4}{27}}{\frac{8}{81}}=\frac{4}{9}$$

정답 ①

13

[출제의도] 확률변수의 평균을 구하는 과정 추론하기

공에 번호를 부여하는 모든 경우의 수를 N이라 하면 N은 서로 같은 흰 공 4개와 서로 같은 검은 공 3개를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$N=\boxed{35}$ 이고, 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5이다.

(i) $X=2$일 때,

번호 2가 부여된 흰 공 앞에 흰 공 1개, 번호 2가 부여된 흰 공 뒤에 흰 공 2개와 검은 공 3개를 나열하는 경우의 수는 $1\times\frac{5!}{2!\times3!}$ 이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{10}{N}$

(ii) $X=3$일 때,

번호 3이 부여된 흰 공 앞에 흰 공 1개와 검은 공 1개, 번호 3이 부여된 흰 공 뒤에 흰 공 2개와 검은 공 2개를 나열하는 경우의 수는 $2!\times\frac{4!}{2!\times2!}$ 이므로

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{12}{N}$

(iii) $X=4$일 때,

번호 4가 부여된 흰 공 앞에 흰 공 1개와 검은 공 2개, 번호 4가 부여된 흰 공 뒤에 흰 공 2개와 검은 공 1개를 나열하는 경우의 수는 $\boxed{9}$ 이므로

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{\boxed{9}}{N}$

(iv) $X=5$일 때,

확률질량함수의 성질에 의하여

$\mathrm{P}(X=5)=1-\{\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)\}$

따라서 $\mathrm{E}(X)=\sum_{k=2}^{5}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}=\boxed{\frac{16}{5}}$

$a=\frac{7!}{4!\times3!}=35$, $b=\frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!}=9$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{10}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

$c=2\times\frac{10}{35}+3\times\frac{12}{35}+4\times\frac{9}{35}+5\times\frac{4}{35}=\frac{16}{5}$

따라서 $a+b+5c=60$

14

출제의도 : 모평균의 신뢰구간을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이

$\bar{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{49}}\le m\le\bar{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{49}}$

이므로

$\bar{x}-1.96\times\frac{\sigma}{7}=1.73$ …… ㉠

$\bar{x}+1.96\times\frac{\sigma}{7}=1.87$ …… ㉡

㉠+㉡에서

$2\bar{x}=3.6$이므로 $\bar{x}=1.8$

㉡−㉠에서

$2\times1.96\times\frac{\sigma}{7}=0.14$이므로 $\sigma=0.25$

따라서 $k=\frac{0.25}{1.8}=\frac{5}{36}$이므로

$180k=180\times\frac{5}{36}=25$

정답 25

15

[출제의도] 순열과 조합을 활용하여 문제해결하기

집합 Y의 원소들을 3으로 나누었을 때의 나머지가 같은 수들을 원소로 하는 집합 Y의 부분집합을 각각 $A=\{1, 4\}$, $B=\{2, 5\}$, $C=\{3\}$이라 하자.

(i) $f(4)=3$인 경우

$f(1)+f(2)+f(3)=3k$(k는 자연수)이므로
집합 A, B, C의 원소 중에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값으로 선택할 수 있는 원소의 개수와 각 경우의 함수의 개수는 표와 같다.

A	B	C	함수의 개수
1	1	1	$3!\times 2\times 2=24$
3	0	0	$2^3=8$
0	3	0	$2^3=8$
0	0	3	$1^3=1$

$\therefore\ 24+8+8+1=41$

(ii) $f(4)=1$ 또는 $f(4)=4$인 경우

$f(1)+f(2)+f(3)=3k+1$(k는 자연수)이므로
집합 A, B, C의 원소 중에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값으로 선택할 수 있는 원소의 개수와 각 경우의 함수의 개수는 표와 같다.

A	B	C	함수의 개수
1	0	2	$3\times 2=6$
2	1	0	$3\times 2^2\times 2=24$
0	2	1	$3\times 2^2=12$

$\therefore\ 2\times(6+24+12)=84$

(iii) $f(4)=2$ 또는 $f(4)=5$인 경우

$f(1)+f(2)+f(3)=3k+2$(k는 자연수)이므로
집합 A, B, C의 원소 중에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값으로 선택할 수 있는 원소의 개수와 각 경우의 함수의 개수는 표와 같다.

A	B	C	함수의 개수
1	2	0	$3\times 2^2\times 2=24$
2	0	1	$3\times 2^2=12$
0	1	2	$3\times 2=6$

$\therefore\ 2\times(24+12+6)=84$

따라서 구하는 함수의 개수는 $41+84+84=209$

【 다른 풀이 】

(i) $f(4)=3$인 경우

집합 Y의 원소 중 중복을 허락하여 선택한 세 수들의 합을 3으로 나눈 나머지가 0이 되는 수들의 순서쌍은
$(1, 1, 1)$, $(2, 2, 2)$, $(3, 3, 3)$, $(4, 4, 4)$, $(5, 5, 5)$와
$(1, 1, 4)$, $(1, 4, 4)$, $(2, 2, 5)$, $(2, 5, 5)$와
$(1, 2, 3)$, $(1, 3, 5)$, $(2, 3, 4)$, $(3, 4, 5)$이고,
각 순서쌍을 이루는 수들을 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$이 되도록 나열하는 방법의 수는

$5\times\frac{3!}{3!}+4\times\frac{3!}{2!}+4\times 3!=41$

(ii) $f(4)=1$ 또는 $f(4)=4$인 경우

집합 Y의 원소 중 중복을 허락하여 선택한 세 수들의 합을 3으로 나눈 나머지가 1이 되는 수들의 순서쌍은
$(1, 1, 2)$, $(1, 1, 5)$, $(1, 3, 3)$, $(2, 2, 3)$, $(2, 4, 4)$,
$(3, 3, 4)$, $(3, 5, 5)$, $(4, 4, 5)$와
$(1, 2, 4)$, $(1, 4, 5)$, $(2, 3, 5)$이고,
각 순서쌍을 이루는 수들을
$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$이 되도록 나열하는 방법의 수는

$8\times\frac{3!}{2!}+3\times 3!=42$

$\therefore\ 42\times 2=84$

(iii) $f(4)=2$ 또는 $f(4)=5$인 경우

집합 Y의 원소 중 중복을 허락하여 선택한 세 수들의 합을 3으로 나눈 나머지가 2가 되는 수들의 순서쌍은
$(1, 1, 3)$, $(1, 2, 2)$, $(1, 5, 5)$, $(2, 2, 4)$, $(2, 3, 3)$,
$(3, 3, 5)$, $(3, 4, 4)$, $(4, 5, 5)$와
$(1, 2, 5)$, $(1, 3, 4)$, $(2, 4, 5)$이고,
각 순서쌍을 이루는 수들을
$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$이 되도록 나열하는 방법의 수는

$8\times\frac{3!}{2!}+3\times 3!=42$

$\therefore\ 42\times 2=84$

따라서 구하는 함수의 개수는 $41+84+84=209$

16

[출제의도] 이항정리를 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

a_{p+1}부터 a_9까지의 $(9-p)$개의 수 중에서 최솟값은 a_q, 즉 $a_q=1$, 9는 $a_p=8$보다 큰 수이므로 최댓값은 $a_9=9$이다.

ⅰ) 첫 번째와 p번째 사이의 공을 꺼내는 경우의 수는 $a_1=2$, $a_p=8$, $a_q=1$, $a_9=9$가 적힌 공을 제외한 5개의 공 중에서 $(p-2)$개의 공을 꺼내는 조합의 수이므로 ${}_5\mathrm{C}_{p-2}$이다.

ⅱ) ⅰ)에서 남아 있는 공 중 p번째와 q번째 사이의 공을 꺼내는 경우의 수는 $a_q=1$, $a_9=9$가 적힌 공을 제외한 $(9-p-2)=(7-p)$개의 공 중에서 $(q-p-1)$개의 공을 꺼내는 조합의 수이므로 ${}_{7-p}\mathrm{C}_{q-p-1}$이다.

ⅲ) ⅰ)과 ⅱ)의 과정을 거치면 q번째와 9번째 사이의 공은 정해진다.

이때, p가 정해지면 q가 취할 수 있는 값은 $p+1$부터 8까지이므로 ⅱ)에 의해 $\sum_{q=p+1}^{8} {}_{7-p}\mathrm{C}_{q-p-1}$

$q-p-1=k$로 놓으면

$q=p+1$일 때 $k=0$이고,

$q=8$일 때 $k=7-p$이므로

$$\sum_{q=p+1}^{8} {}_{7-p}\mathrm{C}_{q-p-1}=\sum_{k=0}^{7-p} {}_{7-p}\mathrm{C}_k=(1+1)^{7-p}=2^{7-p}$$

p의 값은 2부터 7까지 취할 수 있다.

그러므로 구하는 값은 ⅰ)에 의해 $\sum_{p=2}^{7} {}_5\mathrm{C}_{p-2}2^{7-p}$

따라서 $p-2=r$로 놓으면

$p=2$일 때 $r=0$이고, $p=7$일 때 $r=5$이므로

$$\sum_{p=2}^{7} {}_5\mathrm{C}_{p-2}2^{7-p}=\sum_{r=0}^{5} {}_5\mathrm{C}_r 2^{5-r}=(2+1)^5=243$$

[다른 풀이]

구하는 경우의 수는 $a_1=2$, $a_p=8$, $a_q=1$, $a_9=9$가 적힌 4개의 공을 제외한 5개의 공을 첫 번째와 p번째 사이, p번째와 q번째 사이, q번째와 9번째 사이로 나누는 경우의 수와 같다. 그러므로

$$\begin{aligned}
&{}_5\mathrm{C}_0\times({}_5\mathrm{C}_0\cdot{}_5\mathrm{C}_5+{}_5\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_4+{}_5\mathrm{C}_2\cdot{}_3\mathrm{C}_3\\
&\qquad+{}_5\mathrm{C}_3\cdot{}_2\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_4\cdot{}_1\mathrm{C}_1+{}_5\mathrm{C}_5\cdot 1)\\
&+{}_5\mathrm{C}_1\times({}_4\mathrm{C}_0\cdot{}_4\mathrm{C}_4+{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_3+{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_2\\
&\qquad+{}_4\mathrm{C}_3\cdot{}_1\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_4\cdot 1)\\
&+{}_5\mathrm{C}_2\times({}_3\mathrm{C}_0\cdot{}_3\mathrm{C}_3+{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_1\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_3\cdot 1)\\
&+{}_5\mathrm{C}_3\times({}_2\mathrm{C}_0\cdot{}_2\mathrm{C}_2+{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_1\mathrm{C}_1+{}_2\mathrm{C}_2\cdot 1)\\
&+{}_5\mathrm{C}_4\times({}_1\mathrm{C}_0\cdot{}_1\mathrm{C}_1+{}_1\mathrm{C}_1\cdot 1)\\
&+{}_5\mathrm{C}_5\times(1\cdot 1)=243
\end{aligned}$$

[다른 풀이]

a_{p+1}부터 a_9까지의 $(9-p)$개의 수 중에서 최솟값은 a_q, 즉 $a_q=1$, 9는 $a_p=8$보다 큰 수이므로 최댓값은 $a_9=9$이다. 3이 적힌 공을 꺼내는 경우는 첫 번째와 p번째 사이, p번째와 q번째 사이, q번째와 9번째 사이 중 하나이므로 그 경우의 수는 3이다. 4, 5, 6, 7이 적힌 공을 꺼내는 경우의 수도 같은 방법으로 생각하면 각각 3이다. 따라서 구하는 경우의 수는 $3^5=243$이다.

17

출제의도 : 이산확률변수의 평균을 구하는 과정에서 빈칸을 추론할 수 있는가?

정답풀이 :
세 점 $(x+1, y)$, $(x, y+1)$, $(x+1, y+1)$로 이동하는 것을 각각 A, B, C로 나타내면
점 $(0, 0)$에서 점 $(4, 3)$까지 이동하는 횟수가 최소인 경우는
A, C, C, C를 일렬로 나열하는 경우이므로
$k=\boxed{4}$
이동하는 횟수가 6인 경우는
C, A, A, A, B, B를 일렬로 나열하는 경우이므로
$\frac{6!}{3!\times 2!}=60$
에서 $\mathrm{P}(X=6)=\frac{1}{N}\times\boxed{60}$
이때, 확률의 총합이 1이므로
$\frac{4+30+60+35}{N}=1$
에서 $N=\boxed{129}$
따라서
$a+b+c=4+60+129=193$

정답 ②

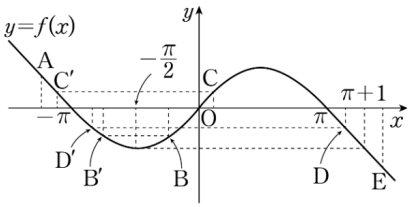
18

[출제의도] 조건부확률을 활용하여 문제해결하기
5번째까지 시행을 한 후 시행을 멈추려면
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7의 숫자가 적혀 있는 7개의 공에서 4번째 시행까지 2개의 홀수가 적혀 있는 공과 2개의 짝수가 적혀 있는 공을 꺼내고 5번째의 시행에 짝수가 적혀 있는 공을 꺼내야 한다.
홀수, 홀수, 짝수, 짝수를 배열하는 경우의 수는
$\frac{4!}{2!2!}=6$
(홀, 홀, 짝, 짝)의 순서로 공을 꺼낼 확률은
$\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$
나머지 5가지 배열의 확률도 동일하다.
5번째에 짝수가 적혀 있는 공을 꺼낼
확률은 $\frac{1}{3}$이므로
구하는 확률은 $6\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{6}{35}$

19

[출제의도] 삼각함수의 성질과 정적분을 이용하여 문제를 해결한다.

부등식 $f(x) \le f(t)$를 만족시키는 x의 범위는 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=f(t)$와 만나거나 아래쪽에 그려지는 실수 x의 범위와 같다. 따라서 직선 $y=f(t)$와 곡선 $y=f(x)$가 만나는 점의 x좌표 중 가장 작은 값이 $g(t)$이다.



(i) $t \le -\frac{\pi}{2}$일 때

점 A의 x좌표가 t일 때, 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 그래프와 만나는 점 중 x좌표가 가장 작은 점은 A이다.

따라서 $g(t)=t$이다.

(ii) $-\frac{\pi}{2} < t \le 0$일 때

점 B의 x좌표가 t일 때, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 그래프와 만나는 점 중 x좌표가 가장 작은 점은 B′이다.

따라서 점 B′의 x좌표가 $g(t)$이다.

두 점 B, B′은 직선 $x=-\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로

$\frac{t+g(t)}{2}=-\frac{\pi}{2}$에서 $g(t)=-t-\pi$이다.

(iii) $0 < t \le \pi$일 때

점 C의 x좌표가 t일 때, 점 C를 지나고 x축에 평행한 직선이 그래프와 만나는 점 중 x좌표가 가장 작은 점은 C′이다.

따라서 점 C′의 x좌표가 $g(t)$이다.

점 C는 곡선 $y=\sin x$ 위의 점이고 점 C′은 직선 $y=-x-\pi$ 위의 점이므로

$\sin t=-g(t)-\pi$에서 $g(t)=-\sin t-\pi$이다.

(iv) $\pi < t \le \pi+1$일 때

점 D의 x좌표가 t일 때, 점 D를 지나고 x축에 평행한 직선이 그래프와 만나는 점 중 x좌표가 가장 작은 점은 D′이다.

따라서 점 D′의 x좌표가 $g(t)$이다.

점 D는 직선 $y=-x+\pi$ 위의 점이고 점 D′은 곡선 $y=\sin x$ 위의 점이므로

$-t+\pi=\sin g(t)$이다.

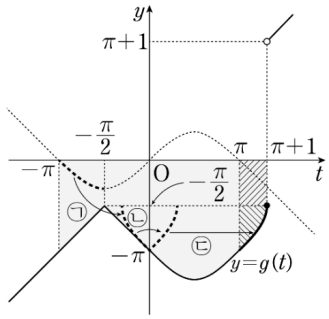
함수 $y=\sin x\left(-\pi \le x \le -\frac{\pi}{2}\right)$의 역함수를 $h(x)$라 하면 $g(t)=h(-t+\pi)$이다.

(v) $t > \pi+1$일 때

점 E의 x좌표가 t일 때, 점 E를 지나고 x축에 평행한 직선이 그래프와 만나는 점 중 x좌표가 가장 작은 점은 E이다.

따라서 $g(t)=t$이다.

함수 $g(t)$는 $t=\pi+1$에서 불연속이므로 $\alpha=\pi+1$이고 그래프는 그림과 같다.



$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,dt$$

$$=\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}+\left[-\frac{t^2}{2}-\pi t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}+\left[\cos t-\pi t\right]_{0}^{\pi}$$

$$=-\frac{7}{4}\pi^2-2$$

한편 위의 그림에서

$y=\sin t\left(-\pi \le t \le -\frac{\pi}{2}\right)$

$\xrightarrow[\text{직선 } y=t \text{ 대칭}]{㉠} y=h(t)$

$\xrightarrow[y\text{축 대칭}]{㉡} y=h(-t)$

$\xrightarrow[\text{평행이동}]{㉢} y=h(-t+\pi)$

이므로

$\int_{\pi}^{\alpha} g(t)dt = -(\text{빗금 친 부분의 넓이})$

$= -\left(1\times\frac{\pi}{2}+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt\right) = -\frac{1}{2}\pi-1$

따라서 $\int_{-\pi}^{\alpha} g(t)\,dt = -\frac{7}{4}\pi^2-\frac{1}{2}\pi-3$

$p=-\frac{1}{2}$, $q=-3$이므로 $100\times|p+q| = 350$

20

[출제의도] 확률변수의 평균을 구하는 과정 추론하기

세 수 x_1, x_2, x_3을 순서쌍 (x_1, x_2, x_3)과 같이 나타내자.

x_1, x_2, x_3 중에서 최댓값을 p, 최솟값을 q, 나머지 수를 r, $p-q=k$ $(k=0,1,\cdots,5)$라 하면 순서쌍 (x_1, x_2, x_3)의 개수는 p, q, r를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같다.

(1) $k=0$일 때

세 수가 모두 같으므로

순서쌍 (x_1, x_2, x_3)의 개수는 $\boxed{6}$이고,

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{6^3}\times\boxed{6}$

(2) $k\neq 0$일 때 $(1\le k\le 5)$

순서쌍 (p, q)의 개수는 각각의 k에 대하여 $6-k$이고

i) $k=1$일 때

순서쌍 (x_1, x_2, x_3)의 개수는

$5\times\left(\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}\right)$

ii) $2\le k\le 5$일 때

① $r=p$ 또는 $r=q$인 경우

p, p, q와 p, q, q를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}$

② $r\neq p$이고 $r\neq q$인 경우

r의 개수는 각각의 k에 대하여 $k-1$이고

p, r, q를 일렬로 나열하는 방법의 수는

${}_3\mathrm{P}_3=3!$이므로 $(k-1)\times 3!$

①, ②에 의하여

순서쌍 (x_1, x_2, x_3)의 개수는

$(6-k)\times\left\{\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}+(k-1)\times 3!\right\}$

그러므로 $1\le k\le 5$일 때,

순서쌍 (x_1, x_2, x_3)의 개수는

$(6-k)\times\left\{\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}+(\boxed{k-1})\times 3!\right\}$

(예를 들어)
$k=3$ 인 경우
(p, r, q)는 $(4, r, 1)$, $(5, r, 2)$, $(6, r, 3)$
이므로 개수는 3
(p, r, q)가 $(4, r, 1)$일 때
① $r=4$ 또는 $r=1$인 경우
4, 4, 1과 4, 1, 1을 일렬로 나열하는
방법의 수는 $\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}$
② $r \neq 4$이고 $r \neq 1$인 경우
r는 3 또는 2이므로 r의 개수는 2
p, r, q를 일렬로 나열하는 방법의 수는
${}_3\mathrm{P}_3 = 3!$이므로 $2 \times 3!$
①, ②에 의하여
4, r, 1을 일렬로 나열하는 방법의 수는
$\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}+2\times 3!$
$(5, r, 2)$, $(6, r, 3)$일 때에도 같은 방법으로
구하면 각각 $\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}+2\times 3!$
그러므로 $k=3$인 경우
순서쌍 (x_1, x_2, x_3)의 개수는
$3\times\left(\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}+2\times 3!\right)$

그러므로
$\mathrm{P}(X=k)$
$=\frac{1}{6^3}\times(6-k)\times\left\{\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}+(\boxed{k-1})\times 3!\right\}$
(1), (2)에 의하여 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$는 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=0}^{5}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}$$
$$=\frac{1}{6^2}\sum_{k=1}^{5}\left(\boxed{6k^2-k^3}\right)=\frac{35}{12}$$

$a=6$, $f(k)=k-1$, $g(k)=6k^2-k^3$
따라서 $\frac{f(5)\times g(3)}{a}=\frac{4\times 27}{6}=18$

21

[출제의도] 확률의 곱셈정리를 활용하여 문제해결하기

A가 꺼낸 사탕이 딸기 맛 사탕일 사건을 E,
B가 꺼낸 사탕이 포도 맛 사탕일 사건을 F라 하면
$\mathrm{P}(E)=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(F|E)=\frac{9}{14}$
그러므로
$p=\mathrm{P}(E\cap F)=\mathrm{P}(E)\mathrm{P}(F|E)=\frac{2}{5}\times\frac{9}{14}=\frac{9}{35}$
따라서 $70p=18$

22

[출제의도] 모비율의 신뢰구간을 이해하여 실생활과 관련된 문제를 해결한다.

표본비율 $\hat{p}=\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$이고 표본의 크기는 100이므로 출근 소요 시간이 60분 이상 120분 미만인 직원의 비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\frac{4}{5}-1.96\times\sqrt{\frac{\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}{100}}\le p\le\frac{4}{5}+1.96\times\sqrt{\frac{\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}{100}}$$

$$5000(b-a)=5000\times 2\times 1.96\times\sqrt{\frac{\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}{100}}$$
$$=5000\times 2\times 1.96\times\frac{4}{100}$$
$$=784$$

23

[출제의도] 정적분의 적분법을 이용하여 정적분의 값을 추론한다.

ㄱ. (가)의 $F(x)=f(x)-x$를 (나)의 $F(x)$에 대입하면

$$\int_0^1 F(x)\,dx=\int_0^1\{f(x)-x\}dx$$
$$=\int_0^1 f(x)\,dx-\int_0^1 x\,dx$$
$$=\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{2}$$
$$=F(1)-\frac{1}{2}$$

이므로 $F(1)=e-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=e-2$ (거짓)

ㄴ. (가)의 $F(x)=f(x)-x$를 $\int_0^1 xF(x)dx$의 $F(x)$에 대입하면

$$\int_0^1 xF(x)dx=\int_0^1 x\{f(x)-x\}dx$$
$$=\int_0^1\{xf(x)-x^2\}dx$$
$$=\int_0^1 xf(x)\,dx-\int_0^1 x^2\,dx$$
$$=\Big[xF(x)\Big]_0^1-\int_0^1 F(x)\,dx-\frac{1}{3}$$
$$=F(1)-\left(e-\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{3}$$
$$=e-2-e+\frac{5}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\ \text{(참)}$$

ㄷ. $F(0)=\int_0^0 f(t)\,dt=0$이고, $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $F'(x)=f(x)$

(가)에 의해서

$$\int_0^1\{F(x)\}^2dx=\int_0^1 F(x)\{f(x)-x\}dx$$
$$=\int_0^1 F(x)f(x)\,dx-\int_0^1 xF(x)\,dx$$
$$=\int_0^1 F(x)F'(x)\,dx-\int_0^1 xF(x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}\{F(x)\}^2\right]_0^1-\frac{1}{6}$$
$$=\frac{1}{2}\{F(1)\}^2-\frac{1}{2}\{F(0)\}^2-\frac{1}{6}$$
$$=\frac{1}{2}(e-2)^2-\frac{1}{6}$$
$$=\frac{1}{2}e^2-2e+\frac{11}{6}\ \text{(참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

[다른 풀이]

$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

조건 (가)의 $F(x)=f(x)-x$의 양변을 x에 대하여 두 번 미분하면 $f'(x)=f''(x)$

$\frac{f''(x)}{f'(x)}=1$이므로 양변을 x에 대하여 적분하면

$\ln|f'(x)|=x+C_1$ (단, C_1는 적분상수)

$f'(x)=C_2e^x$ (단, C_2는 상수)이므로 양변을 x에 대하여 적분하면 $f(x)=C_2e^x+C_3$ (단, C_3은 적분상수)

$0=F(0)=f(0)-0,\ f(0)=0$

$f(x)=f'(x)-1$이므로 $f'(0)=1$

$f'(x)=C_2e^x,\ f(x)=C_2e^x+C_3$에 $x=0$을 대입하면

$f'(0)=C_2=1,\ f(0)=C_2+C_3=0,\ C_3=-1$

$f(x)=e^x-1$

이를 조건 (가)에 대입하면

$F(x)=e^x-x-1$

$$\int_0^1 F(x)\,dx=\int_0^1\left(e^x-x-1\right)dx$$
$$=\left[e^x-\frac{1}{2}x^2-x\right]_0^1$$
$$=(e-1)-\frac{1}{2}-1$$
$$=e-\frac{5}{2}$$

이므로 함수 $F(x)=e^x-x-1$은 조건 (나)를 만족시킨다.

ㄱ. $F(1)=e^1-1-1=e-2$ (거짓)

ㄴ. $$\int_0^1 xF(x)\,dx=\int_0^1 x\left(e^x-x-1\right)dx$$
$$=\int_0^1 xe^x\,dx-\int_0^1 x^2\,dx-\int_0^1 x\,dx$$
$$=\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx-\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1-\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=\Big[xe^x\Big]_0^1-\Big[e^x\Big]_0^1-\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1-\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=e-(e-1)-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\ \text{(참)}$$

ㄷ. $\int_0^1 \{F(x)\}^2 dx=\int_0^1 (e^x-x-1)^2 dx$

$$=\int_0^1 \{e^{2x}+x^2+1-2xe^x+2x-2e^x\} dx$$

$$=\int_0^1 e^{2x} dx+\int_0^1 x^2 dx+\int_0^1 1 dx$$

$$-2\int_0^1 xe^x dx+\int_0^1 2x dx-2\int_0^1 e^x dx$$

$$=\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[x\right]_0^1$$

$$-2\left[xe^x\right]_0^1+2\left[e^x\right]_0^1+\left[x^2\right]_0^1-2\left[e^x\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}(e^2-1)+\frac{1}{3}+1-2\times1+1-2(e-1)$$

$$=\frac{1}{2}e^2-2e+\frac{11}{6}\ \text{(참)}$$

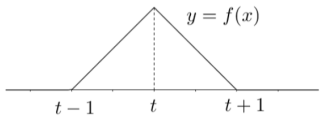
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

24

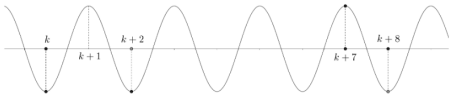
출제의도 : 정적분으로 나타내어진 함수의 특성을 파악할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



한편, 함수 $y=\cos(\pi x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$ 이므로 홀수 k에 대하여 함수 $y=\cos(\pi x)$의 그래프는 다음과 같다.



한편, $x<t-1$ 또는 $x>t+1$일 때 $f(x)=0$이므로 닫힌 구간 $[a,\ b]$가 $(-\infty, t-1]$에 포함되거나 $[t+1,\ \infty)$에 포함되면

$$\int_a^b f(x)\cos(\pi x)dx=0$$

이다.

따라서 t의 값을 증가시키면서 함수 $g(t)$를 구하면 다음과 같다.

(i) $t+1\le k$일 때

$$g(t)=\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$$

$$=\int_k^{k+8} 0\times\cos(\pi x)dx=0$$

(ii) $t-1\le k\le t+1$일 때

$$g(t)=\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$$

$$= \int_{k}^{t+1} f(x)\cos(\pi x)dx$$

(iii) $k \le t-1 < t+1 \le k+8$일 때

$$g(t) = \int_{k}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$$

$$= \int_{t-1}^{t+1} f(x)\cos(\pi x)dx$$

(iv) $t-1 \le k+8 \le t+1$일 때

$$g(t) = \int_{k}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$$

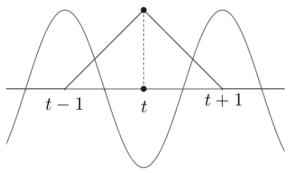
$$= \int_{t-1}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$$

(v) $t-1 \ge k+8$일 때

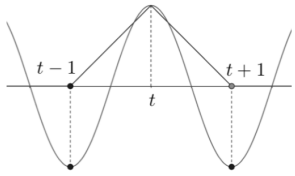
$$g(t) = \int_{k}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$$

$$= \int_{k}^{k+8} 0 \times \cos(\pi x)dx = 0$$

한편, 다음 그래프에서 함수 $\int_{t-1}^{t+1} f(x)\cos(\pi x)dx$는
t가 홀수일 때 극소이자 최소이고,
t가 짝수일 때 극대이자 최대임을 알 수 있다.



[t가 홀수일 때]



[t가 짝수일 때]

그런데,

$$\int_{0}^{1} (1-x)\cos(\pi x)dx$$

$$= \left[\frac{1}{\pi}(1-x)\sin(\pi x)\right]_{0}^{1} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1} \sin(\pi x)dx$$

$$= 0 + \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_{0}^{1}$$

$$= \frac{2}{\pi^2}$$

이므로 t가 $k \le t-1 < t+1 \le k+8$인 홀수일 때

$$g(t) = \int_{k}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$$

$$= \int_{t-1}^{t+1} f(x)\cos(\pi x)dx$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x+t)\cos\{\pi(x+t)\}dx$$

$$= -\int_{-1}^{1} (1-|x|)\cos(\pi x)dx$$

$$= -2\int_{0}^{1} (1-x)\cos(\pi x)dx$$

$$= -\frac{4}{\pi^2}$$

이고, t가 $k \le t-1 < t+1 \le k+8$인 짝수일 때

$$g(t)=\int_{k}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$$
$$=\int_{t-1}^{t+1} f(x)\cos(\pi x)dx$$
$$=\int_{-1}^{1} f(x+t)\cos\{\pi(x+t)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{1} (1-|x|)\cos(\pi x)dx$$
$$=2\int_{0}^{1} (1-x)\cos(\pi x)dx$$
$$=\frac{4}{\pi^2}$$

이다.

그런데 k는 홀수이므로 함수 $g(t)$는 다음과 같이 극솟값을 갖는다.

(1) $t=k$에서 극솟값

$$\int_{k}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$$
$$=\int_{k}^{k+1} f(x)\cos(\pi x)dx$$
$$=-\int_{0}^{1} (1-x)\cos(\pi x)dx$$
$$=-\frac{2}{\pi^2}$$

을 갖는다.

(2) $t=k+8$에서 극솟값

$$\int_{k}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$$
$$=\int_{k+7}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$$
$$=-\int_{-1}^{0} (1+x)\cos(\pi x)dx$$
$$=-\int_{0}^{1} (1-x)\cos(\pi x)dx$$
$$=-\frac{2}{\pi^2}$$

를 갖는다.

(3) $t=k+2$에서 극솟값

$$\int_{k}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$$
$$=\int_{k+1}^{k+3} f(x)\cos(\pi x)dx$$
$$=-\int_{-1}^{1} (1+x)\cos(\pi x)dx$$
$$=-2\int_{0}^{1} (1-x)\cos(\pi x)dx$$
$$=-\frac{4}{\pi^2}$$

를 갖는다.

(4) $t=k+4$, $k+6$에서도 (3)과 마찬가지로 극솟값

$$-\frac{4}{\pi^2}$$

를 갖는다.

이상에서

$$\alpha_1=k,\ \alpha_2=k+2,\ \alpha_3=k+4,$$
$$\alpha_4=k+6,\ \alpha_5=k+8$$

이고,

$$g(\alpha_1)=g(\alpha_8)=-\frac{2}{\pi^2}$$
$$g(\alpha_2)=g(\alpha_3)=g(\alpha_4)=-\frac{4}{\pi^2}$$

이다.

이때 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=5k+20=45$이므로

$$k=5$$

또,

$$\sum_{i=1}^{m} g(\alpha_i) = \sum_{i=1}^{5} g(\alpha_i)$$
$$= -\frac{1}{\pi^2}(2+4+4+4+2) = -\frac{16}{\pi^2}$$

따라서

$$k - \pi^2 \sum_{i=1}^{m} g(\alpha_i)$$
$$= 5 - \pi^2 \times \left(-\frac{16}{\pi^2}\right)$$
$$= 5 + 16 = 21$$

정답 21

25

출제의도 : 모평균을 추정할 수 있는가?

정답풀이 :

$\overline{x} = 75$일 때, 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$75 - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}} \le m \le 75 + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

$\overline{x} = 77$일 때, 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$77 - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}} \le m \le 77 + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

따라서,

$$b = 75 + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

$$d = 77 + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

이므로

$$d - b = \left(77 + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}}\right) - \left(75 + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}}\right)$$
$$= 2 + 0.155\sigma = 3.86$$

$$0.155\sigma = 1.86$$

$$\sigma = 12$$

정답 12