촌철살인
확률과 통계

촌철살인
확률과 통계

초판 1쇄 발행 2016년 6월 24일
2쇄 발행 2017년 3월 9일

지은이 최준호
펴낸이 이기봉
편집 좋은땅 편집팀
펴낸곳 도서출판 좋은땅
출판등록 제2011-000082호
주소 경기도 고양시 덕양구 동산동 376 삼송테크노밸리 B동 442호
전화 02)374-8616~7
팩스 02)374-8614
이메일 so20s@naver.com
홈페이지 www.g-world.co.kr

ISBN 979-11-5982-189-9 (53410)

- 가격은 뒤표지에 있습니다.
-
- 파본은 구입하신 서점에서 교환해 드립니다.

촌철살인

확률과 통계

최준호 지음

제①권

경우의 수

티칭과 코칭 **좋은땅**

촌철살인
확률과 통계

제①권 경우의 수

티칭과 코칭

단 한 권의 책도 단 한 페이지도 장인정신 없이는 책을 쓰지 않습니다.
세계적 수학교육 출판기업이 될 때까지 끊임없이 진보합니다.

> “
> 빨리 하지 말고 제대로 하자. 제대로가 가장 빠르다.
> 빠름은 제대로 한 사람에게 오는 결과일 뿐이다.

CONTENTS

PART 01	근본 사고방식	#1. 일대일 대응	11
		#2. 분할적 사고	12
		#3. 합의 법칙과 곱의 법칙	15
		#4. 여사건의 아이디어	19
PART 02	근본에 가까운 공식	#1. 계승, 순열, 조합의 공식	49
		#2. 순열과 조합의 상황	56
		#3. 순열과 조합의 수식적 활용	60
PART 03	이해하면 공식은 없다	#1. 중복순열과 곱의 법칙	119
		#2. 같은 것을 포함한 순열과 조합	121
		#3. 원순열과 고정	126
PART 04	분할의 상황	#1. 자연수 분할	161
		#2. 분할의 상황	173
		#3. 집합의 분할	182
PART 05	중복조합	#1. 중복조합의 상황	217
		#2. 중복조합과 일대일 대응	220
PART 06	이항정리와 조합의 연속 합	#1. 이항정리와 이항계수의 성질	265
		#2. 조합의 식 변형과 이항계수의 성질	278
		#3. 파스칼 삼각형	281
		#4. 분할적 사고와 관점 합	284

이 책을 펴내며

이 책이 두꺼워진 이유는 다른 책이 두꺼워진 이유와는 조금 다릅니다.
아는 것을 정리한 것이 아닌 알아야 하는 것을 정리하였습니다.
엄청나게 많은 내용을 넣어놔서 두꺼워진 것이 아니라 알아야 하는 것을 최대한 자세하게 설명해서 두꺼워졌습니다.

알면 좋은 것들을 넣어둔 것이 아닙니다.
반드시 알아야 하는 것을 넣어놨습니다.
이 책은 사전이 아닙니다.

> “
> 아는 만큼 보인다.

이 책의 내용 중 모르는 것이 있다면 반드시 학습해야 합니다.
만약 많이 보지 못했다고 생각되는 내용이 있다면 본인이 많이 하지 않았거나 아니면 알지 못해서 지금까지 수없이 봤음에도 불구하고 인지 못하고 넘어갔음이 분명합니다.
이 책은 공식이 아닌 공식에 담긴 사고방식을 설명하는 책입니다.

들어가기에 앞서

꽃
- 김춘수 -

내가 그의 이름을 불러주기 전에는
그는 다만
하나의 몸짓에 지나지 않았다.

내가 그의 이름을 불러주었을 때
그는 나에게로 와서
꽃이 되었다.

내가 그의 이름을 불러준 것처럼
나의 이 빛깔과 향기에 알맞은
누가 나의 이름을 불러다오
그에게로 가서 나도
그의 꽃이 되고 싶다.

우리들은 모두
무엇이 되고 싶다.
나는 너에게 너는 나에게
잊혀지지 않는 하나의 의미가 되고 싶다.

잊혀지지 않는 의미가 되기 위해서 어떤 개념에는 반드시 이름이 있어야 한다. 이름이 없으면 잠깐 스쳐가는 하나의 몸짓에 지나지 않을 것이다. 비단 한국의 수학만 그런 것은 아니라고 생각한다.
공식에는 이름이 있지만 그 공식이 담고 있는 사고방식에는 이름이 없기 때문에 결국 우리는 머릿속에 공식만 남는다.

수학이 실제 생활에서 필요한 이유는 <공식>을 쓰기 때문이 아니다.
<그 공식이 담고 있는 사고방식>이 우리가 어떤 정보를 받아들이고 판단하는데 중요한 역할을 하기 때문이다.

앞으로 배우게 되는 경우의 수에서 전체를 생각하여 부분으로 가는 사고방식이나
기준을 설정해서 상황을 고정하고 변하는 것들만 관찰하는 사고방식은 비단 수학에서만 필요한 사고방식이 아니다.

과학에서도 원인과 결과를 정확히 관찰하기 위해 관찰의 초점인 <조작변인>을 제외하고 전부 통제한다.
우리가 실생활에서 기계가 작동이 되지 않을 때 무조건 서비스 센타를 찾아가는 것은 개인에게도 기업에게도 굉장히 비효율적이다.
이 때 우리는 몇 가지 실험을 거쳐 안 되는 이유를 찾게 되는데 이런 작은 행동들에도 너의 사고방식이 영향을 준다.

수학은 이런 사고방식을 아주 단순화해서 문제를 통해 반복적으로 연습하는 것이다.
사고방식도 마치 근육처럼 단련하고 연습해야 잘 사용할 수 있기 때문이다.
이것이 바로 사고력(力)에 <힘 력>자를 쓰는 이유일 것이다.

공식은 단지 그 사고방식을 사용하는 과정에서 계산을 조금 줄여준다거나 조금 빠르게 해줄 뿐이다.

촌철살인 #0 이 책의 학습방향

01

수학은 직관에 의존한 논리이다.

- 직관이란 〈경험을 통한 예측〉이다. 즉, 경험 없이는 아무런 직관도 생기지 않는다. 우리가 수많은 문제를 풀어보면서 직접 연습하는 이유도 바로 이러한 직관력을 기르기 위함이다. 필자는 〈수학〉에 있어서 정말 중요한 〈직관〉이라는 부분이 적절하고 체계적으로 설명되어 있는 학습서를 보지 못했기 때문에 은유와 비유를 통해서 그것을 설명하고자 한다. (저명한 물리학자이자 하버드대 교수인 ‘Gerald Holton’이 “은유는 미지의 세계로 가는 유일한 다리”라고 언급한 것처럼, 적절한 비유는 난해한 개념을 확실히 이해시켜 주는 것에 있어서 매우 중요하다.) 또한 이런 직관에 해당하는 개념들은 보통 〈구체적 용어화〉가 되어있지 않기 때문에 〈인지〉하는 것 또한 어렵다. 그래서 그냥 〈헷갈린다, 어렵다, 실수했다〉 등으로 생각하기 마련인데 이러한 부분은 구체적으로 〈용어화〉시킴으로서 이 책을 공부하고 난 후에는 왜 틀렸고 무엇에 의해 풀어야 하는지 정확하게 말할 수 있을 것이다.

02

생각의 방향과 바른 고정관념

- 모든 것이 그렇듯 완벽한 이론이란 없다. 어차피 완벽에 가까운 이론일수록 너무 추상적이어서 쓸모가 없다. 그러므로 우리는 〈생각의 방향〉을 정해야 한다. 그 〈생각의 방향〉이 모든 문제를 풀 수 없음은 당연하다. 수학에서 〈고정관념〉을 버려야 한다고 하지만 이것은 공허한 구호에 불과하다. 오히려 수학은 〈올바른 고정관념〉을 가져야하고 그런 〈고정관념〉으로 풀리지 않는 도전적인 문제를 통해서 〈개념의 외연〉을 넓혀가야 한다. 그래서 10문제 중 9문제에 적용할 수 있는 〈생각〉이라면 개념화시켜 학습할 충분한 가치를 가지고 있다.

- 이 책은 완벽하지 않다. 완벽을 추구하는 책이 아니다. 올바른 고정관념과 직관을 기르도록 하는 것이 이 책의 목표이다. 추상적이지만 근본적인 이론들을 은유와 비유를 통해 제시하고 구체적인 언어로 만들어 학습할 수 있도록 이 책을 구성하였다.

PART 01

근본 사고방식

1. 일대일 대응
2. 분할적 사고
3. 합의 법칙과 곱의 법칙
4. 여사건의 아이디어

촌철살인 #1 분할적 사고의 학습방법

01 수학의 80%는 생각하지 않고 풀 수 있어야 한다.

- 운동선수들도 드리블 이론을 알기만 해서는 드리블을 잘할 수 없다. 이론만 배운 채로 실전에 나서서 드리블을 한다면 아마도 '이렇게 드리블을 해야지'라고 머릿속으로 생각하는 순간 공을 빼앗기게 될 것이다. 공을 빼앗기지 않기 위해서는 앞에 수비수가 나타났을 때 몸이 저절로 반응해야 한다. 그 정도의 드리블을 구사하려면 많은 노력과 연습이 필요하다.
  세계 1위 축구선수 메시와 어느 무명선수의 차이는 앎의 차이가 아니다. 익숙함의 차이다.

- 수학도 마찬가지다. 한 가지 이론을 배우고 나면 그보다 훨씬 긴 시간의 훈련이 필요하다. 우리가 4+15를 덧셈에 대한 이론을 생각하지 않고 그냥 19라고 대답할 수 있는 것은 이것이 훈련되어 있기 때문이다. 고등학교 수학은 사실 커다란 이론의 기초를 배우는 것이고 그 기초라는 것은 〈안다.〉라는 것에 목적을 두기 보다는 〈익숙하게 다룬다.〉에 목적을 둔다,

- 수학에는 〈공리와 공준, 법칙, 공식, 정리〉 등 많은 개념이 있다. 하지만 〈사고방식〉이라는 개념이 있지는 않다. 방금 이야기한 〈공식이나 법칙〉 등이 드리블이라면 〈사고방식〉은 일종의 작전이다. 드리블은 몸이 알아서 하게 놔두는 것이고 머리로는 작전을 세워야 한다. 즉, 문제를 풀 때 〈공식〉 따위(?)는 손이 알아서 쓰게 만들어두고 너의 머리는 〈이 문제의 핵심 사고방식〉을 생각해야 하는 것이다.

02 난잡한 공식을 많이 아는 것은 학습자에게 좋지 않다.

- 난잡하게 많이 아는 것은 기억력 기르는 데는 좋을지 모르겠으나 사고력 기르는 데에 좋지 않다. 한, 두 가지 사고를 통해 모든 문제를 해결하려고 노력한다면 그 사고의 본질을 깨우치게 된다. 미묘한 차이를 감지하게 된다. 그 사고를 쓸 수 있는 순간과 쓰면 안 되는 순간을 알아차리게 된다. 이 과정 없이 여러 가지 난잡한 논리를 무조건 많이 배우면 〈알지만 쓸 수 없는〉 즉, 〈헷갈리는 상황〉이 된다. 누군가 정확한 포인트를 집어 줘야만 문제의 본질을 파악할 수 있는 그런 상황이 된다. 어차피 난잡한 공식들이야 기본적인 사고방식이 정립된 올바른 학습자라면 자연스럽게 알게 될 것이다. 또 빠르게 습득될 것이다.

PART 01 근본 사고방식

#1. 일대일 대응 경우의 수적인 본질이 같은 상황

#2. 분할적 사고 〈전제〉 모든 경우의 논리적 나열 능력

1. 자리를 기준 2. 대상을 기준
3. 개수로 분류 4. 배열 전 모든 상황
: 분할하는 순간 상황은 고정된다.

#3. 합의 법칙과 곱의 법칙

1. 합의 법칙 2. 곱의 법칙
3. 센다의 법칙 4. 수형도의 활용

#4. 여사건의 아이디어

PART.1 개념의 외연

#1. 정수론 1탄
#2. 센다의 법칙
#3. 경우의 수를 세는 방법은 무한가지

전체적으로 분할적 사고를 하되 부분적으로 공식을 쓴다.

PART 02 근본에 가까운 공식

#1. 계승, 순열, 조합의 공식

1. 계승의 뜻과 공식
2. 순열과 조합의 뜻과 공식
3. 조합의 기본 성질 : ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$
4. 논리의 확신 : 경우의 수적인 본질이 같은 상황

#2. 순열과 조합의 상황

1. 서로 다른 대상, 서로 다른 자리
2. 조합과 자동배열
3. 뽑기의 오류 : 〈동동연〉이면 〈배고려〉

#3. 순열과 조합의 수식적 활용

1. 순열의 정의식과 계산식 2. 조합의 정의식과 계산식
3. 정의되는 기호들 4. 순열과 조합으로 표현

PART.2 개념의 외연

#1. 순열 조합으로 표현된 방정식
#2. 여러 가지 상황의 배열
#3. 여사건의 아이디어 + 특정인
#4. 정수론 2탄
#5. 도형과 경우의 수
#6. 집합과 경우의 수

PART 03 이해하면 공식은 없다

#1. 중복순열과 곱의 법칙 중복순열은 곱의 법칙이다.

#2. 같은 것을 포함한 순열과 조합 같은 것을 포함한 순열은 조합이다

1. 같은 것을 포함한 순열의 뜻과 공식
2. 배열 취소의 관점
3. 자동배열의 상황
4. 같은 것들 중에서 일부를 뽑는 것은 공식이 없다.

#3. 원순열과 고정

1. 원순열의 상황 2. 원순열의 경우의 수
3. 다각형 순열 4. 목걸이 순열

PART.3 개념의 외연

#1. 경로의 수 문제
#2. 입체 순열

PART 04 분할의 상황

#1. 자연수의 분할

1. 자연수 분할의 기본 정의 · 낙수효과
2. 페러스 다이어그램과 성질, 켤레분할
3. 자연수 분할의 상황

#2. 분할의 상황

1. 분할의 상황 1 : 뽑기와 분할의 경우의 수가 다른 경우
2. 분할의 상황 2 : 뽑기와 분할의 경우의 수가 같은 경우
3. 선분할 개념 : 기준이 생기면 〈뽑기의 오류〉 발생하지 않는다.
4. 분할의 공식화 : 〈동동연〉이면 〈배고려〉
5. 분할 후 분배와 선분할 개념

#3. 집합의 분할

1. 집합 분할의 상황
2. 집합 분할의 성질
3. 서로 다른 대상, 서로 같은 자리

PART.4 개념의 외연

#1. 리그와 토너먼트

PART 05 중복조합과 일대일 대응

#1. 중복조합의 상황

1. 중복조합의 뜻과 공식
2. 구분막대기를 이용한 일대일 대응
3. 중복조합의 공식 : 암기가 아닌 Reading
${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_{n-1}$

#2. 중복조합과 일대일 대응

1. 중복조합과 일대일 대응
: 일대일 대응 + 공식
2. 서로 같은 대상, 서로 다른 자리
3. 중복조합의 적어도의 상황
: 미리 뽑아놓고 생각한다.

PART.5 개념의 외연

#1. 같은 것과 다른 것 총 정리
#2. 중복조합과 곱의 법칙
#3. 전개식과 경우의 수
#4. 부정방정식과 일대일 대응
#5. 함수의 개수 총정리

PART 06 이항정리와 조합의 연속 합

#1. 이항정리와 이항계수의 성질

1. 이항계수의 의미와 이항전개식
2. 특정항의 계수 : 나열된 식의 구조와 추론
3. 이항전개식 간단히 하기
4. 이항계수의 성질 : 이항정리 + 항등식의 마법
1) 연속 합 2) 교대 합 3) 짝수 합
4) 홀수 합 5) 절반 합

#2. 조합의 식 변형과 이항계수의 성질

#3. 파스칼 삼각형

1. 이항계수의 또 다른 성질
2. 파스칼 삼각형 공식 : ${}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r = {}_nC_r$
3. 이항계수의 성질과 파스칼 삼각형 공식의 구분법

#4. 분할적 사고와 관점 합

1. 이항전개식을 이용한 설명
2. 다른 방식을 이용한 설명

PART.6 개념의 외연

#1. 삼항정리
#2. 정수론 3탄

뼈대가 되는 기본 개념

#1 일대일 대응

경우의 수는 <논리적 수 세기>이다. 여기에서 말하는 논리란 바로 <일대일 대응>을 의미한다.
일대일 대응은 간단한 것 같으면서도 공부를 하면 할수록 그 쓰임새와 깊이를 가늠하기 어려울 정도로 신비한 개념이다.

1. 경우의 수적 본질이 같은 상황

- 우리는 양 3마리를 서로 다른 세 우리에 넣는 경우의 수나 세 사람을 서로 다른 세 자동차에 태우는 경우의 수가 같다는 사실을 알고 있다. 대상이 <양 → 사람>으로 자리가 <우리 → 자동차>로 바뀌었을 뿐 배열되는 경우의 수는 같기 때문이다. 이런 상황을 <경우의 수적 본질이 같은 상황>이라고 한다. 이런 직관이 바로 경우의 수 문제를 푸는 데 가장 중요하다.

(직관은 구체적 경험을 통해서만 얻을 수 있다.)

2. 일대일 대응의 아이디어 : 미지의 상황과 현실 상황을 연결해 주는 다리

- 모든 경우의 수 문제를 풀 때 고려해야 하는 사고방식이다. 사실 이미 자연스럽게 사용하는 사고방식이기도 하다.
예를 들어 민수와 철수 두 명을 배열하는 경우의 수를 센다고 했을 때, 만약 민수와 철수를 각각 A, B라 두고 A, B를 배열하는 경우의 수를 센다고 한다면 이것 역시 <일대일 대응의 아이디어>를 자연스럽게 이용하고 있는 것이다. 이런 사고방식은 <경우의 수적 본질이 같은 상황>임을 우리의 뇌가 직관적으로 이해하기 때문에 가능한 것이다.

- 이렇게 인간이 자기도 모르게 사용할 정도로 너무나도 많이 사용하는 사고방식이 어렵고 추상적인 문제를 간단하고 직관적인 문제로 바꾸어 주는 마법의 다리 역할을 한다는 것은 정말 흥미롭다.

#2 분할적 사고

추상적인 사고방식인 분할적 사고를 구체적으로 인지하기 위해서는 용어가 필요하다.
설명할 수 없는 추상적인 개념은 휘발성이 매우 강하다. 어떤 개념을 인지하고 활용하는데 있어서 용어는 굉장히 중요하다.

1. 전체 상황의 논리적 나열능력

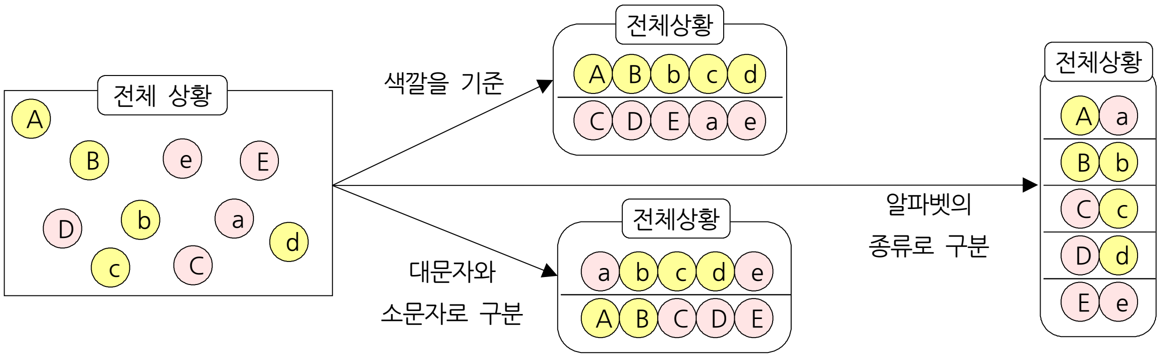
- '전체를 나열하면 무식한 것이 아닌가?'라는 생각을 할지도 모르지만 전혀 그렇지 않다. 오히려 전체를 일일이 빼먹지 않고 나열할 수 있다는 것은 어떤 논리나 규칙에 의해서 나열했다는 뜻이고 그것은 '논리적'이라는 것을 의미한다.

(논리 없이 빼먹지 않고 일일이 나열하는 것은 불가능하다.)

- '논리적으로 수를 센다.'라는 것은 전체를 구체적으로 나열하는 과정에서 규칙을 발견해 과정을 생략한다는 의미를 내포한다. 즉, 복잡하고 헷갈려서 나열하지 못하는 것은 논리가 없는 것이고, <논리적 수 세기>인 경우의 수의 본질을 모르는 것이다. 논리적으로 수를 세기 위해서는 <기준>이 필요하다. 그 기준을 정하는 미묘한 차이를 <만들어진 용어>를 통해 인지하고 체계적으로 학습하도록 한다.

2. 분할적 사고란?

- 경우의 수를 셀 때 아무런 기준 없이 하나하나 세는 것은 너무 오래 걸리고 실수할 확률이 매우 높다. 즉. 헷갈리게 된다. (빼먹고 센다던가, 센 걸 또 센다던가.) 그래서 우리는 경우의 수를 <빠짐없이>, <중복됨 없이> 세기 위해 <전체 상황>을 한 번에 세지 않고, 어떤 기준에 의하여 몇 가지 경우로 나누어 센다.



분할적 사고란 위와 같이 전체 상황을 몇 가지로 나누어 생각하는 사고방식을 체계화시킨 개념이다.

코칭 분할할 때는 반드시 <빠짐없이>, <중복됨 없이> 상황을 분할해야 한다.
우리가 정한 기준에서 누락되는 대상이 있거나 이쪽저쪽에 모두 포함되는 대상이 생긴다면 덜 세거나 더 세는 경우가 생긴다. 그래서 분할적 사고를 체계적으로 연습해야 한다.

3. 분할적 사고의 핵심 4가지

1) 자리를 기준

자리를 고정시키고

⇨ 그 자리에 아무도 없는 경우와 누군가 있는 경우로 상황을 분할 (VS) 그 자리에 누가 오느냐에 따라 상황을 분할

2) 대상을 기준

대상을 고정시키고

⇨ 그 대상이 선택되는 경우와 선택되지 않는 경우로 상황을 분할 (VS) 그 대상이 어디에 오느냐에 따라 상황을 분할

3) 개수로 분류

대상의 개수를 기준으로 상황을 분할

⇨ 뽑히는 대상의 종류는 2개(AB) or 3개(ABC) ⋯ (VS) 뽑히는 특정대상의 개수는 2개(AA) or 3개(AAA) ⋯

4) 배열 전 모든 상황

- 예를 들어 a, b, c, d 중 3개를 뽑아서 배열한다고 할 때 뽑힌 대상을 기준으로 상황을 분할하면

상황1 : abc / 상황2 : abd / 상황3 : acd / 상황4 : bcd

이렇게 총 4가지 상황으로 <빠짐없이>, <중복됨 없이> 분할된다.

- 이외에도, 문제의 조건에 따라서 위의 3가지 핵심으로 굳이 끼워 맞추어 분할하기 애매한 경우들이 가끔 있다. 예를 들어 남자 세 명 A, B, C와 여자 a, b, c가 교대로 서는 경우의 수를 따질 때, 전체 상황은 크게 아래와 같은 두 가지로만 분할된다.

상황 1	남	여	남	여	남	여
상황 2	여	남	여	남	여	남

이러한 경우에는 <자리를 기준>, <대상을 기준>, <개수로 분류>에 굳이 끼워 맞추어 생각할 필요가 없다.

- 상황1,2는 문제의 조건을 사용하여 <빠짐없이>, <중복됨 없이> 분할한 <대상을 배열하기 전 나올 수 있는 모든 상황>이다.

코칭 이 4가지 용어들을 통해서 모든 상황이 칼로 무 자르듯이 구분되는 것은 아니다. <배열 전 모든 상황>을 사용했다고 볼 수도 있고, <개수로 분류>를 사용했다고 볼 수도 있는 애매한 상황들이 꽤 자주 등장하기 때문이다. 그럼에도 불구하고 위의 내용을 포기할 수 없는 이유는 대부분의 문제가 용어들을 통해서 푸는 방향이 결정되기 때문이다. 예제들을 풀면서 자연스럽게 위의 용어들을 익힐 수 있도록 해설지를 구성하였다. 공부는 예시를 이용한 구체적인 경험들을 통해서 하는 것이다.

앞으로 나오는 예제들을 학습하다 보면, 분할적 사고 핵심 4가지의 가치를 느낄 수 있다.

4. 분할을 통한 상황의 구체적 고정

- 위와 같은 기준에 의하여 전체 상황을 분할하고 나면 분할된 각 상황은 조금 더 구체적으로 고정된다.

논리적으로 수를 센다는 것은 이렇게 <분할 → 상황의 고정>을 반복해 가며 경우의 수를 센다는 것이다.

개념의 용어화

: 우리의 뇌는 추상적인 것에 구체적인 단어를 대응시켜 기억을 한다. 그래서 그런 단어를 keyword라고 하는 것이다. keyword가 없는 기억은 휘발성이 강하다. 우리에게 각자 이름이 있는 것처럼 개념에도 이름이 있어야 한다. 그 이름을 바탕으로 우리는 개념을 기억하고 사용할 수 있다.

분할적 사고 : 자리를 기준
분할적 사고 : 대상을 기준
분할적 사고 : 개수로 분류
분할적 사고 : 배열 전 모든 상황

학습조언. 적당히 쉬면서 공부하길 원한다면.

- 공부는 자기 자신을 단련하는 과정이다.

어떻게 인간이 공부만 하고 살 수 있나? - 맞는 말이다.
하지만 이런 의문을 던지는 부류의 학생은 보통 아직 자기 자신과의 싸움의 경험이 부족하고 인내력이나 지속력이 부족한 학생들이다. 이런 학생들은 공부하는 것에 아직은 흥미를 느끼지 못하고 그래서 강한 집중을 경험하지 못한 학생들일 가능성이 크다. 아직은 단련되지 않아서 공부가 힘들기 때문에 자연스럽게 드는 합리화적인 생각이다.

- 다짐하라. 실패를 염두 하되 두려워하지는 말라.

이제부터 진짜 깨어있는 모든 시간에 공부를 해볼테야.! - 이런 각오로 공부해도 30%는 놀게 된다.
좀 쉬면서 꾸준히 해야지. - 이런 각오로 공부하면 70% 놀게 된다. 그리고 아무 생각이 없으면 100% 놀게 된다.
그러니 공부만 해야겠다고 다짐하고 삭발하고 종이를 찢어 먹는 이런 과도한 행동도 하고 주변인이 관심병 걸렸다고 비난할 정도로 그렇게 다짐하고 공부해도 한 달을 평균 냈을 때 주어진 시간에 70%정도 밖에 공부를 못한다. (이 정도도 훌륭한 것이다.) 공부를 가치판단의 대상으로 삼지마라. 공부는 어떤 분야든 어떤 직업을 갖든 해야 한다. 선택의 문제가 아니다. 공부하는 능력을 빨리 갖출수록 인생이 윤택해 질 것이다.

공부만 하라. 그렇게 다짐하라. 그런 강한 각오로 공부에 임해야 너희가 생각한 것처럼 적당히 쉬게 된다.

#3 합의 법칙과 곱의 법칙

분할적 사고는 자연스럽게 <합의 법칙>과 <곱의 법칙>으로 연결된다. 아래의 <센다의 법칙>은 <합의 법칙>을 조금 과하게 적용하는 경우에 대하여 용어를 만들어 놓은 것이다. <센다의 법칙>이 강조하는 일일이 세는 경우도 경우의 수에서 꽤 자주 등장하기 때문에 노가다 또는 무식한 방법 등의 말들로 이러한 개념을 무시하고 지나가면 안 된다.

1. 합의 법칙

: 분할된 상황의 경우의 수가 같지 않다고 판단 ⇨ 각각 세서 더한다.

코칭 <경우의 수적 본질이 다른 상황>이라는 것을 직관적으로 알아채면 <합의 법칙>을 쓴다.
혹은 정확하게 <경우의 수적 본질이 다른 상황>이라고 판단이 되지 않아도 ‘경우의 수적 본질이 같다고 할 수 있나?’ 라는 의문이 드는 상황이라면 무조건 합의 법칙을 써야 한다.
결과적으로는 같은 경우의 수가 나오더라도 상황을 인지하는 과정에서 <같다는 판단>이 안서면 더하는 게 맞다.

2. 곱의 법칙

: 분할된 상황의 경우의 수가 같다고 판단 ⇨ 하나만 세서 곱한다.

식을 써 내려갈 때는 어떤 수를 곱하고 상황을 고정시켜 세기 때문에 표현에 있어서 <곱하는 순간 하나만 센다.>가 좀 더 자연스럽다.

코칭 분할된 상황들이 <경우의 수적 본질이 같은 상황>이라는 것을 직관적으로 알아채면 <곱의 법칙>을 쓴다.
곱의 법칙과 합의 법칙을 쓰는 상황을 구분하는 기준이 바로 이것이다.
<경우의 수적 본질이 같은 상황>이라는 확신이 있다면 ⇨ 하나만 세서 곱한다.

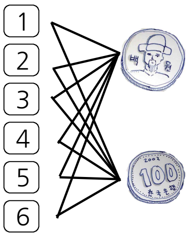
3. 센다의 법칙 일일이 세는 경우도 꽤 자주 나온다는 것을 강조하기 위해 만든 용어

: 아무리 분할시켜도 같은 경우의 수가 나오지 않는다고 판단 ⇨ (어쩔 수 없이) 일일이 센다.

4. 수형도 (참고)

- 수형도란 전체 상황의 모든 경우를 단계적으로 (나무가 가지를 뻗듯이) 선을 뻗어 나타내는 방법이다.
전체 상황을 보여주기 위해 경우의 수에서 매우 자주 활용되는 방법으로 전체 상황을 수형도로 표시하면
<합의 법칙>, <곱의 법칙>, <센다의 법칙> 중 무엇을 사용해야 할 지 직관적으로 느낄 수 있다.

- 수형도와 곱의 법칙 ⇨ 각각에 대하여 같은 경우의 수가 발생하면 곱한다.
예를 들어 정육면체 주사위 1개와 100원짜리 동전 1개를 동시에 던졌을 때 나오는 모든 경우를 수형도로 나타내면



개념의 용어화

합의 법칙 | 분할된 상황의 경우의 수가 같지 않다고 판단 ⇨ 각각 세서 더한다.

곱의 법칙 | 분할된 상황의 경우의 수가 같다고 판단 ⇨ 하나만 세서 곱한다.

아무리 분할해도 같은 경우의 수가 나오지 않는다. ⇨ 어쩔 수 없이 일일이 센다.

수형도와 곱의 법칙 | 각각에 대하여 같은 경우의 수가 발생 ⇨ 곱한다.

001 이해를 위한 예제

서로 다른 A, B, C를 서로 다른 세 자리에 배열하는 경우의 수를 생각해본다.

전체상황 : 분할적 사고 : 자리를 기준 ⇨ 첫 번째 자리에 누군가는 온다.

상황 1 : A □ □
상황 2 : B □ □
상황 3 : C □ □

<상황 1,2,3>은 첫 번째 자리에는 누군가 들어가 있고 남은 두 사람이 구분이 가는 두 자리에 배치되는 경우의 수를 따진다는 점에서 <경우의 수적인 본질이 같은 상황>이다. 즉, 곱의 법칙을 쓰는 상황이다.

곱의 법칙 | 분할된 상황의 경우의 수가 같다고 판단 ⇨ 하나만 세서 곱한다. 즉, $n(\text{전체}) = 3\times n(\text{상황}1)$

이제 우리가 세야 하는 경우의 수는 A □ □에서 B와 C를 두 자리에 배열하는 경우의 수이다.

이것은 그냥 세도 두 가지이다. 즉, $n(\text{상황}1) = 2$

$$n(\text{전체}) = 3\times n(\text{상황}1) = 3\times 2 = 6$$

전체상황 : 분할적 사고 : 대상을 기준 ⇨ A가 어딘가는 온다.

상황 1 : A □ □
상황 2 : □ A □
상황 3 : □ □ A

여기에서 나오는 <상황 1,2,3> 역시 A가 한 자리를 차지하고 있고 남은 두 사람이 구분이 가는 두 자리에 배치되는 경우의 수를 따진다는 점에서 <경우의 수적인 본질이 같은 상황>이다. 즉, 곱의 법칙을 쓰는 상황이다.

곱의 법칙 | 분할된 상황의 경우의 수가 같다고 판단 ⇨ 하나만 세서 곱한다. 즉, $n(\text{전체}) = 3\times n(\text{상황}1)$

이제 우리가 세야 하는 경우의 수는 A □ □에서 B와 C를 두 자리에 배열하는 경우의 수이다.

이것은 그냥 세도 두 가지이다. 즉, $n(\text{상황}1) = 2$

$$n(\text{전체}) = 3\times n(\text{상황}1) = 3\times 2 = 6$$

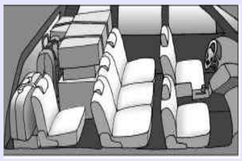
코칭 <개념의 용어화>에서 강조한 표시를 이용해서 해설을 구성하였다. 이유는 이런 용어들이 각인되어야하기 때문이다.

분할적 사고 : 자리를 기준, 분할적 사고 : 대상을 기준, … 등등

단지 어려운 문제는 저런 강조된 표시들로 인해 해설지가 지저분해 질 가능성이 있고, 일정한 틀에 얽매이면 해설이 경직될 가능성도 있기 때문에 <Part 1.>을 넘어가면 이제 '이런 용어들을 어느 정도 받아들였다'라고 생각하고 위와 같이 강조된 표시 대신 자연스럽게 설명하는 방식으로 해설을 구성하였다.

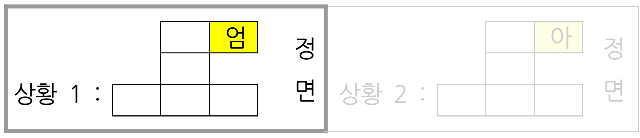
002 이해를 위한 예제 2007. 6. 가형(54%), 나형(43%). 25번. 4점

할머니, 할아버지, 어머니, 아버지, 영희, 철수 모두 6명의 가족이 자동차를 타고 여행을 가려고 한다. 이 자동차에는 앉을 수 있는 좌석이 그림과 같이 앞줄에 2개, 가운데 줄에 3개, 뒷줄에 1개가 있다. 운전석에는 아버지나 어머니만 앉을 수 있고, 영희와 철수는 가운데 줄에만 앉을 수 있을 때, 가족 6명이 모두 자동차의 좌석에 앉는 경우의 수를 구하시오.



분할적 사고 : 자리를 기준 ⇨ 어머니와 아버지 중 운전석에 누군가는 온다.

전체상황

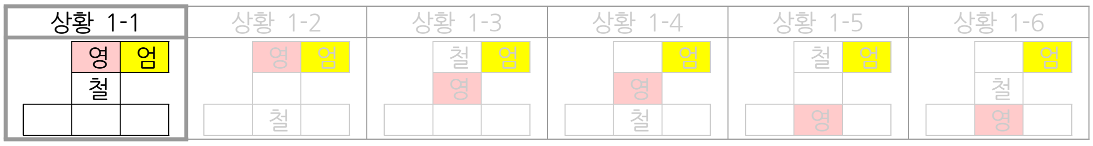


<상황 1,2>은 운전석에는 한 명이 들어가 있고, 특정 조건을 만족하며 앉아야 하는 영희와 철수는 여전히 남아 있으며 아무 곳이나 앉을 수 있는 사람도 3명으로 같다. 즉, <경우의 수적인 본질이 같은 상황>이다.

곱의 법칙 | 분할된 상황의 경우의 수가 같다고 판단 ⇨ 하나만 세서 곱한다. : $n(\text{전체}) = 2\times n(\text{상황}\,1)$

분할적 사고 : 대상을 기준 ⇨ 영희와 철수가 가운데 6자리 중 어딘가는 온다.

상황 1

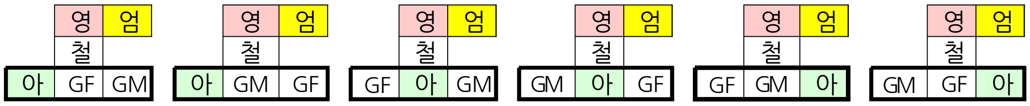


<영 : 영희>가 앉을 수 있는 모든 자리에 대해서 <철 : 철수>가 앉는 자리를 일일이 셌다.

<상황 1-1 ~ 1-6>은 남은 세 명이 남은 세 자리에 앉는다는 점에서 <경우의 수적인 본질이 같은 상황>이다.

곱의 법칙 | 분할된 상황의 경우의 수가 같다고 판단 ⇨ 하나만 세서 곱한다. : $n(\text{상황}\,1) = 6\times n(\text{상황}\,1-1)$

상황 1-1



<아 : 아버지>가 앉을 수 있는 모든 자리에 대해서 <GF : 할아버지, GM : 할머니>가 앉는 자리를 일일이 셌다.

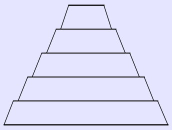
⇨ $n(\text{상황}\,1-1) = 6$ 지금은 공식을 모르므로 일일이 센다. 그리고 어차피 일일이 빼먹지 않고 세는 능력을 갖추는 것도 중요하다.

$$n(\text{전체}) = 2\times n(\text{상황}\,1) = 2\times 6\times n(\text{상황}\,1-1) = 2\times 6\times 6 = 72$$

티칭 세 명을 서로 다른 세 자리에 배열하는 경우의 수는 6가지이다. <Part 2. 근본에 가까운 공식>을 학습하기 전에 분할적 사고를 학습하기 위해 넣은 예제 중 세 명을 서로 다른 세 자리에 배열하는 경우의 수가 종종 나오는 데, 일단은 일일이 셌다고 치고 6가지라는 것을 기억해 둔다.

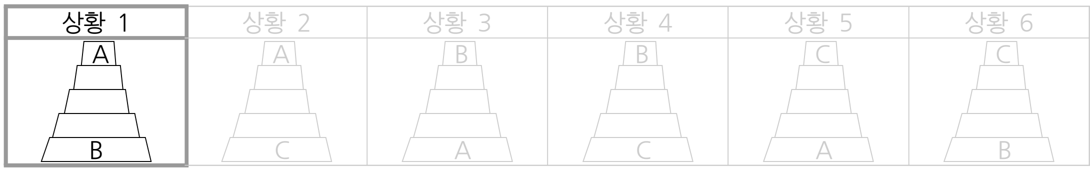
003 이해를 위한 예제 2008. 6. 가형(41%).나형(37%). 25번. 4점

그림과 같은 모양의 종이에 서로 다른 3가지 색을 사용하여 색칠하려고 한다. 이웃한 사다리꼴에는 서로 다른 색을 칠하고, 맨 위의 사다리꼴과 맨 아래의 사다리꼴에 서로 다른 색을 칠한다. 5개의 사다리꼴에 색을 칠하는 방법의 수를 구하시오.



분할적 사고 : 자리를 기준 ⇨ <맨 위>와 <맨 아래>의 두 개의 사다리꼴에 서로 다른 무언가가 온다.

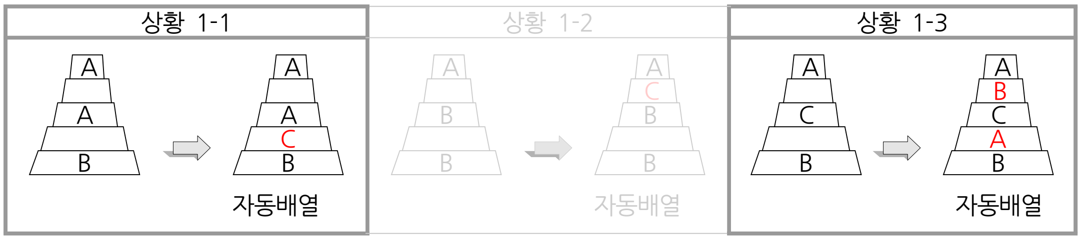
전체상황



<상황 1~6>은 <맨 위>와 <맨 아래>에 서로 다른 색이 칠해져 있고 사용되지 않는 한 개의 색이 남아 있다는 점에서 <경우의 수적인 본질이 같은 상황>이다.

곱의 법칙 | 분할된 상황의 경우의 수가 같다고 판단 ⇨ 하나만 세서 곱한다. : $n(\text{전체}) = 6\times n(\text{상황}1)$

상황 1 : 분할적 사고 : 자리를 기준 ⇨ 가운데 자리에 무언가가 온다.



<상황 1-1>과 <상황 1-2>는 가운데 자리에 <맨 위>와 <맨 아래>에서 사용된 색 중 하나인 A와 B가 사용되었고, 남은 두 자리 중 한자리에는 C가 자동으로 배치된다는 점에서 <경우의 수적인 본질이 같은 상황>이다.
반면에 <상황 1-3>은 가운데 자리에 <맨 위>와 <맨 아래>에서 사용된 색과 다른 색이 사용되었으므로 <경우의 수적인 본질이 같은 상황>이라고 판단할 수 없다.

곱의 법칙 | 분할된 상황의 경우의 수가 같다고 판단 ⇨ 하나만 세서 곱한다.

합의 법칙 | 분할된 상황의 경우의 수가 같지 않다고 판단 ⇨ 각각 세서 더한다.

: $n(\text{상황}1) = 2\times n(\text{상황}1-1) + n(\text{상황}1-3)$

그런데 $n(\text{상황}1-1)$은 남은 자리에 B, C가 올 수 있으므로 2가지이다. 즉, $n(\text{상황}1-1) = 2$

$$n(\text{전체}) = 6\times n(\text{상황}1) = 6\times\{2\times n(\text{상황}1-1) + n(\text{상황}1-3)\} = 6\times\{2\times 2 + 1\} = 30$$

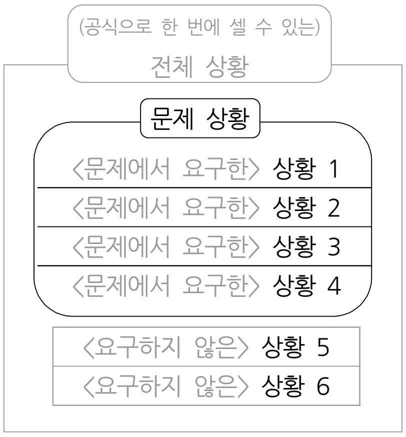
코칭 왜 <상황 1>에서 가운데 자리를 기준으로 상황을 분할했는지 물어볼 수 있다.
대답은 '그래야 가장 간단할 것 같지만 그리 중요한 문제는 아니다.'라고 할 것이다. 이 정도의 감각은 경우의 수를 공부하다 보면 누구나 생긴다. (물론 외울 수도 있지만) 그리고 다른 방식으로 분할해서 푸는 것도 어렵지 않으므로 스스로 해봐야 한다. 당장은 하기는 어려울 테니 이 책을 2회째 정독할 때 즈음이면 밑에서 두 번째 자리를 기준으로 상황을 분할해서도 풀어봐라.
이런 부분의 자세한 설명은 곧 나오는 <개념의 외연 : #3. 경우의 수를 세는 방법은 무한가지>에서 다룬다.

#4 여사건의 아이디어

전체에서 일부를 빼서 경우의 수를 세는 사고방식

상황을 <개수로 분류>한 후 ⇨ <전체>에서 <일부>를 빼서 우리가 원하는 경우의 수를 세는 사고방식.

코칭 <여사건의 아이디어>는 당장에 공부하기는 어렵고, 일단 <전체를 한 번에 세는 공식>을 배운 후 공부한다. 하지만, 그럼에도 불구하고 <여사건의 아이디어>는 모든 경우의 수 문제를 풀 때 고려해야 하는 경우의 수를 세는 근본적인 사고방식이다. 일단 주어진 상황을 분할했을 때, 각각 세서 더해야 하는 경우가 너무 많으면 자연스럽게 '전체에서 일부를 빼는 방식으로 셀 수 있지 않을까?'를 생각하는 것이다.



(공식으로 한 번에 셀 수 있는) 전체 상황은 <Part 2.>에서부터 다룬다.

(보통은) 전체 상황을 <개수로 분류>하면 분할된 상황의 경우의 수들이 같지 않다고 판단되는 경우가 많다. 이러한 경우, 각각 세서 더하는 것을 <합의 법칙>이라고 한다.

⇨ 문제에서 요구한 상황의 경우의 수를 셀 때, $n(\text{상황}\,1)+n(\text{상황}\,2)+n(\text{상황}\,3)+n(\text{상황}\,4)$을 세는 것보다 $n(\text{전체})-n(\text{상황}\,5)-n(\text{상황}\,6)$이 간단하다고 판단이 될 때, <여사건의 아이디어>를 쓰는 것이다.

티칭 후에 <Part 2.> 개념의 외연에서 배우는 내용

<적어도>라는 말이 나올 때 주로 여사건의 아이디어가 사용이 되긴 하지만, <적어도>라는 말이 없어도 반드시 사용해야 하는 경우도 있고, <적어도>라는 말이 있어도 사용하면 안 되는 경우도 있다. 그래서 전체 상황의 논리적 나열능력 즉, 전체 상황을 상상하는 능력이 필요하다, 전체를 상상하는 능력이 있어야 <여사건의 아이디어>가 효율적인지, <합의 법칙>으로 더하는 게 효율적인지를 판단할 수 있다.

예제를 통해 개념의 외연을 넓혀라

개념의 외연	#1. 정수론 1탄 : 약수와 배수
	#2. 센다의 법칙 (~~어쩔 수 없이~~ 일일이 세는 3大(대) 상황)
	#3. 경우의 수를 세는 방법은 무한가지

<개념의 외연>이라는 부분은 현재 배우고 있는 경우의 수의 국한된 내용만 다루는 것이 아니다.
현재 단원에 해당하는 문제를 풀기 위해서 필요한 수학적 개념이나 유형에 필요한 사고방식을 두루 다룬다.

수학에는 순서가 없다. 하지만 배움에는 순서가 있다.

그래서 순서가 없는 수학에 순서를 정한 것이 교육과정이다.
어떤 내용은 너무 어렵거나 복합적인 생각들을 담고 있어서 여러 학년에 걸쳐 배운다.
이런 경우 보통은 문제를 통해서 익힌다는 느낌이 강한데, 이런 개념들을 집약적으로 정리해주는 부분이 될 것이다.

#1 정수론 1탄 : 약수와 배수

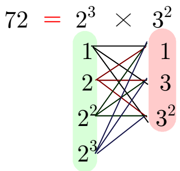
정수론(정수에 대한 이론)은 경우의 수랑 상관없이 중요한 내용이기 때문에 반드시 체계적으로 정리해야 한다.
경우의 수를 통해서 이 책의 마지막 즈음에는 정수론의 약 50% 정도의 내용이 정리될 것이다.

1. 약수와 배수에 대한 기본 이론들

1) 소인수분해	2) 산술의 기본정리
- 어떤 자연수를 몇 개의 소수의 거듭제곱의 곱의 형태로 나타내는 방법. 예컨대 $24 = 2^3 \times 3$으로 소인수 분해된다. 이때, <소인수의 종류>는 2와 3으로 두 가지이며 <소인수의 개수>는 지수를 의미한다.	- 수학의 3대 기본정리 중 하나로 자연수는 유일하게 소인수분해 된다는 뜻이다. 즉, 소인수분해 했을 때 소인수의 종류가 다르거나 소인수의 종류는 같더라도 소인수의 개수(지수)가 달라지면 다른 자연수이다.
3) 약수의 개수에 따른 분류 1	4) 약수의 개수에 따른 분류 2
① 1 : 양의 약수 1개 (1은 소수도 합성수도 아니다.) ② 소수 : 양의 약수 2개 (2는 소수 중 유일한 짝수) ③ 합성수 : 양의 약수 3개 이상	① m^2으로 표현되는 수 : 양의 약수의 개수가 홀수 개 ② m^2으로 표현되지 않는 수 : 양의 약수의 개수가 짝수 개 - 여기에서 m은 임의의 자연수를 말한다.

티칭 어떤 수의 모든 양의 약수를 관찰하는 방법은 크게 두 가지이다.

첫 번째는 자연수를 소인수분해 한 후에 수형도로 일일이 연결하여 관찰하는 방법이다.



예를 들어 위와 같이 🟩의 하나의 원소와 🟥의 하나의 원소를 곱해서 나오는 모든 수가 72의 약수이다.
두 번째는 약수를 작은 수부터 큰 수까지 일일이 나열하는 방법인데 바로 다음 페이지에 나온다.

티칭 왜 약수를 홀수 개 갖는 자연수는 N^2의 구조이어야 할까?

모든 약수를 나열하면 약수의 대칭성을 발견할 수 있는데,
이 대칭성을 통해서 이해할 수 있다.
오른쪽 두 자연수 72와 36을 비교해 보자.
72와 36을 두 약수의 곱으로 표현되는 모든 경우를 나열했을 때,
두 자연수의 양의 약수를 표시하는 방법은 두 가지이다.

즉, 36과 같이 6×6으로 표현되는 숫자는 양의 약수가 ▥와 같은 직사각형 박스 안에 들어갈 수 없으므로 양의 약수가 홀수 개다.
(6은 한 번만 세어야하기 때문이다.)

72	
1	72
2	36
3	24
4	18
6	12
8	9
9	8
12	6
18	4
24	3
36	2
72	1

72	
1	72
2	36
3	24
4	18
6	12
8	9
9	8
12	6
18	4
24	3
36	2
72	1

36	
1	36
2	18
3	12
4	9
6	6
9	4
12	3
18	2
36	1

36	
1	36
2	18
3	12
4	9
6	6
9	4
12	3
18	2
36	1

5) 공약수와 최대공약수

① 공약수 : 공통된 약수
② 최대공약수 : 공약수 중 가장 큰 약수
- 공약수를 관찰하고자 한다면 최대공약수의 약수를 관찰한다.

6) 공배수와 최소공배수

① 공배수 : 공통된 배수
② 최소공배수 : 공배수 중 가장 작은 배수
- 공배수를 관찰하고자 한다면 최소공배수의 배수를 관찰한다.

7) 0은 모든 정수의 배수이고, 1은 모든 정수의 약수이다.

8) 약수와 배수는 서로 상대적인 관계이므로 함께 생각한다.

- N이 M의 배수라면 M은 N의 약수이다.
- N의 약수를 물어본다면 자연스럽게 M의 배수의 입장에서 전체 상황을 생각해봐야 하고, M의 배수를 물어봐도 자연스럽게 N의 약수의 입장에서 전체 상황을 생각해봐야 한다.

2. 양의 약수의 개수, 합, 곱 (예제를 통한 설명)

1) 모든 양의 약수의 개수 : 수형도와 곱의 법칙

① $N=a^mb^n$ $(a,b$는 서로 다른 소수)의 양의 약수의 개수 ⇨ $(m+1)(n+1)$

② $M=a^lb^mc^n$ $(a,b,c$는 서로 다른 소수)의 양의 약수의 개수 ⇨ $(l+1)(m+1)(n+1)$

2) 모든 양의 약수의 합 : 나열과 공통인수

① $N=a^mb^n$ $(a,b$는 서로 다른 소수)의 양의 약수의 합 ⇨ $(1+a+a^2+\cdots+a^m)(1+b+b^2+\cdots+b^n)$

② $M=a^lb^mc^n(a,b,c$는 서로 다른 소수)의 양의 약수의 합 ⇨ $(1+a+\cdots+a^l)(1+b+\cdots+b^m)(1+c+\cdots+c^n)$

3) 모든 양의 약수의 곱 : 대칭성

: N의 모든 양의 약수의 곱 ⇨ $\sqrt{N^{\text{양의 약수의 개수}}}$

004 이해를 위한 예제

1번부터 20번까지 모든 자연수가 차례로 적혀있는 버튼과 이 버튼과 연결되어 있는 1번부터 20번까지 자연수가 적혀있는 전구가 있다고 하자. 버튼을 한 번 누르면 그 번호에 해당하는 전구의 상태가 변한다. (켜져 있었다면 꺼지고, 꺼져 있었다면 켜진다.) 1번부터 20번가지 번호를 배정받은 사람이 차례로 자신의 배정받은 번호의 배수에 해당하는 버튼을 한 번씩 누른다고 했을 때 20명이 모두 누른 후 켜져 있는 전구의 번호는 무엇인가? (단, 처음에 모든 전구는 꺼져있다.)

경우의 수와 경계가 애매하여 자주 등장하는 대표적인 소재가 바로 <정수론>과 <수열>이다.
모두 자연수 또는 정수를 다룬다는 특징이 있어서 그렇다.

처음에 모든 전구는 꺼져있다. - 결국 홀수 번 버튼이 눌러진 전구가 마지막에 켜져 있다는 사실을 알 수 있다.
누르는 사람에 입장에서는 자신의 번호의 <배수>를 누르지만 누름을 당하는 버튼 입장에서는 자신의 <약수>의 개수만큼 누름을 당한다. 이처럼 약수와 배수는 상대적 관계로 떼려야 뗄 수 없는 관계이다.

결국 약수를 홀수 개 갖는 자연수는 N^2이므로 $1,\ 4,\ 9,\ 16$이다.

$1,\ 4,\ 9,\ 16$

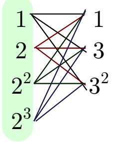
005 이해를 위한 예제

72의 (1) 양의 약수의 개수, (2) 모든 양의 약수의 합, (3)모든 양의 약수의 곱을 각각 원리에 입각해 구해보아라.

(1) 양의 약수의 개수 (수형도와 곱의 법칙)

전체상황

$$72 = 2^3 \times 3^2$$



🟩의 각각의 원소에 대하여 3번씩 서로 다른 양의 약수를 만들 수 있다.

수형도와 곱의 법칙 | 각각에 대하여 같은 경우의 수가 발생 ⇨ 곱한다. 양의 약수의 개수 $= 4\times3$

티칭 참고로 <산술의 기본정리>에 의하여 <소인수의 종류나 개수>가 다르면 무조건 다른 자연수다.
즉, 수형도로 연결된 약수 중에서 중복되는 경우는 없다. (연결된 두 숫자를 곱하면 소인수의 종류나 개수가 다르다.)

(2) 모든 양의 약수의 합 (나열과 공통인수)

공통인수

$$\begin{array}{ccccccc|c} 1\times1 & + & 1\times3 & + & 1\times3^2 & = & 1\times(1+3+3^2) & \\ 2\times1 & + & 2\times3 & + & 2\times3^2 & = & 2\times(1+3+3^2) & \\ 2^2\times1 & + & 2^2\times3 & + & 2^2\times3^2 & = & 2^2\times(1+3+3^2) & \\ 2^3\times1 & + & 2^3\times3 & + & 2^3\times3^2 & = & 2^3\times(1+3+3^2) & + \\ \hline \end{array}$$

$$(1+2+2^2+2^3)\times(1+3+3^2)$$

어려운 원리가 아니다. <양의 약수의 개수>에서 나타낸 수형도에 보이는 모든 약수를 나열해서 더한 것뿐이다.

(3) 모든 양의 약수의 곱 (대칭성)

72의 모든 양의 약수의 곱을 P라고 해보고 모든 양의 약수를 나열하여 곱하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{ccccccccccccc|c} 1 & \times2 & \times3 & \times4 & \times6 & \times8 & \times9 & \times12 & \times18 & \times24 & \times36 & \times72 & =P & \\ 72 & \times36 & \times24 & \times18 & \times12 & \times9 & \times8 & \times6 & \times4 & \times3 & \times2 & \times1 & =P & \times \\ \hline 72 & \times72 & \times72 & \times72 & \times72 & \times72 & \times72 & \times72 & \times72 & \times72 & \times72 & \times72 & =P^2 & \end{array}$$

$$72^{12\,(\text{양의 약수의 개수})} = P^2$$

위에 첫 번째 줄은 모든 양의 약수를 작은 수부터 차례로 나열한 것이고, 두 번째 줄은 큰 수부터 차례로 나열한 것이다.
결국 첫 번째 줄과 두 번째 줄을 곱하면 대칭적인 구조 때문에 72를 열두 번(양의 약수의 개수)곱하게 되는 결과가 나온다.

즉, $P^2 = 72^{12} \Leftrightarrow P = \sqrt{72^{12}}$

이것을 일반화시키면, 결국 자연수 N의 모든 양의 약수의 곱은 $\sqrt{N^{\text{양의 약수의 개수}}}$이다.

#2 센다의 법칙

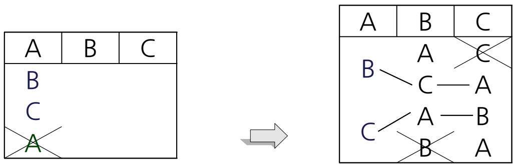
어쩔 수 없이 일일이 세는 3大(대) 상황

〈완전순열〉 〈돈 문제 : 지불하는 방법과 금액〉 〈계수가 다른 부정방정식 (or 부등식)〉

1. 완전순열

- 사전적 의미는 기존의 모든 요소를 움직여서 만드는 순열이라는 뜻이다. 일단은 〈순열 = 일렬로 나열〉이라고 생각하자.

예컨대 ABC를 그냥 나열하라고 한다면 ABC, ACB, ⋯ 이런 식이다. 그런데 만약 ABC를 완전순열로 나열한다고 한다면 A, B, C 모두 처음 자기 자리에 있으면 안 된다.



A를 기준으로 상황을 분할하면서 일일이 세면 BCA랑 CAB 두 가지 경우 밖에 없다.

결국, 완전순열이란 자기가 자기 자신을 선택하지 못하는 경우의 수라고 생각하면 된다.

006 이해를 위한 예제

1, 2, 3, 4를 일렬로 나열하여 네 자리의 정수 $a_1a_2a_3a_4$ 만들 때, $a_i \neq i$를 만족하는 정수의 개수는? (단, $i=1$, 2, 3, 4)

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

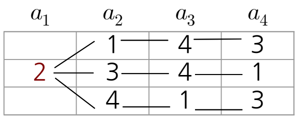
전체상황 : 분할적 사고 : 자리를 기준 ⇨ a_1자리에 1을 제외한 누군가는 온다.

	a_1	a_2	a_3	a_4
상황 1	2			
상황 2	3			
상황 3	4			

〈상황 1 ~ 3〉 모두 남은 문자가 1을 포함한 세 개이고 남은 세 자리 중 한자리에 대응하는 숫자가 사용되었다는 점에서 〈경우의 수적 본질이 같은 상황〉이다.

곱의 법칙 | 분할된 상황의 경우의 수가 같다고 판단 ⇨ 하나만 세서 곱한다. : $n(\text{전체}) = 3\times n(\text{상황}1)$

상황 1



아무리 분할해도 같은 경우의 수가 나오지 않는다. ⇨ 어쩔 수 없이 일일이 센다. : $n(\text{상황}1) = 3$

$$n(\text{전체}) = 3\times n(\text{상황}1) = 3\times 3 = 9$$

코칭 완전순열공식도 있기는 하지만, 앞에서도 말했듯이 〈난잡하게 많이 아는 것〉은 결코 사고력에 좋지 않다. 여기에서 완전순열은 〈일일이 세는 대표적인 예〉로 제시했을 뿐, 공식을 알 필요는 없다. 이 유형은 모든 상황을 꼼꼼히 나열할 수 있는 능력이 있는지를 물어보기 위해 자주 출제된다.

2. 돈 문제 : 지불할 수 있는 방법과 금액 (예제를 통한 학습)

1) (거스름돈 없이) 지불할 수 있는 방법의 수	2) (거스름돈 없이) 지불할 수 있는 금액의 가짓수
수형도와 곱의 법칙으로 이해한다.	나열하면서 세보면 금방 규칙성을 찾아나갈 수 있다.

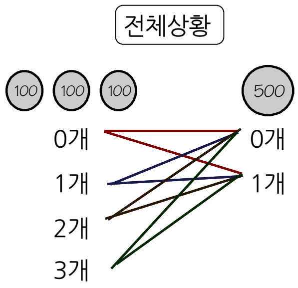
007 이해를 위한 예제

100원짜리 동전 3개와 500원짜리 동전 1개가 있다. 0원을 지불하는 것은 지불하지 않는 것으로 할 때, 다음을 구하여라.

(1) 거스름돈 없이 지불할 수 있는 방법의 수

(2) 거스름돈 없이 지불할 수 있는 금액의 가짓수

(1) 거스름돈 없이 지불할 수 있는 방법의 수

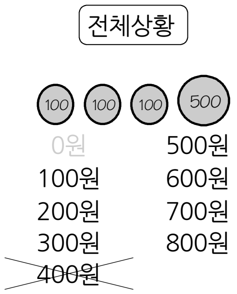


수형도와 곱의 법칙	각각에 대하여 같은 경우의 수가 발생	⇨ 곱한다.

$$4\times2 - 1 = 7$$

티칭 〈100원 0개, 500원 0개〉 조합은 0원을 지불하는 것이므로 제외해야 한다.

(2) 거스름돈 없이 지불할 수 있는 금액의 가짓수



$$4\times2 - 1 = 7$$

티칭 0원부터 연속적으로 지불할 수 있는 금액을 나열하되 연속성이 깨지는 부분에서 열을 바꾸면 규칙을 찾을 수 있다.

008 이해를 위한 예제

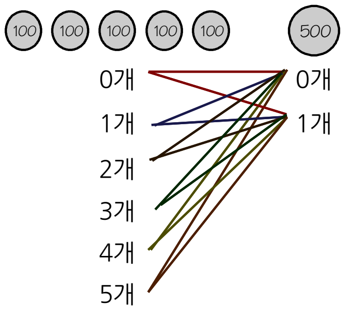
100원짜리 동전 5개와 500원짜리 동전 1개가 있다. 0원을 지불하는 것은 지불하지 않는 것으로 할 때, 다음을 구하여라.

(1) 거스름돈 없이 지불할 수 있는 방법의 수

(2) 거스름돈 없이 지불할 수 있는 금액의 가짓수

(1) 거스름돈 없이 지불할 수 있는 방법의 수

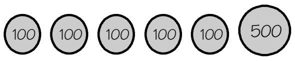
전체상황



$6 \times 2 - 1 = 11$

(2) 거스름돈 없이 지불할 수 있는 금액의 가짓수

전체상황



0원

100원

200원

⋮

1000원

$11 - 1 = 10$

티칭 앞의 2개의 예시를 통해서 우리는 동전 문제의 본질을 파악할 수 있다.

(이해를 위한 예제 007)에서는 <방법>과 <금액의 수>가 같았고,

(이해를 위한 예제 008)에서는 <방법>이 <금액의 수>보다 많았다.

결과적으로 <같은 금액의 돈>이라도 <여러 가지 방법으로 지불>할 수 있기 때문에 항상 $n(\text{방법}) \geq n(\text{금액})$이다.

- 예컨대 (이해를 위한 예제 008)을 보면
  <500원>에 대해서 지불하는 <방법>에서는 2가지로 경우의 수를 셌지만 (100원×5개 / 500원×1개)
  <금액>에서는 1가지로만 경우의 수를 셌다.
- 이와 비교해 (이해를 위한 예제 007)을 보면
  <500원>에 대해서 지불하는 <방법>과 <금액>모두 한 가지로 셌다.

이처럼 문제의 조건에서 작은 액수의 돈이 큰 액수의 돈을 대체할 만큼 충분히 많으면 $n(\text{방법}) > n(\text{금액})$이고,
작은 액수의 돈을 아무리 모아도 큰 액수의 돈을 대체할 수 없다면 $n(\text{방법}) = n(\text{금액})$이
되는 것이다. 2개의 예시를 비교하면 이해할 수 있다.

티칭 <지불할 수 있는 금액의 가짓수>를 <지불할 수 있는 방법의 수>처럼 해결하는 방법

: 간단한 행위를 통해서 <방법>처럼 셀 수 있다.

작은 액수의 돈이 큰 액수의 돈으로 바뀔 만큼 충분히 많다면 큰 금액의 돈을 작은 금액의 돈으로 모두 환전한 다음 <방법>처럼 풀면 된다. 환전을 하면 <방법>에서는 <여러 번 세졌던 금액>이 한 번만 세지기 때문이다.

이 문제에서는 100원짜리 동전이 5개로 500원을 대체 할 수 있기 때문에 100원짜리 동전이 10개 있다고 생각하면 500원이 두 번 세지지 않으므로 <방법>처럼 세어도 되는 것이다.

코칭 하지만 <금액>을 <방법>처럼 푸는 방식을 외워서 동전 문제 푸는 행위는 자제하길 바란다. 그건 경우의 수의 적이다.

하나하나 나열하면서 <왜 그런지> 이해하다 보면 <금액을 방법처럼 푸는 방식>도 자연스럽게 받아들여질 것이다.

어차피 동전 문제는 너무 유형화되어 있어서, 시험에는 잘 안 나오기 때문에 원리적으로 계속 연습해 보길 바란다.

(그리고 금액문제는 여러 가지 조건으로 인해 상황이 복잡할수록 나열이 편하다.)

3. 계수가 다른 부정방정식과 부등식

- 계수가 큰 것에 먼저 대입하는 것이 편하다. 말이 필요 없다. 직접 해보면서 계수가 큰 것에 먼저 대입하는 것이 왜 편한지, 그 이유를 느껴야 한다.

009 이해를 위한 예제

$3x + 2y + z = 9$을 만족하는 자연수 x, y, z에 대하여 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하여라.

분할적 사고 : 자리를 기준 ⇨ x의 자리에 무언가의 자연수가 온다.

전체 상황

상황 1 : $(1, y, z)$
상황 2 : $(2, y, z)$

x가 3이면 자연수를 만족하는 y, z가 존재할 수 없다.

아무리 분할해도 같은 경우의 수가 나오지 않는다. ⇨ 어쩔 수 없이 일일이 센다.

$3x$	$+$	$2y$	$+$	z	$=$	9
1		1		4		
		2		2		
2		1		1		

$$n(\text{전체}) = n(\text{상황}1) + n(\text{상황}2) = 1 + 2 = 3$$

티칭 <상황1>은 x에 1을 대입해서 $2y + z = 6$의 방정식의 해의 개수를 구해야 한다.
<상황2>는 x에 2를 대입해서 $2y + z = 3$의 방정식의 해의 개수를 구해야 한다.
두 방정식은 다른 방정식이므로 당연히 해의 개수도 다르다.

분할적 사고 : 자리를 기준 ⇨ z의 자리에 무언가의 자연수가 온다.

전체상황

상황 1 : $(x, y, 1)$
상황 2 : $(x, y, 2)$
상황 3 : $(x, y, 3)$
상황 4 : $(x, y, 4)$

z가 5이면 x, y에 가장 작은 자연수 1을 대입해도 우변의 9를 넘어가기 때문에 안 된다.

아무리 분할해도 같은 경우의 수가 나오지 않는다. ⇨ 어쩔 수 없이 일일이 센다.

$$n(\text{전체}) = n(\text{상황}1) + n(\text{상황}2) + n(\text{상황}3) + n(\text{상황}4) = 1 + 1 + 0 + 1 = 3$$

티칭 - 계수가 작은 문자에 숫자를 대입하면 상황은 더 많아지므로 계수가 큰 문자에 먼저 대입해서 상황을 나눠야 한다.
- 아무리 상황을 분할해도 경우의 수가 같은 상황이 안 생긴다. 숫자를 대입하는 순간 방정식이 달라지기 때문이다.

그렇기 때문에 결국에는 일일이 세야 한다.

010 이해를 위한 예제

10원짜리, 50원짜리, 100원짜리 세 종류의 동전을 모두 사용하여 350원을 만드는 방법의 수를 구하여라.

앞에서 배운 <방법과 금액 문제> 같기도 하지만 사실은 부정방정식 문제다.

(차이를 굳이 비교하자면 여기에서는 동전의 개수를 정해주지 않았다. 동전이 몇 개씩 있느냐에 따라서 방법이나 금액의 가짓수가 달라지기 때문에 방법이나 금액을 물어보는 문제는 동전의 개수를 알려주게 되어있다.)

<10원짜리 동전 : x개>, <50원짜리 동전 : y개>, <100원짜리 동전 : z개>가 각각 있다고 하자.
$10x + 50y + 100z = 350$을 만족하는 자연수 x, y, z에 대하여 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하는 문제이다.

$10x + 50y + 100z = 350 \Leftrightarrow x + 5y + 10z = 35$ ⇨ 부정방정식의 해의 개수는 일일이 센다.

전체상황

$$x + 5y + 10z = 35$$

20	1	1
15	2	
10	3	
5	4	
10	1	2
5	2	

z가 3이면 x, y에 가장 작은 자연수 1을 대입해도 우변의 35를 넘어가기 때문에 안 된다.

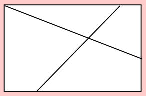
정답은 6가지

#3 경우의 수를 세는 방법은 무한가지

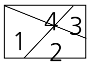
- 어떻게 분할하느냐에 따라 미세한 차이가 생겨서 경우의 수를 세는 방법은 여러 가지다.
  (무한가지는 강조를 위한 다소 과격한 표현으로 이해하자.)
- <논리적으로 수를 세는 것>이 반드시 <간단하게 수를 세는 것>은 아니다. 실제로 경우의 수 곳곳에서 우리가 흔히 쓰는 공식을 이용하여 간단히 풀 수 있는 문제를 <다른 복잡한 방식의 계산>으로 풀어도 이해할 수 있는지를 자주 물어본다. 즉, 계산할 수 있느냐가 아니라 경우의 수를 논리적으로 이해했는가를 물어보는 것이다. - 본질적으로 분할적 사고를 물어본 것

011 이해를 위한 예제

다음 4개의 영역에 3가지 색 A, B, C를 칠하는 경우의 수를 생각해보자.
(단, 색은 중복해서 사용할 수 있고, 인접한 부분은 다른 색으로 칠해야 한다.)

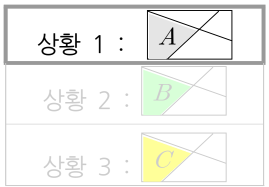


첫 번째 풀이



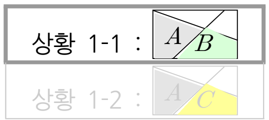
편의상 각 영역에 번호를 붙였다.

전체상황 : 분할적 사고 : 자리를 기준 ⇨ 1번 자리에 어떤 색이 온다.



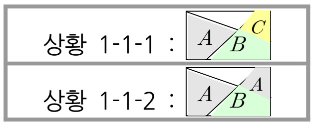
곱의 법칙 | 분할된 상황의 경우의 수가 같다고 판단 ⇨ 하나만 세서 곱한다. : $n(\text{전체}) = 3\times\ n(\text{상황}\,1)$

상황 1 : 분할적 사고 : 자리를 기준 ⇨ 2번 자리에 A와 다른 어떤 색이 온다.



곱의 법칙 | 분할된 상황의 경우의 수가 같다고 판단 ⇨ 하나만 세서 곱한다. : $n(\text{상황}\,1) = 2\times n(\text{상황}\,1-1)$

상황 1-1 : 분할적 사고 : 자리를 기준 ⇨ 3번 자리에 B와 다른 어떤 색이 온다.



$n(\text{상황}\,1-1-1) = 1$ (B밖에 못 온다.)

$n(\text{상황}\,1-1-2) = 2$ (B와 C가 올 수 있다.)

합의 법칙 | 분할된 상황의 경우의 수가 같지 않다고 판단 ⇨ 각각 세서 더한다.

: $n(\text{상황}\,1-1) = n(\text{상황}\,1-1-1) + n(\text{상황}\,1-1-2)$

$$\begin{aligned} n(\text{전체}) = 3\times n(\text{상황}\,1) &= 3\times2\times n(\text{상황}\,1-1) \\ &= 3\times2\times\{n(\text{상황}\,1-1-1) + n(\text{상황}\,1-1-2)\} \\ &= 3\times2\times(1+2) = 18 \end{aligned}$$

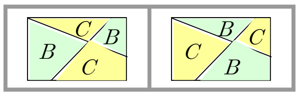
두 번째 풀이 : 복잡하게 풀어보자.

분할적 사고 : 대상을 기준 ⇨ A가 사용되거나 또는 사용되지 않는다. (아래 분할된 상황은 합의 법칙의 상황이다,)

전체상황

상황 1 : $\boxed{A}$
상황 2 : $\boxed{\cancel{A}}$

상황 2



(상황2)에서 인접한 면을 다르게 칠하려면 $\boxed{B}\boxed{B}\boxed{C}\boxed{C}$을 칠할 수밖에 없다. 한 개의 색을 3번 사용하면 인접한 면을 다른 색으로 칠할 수 없다. 즉, 일일이 세면 $n(\text{상황}2) = 2$

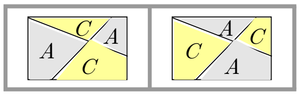
$$n(\text{전체}) = n(\text{상황}1) + n(\text{상황}2) = n(\text{상황}1) + 2$$

분할적 사고 : 대상을 기준 ⇨ B가 사용되거나 또는 사용되지 않는다. (아래 분할된 상황은 합의 법칙의 상황이다,)

상황 1

상황 1-1 : $\boxed{A}$ $\boxed{B}$
상황 1-2 : $\boxed{A}$ $\boxed{\cancel{B}}$

상황 1-2



(상황1-2)에서 인접한 면을 다르게 칠하려면 $\boxed{A}\boxed{A}\boxed{C}\boxed{C}$을 칠할 수밖에 없다. 즉, 일일이 세면 $n(\text{상황}1-2) = 2$

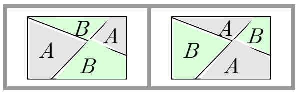
$$n(\text{상황}1) = \{n(\text{상황}1-1) + n(\text{상황}1-2)\} = n(\text{상황}1-1) + 2$$

분할적 사고 : 대상을 기준 ⇨ C가 사용되거나 또는 사용되지 않는다. (아래 분할된 상황은 합의 법칙의 상황이다,)

상황 1-1

상황 1-1-1 : $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$
상황 1-1-2 : $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{\cancel{C}}$

상황 1-1-2



(상황1-1-2)에서 인접한 면을 다르게 칠하려면 $\boxed{A}\boxed{A}\boxed{C}\boxed{C}$을 칠할 수밖에 없다. 즉, 일일이 세면 $n(\text{상황}1-1-2) = 2$

$$n(\text{상황}1-1) = \{n(\text{상황}1-1-1) + n(\text{상황}1-1-2)\} = n(\text{상황}1-1-1) + 2$$

상황 1-1-1 : 분할적 사고 : 배열 전 모든 상황 ⇨ 두 번 사용되는 색깔을 기준으로 상황을 분할

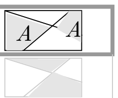
상황 1-1-1-1 : $\boxed{A}$ $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$
상황 1-1-1-2 : $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$
상황 1-1-1-3 : $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{C}$

: $n(\text{상황}1-1-1) = 3\times n(\text{상황}1-1-1-1)$

곱의 법칙 | 분할된 상황의 경우의 수가 같다고 판단 ⇨ 하나만 세서 곱한다.

상황 1-1-1-1 : 분할적 사고 : 대상을 기준 ⇨ 두 개의 A가 어딘가는 들어간다.

상황 1-1-1-1-1 :
상황 1-1-1-1-2 :



: $n(\text{상황}1-1-1-1) = 2\times n(\text{상황}1-1-1-1-1)$

곱의 법칙 | 분할된 상황의 경우의 수가 같다고 판단 ⇨ 하나만 세서 곱한다.

: $n(\text{상황}1-1-1-1-1) = 2$ (B, C 칠하는 경우의 수이므로)

$$\begin{aligned}
n(\text{전체}) &= n(\text{상황}1) + n(\text{상황}2) && = n(\text{상황}1) + 2 \\
&= n(\text{상황}1-1) + n(\text{상황}1-2) + 2 && = n(\text{상황}1-1) + 2 + 2 \\
&= n(\text{상황}1-1-1) + n(\text{상황}1-1-2) + 2 + 2 && = n(\text{상황}1-1-1) + 2 + 2 + 2 \\
&= 3\times n(\text{상황}1-1-1-1) + 2 + 2 + 2 && = 3\times 2\times n(\text{상황}1-1-1-1-1) + 2 + 2 + 2 \\
&= 3\times 2\times 2 + 2 + 2 + 2 = 18
\end{aligned}$$

세 번째 풀이 : 보통 이 풀이를 가장 많이 설명한다.

분할적 사고 : 개수로 분류 ⇨ 3가지 색을 모두 사용하거나 2가지 색만을 사용한다. (1가지 색만 사용할 수는 없다.)

전체상황

상황 1 : 세 가지 색 모두
상황 2 : 두 가지 색만

: $n(\text{전체}) = n(\text{상황}\,1) + n(\text{상황}\,2)$

합의 법칙 | 분할된 상황의 경우의 수가 같지 않다고 판단 ⇨ 각각 세서 더한다.

분할적 사고 : 배열 전 모든 상황 ⇨ 두 번 사용되는 색깔을 기준으로 상황을 분할한다.

상황 1

상황 1-1 : $\boxed{A}$ $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$
상황 1-2 : $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$
상황 1-3 : $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{C}$

: $n(\text{상황}\,1) = 3 \times n(\text{상황}\,1-1) = 3 \times 2 \times 2 = 12$

곱의 법칙 | 분할된 상황의 경우의 수가 같다고 판단 ⇨ 하나만 세서 곱한다.

(상황 1-1)은 앞의 두 번째 풀이 (상황 1–1–1)에서 설명 했으니 여기에서는 생략한다.

분할적 사고 : 배열 전 모든 상황 ⇨ 2가지 색만 사용되는 모든 경우를 생각해보면 위와 같이 3가지 경우가 있다.

상황 1-1

상황 2-1 : $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{\xcancel{C}}$
상황 2-2 : $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{\xcancel{A}}$
상황 2-3 : $\boxed{C}$ $\boxed{A}$ $\boxed{\xcancel{B}}$

: $n(\text{상황}\,2) = 3 \times n(\text{상황}\,2-1) = 3 \times 2 = 6$

곱의 법칙 | 분할된 상황의 경우의 수가 같다고 판단 ⇨ 하나만 세서 곱한다.

상황 2-1에서 인접한 면은 다른 색으로 칠해야하기 때문에 각 색깔을 2번씩 사용할 수밖에 없다.

즉, $\boxed{A}$ $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{B}$ 를 배치. $\boxed{A}$ $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{B}$ 를 배치하는 모든 경우의 수는 일일이 나열하면 2가지이다.

앞에서 두 번째 풀이 (상황 1–2)에서 설명했다.

$$n(\text{전체}) = n(\text{상황}\,1) + n(\text{상황}\,2) = 12 + 6 = 18$$

코칭 상황은 한번 분할하고 끝나는 게 아니다. 각 단계마다 어떤 방식으로 분할하느냐에 따라 문제를 푸는 방법이 100가지가 될 수도 있는 게 경우의 수다.
〈대상을 기준〉으로 분할했다가, 〈자리를 기준〉으로 했다가, 〈개수로 분류〉하기도 하고,
결론은 어떤 방식을 선택하더라도 같은 정답에 도달할 수 있으면 되는 것이다.
(앞의 설명도 3가지 정도의 예시적인 방법에 불과한 것이고, 어쨌든 비효율적인 방법으로도 답에 도달하는 것을 보여주기 위해 끝까지 답을 찾아본 것이다.)

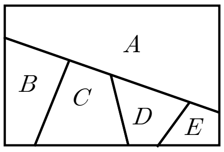
효율적인 방법? 그런 건 없다. 그건 배우는 게 아니라 문제를 통해서 이 방법, 저 방법으로 연습하다 보면 자연스럽게 직관적으로 찾아지는 것이다. 그럼에도 불구하고 팁을 주자면 기본적으로 상황을 분할시켰을 때, 곱의 법칙의 상황이 나와야 효율적이고, 제약조건이 많은 자리나 대상을 기준으로 분할하는 것이 효율적이기는 하다.

공부는 **예제**를 가지고 하는 거야

일단 풀고 맞았다고 하더라도 뒤의 해설을 정독하여 읽는다. 왜냐하면 풀이과정이 암기되어서 문제가 그냥 풀리거나 그냥 직관적으로 판단이 되어서 문제가 풀리는 경우도 많기 때문이다. 우리가 문제를 푸는 이유는 앞에서 배운 개념을 확인하기 위해서다. 이 문제를 푸는 것이 중요한 게 아니라 다른 어려운 문제에 까지 적용할 수 있는 개념을 익히는 게 중요한 것이다.

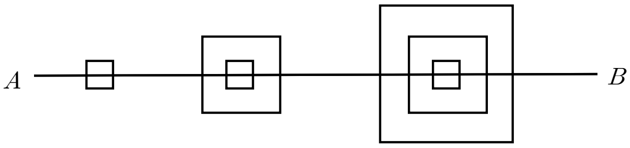
예제 001

다음 그림의 A, B, C, D, E 5개의 영역을 빨강, 노랑, 파랑, 검정, 주황의 색연필로 칠하려고 한다. 같은 색을 중복하여 사용해도 좋으나 인접하는 영역은 서로 다른 색으로 칠할 때, 칠하는 경우의 수는?



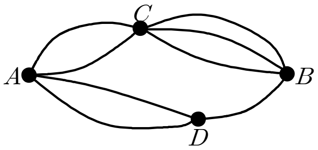
예제 002

두 지점 A, B를 연결하는 도로망이 있다.
이 때, A지점에서 B지점으로 가는 방법의 수를 구하여라. (단, 통과한 지점은 다시 지나지 않는다.)



예제 003

그림과 같이 A지점에서 B지점으로 가는 길이 있다. 갑과 을이 동시에 A지점을 출발하여 B지점으로 가는 방법의 수는?
(단, 갑과 을은 같은 지점을 거쳐서 갈 수 없다.)



예제 004

2009. 9. 나형. 8번. 3점

어느 김밥 가게에서는 기본재료만 포함된 김밥의 가격을 1000원으로 하고, 기본재료 외에 선택재료가 추가될 경우 다음 표에 따라 가격을 정한다. 예를 들어 맛살과 참치가 추가된 김밥의 가격은 1500원이다. 선택재료를 추가하였을 때, 가격이 1500원 또는 2000원이 되는 김밥의 종류는 모두 몇 가지인가? (단, 선택재료의 양은 가격에 영향을 주지 않는다.)

선택재료	가격(원)
~~햄~~	~~200~~
맛살	200
김치	200
불고기	300
치즈	300
참치	300

예제 005

2010. 6. 나형(48%). 28번. 4점

1개의 본사와 5개의 지사로 이루어진 어느 회사의 본사로부터 각 지사까지의 거리가 표와 같다. 본사에서 각 지사에 A, B, C, D, E를 지사장으로 각각 발령할 때, A보다 B가 본사로부터 거리가 먼 지사의 지사장이 되도록 5명을 발령하는 경우의 수는?

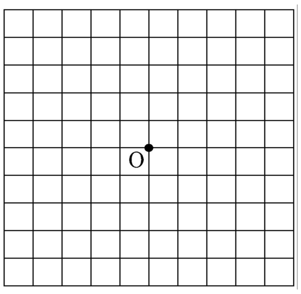
지사	가	나	다	라	마
거리(km)	50	50	100	150	200

① 50 ② 52 ③ 54 ④ 56 ⑤ 58

예제 006

2008. 9. 나형(35%). 11번. 4점

그림과 같이 이웃한 두 교차로 사이의 거리가 모두 1인 바둑판 모양의 도로망이 있다. 로봇이 한 번 움직일 때마다 길을 따라 거리 1만큼씩 이동한다. 로봇은 길을 따라 어느 방향으로도 움직일 수 있지만, 한 번 통과한 지점을 다시 지나지는 않는다. 이 로봇이 지점 O에서 출발하여 4번 움직일 때, 가능한 모든 경로의 수는? (단, 출발점과 도착점은 일치하지 않는다.)



① 88 ② 96 ③ 100 ④ 104 ⑤ 112

예제 007

2007. 10. 나형(58%). 28번. 4점

어느 고등학교에서는 방학 중 방과 후 학교 강좌를 다음과 같이 개설하였다. 어떤 학생이 국어, 수학, 영어 세 과목을 각각 한 번씩 수강하려고 할 때, 그 방법의 수는?

① 11 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 17

	1교시	2교시	3교시	4교시
국어	○	○	○	×
수학	○	×	○	○
영어	×	○	○	○

○:개설, ×:미개설

예제 008

100보다 작은 양의 정수가 있다. 3의 배수도 아니고 5의 배수도 아닌 정수의 개수를 구하여라.

예제 009

360의 양의 약수 중 2의 배수인 것은 몇 개인가?

예제 010

360과 540의 공약수는 모두 몇 개인가?

예제 011

100원짜리 1개, 50원짜리 2개, 10원짜리 3개가 있다. 일부 또는 전부를 사용하여 거스름돈 없이 지불할 때, 다음을 구하여라.

(1) 지불할 수 있는 방법의 수

(2) 지불할 수 있는 금액의 가짓수

예제 012

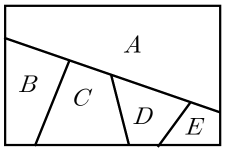
$x+2y+3z=11$을 만족하는 양의 정수 (x,y,z)의 순서쌍의 개수를 구하여라.

정답과 해설

예제 001

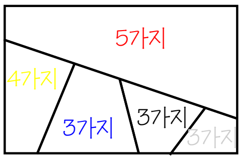
REVIEW 곱의 법칙 : 하나만 세서 곱한다.

다음 그림의 A, B, C, D, E 5개의 영역을 빨강, 노랑, 파랑, 검정, 주황의 색연필로 칠하려고 한다. 같은 색을 중복하여 사용해도 좋으나 인접하는 영역은 서로 다른 색으로 칠할 때, 칠하는 경우의 수는?



첫 문제는 가볍게 중학교 때도 많이 풀었던 문제로 시작한다. 이 문제를 습관적으로 푸는 것이 아니라 곱하면서 곱하는 이유를 설명할 수 있으면 된다.

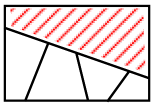
보통은 아래와 같이 셌다. 이제 이해를 해보자.



$n(\text{전체}) = n(A\text{에 칠 가능 색}) \times n(B\text{에 칠 가능 색}) \times n(C\text{에 칠 가능 색}) \times n(D\text{에 칠 가능 색}) \times n(E\text{에 칠 가능 색})$

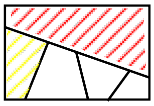
$= 5 \times 4 \times 3 \times 3 \times 3 = 540$

먼저 A에 색칠되는 색을 기준으로 상황을 분할하면 어떤 색이 오더라도 <경우의 수적으로 같은 상황>이다.



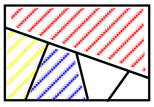
$n(\text{전체}) = \underline{n(A\text{에 칠 가능 색}) \times} n(\text{나머지 경우의 수}) = 5 \times n(\text{나머지 경우의 수})$

곱하는 순간 하나만 센다. - 5를 곱하는 순간 A영역을 빨강으로 고정 (물론 다른 색으로 고정해도 된다.)



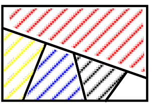
$n(\text{전체}) = 5 \times \underline{n(B\text{에 칠 가능 색}) \times} n(\text{나머지 경우의 수}) = 5 \times 4 \times n(\text{나머지 경우의 수})$

곱하는 순간 하나만 센다. - 빨강색을 제외한 4가지 가능. 4를 곱하는 순간 B영역을 노랑으로 고정.



$n(\text{전체}) = 5 \times 4 \times \underline{n(C\text{에 칠 가능 색}) \times} n(\text{나머지 경우의 수}) = 5 \times 4 \times 3 \times n(\text{나머지 경우의 수})$

곱하는 순간 하나만 센다. - 빨강, 노랑을 제외한 3가지 가능. 3을 곱하는 순간 C영역을 파랑으로 고정.



$n(\text{전체}) = 5 \times 4 \times 3 \times \underline{n(D\text{에 칠 가능 색}) \times} n(\text{나머지 경우의 수}) = 5 \times 4 \times 3 \times 3 \times n(\text{나머지 경우의 수})$

곱하는 순간 하나만 센다. - 빨강, 파랑을 제외한 3가지 가능. 3을 곱하는 순간 D영역을 검정으로 고정.

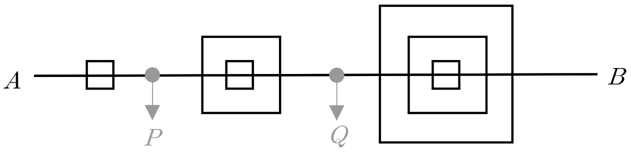
이렇게 4개의 영역이 다 고정된 상태에서 마지막 E영역에 들어갈 수 있는 색깔은 3가지이다.

티칭 색칠문제는 보통 자리를 기준으로 상황을 분할하고 그 자리도 인접한 면이 가장 많은 자리가 좋다.

예제 002

REVIEW 수형도와 곱의 법칙 : 각각에 대하여 같은 경우의 수가 발생하면 곱한다.

두 지점 A, B를 연결하는 도로망이 있다. 이 때, A지점에서 B지점으로 가는 방법의 수를 구하여라. (단, 통과한 지점은 다시 지나지 않는다.)



통과한 지점은 다시 지나지 않는다. - 전진만 할 뿐 후진하지 않는다는 뜻이다.

A 에서 P 로 가는 경로의 수 $= 3$

P 에서 Q 로 가는 경로의 수 $= 5$

Q 에서 B 로 가는 경로의 수 $= 7$

수형도와 곱의 법칙	각각에 대하여 같은 경우의 수가 발생	⇨ 곱한다.

〈$A \to P$ 경로 3가지〉 각각에 대하여 〈$P \to Q$ 5가지〉를 수형도로 대응시킬 수 있고,

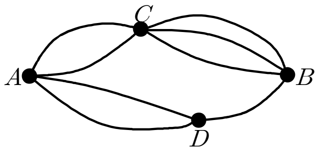
〈$A \to P \to Q$ 경로 15가지〉 각각에 대하여 〈$Q \to B$ 7가지〉를 수형도로 대응시킬 수 있다.

즉, $n(\text{전체}) = n(A \to P) \times n(P \to Q) \times n(Q \to B) = 3 \times 5 \times 7 = 105$

예제 003

REVIEW 분할적 사고 : 배열 전 모든 상황 / 합의 법칙과 곱의 법칙

그림과 같이 A지점에서 B지점으로 가는 길이 있다. 갑과 을이 동시에 A지점을 출발하여 B지점으로 가는 방법의 수는? (단, 갑과 을은 같은 지점을 거쳐서 갈 수 없다.)



갑과 을은 같은 지점을 거쳐서 갈 수 없다. - 갑이 C를 거쳐서 갈 경우 을은 D를 거쳐서 가야하고,
갑이 D를 거쳐서 갈 경우 을은 C를 거쳐서 가야한다.

분할적 사고 : 배열 전 모든 상황 : 갑과 을이 B로 갈수 있는 모든 경우를 고려한다.

전체상황

상황 1 : 갑 ACB, 을 ADB

상황 2 : 갑 ADB, 을 ACB

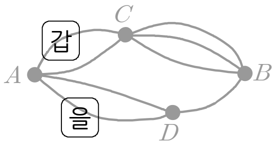
곱의 법칙	분할된 상황의 경우의 수가 같다고 판단	⇨ 하나만 세서 곱한다.

: $n(\text{전체}) = 2 \times n(\text{상황}1)$

상황 1

갑이 가는 경로 A→C→B $= 2 \times 3 = 6$

을이 가는 경로 A→D→B $= 2 \times 1 = 2$



수형도와 곱의 법칙	각각에 대하여 같은 경우의 수가 발생	⇨ 곱한다.

: $n(\text{상황}1) = n(\text{갑} : A \to C \to B) \times n(\text{을} : A \to D \to B) = 6 \times 2 = 12$

$n(\text{상황}1)$은 〈갑이 가는 경로 6가지〉 각각에 대하여 〈을이 가는 경로 2가지〉를 순서쌍으로 대응시킬 수 있다.

$n(\text{전체}) = 2 \times n(\text{상황}1) = 2 \times 12 = 24$

예제 004

REVIEW 합의 법칙과 곱의 법칙 + 수형도와 곱의 법칙 : 각각에 대하여 같은 경우의 수가 발생

2009. 9. 나형. 8번. 3점

어느 김밥 가게에서는 기본재료만 포함된 김밥의 가격을 1000원으로 하고, 기본재료 외에 선택재료가 추가될 경우 다음 표에 따라 가격을 정한다. 예를 들어 맛살과 참치가 추가된 김밥의 가격은 1500원이다. 선택재료를 추가하였을 때, 가격이 1500원 또는 2000원이 되는 김밥의 종류는 모두 몇 가지인가? (단, 선택재료의 양은 가격에 영향을 주지 않는다.)

선택재료	가격(원)
~~햄~~	~~200~~
맛살	200
김치	200
불고기	300
치즈	300
참치	300

가격이 1500원 또는 2000원이 되는 김밥의 종류 - 중복된 경우가 생기지 않는다. ⇨ 각각 세서 더한다.

(단, 선택재료의 양은 가격에 영향을 주지 않는다.) - 같은 재료를 두 번 추가하는 경우는 생각하지 않는다.

⇨ 서로 다른 재료를 선택한다.

기본재료만 포함된 김밥의 가격을 1000원 ⇨ $n(\text{전체}) = n(500\text{원 추가}) + n(1000\text{원 추가})$

$n(500\text{원 추가}) = 3 \times 3 = 9$

⇨ ∵ *200원 재료 1개 추가* ∵ 수형도로 이해 (각각에 대하여 같은 경우의 수) ∵ *300원 재료 1개 추가*

$n(1000\text{원 추가}) = 3 \times 3 = 9$

⇨ ∵ *200원 재료 2개 추가* ∵ 수형도로 이해 (각각에 대하여 같은 경우의 수) ∵ *300원 재료 2개 추가*

사실 $n(1000\text{원 추가})$에서 세 개 중 두 개를 뽑는 경우의 수는 뒤에 배우는 조합공식을 써서 푸는 것이 합당하나 가짓수가 몇 가지 되지 않으므로 일일이 셌다고 치자.

$$n(\text{전체}) = n(500\text{원 추가}) + n(1000\text{원 추가}) = 18$$

예제 005

REVIEW 합의 법칙과 곱의 법칙을 부분적으로 적용

2010. 6. 나형(48%). 28번. 4점

1개의 본사와 5개의 지사로 이루어진 어느 회사의 본사로부터 각 지사까지의 거리가 표와 같다. 본사에서 각 지사에 A, B, C, D, E를 지사장으로 각각 발령할 때, A보다 B가 본사로부터 거리가 먼 지사의 지사장이 되도록 5명을 발령하는 경우의 수는?

지사	가	나	다	라	마
거리(km)	50	50	100	150	200

① 50 ② 52 ③ 54 ④ 56 ⑤ 58

전체 상황 : 분할적 사고 : 대상을 기준 ⇨ A가 어딘가에는 발령을 받는다.

지사	가	나	다	라	마
거리	50	50	100	150	200
상황 1	A				
상황 2		A			
상황 3			A		
상황 4				A	

곱의 법칙 | 분할된 상황의 경우의 수가 같다고 판단 ⇨ 하나만 세서 곱한다.

<상황 1,2>는 B가 들어갈 수 있는 3자리가 남으므로 <경우의 수적인 본질이 같은 상황>이다. ⇨ $2\times n(\text{상황}\,1)$

추가로 A가 <마>에 오면 B가 올 자리가 없으므로 상황은 4가지로만 분할된다.

합의 법칙 | 분할된 상황의 경우의 수가 같지 않다고 판단 ⇨ 각각 세서 더한다.

나머지 상황들은 B가 올수 있는 자리의 수가 다 다르므로 각각 세서 더해야 한다.

$$n(\text{전체}) = 2\times n(\text{상황}\,1) + n(\text{상황}\,3) + n(\text{상황}\,4)$$

상황 1

지사	가	나	다	라	마
거리	50	50	100	150	200
상황1-1	A		B		
상황1-2	A			B	
상황1-3	A				B

$$\begin{aligned} n(\text{상황}\,1) &= 3\times n(\text{상황}\,1-1) \\ &= 3\times 6 \end{aligned}$$

상황 3

지사	가	나	다	라	마
거리	50	50	100	150	200
상황3-1			A	B	
상황3-2			A		B

$$\begin{aligned} n(\text{상황}\,3) &= 2\times n(\text{상황}\,3-1) \\ &= 2\times 6 \end{aligned}$$

상황 4

지사	가	나	다	라	마
거리	50	50	100	150	200
상황 4				A	B

$$n(\text{상황}\,4) = 6$$

$$\begin{aligned} n(\text{전체}) &= 2\times n(\text{상황}\,1) + n(\text{상황}\,3) + n(\text{상황}\,4) \\ &= 2\times 3\times n(\text{상황}\,1-1) + 2\times n(\text{상황}\,3-1) + n(\text{상황}\,4) \\ &= 2\times 3\times 6 + 2\times 6 + 6 = 54 \end{aligned}$$

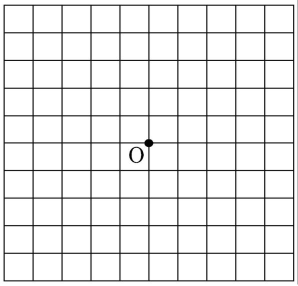
코칭 서로 다른 세 자리에 서로 다른 세 명을 배치하는 경우는 6가지이다. 일단 3!을 모른다고 가정하고 일일이 세면 그렇다. 앞의 <이해를 위한 예제 002>에서 일일이 세는 과정을 이미 보여줬으니 스스로 해보길 바란다.

예제 006

REVIEW 곱의 법칙과 변칙 상황

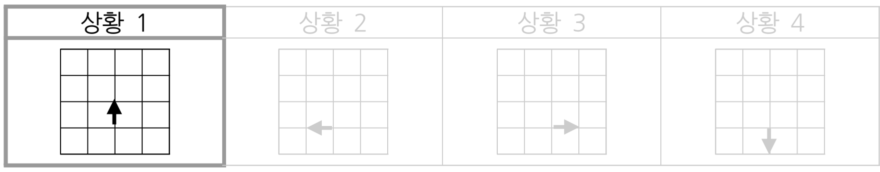
2008. 9. 나형(35%). 11번. 4점

그림과 같이 이웃한 두 교차로 사이의 거리가 모두 1인 바둑판 모양의 도로망이 있다. 로봇이 한 번 움직일 때마다 길을 따라 거리 1만큼씩 이동한다. 로봇은 길을 따라 어느 방향으로도 움직일 수 있지만, 한 번 통과한 지점을 다시 지나지는 않는다. 이 로봇이 지점 O에서 출발하여 4번 움직일 때, 가능한 모든 경로의 수는? (단, 출발점과 도착점은 일치하지 않는다.)



① 88 ② 96 ③ 100 ④ 104 ⑤ 112

전체 상황 : 분할적 사고 ⇨ 네 개의 방향 중 어디론가는 간다.



: $n(\text{전체}) = 4\times n(\text{상황}\,1)$

곱의 법칙 | 분할된 상황의 경우의 수가 같다고 판단 ⇨ 하나만 세서 곱한다.

한 번 통과한 지점을 다시 지나지는 않는다. - 되돌아 갈 수 없다.

상황 1 : 분할적 사고 ⇨ 세 개의 방향 중 어디론가는 간다.

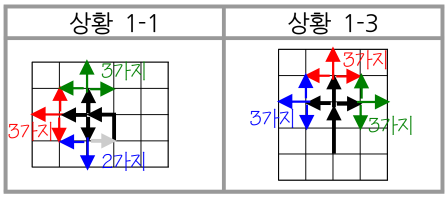
: $n(\text{상황}\,1) = 2\times n(\text{상황}\,1-1) + n(\text{상황}\,1-3)$

<상황 1-1, 1-2>의 경우 좌우만 뒤바뀌었을 뿐 <경우의 수적인 본질이 같은 상황>이라고 생각할 수 있다.

곱의 법칙 | 분할된 상황의 경우의 수가 같다고 판단 ⇨ 하나만 세서 곱한다.

합의 법칙 | 분할된 상황의 경우의 수가 같지 않다고 판단 ⇨ 각각 세서 더한다.

출발점과 도착점은 일치하지 않는다. - 조건을 잘 보면 변칙상황을 예측할 수 있다. <상황 1-1>과 <상황 1-2>는 같은 경우의 수가 발생하지만 <상황 1-3>은 같은 경우의 수가 발생하지 않는 이유가 여기에 있다.



합의 법칙 | 분할된 상황의 경우의 수가 같지 않다고 판단 ⇨ 각각 세서 더한다. : $n(\text{상황}\,1-1) = 3 + 3 + 2$

곱의 법칙 | 분할된 상황의 경우의 수가 같다고 판단 ⇨ 하나만 세서 곱한다. : $n(\text{상황}\,1-3) = 3\times 3$

$$n(\text{전체}) = 4\times n(\text{상황}\,1) = 4\times\{2\times n(\text{상황}\,1-1) + n(\text{상황}\,1-3)\}$$
$$= 4\times\{2\times(3+3+2) + 3\times 3\} = 100$$

예제 007

REVIEW 어쩔 수 없이 일일이 센다. - 같은 경우의 수가 발생한다는 상황적인 확신이 들 때만 곱하는 것이다.
결과적으로는 같은 경우의 수가 나오더라도 상황적으로 다른 느낌이었다면 더한 게 옳은 판단이다.

2007. 10. 나형(58%). 28번. 4점

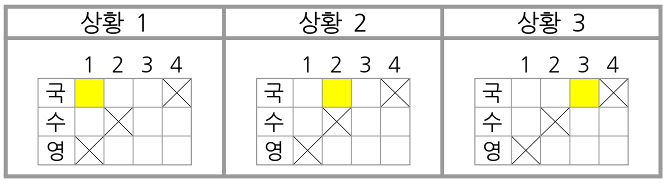
어느 고등학교에서는 방학 중 방과 후 학교 강좌를 다음과 같이 개설하였다.
어떤 학생이 국어, 수학, 영어 세 과목을 각각 한 번씩 수강하려고 할 때,
그 방법의 수는?

	1교시	2교시	3교시	4교시
국어	○	○	○	X
수학	○	X	○	○
영어	X	○	○	○

○:개설, X:미개설

① 11　　② 12　　③ 14　　④ 16　　⑤ 17

전체 상황 : 분할적 사고 : 대상을 기준 ⇨ 국어가 어딘가에는 온다.



국어가 어디에 들어가느냐 따라 수학이나 영어가 개설할 수 있는 가짓수가 달라진다.

(같은 교시에 두 수업을 동시에 들을 순 없으니까!)

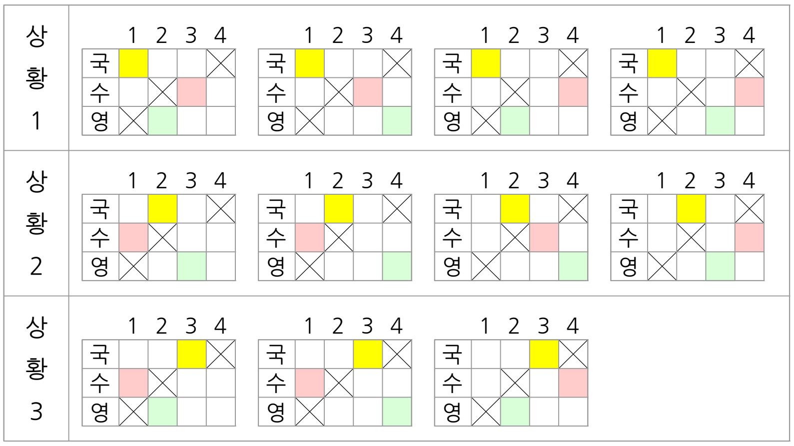
결과적으로는 같은 경우의 수가 나온다고 하더라도 <경우의 수적인 본질이 같은 상황>는 확신이 없다면 더해야 한다.

합의 법칙 | 분할된 상황의 경우의 수가 같지 않다고 판단 ⇨ 각각 세서 더한다.

$$n(\text{전체}) = n(\text{상황}\,1) + n(\text{상황}\,2) + n(\text{상황}\,3)$$

: 같은 경우의 수가 나온다는 확신이 안서면 무조건 더하는 것이다.
절대 대충 <같은 경우의 수가 나오겠지>라고 생각하고 곱하면 안 된다. (실력도 늘지 않는다.)

전체 상황



아무리 분할해도 같은 경우의 수가 나오지 않는다. ⇨ 어쩔 수 없이 일일이 센다.

$$n(\text{전체}) = n(\text{상황}\,1) + n(\text{상황}\,2) + n(\text{상황}\,3) = 4 + 4 + 3 = 11$$

코칭 이 문제는 그 어떤 공식을 요구하고 있지 않다. 전체 상황을 빠짐없이 나열할 수 있는 논리를 가지고 있는지 물어본 것이다. 그 논리가 바로 분할적 사고이고, 그 과정에서 합의 법칙, 곱의 법칙, 공식 등이 필요에 의해 자연스럽게 쓰이는 것이다.

예제 008

REVIEW 약수와 배수 / 여사건의 아이디어

100보다 작은 양의 정수가 있다. 3의 배수도 아니고 5의 배수도 아닌 정수의 개수를 구하여라.

100보다 작은 양의 정수 / 3의 배수도 아니고 5의 배수도 아닌 정수의 개수 - 99에서 3의 배수 또는 5의 배수를 빼준다.

$$\begin{aligned} n(\text{3의 배수} \cup \text{5의 배수}) &= n(\text{3의 배수}) + n(\text{5의 배수}) - n(\text{3의 배수} \cap \text{5의 배수}) \\ &= n(\text{3의 배수}) + n(\text{5의 배수}) - n(\text{15의 배수}) \\ &= 33 + 19 - 6 = 46 \end{aligned}$$

$$n(\text{3의 배수도 아니고 5의 배수도 아닌}) = n(\text{전체}) - n(\text{3의 배수} \cup \text{5의 배수}) = 99 - 46 = 53$$

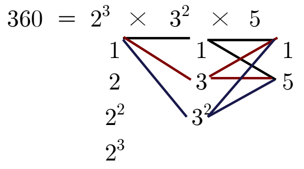
예제 009

REVIEW 약수의 개수를 세는 아이디어 ⇨ 소인수분해와 수형도 + 여사건의 아이디어

360의 양의 약수 중 2의 배수인 것은 몇 개인가?

360의 양의 약수 - 어떤 자연수의 양의 약수를 나열하는 방법은 두 가지이다.
소인수분해 후 수형도를 그리는 방법과 작은 수부터 나열하여 대칭성을 확인하는 방법.

2의 배수 - 소인수 중 2를 반드시 가지고 있어야 한다.



위에서 2를 인수로 갖지 않는 경우를 수형도로 연결한 것이다.

$$n(\text{전체 약수의 개수}) - n(\text{2의 배수}^c) = 4\times3\times2 - 1\times3\times2 = 18$$

티칭 물론 $n(\text{2의 배수}) = 3\times3\times2$ 로 바로 구해도 된다. (2를 하나라도 가지고 있으면 2의 배수다.)

예제 010

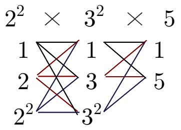
REVIEW 공약수의 개수는 최대공약수의 약수의 개수임을 이해하자.

360과 540의 공약수는 모두 몇 개인가?

360과 540의 공약수의 개수 - 360과 540의 최대공약수의 약수의 개수

결국 360을 소인수분해하면 $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$이고, 540을 소인수분해하면 $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$이므로 최대공약수는 $2^2 \times 3^2 \times 5$

전체 상황



수형도와 곱의 법칙	각각에 대하여 같은 경우의 수가 발생	⇨ 곱한다.

$n(\text{공약수}) = 3 \times 3 \times 2 = 18$

예제 011

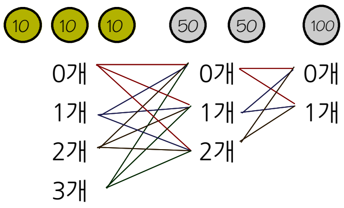
REVIEW 지불할 수 있는 방법과 금액의 가짓수

100원짜리 1개, 50원짜리 2개, 10원짜리 3개가 있다. 일부 또는 전부를 사용하여 거스름돈 없이 지불할 때, 다음을 구하여라.

(1) 지불할 수 있는 방법의 수　　　　(2) 지불할 수 있는 금액의 가짓수

(1) 지불할 수 있는 방법의 수

전체상황



수형도와 곱의 법칙 | 각각에 대하여 같은 경우의 수가 발생 ⇨ 곱한다.

$$4\times3\times2-1=23$$

(2) 지불할 수 있는 금액의 가짓수

전체 상황

~~0~~	50	100	150	200
10	60	110	160	210
20	70	120	170	220
30	80	130	180	230

$$5\times4-1=19$$

예제 012

REVIEW 계수가 다른 부정방정식

$x+2y+3z=11$을 만족하는 양의 정수 (x,y,z)의 순서쌍의 개수를 구하여라.

부정방정식은 계수가 큰수를 기준으로 일일이 센다.

분할적 사고 : 자리를 기준 ⇨ z의 자리에 뭔가의 자연수가 온다. (계수가 큰 변수를 기준으로 한다.)

$3z$ +	$2y$ +	x = 9
1	1	6
	2	4
	3	2
2	1	3
	2	1

정답은 5가지

〈개념의 용어화〉에 대해서

분할적 사고 : 자리를 기준 **분할적 사고 : 대상을 기준**

분할적 사고 : 개수로 분류 **분할적 사고 : 배열 전 모든 상황**

합의 법칙 분할된 상황의 경우의 수가 같지 않다고 판단 ⇨ 각각 세서 더한다.

곱의 법칙 분할된 상황의 경우의 수가 같다고 판단 ⇨ 하나만 세서 곱한다.

아무리 분할해도 같은 경우의 수가 나오지 않는다. ⇨ 어쩔 수 없이 일일이 센다.

수형도와 곱의 법칙 각각에 대하여 같은 경우의 수가 발생 ⇨ 곱한다.

앞에서 용어를 강조하기 위해서 위와 같이 표시했던 것들에 대해 강조 없이 약식으로만 표현하겠다. 뒤로 갈수록 어려운 문제들과 (용어화 된) 새로운 개념들이 등장하기 때문에 해설지가 지저분해질 것이 분명해 보이기 때문이다.

이제 용어가 익숙해졌다면, 강조되어 있지 않아도 충분히 분할적 사고, 합의 법칙, 곱의 법칙을 인지할 수 있을 것이라고 생각한다. 위의 용어들을 마지막으로 한 번 더 숙지하고 다음 〈Part〉로 넘어가도록 하자.

PART 02

근본에 가까운 공식

1. 계승, 순열, 조합의 공식
2. 순열과 조합의 상황
3. 순열과 조합의 수식적 활용

촌철살인 #2 경우의 수에서 공식이란?

01 순열과 조합의 공식

- 순열과 조합

우리가 곧 배우게 될 공식의 이름이다. 앞에서 추상적인 것들을 인지하기 위해서는 〈용어화〉시키는 게 중요하다고 했는데 사실은 순열이라는 것도 '뽑아서 나열한다.'는 추상적인 상황에 이름을 붙여 놓은 것이고 조합도 '뽑는다.'는 추상적인 상황에 이름을 붙여 놓은 것이다. 이렇게 전 세계적으로(?) 이런 상황에 구체적인 용어를 붙여놓은 것은 수를 세는데 있어서 이런 〈순열과 조합〉의 상황이 그만큼 많이 나온다는 것을 의미한다. 즉, 우리가 앞으로 〈순열과 조합〉으로 느낄 수 있는 상황들에 대해서는 〈공식〉으로 한 번에 센다. 공식을 외우면 분할하지 않고 한 번에 셀 수 있다.

- 공식을 쓰는 이론적 근거

이론을 생각하지 않고 그냥 19라고 대답할 수 있는 것은 이것이 훈련되어 있기 때문이다. 고등학교 수학은 사실 커다란 이론의 기초를 배우는 것이고 그 기초라는 것은 〈안다.〉라는 것에 목적을 두기 보다는 〈익숙하게 다룬다.〉에 목적을 둔다.

${}_{\mathrm{n}}P_{\mathrm{r}}$: 서로 다른 n개의 대상에서 개를 뽑아 일렬로 배열하는 경우의 수

여기에서 우리가 의문을 가져야 할 생각은 '반드시 일렬로 배열할 필요가 있는가?'이다. 5명 중 3명을 뽑아서 일렬로 배열하는 경우나 5명 중 3명을 뽑아서 구분이 가는 세 자리에 배열하는 경우의 수나 〈경우의 수적 본질이 같은 상황〉이다. 꼭 정의처럼 일렬로 배열하는 상황 않더라도 〈순열의 상황〉임을 직관으로 인지할 수 있어야 공식을 올바로 사용할 수 있다. (즉, 경우의 수적 본질이 같은 상황임을 인지할 수 있어야)

이런 기본적인 직관이 공식을 올바로 사용하는 토대이고
직관은 구체적 경험을 통해서만 얻을 수 있는 경험의 산물이다.

02 〈분할적 사고〉안에서 부분적으로 등장하는 효율

- 결국은 〈전체 상황의 논리적 나열능력〉과 〈분할적 사고〉이다.

공식을 통해 경우의 수를 한 번에 셀 수 있다고 너무 좋아할 필요 없다. 어차피 이런 순열과 조합의 공식을 설명하는 과정도 〈분할적 사고〉이다. 그리고 실제로 후에 풀게 될 문제들의 대부분도 전체 상황을 어떤 기준에 의하여 분할하고 그 안에서 〈순열과 조합의 상황〉이 부분적으로 등장하게 된다.
당연히 순열과 조합의 공식으로만 모든 문제를 풀려고 한다면 풀리지도 않을 뿐더러 한 줄짜리 간단한(?) 해설지를 보는 순간 좌절감과 무기력에 빠질 것이다. (숫자는 보이지만 숫자의 의미를 읽어낼 수가 없을 테니..)

즉, 전체적으로는 분할적 사고를 사용하되 부분적으로 공식을 쓴다.

PART 01 근본 사고방식

#1. 일대일 대응 경우의 수적인 본질이 같은 상황

#2. 분할적 사고 〈전제〉 모든 경우의 논리적 나열 능력

1. 자리를 기준 2. 대상을 기준
3. 개수로 분류 4. 배열 전 모든 상황
: 분할하는 순간 상황은 고정된다.

#3. 합의 법칙과 곱의 법칙

1. 합의 법칙 2. 곱의 법칙
3. 센다의 법칙 4. 수형도의 활용

#4. 여사건의 아이디어

PART.1 개념의 외연

#1. 정수론 1탄
#2. 센다의 법칙
#3. 경우의 수를 세는 방법은 무한가지

전체적으로 분할적 사고를 하되 부분적으로 공식을 쓴다.

PART 02 근본에 가까운 공식

#1. 계승, 순열, 조합의 공식

1. 계승의 뜻과 공식
2. 순열과 조합의 뜻과 공식
3. 조합의 기본 성질 : ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$
4. 논리의 확신 : 경우의 수적인 본질이 같은 상황

#2. 순열과 조합의 상황

1. 서로 다른 대상, 서로 다른 자리
2. 조합과 자동배열
3. 뽑기의 오류 : 〈동동연〉이면 〈배고려〉

#3. 순열과 조합의 수식적 활용

1. 순열의 정의식과 계산식 2. 조합의 정의식과 계산식
3. 정의되는 기호들 4. 순열과 조합으로 표현

PART.2 개념의 외연

#1. 순열 조합으로 표현된 방정식
#2. 여러 가지 상황의 배열
#3. 여사건의 아이디어 + 특정인
#4. 정수론 2탄
#5. 도형과 경우의 수
#6. 집합과 경우의 수

PART 03 이해하면 공식은 없다

#1. 중복순열과 곱의 법칙 중복순열은 곱의 법칙이다.

#2. 같은 것을 포함한 순열과 조합 같은 것을 포함한 순열은 조합이다

1. 같은 것을 포함한 순열의 뜻과 공식
2. 배열 취소의 관점
3. 자동배열의 상황
4. 같은 것들 중에서 일부를 뽑는 것은 공식이 없다.

#3. 원순열과 고정

1. 원순열의 상황 2. 원순열의 경우의 수
3. 다각형 순열 4. 목걸이 순열

PART.3 개념의 외연

#1. 경로의 수 문제
#2. 입체 순열

PART 04 분할의 상황

#1. 자연수의 분할

1. 자연수 분할의 기본 정의 · 낙수효과
2. 페러스 다이어그램과 성질, 켤레분할
3. 자연수 분할의 상황

#2. 분할의 상황

1. 분할의 상황 1 : 뽑기와 분할의 경우의 수가 다른 경우
2. 분할의 상황 2 : 뽑기와 분할의 경우의 수가 같은 경우
3. 선분할 개념 : 기준이 생기면 〈뽑기의 오류〉 발생하지 않는다.
4. 분할의 공식화 : 〈동동연〉이면 〈배고려〉
5. 분할 후 분배와 선분할 개념

#3. 집합의 분할

1. 집합 분할의 상황
2. 집합 분할의 성질
3. 서로 다른 대상, 서로 같은 자리

PART.4 개념의 외연

#1. 리그와 토너먼트

PART 05 중복조합과 일대일 대응

#1. 중복조합의 상황

1. 중복조합의 뜻과 공식
2. 구분막대기를 이용한 일대일 대응
3. 중복조합의 공식 : 암기가 아닌 Reading
${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_{n-1}$

#2. 중복조합과 일대일 대응

1. 중복조합과 일대일 대응
: 일대일 대응 + 공식
2. 서로 같은 대상, 서로 다른 자리
3. 중복조합의 적어도의 상황
: 미리 뽑아놓고 생각한다.

PART.5 개념의 외연

#1. 같은 것과 다른 것 총 정리
#2. 중복조합과 곱의 법칙
#3. 전개식과 경우의 수
#4. 부정방정식과 일대일 대응
#5. 함수의 개수 총정리

PART 06 이항정리와 조합의 연속 합

#1. 이항정리와 이항계수의 성질

1. 이항계수의 의미와 이항전개식
2. 특정항의 계수 : 나열된 식의 구조와 추론
3. 이항전개식 간단히 하기
4. 이항계수의 성질 : 이항정리 + 항등식의 마법
1) 연속 합 2) 교대 합 3) 짝수 합
4) 홀수 합 5) 절반 합

#2. 조합의 식 변형과 이항계수의 성질

#3. 파스칼 삼각형

1. 이항계수의 또 다른 성질
2. 파스칼 삼각형 공식 : ${}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r = {}_nC_r$
3. 이항계수의 성질과 파스칼 삼각형 공식의 구분법

#4. 분할적 사고와 관점 합

1. 이항전개식을 이용한 설명
2. 다른 방식을 이용한 설명

PART.6 개념의 외연

#1. 삼항정리
#2. 정수론 3탄

뼈대가 되는 기본 개념

#1 계승, 순열, 조합의 공식

이 부분은 특정조건을 만족하는 상황들에 대해서 한 번에 셀 수 있는 공식을 배우는 부분이다. 대부분의 사람들이 경우의 수라고 부르는 부분이기도 하다. 하지만 이 부분은 경우의 수의 아주 일부분에 불과하다. 앞에서 배운 <근본 사고방식>이 자동차로 따졌을 때 핸들이라면 이 부분은 일종의 부스터라고 할까?~~(카트라이더 해봤나?)~~있으면 조금 더 빨리 갈 수 있다.

계승은 서로 다른 대상들을 배열하는 상황을 공식화 시켜놓은 것이다.

순열은 서로 다른 대상들에서 몇 개의 대상을 뽑아 배열하는 상황을 공식화 시켜놓은 것이다.

조합은 서로 다른 대상들에서 몇 개의 대상을 뽑는 상황을 공식화 시켜놓은 것이다.

1. 계승의 뜻과 공식

1) 계승(Factorial)의 뜻

- 서로 다른 n개의 대상을 일렬로 배열하는 경우의 수를 기호로 $n!$이라고 한다. 여기에서 느낌표는 [팩토리얼]이라고 읽는다.

(n[팩토리얼]을 줄여서 n[팩]이라고 읽기도 한다.)

2) 계승의 공식

- 계승의 공식이란 $n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\ \cdots\ \times3\times2\times1$을 말하는 것이다.

n부터 숫자를 1씩 줄여가며 연속한 자연수를 쭉 곱해간다. 예를 들어 3명을 구분이 가는 세 자리에 배열하는 경우의 수는 그냥 6가지이다. (Why? $3! = 3\times2\times1$)

<분할적 사고>와 <곱의 법칙>으로 한 번 증명해보고, 앞으로는 자연스럽게 공식을 사용한다.

3) 계승의 변형

- 계승은 곱하기일 뿐이다. 자연스러운 식 변형을 할 수 있어야 한다.

예를 들면 $n! = n\times(n-1)!$, 하나 더 $(n-r+1)! = (n-r+1)\times(n-r)!$

(자연수를 하나씩 줄여 가면서 곱의 형태로 나열해보면 좌변과 우변이 같다는 사실을 금방 알 수 있다.)

코칭 사실 자연수, 정수 범위에서 나오는 공식(항등식)들이 식의 구조가 복잡한 경우가 많은데,
이런 공식들은 있는 그대로 외우는 것이 아니다.
즉, 외워서 대입하는 느낌으로 공부를 하면 안 되고 의미를 부여해 읽어 나간다는 느낌으로 연습을 해야
변형된 상황에서도 공식을 적절하게 적용할 수가 있다.

012 이해를 위한 예제

인 n개의 자리에 1 ~ n까지 숫자가 적힌 구슬을 배열하는 경우의 수를 표현하라.

n!의 전체 상황을 <자리를 기준>으로 분할하고 <곱의 법칙>을 이용해서 구해본다.

전체 상황 : (자리를 기준) 첫 번째 자리에 누군가는 온다. (n가지)

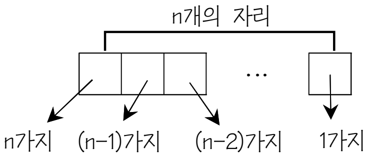
: $n(\text{전체}) = n\times n(\text{상황}\,1)$ (하나만 세서 곱한다)

상황 1 : 첫 번째 자리는 1로 고정 ⇨ (자리를 기준) 두 번째 자리에 누군가는 온다. (1을 제외한 $n-1$가지)

: $n(\text{상황}\,1) = (n-1)\times n(\text{상황}\,1-1)$ (하나만 세서 곱한다.)

즉, $n(\text{전체}) = n\times n(\text{상황}\,1) = n\times(n-1)\times n(\text{상황}\,1-1)$

같은 방식을 연속적으로 적용하면 계승의 공식이 나온다.



: 곱하는 순간 반드시 숫자를 하나 고정시켜야 한다.

서로 다른 n개를 배열하는 경우의 수 ⇨ $n! = n(n-1)\cdots 3\times 2\times 1$ (n부터 1씩 작아지며 곱한다.)

013 이해를 위한 예제

다음 식 $\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}+\frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}=\frac{\boxed{(\text{가})}}{r!\,(n-r)!}$에서 (가)에 들어갈 식을 구하여라.

$$\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}+\frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}=\frac{\boxed{(\text{가})}}{r!\,(n-r)!}$$

: 🔴 부분을 비교해보면 $r!=r\times(r-1)!$이므로 왼쪽 식의 분모와 분자에 각각 r을 곱해서 $r!$으로 통분 시킬 수 있다.

: ⚪ 부분을 비교해보면 $(n-r)!=(n-r)\times(n-r-1)!$이므로 오른쪽 식의 분모와 분자에 각각 $(n-r)$을 곱해서 $(n-r)!$으로 통분 시킬 수 있다.

$$\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}+\frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}=\frac{r\times(n-1)!}{r\times(r-1)!(n-r)!}+\frac{(n-r)\times(n-1)!}{r!(n-r)\times(n-r-1)!}$$

$$=\frac{r(n-1)!+(n-r)(n-1)!}{r!(n-r)!}=\frac{\{r+(n-r)\}(n-1)!}{r!(n-r)!}=\frac{n(n-1)!}{r!(n-r)!}=\frac{\boxed{n!}}{r!(n-r)!}$$

즉, (가)에 들어갈 식은 $n!$이다.

정답은 $n!$

2. 순열과 조합의 뜻과 공식

1) 순열의 뜻

- 서로 다른 n개의 대상에서 r개를 뽑아 일렬로 배열하는 경우의 수를 ${}_nP_r$ 이라 하고 (단, n, r은 음 아닌 정수, $n \geq r$) 그냥 알파벳 순서로 [엔 피 알]이라고 읽는다. (여기에서 P는 순열의 영어인 Permutation의 앞 글자를 딴 것이다.)

2) 조합의 뜻

- 서로 다른 n개의 대상에서 r개를 뽑는 경우의 수를 ${}_nC_r$ 이라 하고 (단, n, r은 음 아닌 정수, $n \geq r$) 그냥 알파벳 순서로 [엔 씨 알]이라고 읽는다. (여기에서 C는 조합의 영어인 Combination의 앞 글자를 딴 것이다.)

3) 순열의 공식

- 순열의 공식은 ${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$인데 처음 보면 식이 조금 복잡해 보일 수 있다.

n과 r에 숫자를 대입하는 공식이 아니다. 의미를 알고 의미를 써 내려가는 공식이다.

- $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$은 사실 $(n-0)(n-1)(n-2)\cdots(n-(r-1))$이고 0부터 $r-1$까지 정수의 개수는 r개 이므로

${}_nP_r$ ⇨ n부터 시작해서 1씩 줄여가면서 r개의 연속된 자연수를 곱하는 것

예를 들어 ${}_5P_2 = 5 \times 4$ (5부터 연속한 두 개의 자연수) ${}_7P_3 = 7 \times 6 \times 5$ (7부터 연속한 세 개의 자연수)

4) 조합의 공식

- 조합의 공식은 ${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$이다. 일단 순열 식을 쓴 다음 $r!$으로 나눠주기만 하면 된다.

예를 들어 ${}_5C_2 = \frac{{}_5P_2}{2!} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$이고, ${}_7C_3 = \frac{{}_7P_3}{3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$이다.

공식의 유도과정은 예제를 통해 한 번에 설명한다.

티칭 ${}_nC_r$은 뽑기만 한 것이므로 뽑아서 배열한 ${}_nP_r$에서 $r!$으로 나누는 과정을 통해 배열을 취소한 것이라고 기억하면 편하다. (나누기는 항상 곱하기의 역 과정이므로)

이것이 직관적으로 느껴지지 않는다면 그냥 외워라. 이 공식은 완벽하게 쓸 수 있어야 한다.

3. 조합의 기본 성질

- ①②③ 세 개의 구슬 중에서 하나를 뽑는 ${}_3C_1$을 생각해보면 1개를 뽑는 순간 자연스럽게 2개가 남는 경우가 생긴다.
마찬가지로 ${}_3C_2$를 생각해보면 2개를 뽑는 순간 자연스럽게 1개가 남는 경우가 생긴다.

${}_3C_1$의 모든 경우 : ①②③ ①②③ ①②③

${}_3C_2$의 모든 경우 : ①②③ ①②③ ①②③

이 두 가지 상황은 정확하게 일대일로 대응한다. 그래서 ${}_3C_1 = {}_3C_2$이다.

이것을 일반적으로 확장시켜보면 ⇨ ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$이다.

예를 들어 ${}_7C_5 = \frac{{}_7P_5}{5!} = \frac{7\times6\times5\times4\times3}{5\times4\times3\times2\times1}$ 으로 계산해도 되지만 ${}_7C_5 = {}_7C_2$이므로

${}_7C_5 = {}_7C_2 = \frac{{}_7P_2}{2!} = \frac{7\times6}{2\times1}$으로 계산하는 게 훨씬 효율적이다.

공식은 뒤에서 <조합의 정의식>을 배운 후 증명한다.

4. 논리의 확신 : 계산하지 않고 같다는 사실을 안다.

: <계산하지 않고 같다는 사실을 안다.>면 <분할적 사고>를 정확히 이해했다고 할 수 있다.

- 우리는 같은 상황을 얼마든지 다른 방식으로 분할해서 표현 할 수 있고 그래서 같은 경우의 수라도 식의 표현은 여러 가지가 나올 수 있다는 것을 안다.
즉, 다르게 표현된 식을 계산하지 않고도 같은 상황을 설명한 식(같은 경우의 수)이라는 사실을 안다는 것은 한 가지 상황을 다른 방식으로 분할해서 셌다는 것을 이해했다는 뜻이다.

조합은 바로 이 논리에 의해서 증명된다.
<계산하지 않고 같다는 사실을 안다.>

개념의 용어화

계산하지 않고 같다는 사실을 안다.

014 이해를 위한 예제

1~4까지 자연수가 있다.

(1) 4개 중 3개를 뽑아서 일렬로 나열하는 경우의 수 $_4P_3$이 $4\times3\times2$임을 보여라.

(2) $_4P_3$의 상황을 $_4C_3$을 이용하여 표현하고 이 둘의 관계를 밝혀라.

이 예제를 풀기 위해 너무 부담가지지 말 것. 어차피 이런 스타일의 문제는 나오지 않는다.

순열과 조합의 관계를 설명하기 위한 것이니 읽고 이해할 것.

(1) 4개 중 3개를 뽑아서 일렬로 나열하는 경우의 수 $_4P_3$이 $4\times3\times2$임을 보여라.

$_4P_3$의 전체 상황을 <자리를 기준>으로 분할하고 <곱의 법칙>을 이용해서 구해본다.

전체 상황 : (자리를 기준) 첫 번째 자리에 누군가는 온다. (4가지)

상황 1 :	1		
상황 2 :	2		
상황 3 :	3		
상황 4 :	4		

: $n(\text{전체}) = 4\times n(\text{상황}1)$ (하나만 세서 곱한다.)

상황 1 : 첫 번째 자리는 1로 고정 ⇨ (자리를 기준) 두 번째 자리에 누군가는 온다. (1을 제외한 3가지)

상황 1-1 :	1	2	
상황 1-2 :	1	3	
상황 1-3 :	1	4	

: $n(\text{상황}1) = 3\times n(\text{상황}1-1)$ (하나만 세서 곱한다.)

$n(\text{상황}1-1)$은 | 1 | 2 | | 의 빈 자리에 3 또는 4를 배치하는 경우의 수이므로 2가지이다.

$$n(\text{전체}) = 4\times n(\text{상황}1) = 4\times3\times n(\text{상황}1-1) = 4\times3\times2$$

(2) $_4P_3$의 상황을 $_4C_3$을 이용하여 표현하고 이 둘의 관계를 밝혀라.

$_4P_3$의 전체 상황을 <배열 전 모든 상황>으로 분할하고 <곱의 법칙>을 이용해서 구해본다.

배열 전 모든 상황은 서로 다른 4개 중 3개를 뽑는 상황이고 이것이 기호로 $_4C_3$으로 표현됨을 안다고 가정한다.

전체 상황 : (배열 전 모든 상황) 서로 다른 4개 중 3개를 뽑은 모든 상황 ($_4C_3$가지)

상황 1 : 1, 2, 3
상황 2 : 1, 2, 4
⋮
상황 $_4C_3$: 2, 3, 4

: $n(\text{전체}) = {}_4C_3\times n(\text{상황}1)$ (하나만 세서 곱한다.)

(상황 1~$_4C_3$)은 각각 서로 다른 3개를 배열하는 경우의 수가 발생하므로 $3!$가지

$$n(\text{전체}) = {}_4C_3\times n(\text{상황}1) = {}_4C_3\times3!$$

같은 상황, 다른 분할 : 다른 방식의 표현이 나왔을 뿐, 같은 경우의 수라는 논리의 확신!

계산하지 않고 같다는 사실을 안다. $_4P_3 = {}_4C_3\times3!$ ⇨ $_4C_3 = \dfrac{_4P_3}{3!}$

티칭 $_4C_3 = \dfrac{_4P_3}{3!}$ ⇨ <4개중 3개를 뽑는 것>은 <4개 중 3개를 뽑아서 배열한 것>에서 <3개를 배열한 것 취소>라고 기억하면 편하다.

015 이해를 위한 예제

인 r개의 칸에 1 ~ n까지 자연수 중 r개를 뽑아 배열하는 경우의 수를 이용하여 ${}_nP_r$과 ${}_nC_r$의 관계를 설명하여라. (당연히 $n \geq r$)

${}_nP_r$의 전체 상황을 <자리를 기준>으로 분할하고 <곱의 법칙>을 이용해서 구해본다.

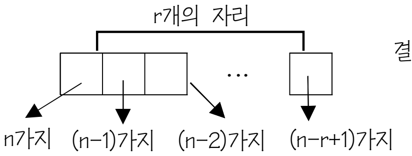
$\boxed{\text{전체 상황}}$: (자리를 기준) 첫 번째 자리에 누군가는 온다. (n가지)

: $n(\text{전체}) = n \times n(\text{상황}1)$ (하나만 세서 곱한다.)

$\boxed{\text{상황 1}}$: 첫 번째 자리는 1로 고정 ⇨ (자리를 기준) 두 번째 자리에 누군가는 온다. (1을 제외한 $n-1$가지)

: $n(\text{상황}1) = (n-1) \times n(\text{상황}1-1)$ (하나만 세서 곱한다.)

즉, $n(\text{전체}) = n \times n(\text{상황}1) = n \times (n-1) \times n(\text{상황}1-1)$ - 같은 방식을 연속적으로 적용하면 계승의 공식이 나온다.



결국 마지막이 $n-r$보다 하나 큰 숫자로 끝난다는 것을 암기

서로 다른 n개 중 r개를 뽑아서 배열하는 경우의 수는 ⇨ ${}_nP_r = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1)$

${}_nP_r$의 전체 상황을 <배열 전 모든 상황>으로 분할하고 <곱의 법칙>을 이용해서 구해본다.

배열 전 모든 상황은 서로 다른 n개 중 r개를 뽑는 상황이고 이것이 기호로 ${}_nC_r$로 표현됨을 안다고 가정한다.

$\boxed{\text{전체 상황}}$: (배열 전 모든 상황) 서로 다른 n개 중 r개를 뽑은 모든 상황 나열 (${}_nC_r$가지)

상황 1 : $1,\ 2,\ \cdots,\ r-1,\ r$
상황 2 : $1,\ 2,\ \cdots,\ r-1,\ r+1$
⋮ ⋮
상황 ${}_nC_r$: $n-r+1,\ \cdots,\ n-1,\ n$

: $n(\text{전체}) = {}_nC_r \times n(\text{상황}1)$ (하나만 세서 곱한다.)

(상황 1~${}_nC_r$)은 각각 서로 다른 n개를 배열하는 경우의 수가 발생하므로 $n!$가지

$$n(\text{전체}) = {}_nC_r \times n(\text{상황}1) = {}_nC_r \times r!$$

같은 상황, 다른 분할 : 다른 방식의 표현이 나왔을 뿐, 같은 경우의 수라는 논리의 확신!

계산하지 않고 같다는 사실을 안다. ${}_nP_r = {}_nC_r \times r!$ ⇨ ${}_nC_r = \dfrac{{}_nP_r}{r!}$

티칭 ${}_nC_r = \dfrac{{}_nP_r}{r!}$ ⇨ <n개중 r개를 뽑는 것>은 <n개 중 r개를 뽑아서 배열한 것>에서 <r개 배열한 것 취소>

#2 순열과 조합의 상황

전체적으로 분할적 사고를 쓰면서 부분적으로는 공식을 쓴다.

<배열의 상황>, <뽑는 상황>, <뽑아서 배열하는 상황>은 분할하지 않고 공식으로 한 번에 센다.
전체적으로 분할적 사고를 사용하되 부분적으로는 공식을 쓴다.
단순히 공식을 무의식적으로 적용하면 빠질 수 있는 오류에 대한 대비법을 학습한다.

1. 서로 다른 대상, 서로 다른 자리

- 지금 당장은 <서로 다른>이라는 말이 왜 중요한 지 와 닿지 않을 수 있다. 이유는 이와 비교할 수 있는 상황에 대해서 아직 공부하지 않았기 때문이다.
  예를 들어 서로 같은 10개의 공 중 3개를 뽑는 경우의 수는 한 가지이다. 어떻게 뽑아도 구분을 할 수 있는 상황이 나오지 않기 때문이다. 순열과 조합의 공식을 적용할 때는 반드시 <서로 다른>을 확인해야 한다.
  설마 이 말 자체를 외울 거라고 생각하진 않겠다. 상황을 구체적으로 떠올려 보면 왜 순열과 조합의 공식을 적용할 때 <서로 다른>이라는 조건이 필요한지 누구나 알 수 있기 때문이다.
- 앞에서 공부한 <색칠 문제>의 경우도 보통은 <색을 중복해서 사용 가능>이라는 조건이 있기 때문에 같은 것이 포함된 대상을 서로 다른 자리에 배열하는 경우에 대응된다. 그래서 순열, 조합으로 한 번에 세려고 시도하면 틀리는 것이다.
  <서로 같은 것>이 포함된 경우에 대해서는 <Part 3.>부터 집중적으로 학습한다.

- 순열 · 조합 공식을 적용할 때는 뽑기와 배열을 구분해야 되는 경우들이 있다. 뽑기는 조합과 곱의 법칙을 이용해서 계산할 수 있고, 배열은 순열이나 계승공식을 이용해서 계산할 수 있다. 구분하는 방법은 없다. 순열공식으로 한 번에 센다고 가정했을 때, 조금이라도 느낌이 이상하다면 뽑기와 배열을 구분해야 한다.

016 이해를 위한 예제

남자 5명 중 3명을 뽑아 서로 다른 5개의 자리 중 3자리에 앉히는 경우의 수를 구하여라.

전체적으로는 분할적 사고를 사용하되 부분적으로 공식을 쓴다.

남자 5명을 A, B, C, D E라고 할 때, 누군가 3명이 뽑힐 것이므로 전체 상황을 <배열 전 가능한 모든 상황>으로 분할하고 <곱의 법칙>을 이용해서 구해본다. ⇨ 여기에서 남자 3명을 뽑는 상황은 조합의 상황이므로 공식으로 한 번에 센다.

전체 상황 : 5명 중 3명이 뽑히는 모든 경우로 상황을 분할 ($_5C_3$가지)

상황 1 : A, B, C
상황 2 : A, B, D
⋮
상황 $_5C_3$: C, D, E

: $n(\text{전체}) = {}_5C_3 \times n(\text{상황}1)$ (하나만 세서 곱한다.)

□□□□□에 A, B, C를 배치

$n(\text{상황}1)$은 A, B, C를 구분이 가는 5자리 중 3자리를 뽑아 그 자리에 배열하는 경우의 수이므로 순열의 상황이다.
공식으로 한 번에 센다. ⇨ $_5P_3$

$$n(\text{전체}) = {}_5C_3 \times n(\text{상황}1) = {}_5C_3 \times {}_5P_3 = 10 \times 60 = 600$$

017 이해를 위한 예제

남자 3명을 A, B, C, 여자 3명을 a, b, c라고 하자. 남자와 여자 중 각각 2명씩을 뽑아 4명을 일렬로 배열하는 경우의 수에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 주어진 상황의 경우의 수가 ${}_3C_2\times{}_3C_2\times4!$임을 확인하여라.

(2) ${}_3P_2\times{}_3P_2$은 틀린 답인데 ${}_3P_2\times{}_3P_2$의 상황을 구체적으로 상상하여 적당한 순열과 조합의 기호를 곱해서 ${}_3C_2\times{}_3C_2\times4!$과 같은 의미를 만들어라.

전체적으로는 분할적 사고를 사용하되 부분적으로 순열・조합의 공식을 쓴다.

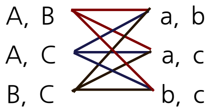
(1) 남자와 여자에서 각각 2명씩을 뽑아 서로 다른 네 자리에 배열하는 경우의 수가 ${}_3C_2\times{}_3C_2\times4!$임을 확인

3명 중 2명을 뽑는 상황은 조합의 상황이므로 공식으로 한 번에 센다. ⇨ ${}_3C_2$

남자가 2명 뽑히는 각 상황을 여자가 2명 뽑히는 각 상황에 수형도를 이용해 대응시켜본다.

전체 상황

남자	여자
A, B, C	a, b, c



⇨

전체 상황 : 배열 전 모든 상황

상황 1 : A, B, a, b

상황 2 : A, B, a, c

⋮

상황 ${}_3C_2\times{}_3C_2$: B, C, b, a

: $n(\text{전체}) = {}_3C_2\times{}_3C_2\times n(\text{상황}1)$

⇨ 하나만 세서 곱한다.

<배열 전 모든 상황>으로 상황을 분할하는 경우의 수는 수형도에 의해 ${}_3C_2\times{}_3C_2$이다.

A, B, a b를 일렬로 배열하는 경우의 수는 계승의 상황이므로 공식으로 한 번에 센다. ⇨ $n(\text{상황}1) = 4!$

$$n(\text{전체}) = {}_3C_2\times{}_3C_2\times n(\text{상황}1) = {}_3C_2\times{}_3C_2\times4!$$

나열을 통해 구체적으로 상황을 관찰하는 습관이 매우 중요하다.

(2) ${}_3P_2\times{}_3P_2$에 적당한 수 곱해서 같은 의미를 만들기. - ${}_3P_2\times{}_3P_2$의 의미를 확인한다.

배열 전 모든 상황 : 위의 경우를 서로 다른 네 자리 중 남자와 여자의 자리가 정해지는 모든 경우로 상황을 분할한다. 자리를 정하는 경우의 수는 서로 다른 4자리 중에서 남자가 들어가 2자리를 뽑는 경우의 수와 같으므로 ${}_4C_2$가지이다. (남자의 자리만 결정하면 여자의 자리는 자동으로 정해진다.)

전체상황 : 배열 전 모든 상황

상황 1 : | 남 | 남 | 여 | 여 |

상황 2 : | 남 | 여 | 남 | 여 |

⋮

상황 ${}_4C_2$: | 여 | 여 | 남 | 남 |

: $n(\text{전체}) = {}_4C_2\times n(\text{상황}1)$ (하나만 세서 곱한다.)

분할된 각 상황이 결국 남자가 들어가 구분이 가는 두 자리, 여자가 들어갈 구분이 가는 두 자리가 정해져있다는 점에서 분할된 상황의 경우의 수가 같다고 판단할 수 있다. 즉, 곱의 법칙을 쓸 수 있다.

| 남 | 남 | 여 | 여 | : $n(\text{상황}1)$을 생각해보면 남자 A, B, C 3명 중 2명을 뽑아 (정해진) 두 자리에 배열하는 경우의 수는 ${}_3P_2$이고 그 각각에 대하여 여자 a, b, c 3명 중 2명을 뽑아 (정해진) 두 자리에 배열하는 경우의 수도 ${}_3P_2$이므로 $n(\text{상황}1) = {}_3P_2\times{}_3P_2$이다. ⇨ 즉, $n(\text{전체}) = {}_4C_2\times n(\text{상황}1) = {}_4C_2\times{}_3P_2\times{}_3P_2$

결국 같은 상황을 다른 기준으로 분할하여 경우의 수를 센 것이다.

계산하지 않고 같다는 사실을 안다. ${}_3C_2\times{}_3C_2\times4!$ (1)의 방식 $=$ ${}_4C_2\times{}_3P_2\times{}_3P_2$ (2)의 방식

정답은 ${}_4C_2$

2. 조합과 자동배열

: 자동배열의 상황은 조합의 상황이다. 예제를 통해 이해해 보자.

018 이해를 위한 예제

키가 서로 다른 7명 중 3명을 뽑아 일렬로 배열할 때, 키가 작은 사람이 키가 큰 사람보다 왼쪽에 오도록 배열하는 경우의 수는?

7명의 사람을 숫자로 표시한다. ⇨ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (숫자가 작으면 키도 작은 거다.)

3명이 배열될 3칸을 시각적으로 표시한다. ⇨ □□□

7명중 3명을 뽑기만 하면 문제 상황에 맞게 위의 빈칸에 자동으로 배열된다. (배열하는 경우의 수는 생각하지 않아도 된다.)

예를 들어 1, 2, 3이 뽑혔다고 가정하면 문제의 조건에 맞게 배열하는 경우의 수는 $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$ 한 가지이다.

$$_7C_3 = \frac{_7P_3}{3!} = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}$$

코칭 경우의 수가 이해되지 않을 때는 문제 조건의 상황을 간단한 기호, 숫자 등에 일대일 대응하여 표현해 봐야한다. 실제 상황을 표현하고 나열해보면 근본적인 이해가 가능하다. 앞에서도 강조했듯이 이런 구체적 경험들은 통해 직관이 생기고 직관이 생기면 너의 머리가 자연스럽게 생략을 할 것이다. 생략은 뇌가 알아서 하는 것이지 의지를 가지고 하는 것이 아니다. 우리는 반복적으로 이해하여 숙달만 하면 된다. 알아서 저절로 빨라진다.

019 이해를 위한 예제

세 자리의 자연수 중에서 자릿수가 클수록 숫자도 커지는 경우의 수는 몇 가지인가?

3자리 자연수의 각 숫자가 배열될 3칸을 시각적으로 표시한다. ⇨ □□□

각 자리에 쓸 수 있는 숫자는 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 총 10개이다.

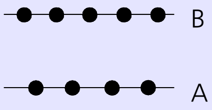
10개의 숫자 중 3개의 숫자를 뽑기만 하면 문제 상황에 맞게 위의 빈칸에 자동으로 배열된다.
(배열하는 경우의 수는 생각하지 않아도 된다.)

예를 들어 0, 2, 7이 뽑혔다고 가정하면 문제의 조건에 맞게 배열하는 경우의 수는 $\boxed{7}\boxed{2}\boxed{0}$ 한 가지이다.

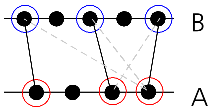
$$_{10}C_3 = \frac{_{10}P_3}{3!} = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 120$$

020 이해를 위한 예제

다음 그림의 강변의 두 직선 도로 A, B에 각각 4개, 5개의 지점을 표시해 놓았다. 두 직선도로 A, B에서 각 서로 다른 3개씩의 지점을 뽑아 연결하여 총 3개의 다리를 만들 때 각 다리가 교차하지 않도록 다리를 만드는 경우의 수는 모두 몇 가지인가?



A에서 3개의 지점, B에서 3개의 지점을 각각 뽑는다. 문제의 조건에 맞게 배열되기 위해서는 위에 있는 지점은 위에 있는 지점끼리, 아래 있는 지점은 아래 있는 지점끼리, 가운데 지점은 가운데 지점끼리 연결될 수밖에 없음을 이해한다. (실제 몇 번 연결해 보면서 감을 잡는 것이다.)



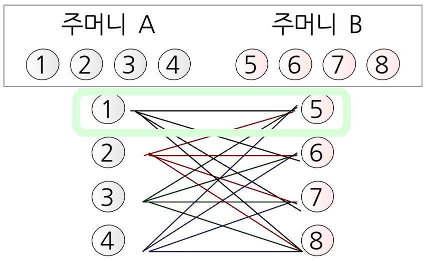
$$_4C_3\times{}_5C_3 = {}_4C_1\times{}_5C_2 \text{ (조합의 성질)} = 4\times\frac{5\times4}{2\times1} = 40$$

3. 뽑기의 오류 : <동동연>이면 <배고려>

: 동일 집단에서 동일 개수를 연속적으로 뽑으면 자동으로 배열이 고려된다.

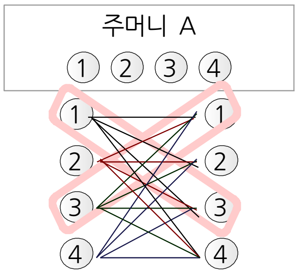
- 경우의 수에서 가장 쉽게 함정에 빠지는 경우가 바로 <동동연 배고려>이다. 분명히 뽑기만 해서 곱의 법칙으로 연결했을 뿐인데 자신도 모르게 배열되는 경우가 고려된다. 본질적 이해는 전체 상황을 관찰해야만 가능하다. 수형도를 이용하여 전체 상황을 관찰해보자.

상황1. 두 집단에서 각각 1개씩
총 2개 뽑는 경우



<수형도 1>

상황2. 한 집단에서 각각 1개씩
총 2개 뽑는 경우
(단, 뽑은 원소는 다시 넣는다.)



<수형도 2>

- 위의 <수형도1>은 ${}_4C_1 \times {}_4C_1$의 모든 경우를 수형도로 나타낸 것이다.

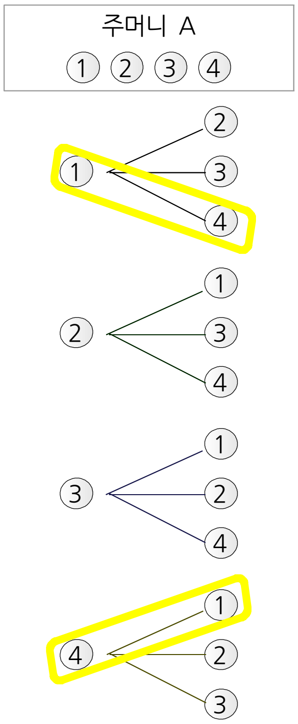
🟩 : ①과 ⑤가 뽑힌 경우만 생각해 보면 ①⑤ / ⑤①으로 배열된 경우는 고려되지 않았다.

- 위의 <수형도2>도 역시 ${}_4C_1 \times {}_4C_1$의 모든 경우를 수형도로 나타낸 것이다.

🟥 : 그런데 여기에서 ①과 ③이 뽑힌 경우를 생각해보면 ①③ / ③①으로 배열된 경우가 자동으로 고려되었다.

<수형도1>과 <수형도2>를 비교해 보면 동일 집단에서 동일 개수를 연속적으로 뽑으면 자동으로 배열이 고려된다는 사실을 알 수 있다.

상황3. 한 집단에서 각각 1개씩
총 2개 뽑는 경우
(단, 뽑은 원소는 다시 넣지 않는다.)



<수형도 3>

- 위의 <수형도3>은 1개를 뽑은 후 다시 넣지 않았으므로 ${}_4C_1 \times {}_3C_1$의 모든 경우를 수형도로 나타낸 것이다.

🟨 : 여기에서도 한 가지 경우 ①과 ④이 뽑힌 경우만 생각해 보면 ①④ / ④①으로 배열된 경우가 자동으로 고려되었다.

즉, <수형도2>의 상황처럼 다시 넣든지 <수형도3>의 상황처럼 다시 넣지 않든지
동일 집단에서 동일 개수를 연속적으로 뽑으면 자동으로 배열이 고려된다는 사실을 알 수 있다.

코칭 결론을 외우는 것이 아니라 <확인하는 절차>를 학습하는 것이다. 이로써 앞으로 <동동연 배고려>의 상황에서 헷갈리지 않고 판단할 수 있게 된다. (여기에서 확인하는 절차란 수형도를 통해 전체 상황을 관찰하는 것을 말한다.)

구체적으로 확인해 보지 않으면 어떠한 직관도 생기지 않는다.

개념의 **용어화**

뽑기의 오류 : 동동연 배고려

#3 순열과 조합의 수식적 활용

정의식은 ⇨ 증명할 때 쓰거나 (보통은 계산하기에는 너무 숫자가 큰) 순열과 조합으로 표현된 식이 같음을 확인하고 싶을 때 쓴다.

계산식은 ⇨ 말 그대로 계산할 때 쓴다. (순열과 조합으로 표현된 식을 숫자로 표현할 때)

1. 순열의 정의식과 계산식

1) 정의식 : ${}_nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ $\left(\dfrac{(\text{왼 쪽})!}{(\text{왼 쪽}-\text{오른 쪽})!}\right)$

2) 계산식 : ${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ (n부터 1씩 작아지며 r개의 자연수를 곱한다.)

2. 조합의 정의식과 계산식

1) 정의식 : ${}_nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ $\left(\dfrac{(\text{왼 쪽})!}{(\text{오른쪽})!(\text{왼 쪽}-\text{오른 쪽})!}\right)$

2) 계산식 : ${}_nC_r = \dfrac{{}_nP_r}{r!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$

티칭 정의식을 만드는 과정 : ${}_nP_r$과 ${}_nC_r$을 계승[팩토리얼]을 이용하여 표현한다.

- ${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\times\{(n-r)(n-r-1)\cdots3\cdot2\cdot1\}}{\{(n-r)(n-r-1)\cdots3\cdot2\cdot1\}} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$
- ${}_nC_r = \dfrac{{}_nP_r}{r!} = \dfrac{1}{r!}\times{}_nP_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

티칭 <정의식>은 주로 <증명>이나 <다른 방식으로 표현한 경우의 수가 같은지 확인>할 때 쓴다.
실제로 그냥 경우의 수를 구하는 문제는 가장 앞에서 곱의 법칙으로 증명한 대로 계산식을 쓰는 게 훨씬 편하다.

3. 정의되는 기호들

- $0! = 1$, ${}_nP_0 = 1$, ${}_nC_0 = 1$로 정의되는 이유
- ${}_nP_n = n!$ ⇨ ${}_nP_n = \dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{0!}$ 즉, 정의식의 수학적 규칙을 만족하기 위해 $0! = 1$

  ${}_nP_0 = \dfrac{n!}{(n-0)!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$ 즉, 정의식의 계산에 의하여 ${}_nP_0 = 1$

  ${}_nC_0 = \dfrac{n!}{0!(n-0)!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$ 즉, 정의식의 계산에 의하여 ${}_nC_0 = 1$

티칭 $0! = 1$, ${}_nP_0 = 1$, ${}_nC_0 = 1$은 실제 상황을 상상하기 어렵다.
$0!$은 0개를 배열한다는 것인데 아무것도 없는 것을 배열한다는 말 자체가 난해하다.
그래서 이런 경우는 그냥 수학적인 규칙성을 완성하기 위해 <정의되는 것>이라고 생각하면 된다.

4. 순열과 조합으로 표현

- $\frac{n!}{(n-r)!} = {}_nP_r \quad \left({}_{\text{분자}}P_{\text{분자}-\text{분모}}\right)$ ⇨ 분모와 분자에 ![팩토리얼]로 표현된 식이 있으면 된다.
- $\frac{n!}{r!(n-r)!} = {}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ ⇨ ● : ![팩토리얼]을 제외한 분모의 합이 분자에 있어야 조합으로 표현할 수 있다.

  $\left({}_{\text{분자}}C_{\text{분모 왼쪽}}\right) \quad \left({}_{\text{분자}}C_{\text{분모 오른쪽}}\right)$

코칭 자연수, 정수 범위 내에서의 공식은 의미를 읽어가면서 연습하라.

개념의 용어화

순열의 정의식 조합의 정의식 : 증명하거나 같음을 확인할 때

순열의 계산식 조합의 계산식 : 기호를 자연수로 표시할 때 (즉, 계산할 때)

021 이해를 위한 예제

다음 식의 값을 구하여라.

(1) ${}_5P_2$ (2) ${}_5P_3$ (3) ${}_5P_5$ (4) ${}_5C_2$ (5) ${}_5C_3$ (6) ${}_5C_5$ (7) $0!$ (8) ${}_7P_0$ (9) ${}_7C_0$

(1) ${}_5P_2 = 5\times4 = 20$ (2) ${}_5P_3 = 5\times4\times3 = 60$ (3) ${}_5P_5 = 5\times4\times3\times2\times1 = 120$

(4) ${}_5C_2 = \frac{5\times4}{2!} = 10$ (5) ${}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5\times4}{2!} = 10$ (6) ${}_5C_5 = 1$

(7) $0! = 1$ (8) ${}_7P_0 = 1$ (9) ${}_7C_0 = 1$

022 이해를 위한 예제

다음 순열은 계승으로 계승은 순열로 표현하라.

(1) ${}_6P_2$ (2) ${}_{n-2}P_{n-5}$ (3) $\frac{10!}{7!}$ (4) $\frac{(n+4)!}{3!}$

(1) ${}_6P_2 = \frac{(\text{왼 쪽})!}{(\text{왼 쪽}-\text{오른 쪽})!} = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!}$

(2) ${}_{n-2}P_{n-5} = \frac{(\text{왼 쪽})!}{(\text{왼 쪽}-\text{오른 쪽})!} = \frac{(n-2)!}{\{(n-2)-(n-5)\}!} = \frac{(n-2)!}{3!}$

(3) $\frac{10!}{7!} = \left({}_{\text{분자}}P_{\text{분자}-\text{분모}}\right) = {}_{10}P_{(10-7)} = {}_{10}P_3$

(4) $\frac{(n+4)!}{3!} = \left({}_{\text{분자}}P_{\text{분자}-\text{분모}}\right) = {}_{n+4}P_{(n+4)-3} = {}_{n+4}P_{n+1}$

이런 건 그냥 연습이다. 1+1 = 2가 너무 기초여서 원리 같은 건 생각하지 않듯이 이 부분도 자유롭게 연산되어야 한다.

023 이해를 위한 예제

조합은 계승으로, 계승은 조합으로 표현하라.

(1) ${}_6C_2$ (2) ${}_{n-2}C_{n-5}$ (3) $\frac{10!}{3!7!}$ (4) $\frac{(n+1)!}{(n-2)!\,3!}$ (5) $\frac{10!}{2!7!}$

(1) ${}_6C_2 = \left(\frac{(\text{왼 쪽})!}{(\text{오른쪽})!(\text{왼 쪽}-\text{오른 쪽})!}\right) = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2!4!}$

(2) ${}_{n-2}C_{n-5} = \left(\frac{(\text{왼 쪽})!}{(\text{오른쪽})!(\text{왼 쪽}-\text{오른 쪽})!}\right) = \frac{(n-2)!}{(n-5)!\,\{(n-2)-(n-5)\}!} = \frac{(n-2)!}{(n-5)!3!}$

(3) $\frac{10!}{3!7!} = {}_{\text{분자}}P_{\text{분모 왼쪽}} = {}_{10}C_3$ (또는 ${}_{10}C_7$)

(4) $\frac{(n+1)!}{(n-2)!\,3!} = {}_{n+1}C_3$ (또는 ${}_{n+1}C_{n-2}$)

사실 <예제 022, 023>은 정해진 답이 없다. 표현하는 방법이 무한가지이기 때문이다.
(5)는 여러 가지 방법으로 표현해 본다. 연습하는 차원에서 이해하고 넘어간다.

(5) $\frac{10!}{2!7!} = \frac{10!}{2!7!} = \frac{10\times 9!}{2!7!} = 10\times\frac{9!}{2!7!} = 10\times{}_9C_2$ (또는 $10\times{}_9C_7$)

$= 3\times\frac{10!}{3!7!} = 3\times{}_{10}C_3$ (또는 $3\times{}_{10}C_7$)

$= \frac{10!}{2!7!} = 8\times\frac{10!}{2!8!} = 8\times{}_{10}C_2$ (또는 $8\times{}_{10}C_8$)

024 이해를 위한 예제

다음 조합의 성질 ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$을 증명하여라.

좌변과 우변을 <정의식>을 통해서 표현한 다음에, 같다는 사실을 확인한다.

좌변 $= {}_nC_r = \left(\frac{(\text{왼 쪽})!}{(\text{오른쪽})!(\text{왼 쪽}-\text{오른 쪽})!}\right) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

우변 $= {}_nC_{n-r} = \left(\frac{(\text{왼 쪽})!}{(\text{오른쪽})!(\text{왼 쪽}-\text{오른 쪽})!}\right) = \frac{n!}{(n-r)!\{n-(n-r)\}!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$

예제를 통해 개념의 외연을 넓혀라

촌철살인 경우의 수 | PART 2 근본에 가까운 공식

개념의 외연	#1. 순열과 조합으로 표현된 방정식
	#2. 여러 가지 상황의 배열 (계승 문제 유형정리)
	#3. 여사건의 아이디어 <적어도> + 특정인 개념
	#4. 정수론 2탄 : 정수분류법과 배수판정법 그리고 진법전개식
	#5. 도형과 경우의 수
	#6. 집합과 경우의 수

<개념의 외연>이라는 부분은 현재 배우고 있는 경우의 수의 국한된 내용만 다루는 것이 아니다.
현재 단원에 해당하는 문제를 풀기 위해서 필요한 수학적 개념이나 유형에 필요한 사고방식을 두루 다룬다.
수학에는 순서가 없다. 하지만 배움에는 순서가 있다.
그래서 순서가 없는 수학에 순서를 정한 것이 교육과정이다.
어떤 내용은 너무 어렵거나 복합적인 생각들을 담고 있어서 여러 학년에 걸쳐 배운다.
이런 경우 보통은 문제를 통해서 익힌다는 느낌이 강한데, 이런 개념들을 집약적으로 정리해주는 부분이 될 것이다.

#1 순열과 조합으로 표현된 방정식

순열 · 조합으로 표현된 방정식은 기본적으로 자연수를 다룬다는 특징이 있다.
그래서 일반적인 실수 범위에서의 방정식을 푸는 것과는 차이가 있다.
자연수라는 성질 그리고 순열과 조합의 기호가 가진 특수성을 최대한 활용해야 가장 간단하게 계산을 처리할 수 있다.

1. 약분의 확신 : 0이 아니라는 확신이 약분을 가능하게 한다.

- 계산식을 이용해 ${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$, ${}_nC_r = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$ 으로 각각 고친 다음에,

⇨ (단, n,r은 음 아닌 정수, $n \geq r$)의 조건을 이용해 최대한 간단히 약분한다.

티칭 0이 아니라는 확신이 약분을 가능하게 한다.

예를 들어 $x(x-1) = x$라는 방정식의 양변을 x로 약분시키면 $x-1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$이라는 잘못된 결과가 나온다. 그 이유는 0일 가능성이 있는 인수인 x를 약분시켰기 때문이다. (바른 답은 $x=0$ 또는 $x=2$)
반면에 $(x^2+1)(x+1) = x^2+1$이라는 방정식의 양변을 x^2+1로 약분시키면 $x+1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$이라는 바른 결과가 나온다. 그 이유는 x^2+1이 0일 수 없으므로 약분이 가능하기 때문이다.

티칭 준범체 식변자 : 준 식의 범위를 체크하면 식 변형에 자유롭다.

- 일단 이 말을 기억하자. 이 용어가 포함하는 내용의 스펙트럼이 너무 넓어 여기에서는 간단히 소개만 한다.

- 식에는 <준 식>과 <변형 식>이 있다. 준 식이란 말 그대로 문제에서 주어진 식이고, 변형 식이란 우리가 어떤 식 변형을 통해서 가공한 식을 말한다. (식 변형에는 항상 어떤 논리가 작용된다.)
올바른 식 변형이 생각보다 쉽지 않은데, 올바른 변형임을 판단하는 기준은 항상 <준 식>이다.
나온 결과가 준 식에 부합하면 올바른 식 변형을 한 것이고 그렇지 않으면 잘못된 식 변형을 한 것이다.

- 준 식에는 제한범위를 주는 식도 있지만 <관용적으로> 제한범위를 생략하는 식도 있다. 이런 생략된 제한범위를 표시하고 시작하면 식 변형 논리에서 오류를 범할 가능성이 적어진다.
  대표적으로 0과 자연수를 다루는 수열이나 경우의 수에서는 수열 $\{a_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$이나 $n!$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 또는 ${}_nP_r$ (단, n,r은 음 아닌 정수, $n\ge r$)에서 당연해 보이는 범위를 관용적으로 생략하기 때문에 이 범위를 생각하면서 식 변형을 하면 오류를 피할 수 있다.
  예를 들어 $n! = n\times(n-1)!$으로 고치는 것이 너무 타당해 보일 수 있으나 특정한 경우에는 틀릴 수 있다. <준 식>이 $f(n) = n!$이라고 생각해보자. $f(0) = 0! = 1$이므로 준 식에서는 오류가 없지만 $f(n) = n\times(n-1)!$으로 변형하면 $f(n) = 0\times(-1)!$이라는 말이 안 되는 식이 나온다. 즉, $n! = n\times(n-1)!$은 보통은 맞지만 $n=0$인 순간에는 틀리게 된다. 앞으로 또 정리할 부분이 있을 것이다. 일단 기억하자. ⇨ <준범체 식변자>

2. 소인수 분해와 추론

- ${}_nC_r$에서 좌변과 우변에 각각 $r!$을 곱해서 순열 ${}_nP_r$로 만들어준 다음, 적당한 자연수 몇 개를 대입하여 추론해 본다.
- 보통은 순열과 조합으로 표현된 방정식이 AB=C꼴로 표현된 (즉, 곱의 꼴로 표현된) 경우, 소인수분해와 추론을 통해서 간단하게 우리가 원하는 변수를 찾을 수 있다.

3. 조합의 성질 : 조합방정식에서 고려할 상황

- 조합의 성질에 의하여 방정식을 한 번 더 푼다. ⇨ ${}_nC_p = {}_nC_q \Leftrightarrow \begin{cases} p = q \\ p+q = n \end{cases}$

  예를 들어 ${}_3P_r=3$이라는 방정식을 풀 경우, $r=1$만 존재하게 된다.
  그러나 ${}_3C_r=3$이라는 방정식을 풀 경우, $r=1$과 $r=2$을 모두 답으로 써야 한다.

025 이해를 위한 예제

다음 등식 $4\,{}_nP_3 = 5\,{}_{n-1}P_3$을 만족하는 n의 값을 구하여라.

약분을 통해 최대한 간단하게 만든 후 푼다.

1 단계 : 준범체 식변자 - 준 식의 범위를 체크하면 식 변형에 자유롭다.
준 식 $\underline{4\,{}_nP_3 = 5\,{}_{n-1}P_3}$ 에서 $n\ge 4$라는 숨겨진 범위를 체크한다.

2 단계 : 계산식 - 계산식으로 식을 정리한다.
⇨ $4\,{}_nP_3 = 5\,{}_{n-1}P_3 \Leftrightarrow 4n(n-1)(n-2) = 5(n-1)(n-2)(n-3)$

3 단계 : 0이 아니라는 확신이 약분을 가능케 한다.
즉, $n\ge 4$에 의하여 $(n-1)$과 $(n-2)$는 0이 아니므로 약분될 수 있다.
$4n\cancel{(n-1)(n-2)} = 5\cancel{(n-1)(n-2)}(n-3) \Leftrightarrow 4n = 5(n-3) \Leftrightarrow n = 15$

$n = 15$

026 이해를 위한 예제

다음 등식 $_6P_r=120$을 만족시키는 r의 값과 $_5P_n\times6!=43200$을 만족시키는 r과 n의 값의 합은?

$_6P_r=120$: $_6P_r$은 6부터 시작하여 연속된 자연수를 곱한다는 뜻이다. 즉, 120을 6부터 1씩 작아지는 자연수의 곱으로 표현해보면 $6\times5\times4$로 표현될 수 있다, 그러므로 $r=3$

$_5P_n\times6!=43200$: 양변을 $6!$으로 나누면 $_5P_n = 60$이다. $_5P_n$은 5부터 시작하여 연속된 자연수를 곱한다는 뜻이므로 60을 5부터 1씩 작아지는 자연수의 곱으로 표현해보면 $5\times4\times3$로 표현될 수 있다, 그러므로 $n=3$

$$n+r = 6$$

027 이해를 위한 예제

$_{10}C_{r+2}={}_{10}C_{2r+2}$를 만족하는 r에 대하여 가능한 모든 $_5P_r$의 값의 합을 구하여라.

$_{10}C_{r+2}={}_{10}C_{2r+2}$의 방정식은 두 번 푼다.

i) $r+2 = 2r+2 \quad\Leftrightarrow\quad r=0$

ii) $(r+2)+(2r+2) = 10 \quad\Leftrightarrow\quad r=2$

$$_5P_0+{}_5P_2 = 1 + 5\cdot4 = 21$$

#2 여러 가지 상황의 배열

<기억해서 푸는 방식의 풀이>와 <근본적인 방식의 풀이>가 있다. 경우의 수에서 <항상 효율적인 방법>은 존재하지 않는다. 필요에 따라 효율적인 방식을 선택할 수 있도록 두 가지 풀이를 모두 이해한다.

1. 사전식 배열

- 숫자에도 순서가 있듯이 알파벳에도 순서가 있다.

A를 1에 대응시키면 A - 1, B - 2, C - 3, ⋯ , Z - 26 와 같이 대응할 수 있다. ~~(속으로 ABCD 노래 하지마라. 26개 맞다ㅋ.)~~

사전식 배열이란 알파벳을 이처럼 숫자에 <일대일 대응>시켰을 때 작은 수부터 나열한 것을 의미한다.

즉, 사전식 배열 문제는 알파벳을 숫자에 일대일 대응 시켜라.

028 이해를 위한 예제

$ABCDE$ 5개의 문자로 알파벳 순서에 의한 사전식 배열을 할 때, 50번째 단어의 마지막 문자는?

① A ② B ③ C ④ D ⑤ E

다음의 대응을 생각해 본다.

A	B	C	D	E
1	2	3	4	5

이제 문제는 12345부터 시작해서 작은 수부터 배열할 때 50번째로 작은 수의 마지막 숫자를 물어보는 문제로 바뀌었다.

1				
2				

인 모든 경우의 수 : $2 \times 4! = 48$가지이다.

즉, 49번째로 작은 수는 31245이고 50번째로 작은 수는 31254이다. 즉, 정답은 4에 대응하는 문자인 D

정답은 ④

029 이해를 위한 예제

M, O, N, K, E, Y를 사전식으로 배열할 때, MONKEY는 몇 번째 단어인가?

사전식으로 배열할 때 가장 먼저 나오는 단어는 EKMNOY이다. 다음의 대응을 생각해본다,

E	K	M	N	O	Y
1	2	3	4	5	6

: 우리가 찾는 단어인 MONKEY는 354216이다.

이제 문제는 123456부터 시작해서 작은 수부터 배열할 때 354216이 몇 번째 숫자인지 물어보는 문제로 바뀌었다.

1						10^5자리가 1 또는 2인 모든 경우의 수 : $2 \times 5!$
2						
3	1					10^5자리가 3이고 10^4자리가 5보다 작은 모든 경우의 수 : $3 \times 4!$ 조심!! 이미 첫 자리에 3을 썼으니 3은 다시 올 수 없다.
	2					
	3					
	4					
3	5	1				10^5자리가 3, 10^4자리가 5, 10^3자리가 4보다 작은 모든 경우의 수 : $2 \times 3!$ 설마 또 3쓴 건 아니겠지?
		2				
		3				
3	5	4	1			모든 경우의 수 : 2
3	5	4	2	1	6	354216는 결국 앞에서 배열한 모든 경우의 수의 다음 수이다.

$2\times5! + 3\times4! + 2\times3! + 2 + 1 = 327$ 이므로 MONKEY는 327번째 단어이다.

2. 교대 배열 (예제를 통한 학습)

: 빼먹지 않게 조심하라.

030 이해를 위한 예제

다음 경우의 수를 구하여라.

(1) 남자 A,B,C와 여자 a,b,c 6명을 일렬로 배열할 때, 남자와 여자를 교대로 세우는 경우의 수

(2) 남자 A,B,C,D와 여자 a,b,c 7명을 일렬로 배열할 때, 남자와 여자를 교대로 세우는 경우의 수

(1) 남자 A,B,C, 여자 a,b,c가 교대로 서는 경우의 수

전체상황

상황 1	남	여	남	여	남	여
상황 2	여	남	여	남	여	남

: $n(\text{전체}) = 2 \times n(\text{상황}\,1)$ (하나만 세서 곱한다.)

상황 1

상황 1-1	A		B		C	
⋮			⋮			
상황 1-3!	C		B		A	

: $n(\text{상황}\,1) = 3! \times n(\text{상황}\,1-1)$ (하나만 세서 곱한다.)

$n(\text{상황}\,1-1) = 3!$ (여자를 배열하는 경우의 수)

(2) 남자 A,B,C,D와 여자 a,b,c가 교대로 서는 경우는 $\boxed{\text{남}}\boxed{\text{여}}\boxed{\text{남}}\boxed{\text{여}}\boxed{\text{남}}\boxed{\text{여}}\boxed{\text{남}}$ 뿐이다.

전체상황

상황 1	A		B		C		D
⋮			⋮				
상황 4!	D		C		B		A

: $n(\text{전체}) = 4! \times n(\text{상황}\,1)$ (하나만 세서 곱한다.)

$n(\text{상황}\,1) = 3!$ (여자를 배열하는 경우의 수)

(1) $n(\text{전체}) = 2 \times 3! \times 3!$ (2) $n(\text{전체}) = 4! \times 3!$

3. 양 끝 배열 (예제를 통한 학습)

: 빼먹지 않게 조심하라.

031 이해를 위한 예제

남자 A,B,C와 여자 a,b,c을 일렬로 배열할 때,
(1) 남자 2명이 양 끝에 서는 경우의 수
(2) A와 B 두 명이 양 끝에 서는 경우의 수
(3) A는 맨 앞, B는 맨 뒤에 서는 경우의 수를 각각 구하여라.

(1) 남자 2명이 양 끝에 서는 경우의 수

전체 상황 : (자리를 기준) : 양 끝자리에 누군가는 온다.

상황 1	A					B
상황 2	B					A
⋮			⋮			
상황 $_3P_2$	C					A

: $n(\text{전체}) = {}_3P_2 \times n(\text{상황}1)$

$n(\text{상황}1) = 4!$이므로 $n(\text{전체}) = {}_3P_2 \times 4!$

(2) A와 B 두 명이 양 끝

전체 상황 : (배열 전 모든 상황) A, B를 제외한 나머지를 배열하기 전 모든 상황은 다음 두 가지다.

상황 1	A					B
상황 2	B					A

: $n(\text{전체}) = 2 \times n(\text{상황}1)$

특정인이 나오면 당연히 뽑는 경우의 수는 생각하지 않는다.
$n(\text{상황}1) = 4!$이므로 $n(\text{전체}) = 2 \times 4!$

(3) A는 맨 앞, B는 맨 뒤에 서는 경우의 수

전체 상황 : (배열 전 모든 상황) A, B를 제외한 나머지를 배열하기 전 모든 상황은 한 가지로 고정된다.

A					B

네 명을 일렬로 배열하는 상황은 계승의 상황이므로 공식으로 한 번에 센다. 즉, 정답은 $4!$이다.

(1) $n(\text{전체}) = {}_3P_2 \times 4!$ (2) $n(\text{전체}) = 2 \times 4!$ (3) $n(\text{전체}) = 4!$

4. 덩어리 배열

사람들이 널리 아는 방식을 기억하되 <근본적인 사고방식>은 항상 쓸 수 있어야 한다.

(근본적인 사고방식으로 접근하는 게 절대 복잡하지 않다.)

032 이해를 위한 예제

A,B,C,D,E를 일렬로 배열할 때 다음 조건을 만족하는 경우의 수를 구하여라.

(1) A, B, C 가 서로 이웃하는 경우

(2) A와 B 사이에 2개의 문자가 존재하는 경우

(1) A,B,C,D,E를 일렬로 배열할 때 A, B, C가 서로 이웃하는 경우

풀이1) 방식을 알고 풀기 : 덩어리 배열 ⇒ 이웃해야 하는 대상을 하나의 덩어리로 본다.

물론 직관적으로 이해 할 수 있기 때문에 좋은 방법. 하지만 어느 정도 암기가 기반이 된다.

$\boxed{A\ B\ C}$ $\boxed{D}$ $\boxed{E}$

1단계 : $\boxed{A\ B\ C}$를 하나의 덩어리로 생각한다.

2단계 : $\boxed{A\ B\ C}$ $\boxed{D}$ $\boxed{E}$의 세 덩어리를 배열하는 각각의 경우 $3!$가지 각각에 대하여 $\boxed{A\ B\ C}$ 덩어리 내부에서 배열되는 $3!$가지가 발생한다. 즉, $n(\text{전체}) = 3! \times 3!$

- 만약 이 방식이 직관적으로 이해가 가질 않는 경우 수형도를 통해 모든 경우를 나열해본다.

풀이2) 분할적 사고 ⇒ 사실 <덩어리 배열>이라는 방법을 몰라도 <ABC 대상을 기준>으로 상황을 분할하면 어렵지 않다.

$\boxed{\text{전체 상황}}$: (대상을 기준) ABC가 어딘가에는 앉는다.

상황 1	A	B	C		
상황 2		A	B	C	
상황 3			A	B	C

: $n(\text{전체}) = 3 \times n(\text{상황}1)$ (하나만 세서 곱한다.)

$\boxed{\text{상황 1}}$: (배열 전 모든 상황) 전체를 배열하기 전 ABC가 자리를 차지하는 모든 상황

상황 1-1	A	B	C		
			⋮		
상황 1-3!	C	B	A		

: $n(\text{상황}1) = 3! \times n(\text{상황}1-1)$ (하나만 세서 곱한다.)

$n(\text{상황}1-1)$은 결국 D,E를 배열하는 경우의 수이므로 두 가지이므로

$n(\text{전체}) = 3 \times n(\text{상황}1) = 3 \times 3! \times n(\text{상황}1-1) = 3 \times 3! \times 2$

정답은 36

(2)A,B,C,D,E를 일렬로 배열할 때 A와 B 사이에 2개의 문자가 존재하는 경우

풀이1) 방식을 알고 풀기 : 덩어리 배열 ⇨ 이웃해야 하는 대상을 하나의 덩어리로 본다.

A ○ ○ B □

1단계 : A ○ ○ B 를 하나의 덩어리로 생각한다.

2단계 : 덩어리 내부에서 배열되는 경우를 먼저 생각한다. A와 B사이에 들어가 2개의 대상을 뽑아 배열하는 각각에 대하여 A와 B도 배열하는 경우 2가지가 발생한다. ⇨ 즉, ${}_3P_2 \times 2!$

3단계 : 2단계에 해당하는 각각에 대하여 덩어리를 통째로 배열하는 $2!$가지의 경우가 발생한다.
즉, $n(\text{전체}) = {}_3P_2 \times 2! \times 2!$

- 만약 이 방식이 직관적으로 이해가 가질 않는 경우 수형도를 통해 모든 경우를 나열해본다.

풀이2) 분할적 사고

전체상황 : (대상을 기준) A,B가 어디엔가 앉을 것이므로 A,B를 기준으로 상황을 분할해본다.

상황 1	A			B	
상황 2	B			A	
상황 3		A			B
상황 4		B			A

: $n(\text{전체}) = 4 \times n(\text{상황}1)$ (하나만 세서 곱한다.)

$n(\text{상황}1)$은 남은 3개의 문자를 배열하는 경우의 수이므로 $n(\text{전체}) = 4 \times n(\text{상황}1) = 4 \times 3!$

정답은 24

033 이해를 위한 예제

A, B, C, D, E 를 일렬로 배열할 때 A와 B 사이에 C가 존재하는 경우의 수를 구하여라.

흔한 착각 : A C B 를 하나의 덩어리로 본다. 그러나 A C ○ B 나 A C ○ ○ B 역시 A와 B사이에 C가 있는 것이다. 덩어리의 개수를 기준으로 상황을 분할해서 풀어도 되지만 비효율적이다. (그래도 시도는 해보길.)

전체 상황 : (배열 전 모든 상황) A와 B사이에 C가 존재하는 모든 상황은 2가지로 분류된다.

상황 1	D E의 위치에 상관없이 A C B의 순서로 배열되는 상황
상황 2	D E의 위치에 상관없이 B C A의 순서로 배열되는 상황

: $n(\text{전체}) = 2 \times n(\text{상황}1)$ (하나만 세서 곱한다.)

상황 1 : (대상을 기준) ACB가 어딘가는 들어간다. <상황1>의 조건에 맞게 배치하는 모든 경우로 분할

상황 1-1	A	C	B		
상황 1-2	A		C	B	
			⋮		
상황 1- ${}_5C_3$			A	C	B

: 즉, $n(\text{상황}1) = {}_5C_3 \times n(\text{상황}1-1)$ (하나만 세서 곱한다.)

ABC가 자리를 정하는 상황은 이미 ABC의의 순서가 A→C→B로 정해져 있기 때문에 자동배열의 상황이므로 세 자리를 뽑기만 하면 된다. 다섯 자리 중에서 세 자리를 선택하는 상황은 조합의 상황이므로 공식으로 한 번에 세면 ${}_5C_3$

(곱의 법칙) 각 상황은 서로 다른 2개를 빈자리 2개에 배열하는 상황이므로 같은 경우의 수가 발생한다.

$n(\text{상황}1-1) = 2!$ (두 문자 D E를 두 자리에 배열하는 경우의 수이므로)

$n(\text{전체}) = 2 \times n(\text{상황}1) = 2 \times {}_5C_3 \times n(\text{상황}1-1) = 2 \times {}_5C_3 \times 2!$

5. 이웃하지 않게 배열

- <이웃해도 되는 대상>을 먼저 배열하고, 그 대상들 사이에서 자리를 뽑아 <이웃하면 안 되는 대상>을 배열한다.
  그리고 이것이 문제의 조건을 만족하는 모든 경우를 표현할 수 있음을 이해한다.

034 이해를 위한 예제

남자 A,B,C와 여자 a,b,c,d를 일렬로 배열할 때 남자끼리 이웃하지 않는 경우의 수를 구하여라.

풀이 1) 방식을 알고 풀기 : 이웃해도 되는 대상을 먼저 배열

✓(여)✓(여)✓(여)✓(여)✓

남자는 ✓의 자리 중 아무 자리나 한 자리씩 선택하여 들어가면 자동으로 이웃하지 않게 되는 모든 경우가 고려된다. 실제 남자를 몇 명 배치한 아래 상황과 대응시켜보면 모든 상황과 일대일 대응 한다는 사실을 알 수 있다.

전체 상황 : 여자의 위치가 결정되는 모든 경우는 $4!$가지

상황 1	✓ⓐ✓ⓑ✓ⓒ✓ⓓ✓
상황 2	✓ⓐ✓ⓑ✓ⓓ✓ⓒ✓
⋮	⋮
상황 $4!$	✓ⓓ✓ⓒ✓ⓑ✓ⓐ✓

: $n(\text{전체}) = 4! \times n(\text{상황1})$ (하나만 세서 곱한다.)

$n(\text{상황1}) = {}_5P_3$

✓인 다섯 자리 중 세 자리를 뽑아 A B C를 배열하는 경우의 수는 순열의 상황이므로 공식으로 한 번에 센다.

$$n(\text{전체}) = 4! \times n(\text{상황1}) = 4! \times {}_5P_3$$

풀이 2) 분할적 사고

전체 상황 : (대상을 기준, 배열 전 모든 상황) ABC가 어딘가는 온다. - A의 위치를 고정해 가며 일일이 셌다.

상황 1	A		B		C		
상황 2	A		B			C	
상황 3	A		B				C
상황 4	A			B		C	
상황 5	A			B			C
상황 6	A				B		C
상황 7		A		B		C	
상황 8		A		B			C
상황 9		A			B		C
상황 10			A		B		C

: $n(\text{전체}) = 10 \times n(\text{상황1})$ (하나만 세서 곱한다.)

상황 1 : A, B, C의 위치가 결정되는 모든 경우는 $3!$가지

상황 1-1	A		B		C		
⋮				⋮			
상황 1-$3!$	C		B		A		

: $n(\text{상황1}) = 3! \times n(\text{상황1-1})$ (하나만 세서 곱한다.)

(상황 1-1)은 서로 다른 네 명을 구분이 가는 네 자리에 배열하는 경우의 수이므로 <배열의 상황>이고 공식으로 한 번에 센다. 즉, $n(\text{상황1-1}) = 4!$ (a b c d를 배열하는 경우의 수)

$$n(\text{전체}) = 10 \times n(\text{상황1}) = 10 \times 3! \times n(\text{상황1-1}) = 10 \times 3! \times 4!$$

#3 여사건의 아이디어 <적어도> + 특정인 개념

분할된 상황의 경우의 수가 같지 않다고 판단될 때, 각각 세서 더하기 전에 먼저 고려해봐야 하는 경우의 수의 근본적 아이디어다.
<적어도>라는 말은 힌트일 뿐 그 자체로 <여사건>을 쓰는 본질이 아니다.

1. <적어도>는 본질이 아니다. (예제를 통한 설명)

- <적어도>라는 말이 있어도 여사건으로 푸는 것이 더 복잡한 경우도 있다.
- <적어도>라는 말이 없어도 여사건으로 풀지 않으면 너무 복잡한 문제들도 있다.
- 여사건으로 풀어도, 그게 그거인 경우도 많다.

<여사건의 아이디어>는 경우의 수 문제를 풀 때
기본적으로 생각해야 하는 근본적 아이디어다.

2. <적어도>에서 가장 빠지기 쉬운 오류 : 뽑기의 오류

- 적어도의 상황은 <개수를 기준>으로 상황을 분할해서 센다.
- 만약 반드시 뽑혀야 되는 대상을 먼저 뽑은 뒤 <곱의 법칙>으로 남은 사람을 뽑아 곱할 경우, 각각의 개별적 상황들이 여러 번 고려되는 결과가 발생한다. 이것은 앞에서 공부한 뽑기의 오류 : 동동연 배고려과 같은 종류의 오류이다.

3. 특정인 개념

- 다음 말을 이해하면 간단히 끝나는 문제이다. ⇨ A, B, C, D, E 5명 중 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_5C_2$가지이다.
⇨ A, B, C, D, E 5명 중 A, B 두 명을 뽑는 경우의 수는 1가지이다.
- 특정인을 뽑는 경우의 수는 1가지이다.

(참고) 라군, 최군, 허양, 한양

~군, ~양이라고 부르는 경우도 특정인을 지칭하는 것이다. 뉴스를 생각해 보라. 어제 빈집털이범 최**군이 잡혔다고 해서 우리나라의 모든 최씨 성을 가진 남자가 빈집털이범이 되는 것은 아니다. 이처럼 ~군, ~양은 특정 한 명을 지시하는 말이다.

개념의 용어화

여사건의 아이디어 : 경우의 수를 셀 때 항상 고려해야 하는 사고방식

035 이해를 위한 예제

남자 5명, 여자 7명 중 5명 뽑는 경우를 이용하여 다음 등식

$${}_{12}C_5 = {}_5C_5 \cdot {}_7C_0 + {}_5C_4 \cdot {}_7C_1 + {}_5C_3 \cdot {}_7C_2 + {}_5C_2 \cdot {}_7C_3 + {}_5C_1 \cdot {}_7C_4 + {}_5C_0 \cdot {}_7C_5$$

이 성립함을 상황적으로 설명하여라.

남자 5명, 여자 7명 중 5명 뽑는 경우 - 서로 다른 12명 중 5명을 뽑는 <조합의 상황>이다. ⇨ $n(\text{전체}) = {}_{12}C_5$

이 상황을 남자와 여자의 명수로 분류하여 상황을 분할하면 다음과 같다.

전체 상황 : (개수로 분류) 남자와 여자의 대상의 명수로 상황을 분류한다.

상황 1	남	남	남	남	남
상황 2	남	남	남	남	여
상황 3	남	남	남	여	여
상황 4	남	남	여	여	여
상황 5	남	여	여	여	여
상황 6	여	여	여	여	여

: 분할된 상황의 경의 수가 같지 않다고 판단 ⇨ 각각 세서 더한다.

$$\begin{aligned} n(\text{전체}) &= n(\text{상황}\,1) + n(\text{상황}\,2) + n(\text{상황}\,3) + n(\text{상황}\,4) + n(\text{상황}\,5) + n(\text{상황}\,6) \\ &= {}_5C_5 \cdot {}_7C_0 + {}_5C_4 \cdot {}_7C_1 + {}_5C_3 \cdot {}_7C_2 + {}_5C_2 \cdot {}_7C_3 + {}_5C_1 \cdot {}_7C_4 + {}_5C_0 \cdot {}_7C_5 \end{aligned}$$

마지막으로 위의 두 순열과 조합의 표현은 같은 상황을 다른 방식으로 센 것이므로

⇨ **계산하지 않고 같다는 사실을 안다.**

$$\begin{aligned} {}_{12}C_5 &= n(\text{상황}\,1) + n(\text{상황}\,2) + n(\text{상황}\,3) + n(\text{상황}\,4) + n(\text{상황}\,5) + n(\text{상황}\,6) \\ &= {}_5C_5 \cdot {}_7C_0 + {}_5C_4 \cdot {}_7C_1 + {}_5C_3 \cdot {}_7C_2 + {}_5C_2 \cdot {}_7C_3 + {}_5C_1 \cdot {}_7C_4 + {}_5C_0 \cdot {}_7C_5 \end{aligned}$$

티칭 위 예제의 식은 **조합의 정의식**을 이용해서 <양 변이 같음>을 보이는 게 오히려 복잡하다.
정말 같은지 너무 의심이 들면, 계산식을 통하여 각각 계산해서 <양변이 같음>을 확인하도록 한다.
이러한 식의 구조는 경우의 수 가장 마지막의 단원인 <Part 6. - 관점 합>에서 다시 나온다.
뒤에서 다시 나오겠지만, 이러한 구조의 식들은 <계산하지 않고 같음>을 확신하는 것이 최선이다.

036 이해를 위한 예제

남자 5명, 여자 7명 중 5명 뽑을 때 다음의 경우의 수를 구하여라.
(1) 적어도 남자 한 명은 뽑히는 경우의 수
(2) 적어도 남자 네 명은 뽑히는 경우의 수

(1) 적어도 남자 한 명은 뽑히는 경우의 수

전체 상황 : (개수로 분류) 남자와 여자의 대상의 명수로 상황을 분류한다.

상황 1	남	남	남	남	남
상황 2	남	남	남	남	여
상황 3	남	남	남	여	여
상황 4	남	남	여	여	여
상황 5	남	여	여	여	여
상황 6	여	여	여	여	여

여사건의 아이디어 ⇨ $n(\text{상황}1)\ +\ n(\text{상황}2)\ +\ n(\text{상황}3)\ +\ n(\text{상황}4)\ +\ n(\text{상황}5)$ 보다
${}_{12}C_5\ -\ n(\text{상황}6)$의 계산이 쉽다.

$$n(\text{전체})\ =\ {}_{12}C_5\ -\ n(\text{상황}6)\ =\ {}_{12}C_5\ -\ {}_7C_5\ =\ 771$$

(2) 적어도 남자 네 명은 뽑히는 경우의 수

전체 상황 : (개수로 분류) 남자와 여자의 대상의 명수로 상황을 분류한다.

상황 1	남	남	남	남	남
상황 2	남	남	남	남	여
상황 3	남	남	남	여	여
상황 4	남	남	여	여	여
상황 5	남	여	여	여	여
상황 6	여	여	여	여	여

여사건의 아이디어 ⇨ ${}_{12}C_5\ -\ n(\text{상황}3)\ -\ n(\text{상황}4)\ -\ n(\text{상황}5)\ -\ n(\text{상황}6)$ 보다
$n(\text{상황}1)\ +\ n(\text{상황}2)$의 계산이 쉽다.

$$n(\text{전체})\ =\ {}_5C_5\cdot{}_7C_0\ +\ {}_5C_4\cdot{}_7C_1\ =\ 36$$

코칭 여사건의 아이디어로 푸는 것보다 여사건의 아이디어을 항상 떠올리는 것이 중요하다.

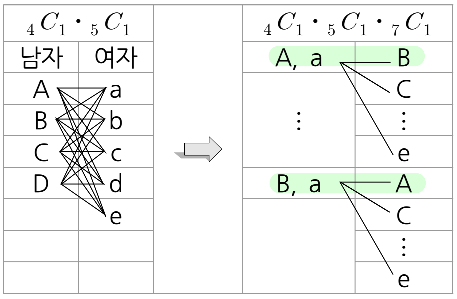
037 이해를 위한 예제

남자 4명, 여자 5명 중 3명 뽑을 때 남자와 여자가 적어도 한 명씩은 뽑히는 경우의 수는 <남자 2명, 여자 1명>과 <남자 1명, 여자 2명>으로 나눌 수 있으므로 ${}_4C_1 \cdot {}_5C_2 + {}_4C_2 \cdot {}_5C_1$이다.

여기에서 <남자 1명, 여자 1명>을 뽑은 뒤 <남녀 합해서 7명 중 1명>을 뽑는 경우의 수인 ${}_4C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_7C_1$가 왜 틀린지 설명하고 이를 토대로 어떤 식 조작을 통해서 ${}_4C_1 \cdot {}_5C_2 + {}_4C_2 \cdot {}_5C_1$와 같은 식을 만들 수 있는 지 설명하여라.

이런 예제들은 풀기보다 한 번 생각해보고 해설을 이해하면 된다. 예제의 형식을 빌려 개념을 설명한 것이다.

남자 네 명을 A, B, C, D 여자 다섯 명을 a, b, c, d, e라고 하자.



표의 왼쪽의 부분에서 ${}_4C_1 \cdot {}_5C_1$에 해당하는 모든 상황을 수형도로 나타낸 것이고 표의 오른쪽 부분에서는 ${}_4C_1 \cdot {}_5C_1$의 경우 중 하나인 A, a가 뽑힌 상황에 대하여 ${}_7C_1$의 모든 상황과
B, a가 뽑힌 상황에 대하여 ${}_7C_1$의 모든 상황을 수형도로 나타낸 것이다.

위의 표에서 🟩 부분이 중복됨을 알 수 있다.
즉, ${}_4C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_7C_1$와 같이 셀 경우 ${}_4C_1 \cdot {}_5C_2 + {}_4C_2 \cdot {}_5C_1$보다 더 많은 경우의 수가 고려된다.

위의 상황처럼 ${}_4C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_7C_1$처럼 경우의 수를 셀 경우 A → a → B가 뽑힌 상황에 대응해 B → a → A도 고려된다. 마찬가지로 A, a, b가 뽑힌 상황을 생각해 보면 A → a → b처럼 뽑힌 상황에 대응해 A → b → a도 고려됨을 알 수 있다. 이처럼 모든 각각에 대하여 1가지로 세야 하는 경우를 2가지로 셌으므로 ${}_4C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_7C_1$에 $\frac{1}{2}$을 곱하면 ${}_4C_1 \cdot {}_5C_2 + {}_4C_2 \cdot {}_5C_1$이 될 수 있음을 예측할 수 있다. ⇨ ${}_4C_1 \cdot {}_5C_2 + {}_4C_2 \cdot {}_5C_1 = {}_4C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_7C_1 \cdot \frac{1}{2}$

구체적 상황을 설정하여 관찰하면 한 가지로 세야 하는 상황을 각각에 대하여 몇 번씩 셌는지 파악할 수 있다.

사실 이 상황은 뽑기의 오류 : 동동연 배고려의 상황이다.
${}_4C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_7C_1$는 <남자 4명이 있는 집단>과 <여자 5명이 있는 집단>에서 각각 1명씩을 뽑은 후 연속해서 또 각 집단에서 1명을 뽑은 모든 경우를 고려한 경우의 수이므로 <동일 집단에서 동인 개수(1개)를 연속적으로 뽑아 배열이 고려>된 것이다. 그래서 결국 동일 집단에서 뽑힌 대상들끼리 배열되는 일이 발생한 것이다.

티칭 결국 <적어도>의 상황에서 먼저 뽑고 생각하면 오류가 발생하는 이유는 동일집단에서 뽑힌 대상들끼리 배열이 고려되기 때문이다. 그래서 상황을 <개수로 분류>해야 한다.

코칭 뽑기의 오류 : 동동연 배고려은 공식이 아니다. 뽑기가 곱의 법칙으로 연결될 때에는 항상 이런 오류가 발생할 수 있음을 강조하는 개념이다. 결국, 이 모든 내용을 받아들이는 직관은 상황의 구체적 관찰을 통해서 길러질 것이다.

038 이해를 위한 예제

남자를 A, B, C, D, E 여자를 a, b, c, d, e 중 5명 뽑을 때 남자와 여자가 적어도 두 명씩은 뽑히는 경우의 수를 앞의 〈이해를 위한 예제 037〉과 같은 방식으로 생각해 보아라.

〈개수로 분류〉해서 셀 경우 ⇨ 〈남자3 / 여자2〉 이거나 〈남자2 / 여자3〉이므로 ${}_5C_3 \cdot {}_5C_2 + {}_5C_2 \cdot {}_5C_3$

한 번에 셀 경우 ⇨ 〈남자 2명 → 여자 2명 → 남은 6명 중 1명〉을 뽑으면 ${}_5C_2 \cdot {}_5C_2 \cdot \boxed{{}_6C_1}$

◯에서는 남자가 뽑히는 경우와 여자가 뽑히는 경우가 있다. 구체적 상황을 관찰해보면 아래 표와 같다.

〈남자3 / 여자2〉의 관찰			
구성원 ABCab가 뽑힌 경우	AB → ab → C	AC → ab → B	BC → ab → A
⋮	⋮	⋮	⋮

〈남자2 / 여자3〉의 관찰			
구성원 ABabc가 뽑힌 경우	AB → ab → c	AB → ac → b	AB → bc → a
⋮	⋮	⋮	⋮

예측하건대, 각각에 대하여 1가지로 세야 하는 것을 3가지로 셌기 때문에

${}_5C_2 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_6C_1$에 3을 나눠서 ${}_5C_3 \cdot {}_5C_2 + {}_5C_2 \cdot {}_5C_3$을 표현할 수 있다.

실제로 ${}_5C_3 \cdot {}_5C_2 + {}_5C_2 \cdot {}_5C_3 = {}_5C_2 \cdot {}_5C_2 \cdot 2$ (조합의 성질)

${}_5C_2 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_6C_1 = {}_5C_2 \cdot {}_5C_2 \cdot 6$ $({}_6C_1 = 6)$이므로 3을 나누면 위와 같다.

039 이해를 위한 예제

남자를 A, B, C, D, E 여자를 a, b, c, d, e 중 6명 뽑을 때 남자는 적어도 세 명 여자는 적어도 두 명씩은 뽑히는 경우의 수를 앞의 <이해를 위한 예제 037>과 같은 방식으로 생각해 보아라.

<개수로 분류>해서 셀 경우 ⇨ <남자4 / 여자2> 이거나 <남자3 / 여자3>이므로 ${}_5C_4\cdot{}_5C_2 + {}_5C_3\cdot{}_5C_3$

한 번에 셀 경우 ⇨ <남자 3명 → 여자 2명 → 남은 5명 중 1명>을 뽑으면 ${}_5C_3\cdot{}_5C_2\cdot{}_5C_1$

⬭에서는 남자가 뽑히는 경우와 여자가 뽑히는 경우가 있다. 구체적 상황을 관찰해보면 아래 표와 같다.

<남자4 / 여자2>				
구성원 ABCDab가 뽑힌 경우	ABC → ab → D	ABD → ab → C	ACD → ab → B	BCD → ab → A
⋮				

<남자3 / 여자3>의 관찰				
구성원 ABCabc가 뽑힌 경우	ABC → ab → c	ABC → ac → b	ABC → bc → a	
⋮				

예측하건대, 어떤 경우는 4가지를 1가지로 세야하고 어떤 경우는 3가지를 1가지로 세야하기 때문에

${}_5C_3\cdot{}_5C_2\cdot{}_5C_1$에 적당한 자연수를 나눠서 ${}_5C_4\cdot{}_5C_2 + {}_5C_3\cdot{}_5C_3$을 표현할 수 없다.

실제로 ${}_5C_4\cdot{}_5C_2 + {}_5C_3\cdot{}_5C_3 = {}_5C_2\cdot 15$ (조합의 성질을 이용해서 ${}_5C_2$로 묶었다.)

${}_5C_3\cdot{}_5C_2\cdot{}_5C_1 = {}_5C_2\cdot 50$ (${}_5C_2$만 빼고 계산했다.) 이므로 50에 자연수를 나눠서 15를 표현할 수는 없는 일이다.

코칭 이처럼 경우의 수는 문제의 소재나 방식이 같아보여도 개수를 다르게 할 경우 상황이 완전히 달라질 수 있다.
그래서 경우의 수가 어려운 것이다.
하지만 바꾸어 말하면 아무리 문제의 소재나 방식을 새롭게 낸다고 할지라도 경우의 수를 풀고 이해하는 근본적인 사고방식은 몇 개가 반복되어 사용되기 때문에 오히려 공부할 것이 더 적다고 말할 수도 있다.

구체적으로 나열하고 관찰하는 것에 인색한 자는 결국 경우의 수에서 계속 발목이 잡힐 것

040 이해를 위한 예제 2010. 6. 나형(54%). 23번. 4점

A, B 두 사람이 서로 다른 4개의 동아리 중에서 2개씩 가입하려고 한다. A와 B가 공통으로 가입하는 동아리가 1개 이하가 되도록 하는 경우의 수를 구하시오. (단, 가입 순서는 고려하지 않는다.)

서로 다른 4개의 동아리를 각각 <가> <나> <다> <라>라고 생각한다.

전체 상황 : (개수로 분류) 공통으로 가입된 동아리의 개수를 기준으로 상황을 분할한다.

상황 1 : 공통으로 가입된 동아리 0개
상황 2 : 공통으로 가입된 동아리 1개
상황 3 : 공통으로 가입된 동아리 2개

풀이 1) $n(\text{상황}1) + n(\text{상황}2)$ (분할된 상황의 경우의 수가 같지 않다고 판단 ⇨ 각각 세서 더한다.)

<가>	<나>	<다>	<라>
A	A	B	B

$n(\text{상황}1)$은 공통으로 가입된 동아리가 없어야 하므로 위와 같이 서로 다른 네 자리 중 A가 들어갈 두 자리를 뽑는 경우와 일대일로 대응된다. (B는 자동배열) 즉, $n(\text{상황}1) = {}_4C_2$

	<가>	<나>	<다>	<라>
A	O			
B	O			

⇨

<나>	<다>	<라>
A	B	

(<가>를 둘 다 가입했으므로 한 개 씩만 더 가입)

$n(\text{상황}2)$를 위의 표와 같이 대응시킨다고 해 보자. 공통된 동아리가 정해지는(4가지) 각각에 대하여 남은 세 동아리 중 서로 다른 동아리에 가입해야 한다. 즉, $n(\text{상황}2) = 4 \cdot {}_3P_2$

$$n(\text{상황}1) + n(\text{상황}2) = {}_4C_2 + 4 \cdot {}_3P_2 = 30$$

풀이 2) 여사건의 아이디어 $n(\text{상황}1) + n(\text{상황}2) = n(\text{전체}) - n(\text{상황}3)$

$n(\text{전체})$는 A, B 두 사람이 서로 다른 4개의 동아리 중에서 2개씩 가입하는 상황이므로 ${}_4C_2 \times {}_4C_2$

$n(\text{상황}3)$은 가입된 동아리가 모두 공통으로 가입된 동아리이므로 동아리 4개중 2개만 뽑으면 된다.

즉, $n(\text{상황}3) = {}_4C_2$

$$n(\text{전체}) - n(\text{상황}3) = {}_4C_2 \times {}_4C_2 - {}_4C_2 = 30$$

코칭 '얼마나 빨리 풀었냐'가 중요한 것이 아니라 '얼마나 확신하고 풀었냐'가 중요하다.

위의 예제처럼 <적어도>라는 말이 없어도 여사건의 아이디어가 효율적인 경우는 얼마든지 있다.

경우의 수 학습의 바른 자세는 <효율과 비효율>이 아니다. <확신과 비 확신>이다.
경우의 수는 지금의 비효율이 잠시 후의 효율이고 지금의 효율이 잠시 후의 비효율일 수 있다.

#4 정수론 2탄

정수분류법과 배수판정법 그리고 진법전개식

1. 정수 분류법 : 정수문제를 풀기 위해 가장 중요한 것은 <같은 성질이 있는 정수>끼리 모으는 것이다.

1) 나머지 기준 (합이 ~의 배수)

- 모든 자연수를 나머지를 기준으로 분류하는 관점

예를 들어 1부터 10까지의 자연수를 3으로 나눈 나머지를 기준으로 분류하면 다음과 같다.

$3n$	3, 6, 9
$3n+1$	1, 4, 7, 10
$3n+2$	2, 5, 8

- 보통은 (합이 ~의 배수)라는 조건이 나왔을 때 이런 방식으로 정수를 분류하는 것이 좋다.

2) 소인수 기준 (곱이 ~의 배수)

- 모든 자연수를 소인수 분해했을 때 <소인수의 종류>와 <개수>를 기준으로 분류하는 관점

예를 들어 1부터 10까지의 자연수를 소인수 2의 개수를 기준으로 분류하면 다음과 같다.

2가 0개	1, 3, 5, 7, 9
2가 1개	2, 6, 10
2가 2개	4
2가 3개	8

- 보통은 (곱이 ~의 배수)라는 조건이 나왔을 때 이런 방식으로 정수를 분류하는 것이 좋다.

2. 배수 판정법

1) 끝자리가 기준

① 2의 배수 (짝수) : 끝의 한 자리가 0 or 2의 배수

② 4의 배수 (2^2) : 끝의 두 자리가 00 or 4의 배수

③ 8의 배수 (2^3) : 끝의 세 자리가 000 or 8의 배수

④ 2의 배수가 아닌 수 (홀수) : 끝의 한 자리가 홀수

⑤ 5의 배수 : 끝의 한 자리가 0 or 5

2) 자릿수 합이 기준

① 3의 배수 : 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수

② 9의 배수 : 각 지리의 숫자의 합이 9의 배수

설명) 예를 들어 세 자리 자연수 abc의 진법전개식을 이용하여 표현하면

$$abc = a\cdot 10^2 + b\cdot 10 + c = a\cdot 99 + b\cdot 9 + a+b+c = 9\cdot(\sim\sim\sim) + a+b+c$$

즉, 각 자리의 수를 더한 $a+b+c$가 9로 묶이면 abc는 9의 배수이고 3으로 묶이면 3의 배수이다.

3) 활용

① 6의 배수 : 2의 배수이면서 동시에 3의 배수

⇨ 즉, <끝의 한 자리가 0 or 2의 배수> 동시에 <각 자리의 숫자의 합이 3의 배수>

② 12의 배수 : 4의 배수이면서 동시에 3의 배수

⇨ 즉, <끝의 두 자리가 00 or 4의 배수> 동시에 <각 자리의 숫자의 합이 3의 배수>

코칭 이 책은 병렬적 정보가 기입된 사전이 아니다. 관점과 방향이 있는 <티칭+코칭>을 하는 책이다.
만약 7의 배수나 11의 배수 판정법이 궁금한 사람은 찾아보면 된다. 교육과정에서 출제되지 않는다.
앞에서도 언급했듯이 문제 풀 때는 많은 것을 알고 있으면 오히려 사고에 방해가 된다. 아는 것을 확실히 아는 것이 훨씬 중요하다. (메시가 축구를 잘하는 이유는 드리블을 여러 가지를 구사 할 수 있기 때문이 아니라는 사실을 항상 기억해라.)

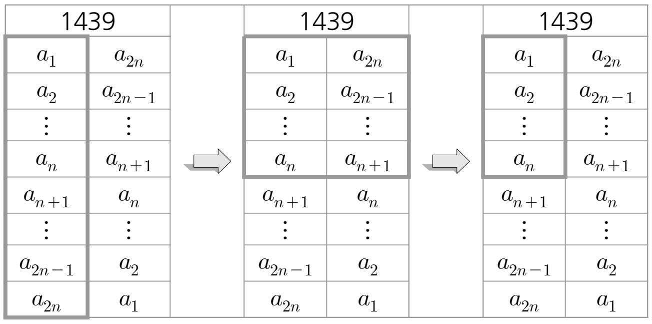
4) 소수 판정법 (참고) : 판정 수의 제곱근보다 작은 소수로만 나눠보면 된다.

예를 들어 1439의 약수를 모두 따져야 하는 상황이 생겼다고 가정해 보자.
위의 배수 판정법을 통해서 찾을 수 있는 약수가 없다는 사실을 알고 포기하는 친구들이 꽤 있을 것이다.
이것은 그동안 수학학습에서 약수와 배수를 일일이 나열하고 규칙을 찾으려는 노력이 거의 없다는 것을 의미한다.

Point 1) 우리가 알고 있는 소수 2, 3, 5, 7, …로만 나눠보면 한다. (합성수로 나눠 볼 필요는 없다.)
예를 들어 1439가 3을 약수로 가지지 않는다면 6이나 12와 같은 수를 약수로 가질 리가 없다.

Point 2) 우리가 판정하고자 하는 수의 제곱근 보다 작은 소수들로 나누어 보면 된다. 즉, $\sqrt{1439}$ 보다 작은 소수로만 나눠본다. - 40^2이 1600이므로 대략 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37정도로만 나눠보면 된다.
(이 중에서 배수판정법에 의해 2, 3, 5는 배제할 수 있다.)

예를 들어 1439는 어떤 수의 제곱수는 아니므로 약수를 짝수 개 갖는다. (Part 1 참조)그 약수를 작은 수부터 차례로 a_1, a_2, …, a_{2n}이라고 한다면 약수는 다음과 같은 대칭성을 가진다는 사실은 이미 앞에서도 언급했다.



1439	
a_1	a_{2n}
a_2	a_{2n-1}
⋮	⋮
a_n	a_{n+1}
a_{n+1}	a_n
⋮	⋮
a_{2n-1}	a_2
a_{2n}	a_1

1439	
a_1	a_{2n}
a_2	a_{2n-1}
⋮	⋮
a_n	a_{n+1}
a_{n+1}	a_n
⋮	⋮
a_{2n-1}	a_2
a_{2n}	a_1

1439	
a_1	a_{2n}
a_2	a_{2n-1}
⋮	⋮
a_n	a_{n+1}
a_{n+1}	a_n
⋮	⋮
a_{2n-1}	a_2
a_{2n}	a_1

여기에서 a_{2n-1}을 찾기 위해서는 a_2로만 나눠보면 된다는 사실을 쉽게 이해 할 수 있다.
(몫이 자동으로 a_{2n-1}이 되기 때문이다.)
결국 우리가 모든 약수를 찾기 위해서는 a_1, a_2, …, a_n으로만 나눠보면 된다.
⇨ 여기에서 가장 큰 a_n이 $\sqrt{1439}$ 보다 작기 때문에 우리는 $\sqrt{1439}$ 보다 작은 소수로만 나눠보면 되는 것이다.
결국 9번 정도만 나눠보면 1439가 소수라는 것을 알 수 있다.

3. 숫자 0의 활용

1) 세 자리 자연수 : 0은 차수가 가장 높은 자리에 올 수 없다.

- 세 자리 □□□을 만들고 각 자리에 숫자를 배열할 때, 0은 차수가 가장 높은 자리 (첫 자리)에 올 수 없다.

2) 세 자리 이하의 자연수 : 0이 차수가 가장 높은 자리에 오게 하여 다른 자연수와 일대일 대응

- 세 자리 □□□을 만들고 각 자리에 숫자를 배열할 때, 0이 차수가 높은 자리에 오게 하여 다른 자연수와 일대일 대응시킨다. 예를 들어, 001은 1에 대응하고 010은 10에 대응한다.

4. 진법전개식 : 규칙적으로 배열된 자연수들의 합

예를 들어 4321이라는 자연수를 진법전개식을 이용해서 표현하면

$$4321 = 4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 1$$

- 경우의 수에서는 규칙적으로 배열된 자연수의 합을 구할 때 각 자리의 숫자들을 진법전개식을 이용하여 분리한 다음, 자리 수가 같은 수끼리 따로 더하는 방식을 종종 이용한다.

학습조언. 하루아침에 성을 지으려고 하지 말라.

하다못해 눈에 보이는 건물들도, 지을 때 제대로 짓지 않는다면 부실공사로 인해 하루아침에 무너질 수 있다. 하물며 우리 머릿속에 눈에 보이지 않는 성을 짓는 과정은 오죽할까? 안타깝게도 대부분의 학생들과 학부모들이 오직 성을 빨리 쌓아 올리는 것에만 열중하고 있는 듯하다. 그러다 보면 자연스럽게 부실공사가 되고 하루아침에 무너지는 성이 될 수 있다.

무너지지 않는 성을 쌓는 방법은 이해 위주의 공부를 하는 것이다. 특히나 수학과 과학은 자신이 근본적으로 받아들이지 못한 공식이나 정리 등을 그냥 암기하고 넘어가는 경우가 있는데, 이런 경우가 대표적으로 부실공사에 속한다. 사실 그냥 외우고 넘어가면 편하다. 하지만 자신이 알고 있는 지식으로부터 자연스럽게 연결시키지 못한 공식, 정리 등은 모두 쓸 수 없는 지식이다. 궁금증을 던지고 그것을 납득하는 과정이 공부이며, 이렇게 한 공부는 견고하게 쌓은 성처럼 단단할 뿐만 아니라 수동적으로 받아들이는 공부에 비해 집중력이 굉장히 강해진다. (어떤 내용을 깊이 고민하다가 시계를 봤는데 너무 많은 시간이 흘러가서 진도를 많이 못 나갔던 그런 경험이 있다면 그런 공부를 계속 하길 바란다.)

- 국어나 영어를 공부하는 것은 수학 과학과는 차이가 있으므로 그 분야의 전문가 선생님께 조언을 얻어라.

041 이해를 위한 예제 2008. 3. 가형(62%). 7번. 3점

1부터 9까지 9개의 자연수 중에서 서로 다른 세 수를 일렬로 나열하여 세 자리의 자연수를 만들 때, 그 중 각 자리의 수의 곱이 10의 배수인 자연수의 개수는?

① 60 ② 88 ③ 100 ④ 132 ⑤ 144

각 자리의 수의 곱이 10의 배수 - 10의 배수가 되기 위해서는 소인수로 2와 5를 최소 한 개씩은 가지고 있어야 한다.
곱이 10의 배수인 수를 찾기 위해 1~9를 소인수 2와 5를 기준으로 분류해본다.
(분류할 때 겹치는 상황이 생기지 않게 분류하는 것은 경우의 수에서 굉장히 중요한 아이디어)

〈정수분류법 : 소인수기준〉

〈분류1〉 $\boxed{2}\ \cancel{\boxed{5}}$	2, 4, 6, 8
〈분류2〉 $\cancel{\boxed{2}}\ \boxed{5}$	5
〈분류3〉 $\cancel{\boxed{2}}\ \cancel{\boxed{5}}$	1, 3, 7, 9
〈분류4〉 $\boxed{2}\ \boxed{5}$	없음

전체 상황 (대상을 기준) 5가 어딘가는 들어간다.

상황 1 : $\boxed{5}\boxed{\ }\boxed{\ }$

상황 2 : $\boxed{\ }\boxed{5}\boxed{\ }$

상황 3 : $\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{5}$: $n(\text{전체}) = 3\times n(\text{상황}1)$ (하나만 세서 곱한다.)

상황 1 (개수로 분류) 소인수 2가 반드시 필요하다. 뽑히는 〈분류1〉의 대상의 개수를 기준으로 상황을 나눈다.

상황 1-0 : 〈분류1〉의 대상 0개 〈분류3〉에서 2개
상황 1-1 : 〈분류1〉의 대상 1개 〈분류3〉에서 1개
상황 1-2 : 〈분류1〉의 대상 2개 〈분류3〉에서 0개

(분류2)에 원소는 5 하나뿐이고 이미 뽑혀 있으므로 생각할 필요가 없다.

풀이 1) $n(\text{상황}1) = n(\text{상황}1-1) + n(\text{상황}1-2)$

(분할된 상황의 경우의 수가 같지 않다고 판단 ⇨ 각각 세서 더한다.)

$n(\text{상황}1-1)$은 〈분류1〉의 숫자 한 개와 〈분류3〉의 숫자 한 개를 $\boxed{5}\boxed{\ }\boxed{\ }$의 남은 자리에 배열하는 경우의 수이므로 ${}_4C_1\times{}_4C_1\times2!$이다.

$n(\text{상황}1-2)$는 〈분류1〉의 숫자 두 개를 $\boxed{5}\boxed{\ }\boxed{\ }$의 두 자리에 배열하는 경우의 수이므로 ${}_4P_2$이다.

$$n(\text{전체}) = 3\times n(\text{상황}1) = 3\times\{n(\text{상황}1-1) + n(\text{상황}1-2)\} = 3\times\{{}_4C_1\times{}_4C_1\times2! + {}_4P_2\} = 132$$

풀이 2) 여사건의 아이디어 을 이용한다.

$n(\text{상황}1) = {}_8P_2 - n(\text{상황}1-0) = {}_8P_2 - {}_4P_2$

(5를 제외한 8개의 숫자 중 두 숫자를 뽑아 $\boxed{5}\boxed{\ }\boxed{\ }$의 두 자리에 배열하는 경우의 수에서 2가 포함되지 않은 두 숫자를 배열한 경우를 빼는 것이다.)

$$n(\text{전체}) = 3\times n(\text{상황}1) = 3\times\{{}_8P_2 - n(\text{상황}1-0)\} = 3\times\{{}_8P_2 - {}_4P_2\} = 132$$

코칭 이처럼 여사건의 아이디어는 특정 문제를 푸는 방법이 아니라 (보통은 〈분할적 사고 : 개수로 분류〉인 상황에서) 문제를 풀면서 자연스럽게 고려해야 하는 근본 사고방식이다.

042 이해를 위한 예제

1, 2, 3, 4, 5의 5개의 숫자를 모두 배열해서 만들어지는 5자리의 양의 정수가 있다. 32000보다 작은 양의 정수 중에서 5의 배수는 모두 몇 개인가?

전체 상황 : (자리를 기준) 첫 번째 자리에 누군가는 온다. (마지막 자리는 배수판정법에 의하여 5로 고정된다.)

상황 1 : $\boxed{1}\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{5}$

상황 2 : $\boxed{2}\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{5}$

상황 3 : $\boxed{3}\boxed{1}\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{5}$: $n(\text{전체}) = 2\times n(\text{상황}\,1) + n(\text{상황}\,3)$ (합의 법칙과 곱의 법칙)

$n(\text{상황}\,1)$은 계승의 상황이므로 공식으로 한 번에 세면 $3!$

$n(\text{상황}\,3)$도 계승의 상황이므로 공식으로 한 번에 세면 $2!$

$$n(\text{전체}) = 2\times n(\text{상황}\,1) + n(\text{상황}\,3) = 2\times 3! + 2! = 14$$

043 이해를 위한 예제

2004. 10. 나형(49%). 6번. 3점

다음은 네 자연수 $1,\ 2,\ 3,\ 4$를 한 번씩 사용하여 만든 네 자리 정수를 크기순으로 나열한 것이다. 오른쪽 모든 수들의 총합은?

① 88880 ② 77770 ③ 66660

④ 55550 ⑤ 44440

1234	1243	⋯	1423	1432
2134	2143	⋯	2413	2431
3124	3142	⋯	3412	3421
4123	4132	⋯	4312	4321

진법전개식을 이용하여 같은 자리의 숫자끼리 더한다.

문제의 자연수는 <$4!$가지>의 경우의 수를 가지고 있다. (1,2,3,4를 배열한 경우의 수이므로)
이 모든 자연수를 진법전개식으로 분리하고 따로 더한다고 가정했을 때 다음을 생각한다.

전체 경우 중 1만 생각하면

모든 자연수를 진법 전개식으로 분리하고 1000만 따로 빼낸다.	$\boxed{1}\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }$	1000은 $3!$번 발생
모든 자연수를 진법 전개식으로 분리하고 100만 따로 빼낸다.	$\boxed{\ }\boxed{1}\boxed{\ }\boxed{\ }$	100은 $3!$번 발생
모든 자연수를 진법 전개식으로 분리하고 10만 따로 빼낸다.	$\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{1}\boxed{\ }$	10은 $3!$번 발생
모든 자연수를 진법 전개식으로 분리하고 1만 따로 빼낸다.	$\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{1}$	1은 $3!$번 발생

즉, 위의 <$4!$가지>의 경우 중 1이 포함된 모든 숫자의 1을 집법전개식으로 분리 한 후 뽑아서 따로 더하면 $(1000+100+10+1)\times 3!$이다.
마찬가지로 2, 3, 4에도 같은 규칙을 적용하면,

$$(1000+100+10+1)\times 3! + (2000+200+20+2)\times 3! + \cdots + (4000+400+40+4)\times 3!$$
$$= (1111+2222+3333+4444)\times 3! = 66660$$

#5 도형과 경우의 수

크게 <점을 기준>으로 세는 경우와 <선을 기준>으로 세는 경우가 있다. 중복되게 센 경우는 빼야 한다.

1. 점을 기준으로 하는 도형 (예제를 통한 설명)

1) 선분의 개수

$$n(\text{선분}) = {}_{\text{서로 다른 점들}}C_2$$

- 양 끝점이 다르면 모두 다른 선분이다.

2) 직선의 개수

$$n(\text{직선}) = n(\text{선분}) - n(\text{일직선 선분}) + n(\text{일직선})$$

- $n(\text{선분})$이란 ${}_{\text{서로 다른 점들}}C_2$을 의미한다.
- $n(\text{일직선 선분})$이란 ${}_{\text{일직선 위의 점들}}C_2$을 의미한다.
- $n(\text{일직선})$은 <세 점 이상이 일직선상에 있는 모든 직선>의 개수를 의미하는 것으로 일일이 센다.

3) 삼각형의 개수

$$n(\text{삼각형}) = {}_{\text{서로 다른 점들}}C_3 - {}_{\text{일직선 위의 점들}}C_3$$

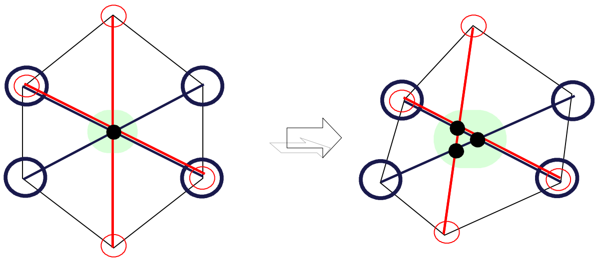
- ${}_{\text{서로 다른 점들}}C_3$: 일직선 위의 세 점은 삼각형을 이룰 수 없기 때문에 빼야 한다.

4) 볼록 n각형의 대각선의 개수

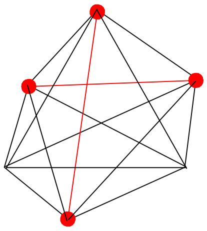
$$n(\text{대각선}) = {}_nC_2 - n(\text{변})$$

- ${}_nC_2$에는 대각선이 아닌 변도 포함되기 때문에 변의 개수를 빼야 한다.

2. 일대일 대응의 아이디어 1 : 볼록 n각형 대각선의 교점의 최대 개수



- 위의 그림과 같이 볼록 다각형을 적당히 조작해 주면 대각선의 교점이 겹치는 순간이 없도록 만들 수 있다. (직관이다.)



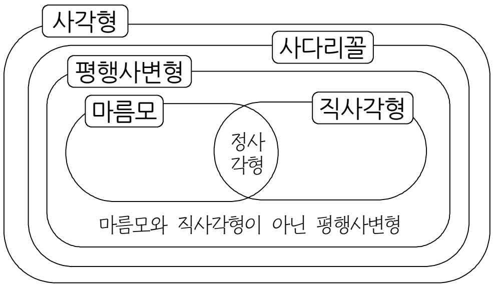
- 즉, 겹치는 순간이 없다면 <교점이 생기는 각 경우>는 볼록 n각형의 <네 개의 점이 뽑히는 상황>과 일대일 대응된다.

어떤 <네 개의 꼭짓점>도 <대각선의 교점>을 2개를 만들거나 만들지 않을 수 없다. (직접 몇 개 해 보면 알 수 있다.)

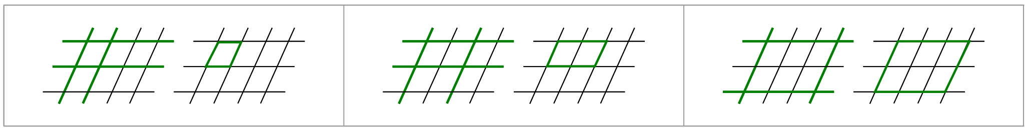
볼록 n각형의 대각선의 교점의 최대 개수 ${}_{n}C_{4}$

볼록 육각형의 대각선의 교점의 최대 개수 ${}_{6}C_{4}$

3. 일대일 대응의 아이디어 2 : 평행사변형과 직선



- 평행사변형, 직사각형의 개수를 셀 때 쓰는 방법
- 평행사변형(또는 직사각형)을 구성하는 변을 뽑으면 평행사변형 1개와 일대일 대응된다. (아래 대응을 참조한다.)

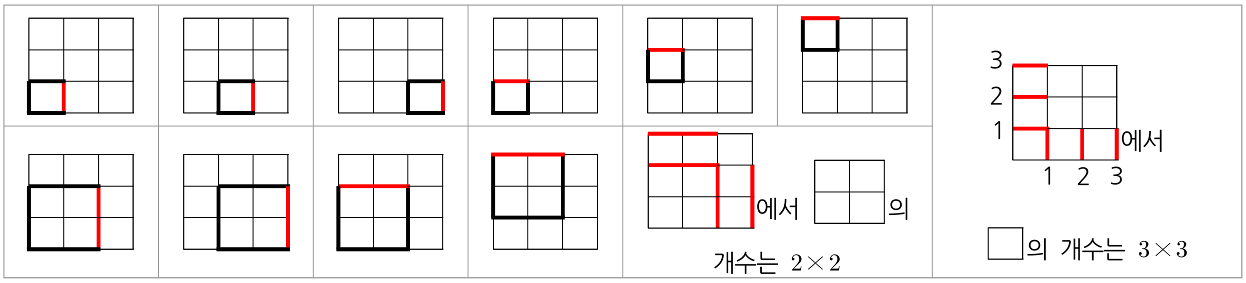


- 위와 같은 그림에서 12개의 점 중 4개를 뽑아 만들 수 있는 평행사변형의 개수는 ${}_{4}C_{2}\times{}_{3}C_{2}$이다.

(점을 뽑으라고 했지만 선을 기준으로 생각해야 한다. 점을 기준으로 셀 경우 빼야 하는 경우가 너무 많다.)

4. 수열의 규칙성 : 마름모, 정사각형

- 정사각형은 선분에 일대일 대응을 시켜 결국엔 선분의 개수를 센다.
- 수열의 규칙성을 찾을 수 있다.



- 굳이 '위에처럼 할 필요가 있을까?'라고 생각할 수 있는데 위에처럼 간단한 경우가 아닐 때 굉장히 유용하다.

티칭 연속된 정수의 개수 세기 ⇨ 세야 하는 가장 큰 정수 − 세야 하는 가장 작은 정수 + 1

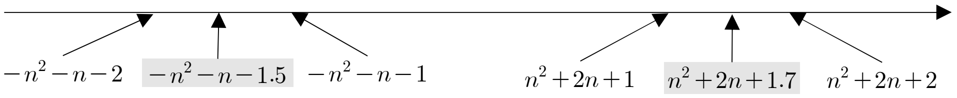
예를 들어 1부터 10까지 정수의 개수가 10개라는 것을 모르는 사람은 없다.
$10 - 1$ 이 의미하는 것은 수직선상에서 두 좌표 $A(1)$과 $B(10)$사이의 거리를 의미하는 것이지 정수의 개수를 의미하는 것이 아니다. 정수의 개수는 $10 - 1 + 1 = 10$개다.

예시1) -3.3보다 크거나 같고 $\sqrt{19}$보다 작거나 같은 정수의 개수

: 표현을 조금 복잡해 보이게 했지만 본질은 변함이 없다. -3, -2, $\cdots$, 4의 개수를 세는 것이다.
즉, 정수의 개수는 $4 - (-3) + 1 = 8$

예시2) $-n^2-n-1.5$보다 크고 $n^2+2n+1.7$보다 작은 정수의 개수

: 이 조건을 만족하는 가장 작은 정수와 가장 큰 정수를 찾는 것이 헷갈린다면 <수직선을 이용한 판단>에 대한 사고방식이 아직 정립되지 못한 것이다. 주어진 조건에서 수직선을 이용하여 좌우의 정수를 생각해보면 간단하다.



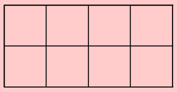
위의 그림에서 우리는 $-n^2-n-1$, $-n^2-n$, $\cdots$, n^2+2n+1의 정수의 개수를 센다.
즉, $(n^2+2n+1) - (-n^2-n-1) + 1 = 2n^2+3n+3$

044 이해를 위한 예제

다음 오른쪽 그림과 같이 5개의 선분과 3개의 선분이 교차하여 만나는 교차점 15개에 대하여 다음 개수를 구하여라.

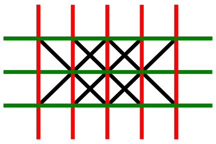
(1) 15개의 점을 연결하여 만들 수 있는 선분의 개수

(2) 15개의 점을 연결하여 만들 수 있는 직선의 개수



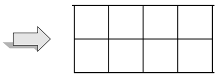
(1) 15개의 점을 연결하여 만들 수 있는 선분의 개수 - 15개의 점 중 2개를 뽑으면 된다. 즉, ${}_{15}C_2$

(2) 15개의 점을 연결하여 만들 수 있는 직선의 개수 - n(직선) $=$ n(선분) $-$ n(일직선 선분) $+$ n(일직선)



${}_{15}C_2$에서 여러 번 센 직선은 ① | : $5 \cdot {}_3C_2$ ② — : $3 \cdot {}_5C_2$ ③ \ : $6 \cdot {}_3C_2$이다.

보통은 여기까지 생각해서 틀린다.



④ \ : $2 \cdot {}_3C_2$

결국, n(전체) $= {}_{15}C_2 - (5 \cdot {}_3C_2 + 3 \cdot {}_5C_2 + 6 \cdot {}_3C_2 + 2 \cdot {}_3C_2) + (5 + 3 + 6 + 2)$

$= 52$

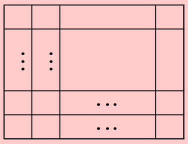
직선 |, —, \, \ 을 모두 뺐기 때문에 다시 더해야 한다.

045 이해를 위한 예제

2008. 6. 가형(58%). 나형(39%). 12번. 3점 (변형)

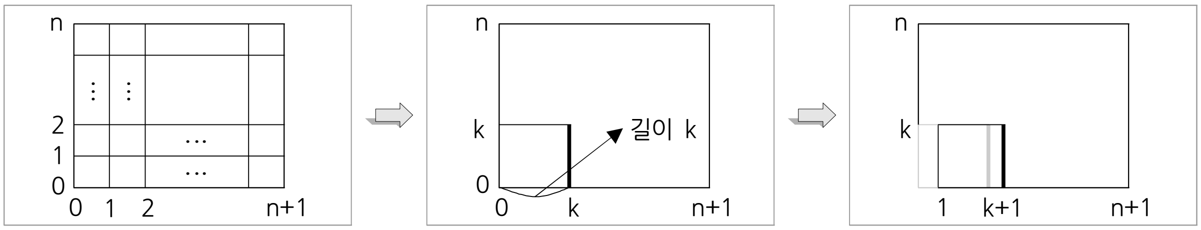
길이가 1인 정사각형을 이용하여 가로의 길이가 $n+1$, 세로의 길이가 n인 직사각형을 오른쪽 그림과 같이 만들 때 넓이가 k^2인 정사각형의 개수를 n과 k에 대한 식으로 표현하여라.

(단, n과 k는 자연수, $n > k$)



티칭 이런 경우 선의 번호를 0부터 시작하면 시각적으로 편하다. 길이가 n인 선분을 n등분 할 경우 등분점은 $n+1$개가 되는데 습관적으로 이런 것에 번호를 붙을 때 1부터 시작하면 마지막 점은 $n+1$로 끝나서 시각적으로 불편하지만 0부터 시작하면 마지막 점의 번호가 n으로 끝나기 때문에 시각적으로도 편하고 헷갈림도 적어진다.

(길이는 실수. 개수는 자연수. 그래서 생기는 1의 차이 - 사실 이런 부분은 캐치해 내는 직관이 있어야 수학을 잘한다.)



넓이가 k^2인 정사각형의 개수

한 변의 길이가 k인 정사각형의 개수. 여기에서 길이는 실수 값 $k-0 = k$이므로 위와 같이 정사각형을 대응 시킬 수 있다. 결국 정사각형을 오른쪽 선분 밑 번호에 일대일 대응시키면 첫 번째 가로줄에서 나오는 정사각형의 개수는 $k,\ k+1,\ \cdots,\ n+1$의 연속된 정수의 개수임을 알 수 있다. 즉, $(n+1)-k+1 = n-k+2$

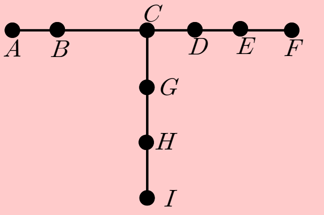
마찬가지로 정사각형을 위로 진행시키면 첫 번째 세로줄에서 나오는 정사각형의 개수는 $k,\ k+1,\ \cdots,\ n$의 연속된 정수의 개수이므로 $n-k+1$이다.

n(넓이가 k^2인 정사각형의 개수) $= (n-k+2)(n-k+1)$

046 이해를 위한 예제

2005. 7. 나형(68%). 20번. 3점

그림과 같이 점 C에서 만나는 두 선분 AF, CI 위에 9개의 점이 있다. 이 중 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수를 구하시오.



한 직선 위에서 세 점을 뽑을 경우, 삼각형을 만들지 못한다.

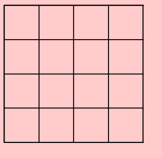
$$n(\text{삼각형}) = {}_{\text{서로 다른 점들}}C_3 - {}_{\text{일직선 위의 점들}}C_3$$

$$= {}_{\text{서로 다른 점들}}C_3 - n(\overline{AF}\text{에서 세 점}) - n(\overline{CI}\text{에서 세 점})$$

$$n(\text{삼각형}) = {}_9C_3 - {}_6C_3 - {}_4C_3 = 84 - 20 - 4 = 60$$

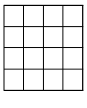
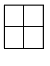
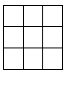
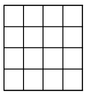
047 이해를 위한 예제

그림은 정사각형의 각 변을 4등분하여 얻은 도형이다. 이 도형의 선들로 이루어지는 사각형 중에서 정사각형이 아닌 직사각형의 개수를 구하여라.



$n(\text{전체 직사각형}) = {}_{\text{가로선}}C_2 \times {}_{\text{세로선}}C_2 = {}_5C_2 \times {}_5C_2$ (직사각형을 세는 방법과 평행사변형을 세는 방법은 같다.)

정사각형은 하나하나 센다.

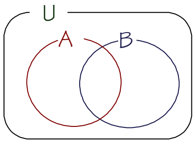
에서 □ 16개,  9개,  4개,  1개이므로 $n(\text{정사각형}) = 30$

$$n(\text{정사각형 아닌 직사각형}) = n(\text{전체 직사각형}) - n(\text{정사각형}) = {}_5C_2 \times {}_5C_2 - 30 = 70$$

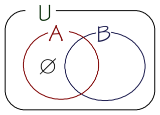
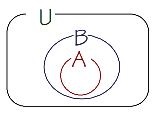
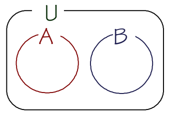
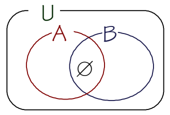
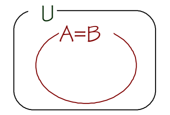
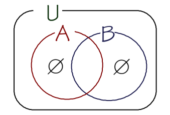
#6 집합과 경우의 수

1. 벤다이어그램과 일대일 대응

1) 벤다이어그램 표현법 : Venn의 표현법



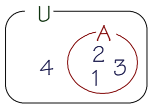
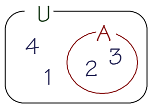
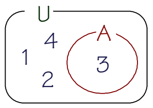
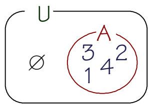
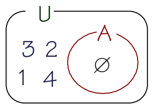
- 수학자 벤(Venn, J. : 1834~1923)은 1880년 그의 논문「명제와 논리의 도식적 · 역학적 표현에 관하여」에서 처음으로 소개 벤 다이어그램을 소개하였다.
  두 집합의 관계가 명확하지 않은 경우에는 무조건 오른쪽과 같이 벤다이어그램을 그리면 된다.
  실제로 벤도 오른쪽의 벤다이어그램으로 모든 경우를 표현하였다.

$A \subset B$		$A \cap B = \varnothing$		$A = B$	
					

- 위와 같이 실제로 벤은 폐곡선을 이용하여 집합을 표현하고 선으로 구분이 되는 영역을 기준으로 영역 안에 원소가 있으면 ○라고 표시하고 원소가 없으면 $\varnothing$라고 표시했다. 그래서 $\varnothing$을 공집합 기호를 쓰게 되었다.
  $\varnothing$은 의미 그대로 공집합 (empty set)이라고 읽거나 그리스 알파벳 중 모양이 비슷한 ϕ(phi)라고 읽는다.

2) 부분집합이 결정되면 벤다이어그램도 결정된다.

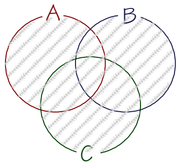
- 집합 $U = \{1, 2, 3, 4\}$의 부분집합이 결정됨에 따라 결정되는 벤다이어그램을 관찰해 본다.

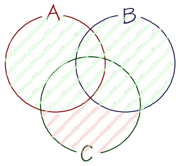
				
$A = \{1, 2, 3\}$	$A = \{1, 4\}$	$A = \{3\}$	$A = \{1, 2, 3, 4\}$	$A = \varnothing$

3) 조건을 만족하는 집합의 경우의 수

- 결국에는 조건을 만족하는 벤다이어그램을 그린 후 각 영역에 원소를 배치하는 경우의 수이다.
- 원소를 기준으로 상황을 분할하거나 수형도로 일일이 관찰한다. (대상을 기준)
- 벤 다이어그램으로 영역을 구분했을 때, 영역에 들어가는 원소의 개수를 기준으로 상황을 분할한다. (개수로 분류)

2. 유한집합의 원소의 수 : 집합의 관점 VS 경우의 수 관점





- $n(A \cup B \cup C)$
  $= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$
  집합에서 흔히 배우는 공식이다.

- $n(A \cup B \cup C) = n(A \cup B) + n(A \cup B$가 아닌 $C)$
  최대한 공통된 부분이 없도록 상황을 분할해서 세는 것이 경우의 수의 본질이다.

048 이해를 위한 예제

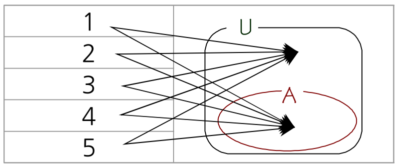
다음 조건을 만족하는 집합의 개수를 구하여라.

(1) $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 부분집합의 개수

(2) $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 부분집합의 개수 중 2는 반드시 포함하고, 3은 포함하지 않는 부분집합의 개수

(1) $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 부분집합의 개수

$\boxed{\text{전체 상황}}$: (수형도) 원소가 들어가는 모든 경우를 수형도로 표시

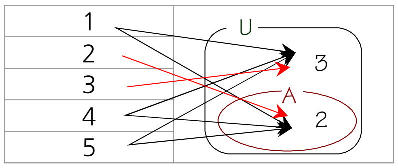


: 원소에 각각에 대하여 2가지씩 다른 경우의 수가 발생

$$n(\text{전체}) = 2\times2\times2\times2\times2 = 2^5$$

(2) $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 부분집합의 개수 중 2는 반드시 포함하고, 3은 포함하지 않는 부분집합의 개수

$\boxed{\text{전체 상황}}$: (대상을 기준) 원소가 들어가는 모든 경우를 수형도로 표시

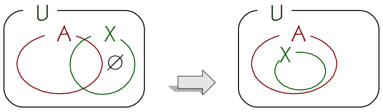


2와 3의 위치는 결정되었고 (굳이 따지자면 경우의 수는 한 가지) 남은 1, 4, 5를 각 영역에 배치하는 경우의 수를 따진다.

$$n(\text{전체}) = 2\times1\times1\times2\times2 = 2^3$$

049 이해를 위한 예제

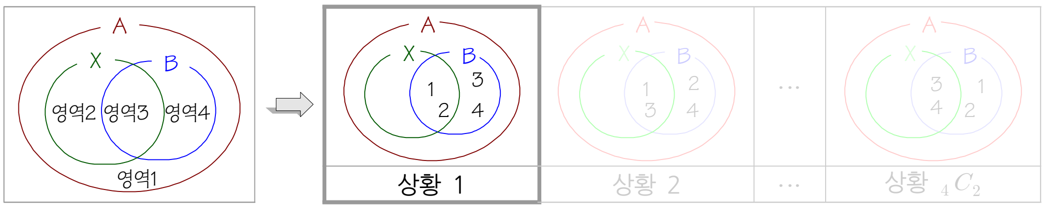
집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 $X\cap A^c=\phi$, $n(X\cap B)=2$를 만족시키는 집합 X의 개수를 구하여라.



$X\cap A^c=\phi$: : (전체집합이 나오진 않았지만 있다고 가정했다.) 벤다이어그램을 해석한다.

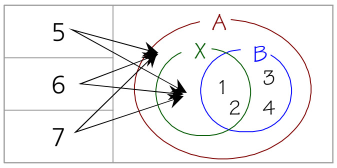
$n(X\cap B)=2$: B는 어차피 A의 부분집합이다.

전체 상황 : (자리를 기준) <영역3> 자리에 집합 B의 원소 1, 2, 3, 4 중 뭔가 2개가 들어간다.



$n(\text{전체})\ =\ {}_4C_2\ \times n(\text{상황}1)$ (하나만 세서 곱한다. / <영역3>에 들어가 원소가 결정되면 <영역4>에 들어갈 원소는 자동결정)

상황 1 : (수형도) 원소가 들어가는 모든 경우를 수형도로 표시



: $n(\text{상황}1)\ =\ 2\times 2\times 2$

남은 숫자 $5, 6, 7$이 들어갈 수 있는 영역은 <영역1>과 <영역2>이다.

만약 5, 6, 7이 <영역3>이나 <영역4>에 들어가면 $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$라는 조건을 위배하게 된다.

$n(\text{전체})\ =\ {}_4C_2\times 2\times 2\times 2\ =\ 48$

공부는 예제를 가지고 하는 거야

일단 풀고 맞았다고 하더라도 뒤의 해설을 정독하여 읽는다. 왜냐하면 풀이과정이 암기되어서 문제가 그냥 풀리거나 그냥 직관적으로 판단이 되어서 문제가 풀리는 경우도 많기 때문이다. 우리가 문제를 푸는 이유는 앞에서 배운 개념을 확인하기 위해서다. 이 문제를 푸는 것이 중요한 게 아니라 다른 어려운 문제에 까지 적용할 수 있는 개념을 익히는 게 중요한 것이다.

예제 013

2007. 11. 가형(74%), 나형(53%). 25번. 4점

서로 다른 5종류의 체험 프로그램을 운영하는 어느 수련원이 있다. 이 수련원의 프로그램에 참가한 A와 B가 각각 5종류의 체험 프로그램 중에서 2종류를 선택하려고 한다. A와 B가 선택하는 2종류의 체험 프로그램 중에서 한 종류만 같은 경우의 수를 구하시오.

예제 014

2007. 11. 나형(82%). 9번. 3점

1부와 2부로 나누어 진행하는 어느 음악회에서 독창 2팀, 중창 2팀, 합창 3팀이 모두 공연할 때, 다음 두 조건에 따라 7팀의 공연 순서를 정하려고 한다.

(가) 1부에는 독창, 중창, 합창 순으로 3팀이 공연한다.
(나) 2부에는 독창, 중창, 합창, 합창 순으로 4팀이 공연한다.

이 음악회의 공연 순서를 정하는 방법의 수는?

① 18　② 20　③ 22　④ 24　⑤ 26

예제 015

2010. 9. 나형(87%). 27번. 3점

지수는 다음 규칙에 따라 월요일부터 금요일까지 5일 동안 하루에 한 가지씩 운동을 하는 계획을 세우려 한다.

(가) 5일 중 3일을 선택하여 요가를 한다.
(나) 요가를 하지 않는 2일 중 하루를 선택하여 수영, 줄넘기 중 한 가지를 하고,
남은 하루는 농구, 축구 중 한 가지를 한다.

지수가 세울 수 있는 계획의 가짓수는?

① 50 ② 60 ③ 70 ④ 80 ⑤ 90

예제 016

2009. 7. 나형(70%). 16번. 4점

A 대학교에서는 수시 입학 전형을 위한 입학사정관을 선정하기 위하여 공모한 결과 남자 5명과 여자 3명이 응모하였다. 남녀 혼성으로 4명의 입학사정관을 선정하여 4가지 업무를 한 가지씩 4명에게 모두 배정하는 경우의 수는?

① 1080 ② 1200 ③ 1320 ④ 1440 ⑤ 1560

예제 017

1에서 6까지의 자연수를 일렬로 배열하여 첫 번째 수부터 차례로 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$이라 할 때, 조건 $a_1 > a_4$, $a_2 > a_3 > a_5$를 만족하는 순열의 수를 구하여라.

예제 018

2010. 11. 나형(81%). 18번. 3점

등식 $2\times{}_nC_3=3\times{}_nP_2$를 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오.

예제 019

${}_nP_r=272$, ${}_nC_r=136$일 때, $n+r$의 값은?

□ 16 □ 17 □ 18 □ 19 □ 20

예제 020

${}_nP_r=120$일 때, 가능한 모든 nr의 값을 구하여라.

예제 021

$1<r\leqq n$일 때, 다음 등식 ${}_{n}P_{r}={}_{n-1}P_{r}+r\cdot{}_{n-1}P_{r-1}$이 성립함을 증명하여라.

예제 022

ALMA Lab에 선생님 3명과 학생 3명이 있다. 선생님과 학생이 교대로 서는 경우의 수를 구하여라.

예제 023

남학생 5명, 여학생 4명이 한 줄로 서서 등산을 할 때, 남자가 양 끝에 서는 방법의 수를 구하여라.

예제 024

superman의 8개의 문자를 사용하여 만든 순열 중에서 s와 r사이에 3개의 문자가 들어 있는 경우의 수를 구하여라.

예제 025

2006. 9. 나형(84%). 6번. 3점

여학생 2명과 남학생 4명이 순서를 정하여 차례로 뜀틀 넘기를 할 때, 여학생 2명이 연이어 뜀틀 넘기를 하게 되는 경우의 수는?

① 120 ② 180 ③ 240 ④ 300 ⑤ 360

예제 026

서로 같은 의자 10개가 일렬로 놓여 있다. A, B, C, D 네 명이 10개의 의자 중 임의로 4개의 의자에 앉을 때, 서로 이웃하지 않게 앉는 경우의 수를 구하시오.

예제 027

2010. 6. 나형(58%). 30번. 4점

0을 한 개 이하 사용하여 만든 세 자리 자연수 중에서 각 자리의 수의 합이 3인 자연수는 $111, 120, 210, 102, 201$ 이다. 0을 한 개 이하 사용하여 만든 다섯 자리 자연수 중에서 각 자리의 수의 합이 5인 자연수의 개수를 구하시오.

예제 028

2008. 10. 나형(48%). 28번. 3점

어떤 인터넷 사이트의 회원인 철수는 자신의 회원번호를 이용하여 다음과 같은 규칙에 따라 4자리 자연수인 비밀번호를 만들려고 한다.

(가) 각 자리의 숫자는 모두 다르다.
(나) 회원번호의 각 자리에 쓰인 숫자와 0은 사용할 수 없다. 8
(다) 회원번호가 나타내는 수보다 큰 4의 배수이다.

철수의 회원번호가 6549일 때, 만들 수 있는 서로 다른 비밀번호의 개수는?

① 12　② 14　③ 16　④ 18　⑤ 20

예제 029

2005. 11. 나형(49%). 28번. 4점

1부터 30까지의 홀수 중에서 서로 다른 두 수를 선택할 때, 두 수의 합이 3의 배수가 되는 경우의 수는?

① 43　② 41　③ 39　④ 37　⑤ 35

예제 030

세 자리의 자연수 중에서 1의 자리, 10의 자리, 100의 자리 중 적어도 어느 한 자리가 3의 배수인 것의 개수를 구하여라.

예제 031

남녀 합하여 10명인 모임에서 2명의 대표를 뽑는다. 적어도 여자 1명이 포함되는 모든 경우의 수가 30가지일 때, 남자의 수는?

예제 032

2004. 9. 가형(46%), 나형(38%). 21번. 3점

3개의 증권 회사, 3개의 통신 회사, 4개의 건설 회사가 있다. 증권, 통신, 건설 각 업종별로 적어도 하나의 회사를 선택하여 총 4개의 회사에 입사원서를 내는 경우의 수를 구하시오.

예제 033

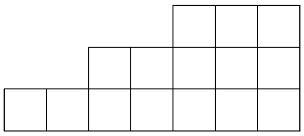
2004. 3. 가형(%). 25번. 3점

3 • 6 • 9 게임'은 참가자들이 돌아가며 자연수를 1부터 차례로 말하되 3, 6, 9가 들어가 있는 수는 말하지 않는 게임이다. 예를 들면 3, 13, 60, 369, 462, 900등은 말하지 않아야 한다. '3 • 6 • 9 게임'을 할 때, 1부터 999까지의 자연수 중 말하지 않아야 하는 수의 개수를 구하시오.

예제 034

2007. 10. 나형(50%). 7번. 4점

그림은 합동인 정사각형 15개를 연결하여 만든 도형을 나타낸 것이다. 이 도형의 선들로 이루어질 수 있는 직사각형의 개수는?

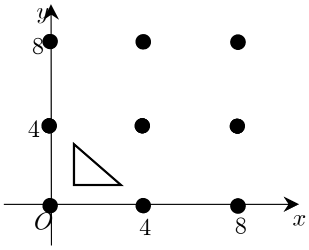


① 64 ② 68 ③ 72 ④ 76 ⑤ 80

예제 035

2010. 6. 가형(53%). 나형(47%). 17번. 4점

좌표평면 위에 9개의 점 $(i, j)(i=0, 4, 8, j=0, 4, 8)$이 있다. 이 9개의 점 중 네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형 중에서 내부에 세 점 $(1, 1), (3, 1), (1, 3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 포함하는 사각형의 개수는?



① 13 ② 15 ③ 17
④ 19 ⑤ 21

예제 036

2009. 4. 가형(31%). 24번. 4점

집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B에 대하여 $A \subset B$를 만족하는 순서쌍 (A, B)의 개수를 구하시오.

예제 013

REVIEW 전체적으로 분할적 사고를 쓰되 부분적으로 공식을 쓴다.

2007. 11. 가형(74%), 나형(53%). 25번. 4점

서로 다른 5종류의 체험 프로그램을 운영하는 어느 수련원이 있다. 이 수련원의 프로그램에 참가한 A와 B가 각각 5종류의 체험 프로그램 중에서 2종류를 선택하려고 한다. A와 B가 선택하는 2종류의 체험 프로그램 중에서 한 종류만 같은 경우의 수를 구하시오.

서로 다른 5종류의 체험 프로그램을 각각 〈가〉 〈나〉 〈다〉 〈라〉 〈마〉 라고 생각한다.

전체상황 : (개수로 분류) 공통으로 가입된 동아리의 개수를 기준으로 상황을 분할한다.

상황 1 : 같은 체험 프로그램 0개
상황 2 : 같은 체험 프로그램 1개
상황 3 : 같은 체험 프로그램 2개

개수로 분류된 경우 여사건의 아이디어를 생각할 수 있지만 이 문제는 $n(\text{상황}\,2)$만 계산하는 것이 낫다.

상황 2

	〈가〉	〈나〉	〈다〉	〈라〉	〈마〉
A	O				
B	O				

⇨

〈나〉	〈다〉	〈라〉	〈마〉
A	B		

(〈가〉를 둘 다 선택했으므로 한 개 씩만 더 선택하면 된다.)

$n(\text{상황}\,2)$를 위의 표와 같이 대응시킨다고 해 보자. 공통된 체험 프로그램이 정해지는(5가지) 각각에 대하여 남은 네 개의 프로그램 중 서로 다른 프로그램을 체험해야 한다. 즉, $n(\text{상황}\,2) = 5 \cdot {}_4P_2$

$$n(\text{상황}\,2) = 5 \cdot {}_4P_2 = 60$$

예제 014

REVIEW 배열의 상황

2007. 11. 나형(82%). 9번. 3점

1부와 2부로 나누어 진행하는 어느 음악회에서 독창 2팀, 중창 2팀, 합창 3팀이 모두 공연할 때, 다음 두 조건에 따라 7팀의 공연 순서를 정하려고 한다.

(가) 1부에는 독창, 중창, 합창 순으로 3팀이 공연한다.
(나) 2부에는 독창, 중창, 합창, 합창 순으로 4팀이 공연한다.

이 음악회의 공연 순서를 정하는 방법의 수는?

① 18 ② 20 ③ 22 ④ 24 ⑤ 26

독창 2팀, 중창 2팀, 합창 3팀이 모두 공연 - 모두 공연을 하므로 대상을 선택하는 경우의 수는 생각하지 않는다.

1부 : 독창 → 중창 → 합창
2부 : 독창 → 중창 → 합창 → 합창

: 자리가 정해져 있으므로 자리를 선택하는 경우도 생각하지 않는다.
각 팀별로 정해진 자리에 배열만 하면 된다.

독창 팀이 배열되는 $2!$ 각각에 대하여 중창 팀이 배열되는 경우의 수는 $2!$ 즉, $2! \times 2!$

이들이 배열되는 $2! \times 2!$가지 각각에 대하여 합창팀이 배열되는 경우의 수는 $3!$이다.

$$n(\text{독창 배열}) \times n(\text{중창 배열}) \times n(\text{합창 배열}) = 2! \times 2! \times 3! = 24$$

예제 015

REVIEW 〈서로 다른 것〉에서 뽑는 경우와 배열하는 경우

2010. 9. 나형(87%). 27번. 3점

지수는 다음 규칙에 따라 월요일부터 금요일까지 5일 동안 하루에 한 가지씩 운동을 하는 계획을 세우려 한다.

(가) 5일 중 3일을 선택하여 요가를 한다.
(나) 요가를 하지 않는 2일 중 하루를 선택하여 수영, 줄넘기 중 한 가지를 하고,
남은 하루는 농구, 축구 중 한 가지를 한다.

지수가 세울 수 있는 계획의 가짓수는?

① 50 ② 60 ③ 70 ④ 80 ⑤ 90

전체 상황 : (대상을 기준) 요가 3번이 어딘가는 온다.

	월	화	수	목	금
상황 1	요가	요가	요가		
상황 2	요가	요가		요가	
⋮			⋮		
상황 ${}_5C_3$			요가	요가	요가

: $n(\text{전체}) = {}_5C_3 \times n(\text{상황}1)$ (하나만 세서 곱한다.)

상황 1 : (가능한 모든 상황) 수줄(수영 또는 줄넘기), 농축(농구 또는 축구)이 〈목〉, 〈금〉 중 하루에 배치된다.

상황 1-1	요가	요가	요가	수줄	농축
상황 1-2	요가	요가	요가	농축	수줄

: $n(\text{상황}1) = 2 \times n(\text{상황}1-1)$

$n(\text{상황}1-1)$은 〈목〉에 수영 또는 줄넘기 2가지 경우 각각에 대하여 〈금〉에 농구 또는 축구 2가지가 발생할 수 있다.

즉, $n(\text{상황}1-1) = 2 \times 2$

$$n(\text{전체}) = {}_5C_3 \times n(\text{상황}1) = {}_5C_3 \times 2 \times n(\text{상황}1-1) = {}_5C_3 \times 2 \times 2 \times 2 = 80$$

예제 016

REVIEW 〈서로 다른 것〉에서 뽑는 경우와 배열하는 경우

2009. 7. 나형(70%). 16번. 4점

A 대학교에서는 수시 입학 전형을 위한 입학사정관을 선정하기 위하여 공모한 결과 남자 5명과 여자 3명이 응모하였다. 남녀 혼성으로 4명의 입학사정관을 선정하여 4가지 업무를 한 가지씩 4명에게 모두 배정하는 경우의 수는?

① 1080 ② 1200 ③ 1320 ④ 1440 ⑤ 1560

남자 5명과 여자 3명 / 남녀 혼성으로 4명의 입학사정관을 선정: 입학사정관이 선정되는 상황을 대상의 수로 분류할 수 있다.

전체상황 : (개수로 분류) 선정된 대상의 수로 상황을 분류한다. (남녀 혼성이 되려면 상황1은 안 된다.)

상황 1 : 남 4명 여 0명
상황 2 : 남 3명 여 1명
상황 3 : 남 2명 여 2명
상황 4 : 남 1명 여 3명

: **여사건의 아이디어** $n(\text{상황}2)+n(\text{상황}3)+n(\text{상황}4)$ 보다 $n(\text{전체})-n(\text{상황}1)$이 낫다.

$$n(\text{전체})-n(\text{상황}1) = {}_8C_4 - {}_5C_4$$

$n(\text{전체})-n(\text{상황}1)$의 각각에 대하여 4가지 업무를 한 가지씩 4명에게 모두 배정하는 경우의 수는 $4!$가지이다.

$$n(\text{문제의 조건}) = \{n(\text{전체})-n(\text{상황}1)\} \times 4! = 65 \times 4! = 1560$$

예제 017

REVIEW 조합과 자동배열의 상황

1에서 6까지의 자연수를 일렬로 배열하여 첫 번째 수부터 차례로 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$이라 할 때, 조건 $a_1 > a_4$, $a_2 > a_3 > a_5$를 만족하는 순열의 수를 구하여라.

전체상황 : (자리를 기준) a_1과 a_4에 뭔가의 자연수는 들어간다.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
상황 1	2			1		
상황 2	3			1		
⋮				⋮		
상황 ${}_6C_2$	6			5		

: $n(\text{전체}) = {}_6C_2 \times n(\text{상황}\,1)$ (하나만 세서 곱한다.)

상황 1 : (자리를 기준) a_2, a_3, a_5에도 남은 3,4,5,6 중 뭔가의 자연수는 들어간다.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
상황 1-1	2	5	4	1	3	
상황 1-2	2	6	4	1	3	
상황 1-3	2	6	5	1	3	
상황 1-${}_4C_3$	2	6	5	1	4	

: $n(\text{상황}\,1) = {}_4C_3 \times n(\text{상황}\,1-1)$ (하나만 세서 곱한다.)

$n(\text{상황}\,1-1)$은 a_6에 남은문자가 자동으로 배열되는 경우의 수이므로 1가지이다.

$$n(\text{전체}) = {}_6C_2 \times n(\text{상황}\,1) = {}_6C_2 \times {}_4C_3 \times n(\text{상황}\,1-1) = {}_6C_2 \times {}_4C_3 \times 1 = 60$$

예제 018

REVIEW 순열과 조합의 수식적 활용 : 계산식 + 순열과 조합으로 표현된 방정식 : 약분의 확신

2010. 11. 나형(81%). 18번. 3점

등식 $2 \times {}_nC_3 = 3 \times {}_nP_2$를 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오.

약분을 통해 최대한 간단하게 만든 후 푼다.

1 단계 : 준범체 식변자 - 준 식의 범위를 체크하면 식 변형에 자유롭다.

준 식 $2 \times {}_nC_3 = 3 \times {}_nP_2$ 에서 $n \geq 3$라는 사실을 알 수 있다.

2 단계 : 계산식 - 계산식으로 식을 정리한다.

$$\Rightarrow \quad 2 \times {}_nC_3 = 3 \times {}_nP_2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = 3n(n-1) \quad \Leftrightarrow \quad n(n-1)(n-2) = 9n(n-1)$$

3 단계 : 0이 아니라는 확신이 약분을 가능케 한다. 즉, $n \geq 3$에 의하여 n과 $(n-1)$은 0이 아니므로 약분할 수 있다.

$$\cancel{n(n-1)}(n-2) = 9\cancel{n(n-1)} \quad \Leftrightarrow \quad n-2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad n = 11$$

$$n = 11$$

예제 019

REVIEW 순열과 조합의 수식적 활용 : 계산식 + 순열과 조합으로 표현된 방정식 : 소인수분해와 추론

${}_nP_r=272$, ${}_nC_r=136$일 때, $n+r$의 값은?

□ 16 □ 17 □ 18 □ 19 □ 20

1 단계 : ${}_nP_r=272$, ${}_nC_r=136$에서 ${}_nC_r = 136$의 양변에 $r!$을 곱하면 ${}_nC_r\times r! = 136\times r!$ ⇔ ${}_nP_r = 136\times r!$이다.

그런데 ${}_nP_r = 272$이므로 $272 = 136\times r!$이다, 즉, $r = 2$이다.

2 단계 : ${}_nP_2 = 272$에서 272을 소인수분해하면 $2^4\times17$이다. ${}_nP_2$은 n부터 시작하여 2개의 연속된 자연수의 곱이므로

$2^4\times17 = 17\times16$이다. 즉, $n = 17$이다. $n+r = 19$

⋮

아마도 이렇게 풀라고 낸 문제인 듯하다. 하지만

${}_nP_r=272$ 에서 272을 소인수분해하면 $2^4\times17$이고 ${}_nP_r$은 어쨌든 연속된 자연수의 곱이다. 그런데 $2^4\times17$을 연속된 자연수의 곱의 형태로 만들기 위해선 17×16밖에 없다.

그러므로 ${}_nC_r=136$에 상관없이 ${}_nP_r=272$만으로 $n = 17$, $r = 2$이다.

$n+r = 19$

예제 020

REVIEW 순열과 조합의 수식적 활용 : 계산식 + 순열과 조합으로 표현된 방정식 : 소인수분해와 추론

${}_nP_r=120$일 때, 가능한 모든 nr의 값을 구하여라.

${}_nP_r$은 어쨌든 연속된 자연수의 곱이다. 120을 소인수 분해하면 $5\times3\times2^3$이다.

몇 가지를 추론해 보면 (예를 들어 ‘7은 나올 수 없다.’라는 걸 파악하면 8로 시작해서 1씩 작아지면서 곱할 수 없다.)

결국 다음의 네 가지만 존재할 수 있다. ‘자연수’이기 때문에 추론이 가능한 것이다.

$120 = 6\times5\times4$ ⇨ ${}_6P_3$

$= 5\times4\times3\times2$ ⇨ ${}_5P_4$

$= 5\times4\times3\times2\times1$ ⇨ ${}_5P_5$

$= 120$ ⇨ ${}_{120}P_1$

모든 nr의 값은 18, 20, 25, 120이다.

예제 021

REVIEW 순열과 조합의 수식적 활용 : 정의식

$1<r\leq n$일 때, 다음 등식 ${}_nP_r={}_{n-1}P_r+r\cdot{}_{n-1}P_{r-1}$이 성립함을 증명하여라.

좌변과 우변을 <정의식>을 통해서 표현한 다음 같다는 사실을 확인한다.

$$\text{좌변} = {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\begin{aligned}\text{우변} &= {}_{n-1}P_r + r\cdot{}_{n-1}P_{r-1} = \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!} + r\times\frac{(n-1)!}{(n-r)!} = \frac{(n-r)}{(n-r)}\times\frac{(n-1)!}{(n-r-1)!} + r\times\frac{(n-1)!}{(n-r)!}\\ &= \frac{(n-r)(n-1)!}{(n-r)!} + \frac{r(n-1)!}{(n-r)!} = \frac{r(n-1)!+(n-r)(n-1)!}{(n-r)!}\\ &= \frac{\{r+(n-r)\}(n-1)!}{(n-r)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}\end{aligned}$$

● 부분을 비교해보면 $(n-r)!=(n-r)\times(n-r-1)!$이므로 왼쪽 식의 분모와 분자에 각각 $(n-r)$을 곱해서 $(n-r)!$으로 통분 시킬 수 있다.

모든 nr의 값은 $18,\ 20,\ 25,\ 120$이다.

예제 022

REVIEW 여러 가지 배열의 상황 - 교대배열

ALMA Lab에 선생님 3명과 학생 3명이 있다. 선생님과 학생이 교대로 서는 경우의 수를 구하여라.

전체상황 : (배열 전 모든 상황) 배열 전 나올 수 있는 모든 상황으로 분할

상황 1	선	학	선	학	선	학
상황 2	학	선	학	선	학	선

: $n(\text{전체})=2\times n(\text{상황}1)$ (하나만 세서 곱한다.)

$n(\text{상황}1)$은 선생님 3명을 배열하는 $3!$가지 각각에 대하여 학생 3명을 배열하는 $3!$가지 경우의 수가 발생한다.

즉, $n(\text{상황}1)=3!\times3!$

$$n(\text{전체})=2\times n(\text{상황}1)=2\times3!\times3!$$

예제 023

REVIEW 여러 가지 배열의 상황 - 양끝 배열

남학생 5명, 여학생 4명이 한 줄로 서서 등산을 할 때, 남자가 양 끝에 서는 방법의 수를 구하여라.

남자를 A, B, C, D, E 여자를 a, b, c, d라고 하자.

전체상황 : (자리를 기준) 양 끝에 남자 중 누군가는 온다.

상황 1	A	⋯	B
상황 2	B	⋯	A
⋮	⋮		
상황 ${}_3P_2$	C	⋯	A

: $n(\text{전체})={}_5P_2\times n(\text{상황}1)$ (하나만 세서 곱한다.)

$n(\text{상황}1)$은 남은 7명을 배열하는 경우의 수이므로 $7!$이다.

$$n(\text{전체})={}_5P_2\times n(\text{상황}1)={}_5P_2\times7!=100800$$

예제 024

REVIEW 여러 가지 배열의 상황 - 덩어리 배열

superman의 8개의 문자를 사용하여 만든 순열 중에서 s와 r사이에 3개의 문자가 들어 있는 경우의 수를 구하여라.

풀이 1) 방식을 알고 풀기 : 덩어리 배열

$$\boxed{s\bigcirc\bigcirc\bigcirc r}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$$

1단계 : $\boxed{s\bigcirc\bigcirc\bigcirc r}$를 하나의 덩어리로 생각한다.

2단계 : 덩어리 내부에서 배열되는 경우를 먼저 생각한다. s와 r사이에 들어가 3개의 대상을 뽑아 배열하는 각각에 대하여 s와 r도 배열하는 경우 2가지가 발생한다. ⇨ ${}_6P_3 \times 2!$

3단계 : 2단계에 해당하는 각각에 대하여 덩어리를 통째로 배열하는 $4!$가지의 경우가 발생한다.

$$n(\text{전체}) = {}_6P_3 \times 2! \times 4! = 5760$$

풀이 2) 일일이 상황을 나누는 것도 절대 어렵지 않다.

$\boxed{\text{전체상황}}$: (대상을 기준) s, r 이 조건에 맞게 어딘가에는 온다.

상황 1	s				r			
상황 2		s				r		
상황 3			s				r	
상황 4				s				r

: $n(\text{전체}) = 4 \times n(\text{상황}1)$

$n(\text{상황}1)$은 s와 r을 자리 바꾸는 2가지 각각에 대하여 나머지 6개의 문자를 배열하는 $6!$가지 경우의 수가 발생한다.

즉, $n(\text{상황}1) = 2 \times 6!$

$$n(\text{전체}) = 4 \times n(\text{상황}1) = 4 \times 2 \times 6! = 5760$$

예제 025

REVIEW 여러 가지 배열의 상황 - 덩어리 배열

2006. 9. 나형(84%). 6번. 3점

여학생 2명과 남학생 4명이 순서를 정하여 차례로 뜀틀 넘기를 할 때, 여학생 2명이 연이어 뜀틀 넘기를 하게 되는 경우의 수는?

① 120　② 180　③ 240　④ 300　⑤ 360

남학생을 A, B, C, D 여학생을 a, b라고 하자.

$$\boxed{a\ b}\boxed{A}\boxed{B}\boxed{C}\boxed{D}$$

1단계 : $\boxed{a\ b}$를 하나의 덩어리로 생각한다.

2단계 : $\boxed{a\ b}\boxed{A}\boxed{B}\boxed{C}\boxed{D}$의 다섯 덩어리를 배열하는 $5!$가지 각각에 대하여 $\boxed{a\ b}$ 덩어리 내부에서 배열되는 $2!$가지

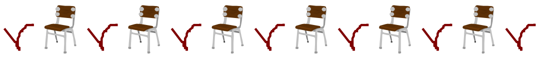
$$n(\text{전체}) = 5! \times 2!$$

예제
026

REVIEW 여러 가지 배열의 상황 - 이웃하지 않게 배열

서로 같은 의자 10개가 일렬로 놓여 있다. A, B, C, D 네 명이 10개의 의자 중 임의로 4개의 의자에 앉을 때, 서로 이웃하지 않게 앉는 경우의 수를 구하시오.

4명이 각자 의자를 가지고 움직인다고 생각한다.



서로 같은 의자 10개 - 여기에서 는 모두 같기 때문에 배열을 고려하지 않는다.

결국 A, B, C, D는 각자 의자를 가지고 ✓ 중 아무 자리나 한 자리씩 선택하여 들어가면 자동으로 이웃하지 않게 되는 모든 경우가 고려된다.

$$n(\text{전체}) = {}_7P_4 = 840$$

예제
027

REVIEW 정수론 - 숫자 0의 활용

2010. 6. 나형(58%). 30번. 4점

0을 한 개 이하 사용하여 만든 세 자리 자연수 중에서 각 자리의 수의 합이 3인 자연수는 $111, 120, 210, 102, 201$이다. 0을 한 개 이하 사용하여 만든 다섯 자리 자연수 중에서 각 자리의 수의 합이 5인 자연수의 개수를 구하시오.

전체상황 (개수로 분류) 0이 사용되는 개수로 분류한다.

상황 1 : 0이 빵 개
상황 2 : 0이 한 개
상황 3 : 0이 두 개
상황 4 : 0이 세 개
상황 5 : 0이 네 개

여사건의 아이디어 를 고려해 보지만 그냥 주어진 사건을 그대로 세는 게 더 편하다.

즉, $n(\text{문제의 조건}) = n(\text{상황}1) + n(\text{상황}2)$

다섯 자리 자연수 중에서 각 자리의 수의 합이 5인 자연수의 개수 에 의하여

$n(\text{상황}1)$은 $\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}$ 한 가지 밖에 없다. ⇨ $n(\text{상황}1) = 1$

$n(\text{상황}2)$는 $\boxed{2}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{0}$과 같이 2 한 번에 1이 3번 사용될 수밖에 없다.

상황 2 (대상을 기준) 0이 어딘가는 들어간다.

상황 2-1 : $\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{0}$
상황 2-2 : $\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{0}\boxed{\ }$
상황 2-3 : $\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{0}\boxed{\ }\boxed{\ }$
상황 2-4 : $\boxed{\ }\boxed{0}\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }$

: $n(\text{상황}2) = 4 \times n(\text{상황}2-1)$

남은 구분이 가는 네 자리 동일한 2, 1, 1, 1을 배열하는 경우이므로 경우의 수적 본질이 같은 상황이다.

즉, 분할된 상황의 경우의 수가 같다고 판단되므로 하나만 세서 곱한다.

0은 첫 번째 자리에 올 수 없다.

$n(\text{상황}2-1)$은 네 자리 중 2가 들어갈 한자리를 정하는 경우의 수와 같으므로 ${}_4C_1$ (1은 자동배열 된다.)

$$n(\text{문제의 조건}) = n(\text{상황}1) + n(\text{상황}2) = 1 + 4 \cdot n(\text{상황}2-1) = 1 + 4 \cdot {}_4C_1 = 17$$

예제 028

REVIEW 정수론 - 배수판정법

2008. 10. 나형(48%). 28번. 3점

어떤 인터넷 사이트의 회원인 철수는 자신의 회원번호를 이용하여 다음과 같은 규칙에 따라 4자리 자연수인 비밀번호를 만들려고 한다.

(가) 각 자리의 숫자는 모두 다르다.
(나) 회원번호의 각 자리에 쓰인 숫자와 0은 사용할 수 없다. - 쓸 수 있는 수 : 1, 2, 3, 7, 8
(다) 회원번호가 나타내는 수보다 큰 4의 배수이다. - 6549보다 크다 + 4의 배수 판정법

철수의 회원번호가 6549일 때, 만들 수 있는 서로 다른 비밀번호의 개수는?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

전체상황 (자리를 기준) 천의 자리에 뭔가 숫자는 들어간다. (6549보다 커야 하므로 7, 8밖에 없다.)

상황 1 :	7			
상황 2 :	8			

: $n(\text{전체}) = n(\text{상황}1) + n(\text{상황}2)$

4의 배수 + 각 자리의 숫자는 모두 다르다. 때문에 (상황1)과 (상황2)는 경우의 수적 본질이 같은 상황이라고 판단되지 않는다. (첫 자리에 사용된 숫자는 사용할 수 없기 때문에 끝의 두 자리에 4의 배수가 발생하는 가짓수가 달라질 수 있다.)

상황 1 (자리를 기준) 끝의 두 자리

상황 1-1 :	7		1	2
상황 1-2 :	7		2	8
상황 1-3 :	7		3	2

: $n(\text{상황}1) = 2 \times 3$

상황 2 (자리를 기준)

상황 2-1 :	8		1	2
상황 2-2 :	8		3	2
상황 2-3 :	8		7	2

: $n(\text{상황}2) = 2 \times 3$

4의 배수 판정법은 <끝의 두 자리가 00 or 4의 배수>이면 된다.
(상황1)은 7을 제외한 1, 2, 3, 8 중 두 개의 숫자를 이용하여 만들 수 있는 모든 4의 배수를 나열한 것.
(상황2)는 8을 제외한 1, 2, 3, 7 중 두 개의 숫자를 이용하여 만들 수 있는 모든 4의 배수를 나열한 것.

$$n(\text{전체}) = n(\text{상황}1) + n(\text{상황}2) = 2 \times 3 + 2 \times 3 = 12$$

코칭 결과적으로는 $n(\text{상황}1)$과 $n(\text{상황}2)$가 같은 경우의 수가 나왔지만 <경우의 수적 본질이 같은 상황>이라고 판단되지 않기 때문에 더하는 판단이 옳다.

코칭 (상황1)에서 끝자리가 4의 배수가 되는 경우는 모든 경우를 꼼꼼히 세야 한다. 수형도를 이용해도 되고 작은 수부터 차례로 나열 해봐도 된다. 즉, 12, 13, 18, 21, 23, 28, 31, 32, 38, 81, 82, 83
어쨌든 빠짐없이 고려했다는 확신이 있어야 한다.

예제
029

REVIEW 정수론 - 정수분류법 : 나머지 기준

2005. 11. 나형(49%). 28번. 4점

1부터 30까지의 홀수 중에서 서로 다른 두 수를 선택할 때, 두 수의 합이 3의 배수가 되는 경우의 수는?

① 43 ② 41 ③ 39 ④ 37 ⑤ 35

1부터 30까지의 홀수 중에서 서로 다른 두 수 - 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29 (15개)

두 수의 합이 3의 배수 - 합이 3의 배수인 수를 찾기 위해 15개의 홀수를 3으로 나눈 나머지를 기준으로 분류해야 한다.

〈정수 분류법 : 나머지 기준〉

〈분류1〉 $3k$	3, 9, 15, 21, 27
〈분류2〉 $3k+1$	1, 7, 13, 19, 25
〈분류3〉 $3k+2$	5, 11, 17, 23, 29

(아래 자연수의 주기성을 참조해라.)

두 수의 합이 3의 배수 - 3으로 묶었을 때 남는 게 없는 수이다. 기준을 정해서 일일이 확인한다.

전체상황 : (배열 전 모든 상황) 기준을 정해서 일일이 확인 ⇨ 같은 분류의 두 수 / 다른 분류의 두 수

상황 1 : 〈분류1〉 + 〈분류1〉
상황 2 : 〈분류2〉 + 〈분류3〉

: $n(\text{전체}) = n(\text{상황}1) + n(\text{상황}2)$ (분할된 상황의 경우의 수가 같지 않다고 판단)

〈분류1의 두 수〉, 〈분류2의 두 수〉, 〈분류3의 두 수〉, 〈분류1+분류2〉, 〈분류1+분류3〉, 〈분류2+분류3〉
보다시피 6가지 밖에 되지 않는다. 서로 다른 두 수를 더해서 3으로 묶이는지 확인하는 것은 일일이 할 수밖에 없다.

$n(\text{상황}1) = {}_5C_2$, $n(\text{상황}2) = {}_5C_1 \times {}_5C_1$

$$n(\text{전체}) = n(\text{상황}1) + n(\text{상황}2) = {}_5C_2 + {}_5C_1 \times {}_5C_1 = 35$$

티칭 자연수의 주기성에 대하여 (간략히) : 나머지가 같은 수들

연속된 자연수를 생각할 때, 홀수는 2를 기준으로 돌아온다. 이런 경우, 주기가 2라고 생각할 수 있다.
마찬가지로 3의 배수는 3를 기준으로 돌아온다. 이런 경우, 주기가 3이라고 생각할 수 있다.
⇨ 3의 배수이면서 홀수인 수는 〈주기가 2〉 이면서 〈주기가 3〉인 수가 되어야 하므로 〈주기가 6〉인 수이다.
즉, 최초로 만족하는 수를 찾았다면 그 수 이후로는 6씩 더해 가면서 만족하는 모든 자연수를 찾을 수 있다.

예제 030

REVIEW 여사건의 아이디어 (적어도가 있으면 여사건)

세 자리의 자연수 중에서 1의 자리, 10의 자리, 100의 자리 중 적어도 어느 한 자리가 3의 배수인 것의 개수를 구하여라.

세 자리의 자연수 - 이것 외에 다른 조건이 없으므로 같은 수도 들어갈 수 있다. 111도 세자리 자연수이기 때문이다.

적어도 어느 한 자리가 3의 배수 - 이 조건에 따라 정수를 분류한다.

각 자리에 들어갈 수 있는 0~9까지의 정수를 3의 배수와 그 외의 수로 분류하면 다음과 같다.

<분류1> 3의 배수	0, 3, 6, 9
<분류2> 3의 배수가 아닌 수	1, 2, 4, 5, 7, 8

전체상황 (개수로 분류) 3의 배수의 개수로 분류한다.

상황 1 : 3의 배수 0개
상황 2 : 3의 배수 1개
상황 3 : 3의 배수 2개
상황 4 : 3의 배수 3개

여사건의 아이디어 : n(문제의 조건) $=$ n(전체) $-$ n(상황1)이 효율적이다.

n(전체)는 □□□에 0~9까지 자연수를 이용하여 만들 수 있는 세자리 자연수이므로 곱의 법칙으로 간단히 셀 수 있다.

n(전체) $= 9\times10\times10$ 백의 자리에 0이 들어갈 수 없으므로 처음에 9가지를 곱했다.

n(상황1) $= 6\times6\times6$

n(문제의 조건) $=$ n(전체) $-$ n(상황1) $= 9\times10\times10 - 6\times6\times6 = 684$

예제 031

REVIEW 여사건의 아이디어 (적어도가 있지만 그게 그거)

남녀 합하여 10명인 모임에서 2명의 대표를 뽑는다. 적어도 여자 1명이 포함되는 모든 경우의 수가 30가지일 때, 남자의 수는? - 간단한 순열 · 조합 방정식을 푼다.

- 남자의 수를 x라 두면 여자의 수는 $10-x$이다.

전체상황 : (개수로 분류) 남자와 여자의 수를 기준으로 상황을 분할한다.

상황 1 : 남 2, 여 0
상황 2 : 남 1, 여 1
상황 3 : 남 0, 여 2

풀이 1) $n(\text{상황}2) + n(\text{상황}3) = 30 \Leftrightarrow {}_xC_1\cdot{}_{10-x}C_1 + {}_{10-x}C_2 = 30 \Leftrightarrow x(10-x) + \dfrac{(10-x)(9-x)}{2} = 30$

$\Leftrightarrow x^2-x-30 = 0 \Leftrightarrow (x-6)(x+5) = 0 \Leftrightarrow x = -5$ 또는 $x = 6$이다.

풀이 2) $n(\text{전체}) - n(\text{상황}1) = 30 \Leftrightarrow {}_{10}C_2 - {}_xC_2 = 30 \Leftrightarrow {}_xC_2 = 15 \Leftrightarrow {}_xC_2\cdot2! = 15\cdot2!$

$\Leftrightarrow {}_xP_2 = 30 \Leftrightarrow {}_xP_2 = 6\cdot5 \Leftrightarrow x = 6$이다.

$x = 6$

예제 032

REVIEW 여사건의 아이디어 (적어도에서 많이 발생하는 오류) + **뽑기의 오류 : 동동연 배고려**

2004. 9. 가형(46%), 나형(38%). 21번. 3점

3개의 증권 회사, 3개의 통신 회사, 4개의 건설 회사가 있다. 증권, 통신, 건설 각 업종별로 적어도 하나의 회사를 선택하여 총 4개의 회사에 입사원서를 내는 경우의 수를 구하시오.

3개의 증권 회사, 3개의 통신 회사, 4개의 건설 회사 - 증권 3사를 각각 J_1, J_2, J_3, 통신 3사를 각각 T_1, T_2, T_3
건설 4사를 각각 K_1, K_2, K_3, K_4라고 해보자.

적어도 하나의 회사를 선택하여 총 4개의 회사에 입사원서를 내는 경우의 수 - 적어도는 개수로 분류한다.

<개수로 분류>해서 셀 경우 ⇨ <증권2 / 통신1 / 건설1> or <증권1 / 통신2 / 건설1> or <증권1 / 통신1 / 건설2>

$n(\text{전체}) = {}_3C_2 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_4C_1 + {}_3C_1 \cdot {}_3C_2 \cdot {}_4C_1 + {}_3C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_4C_2$

$$n(\text{전체}) = {}_3C_2 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_4C_1 + {}_3C_1 \cdot {}_3C_2 \cdot {}_4C_1 + {}_3C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_4C_2 = 36 + 36 + 54 = 126$$

티칭 미리 뽑아놓고 생각하는 것에서 생기는 오차를 관찰해본다.

⇨ <증권1개 → 통신1개 → 건설1개 → 남은 7개 중 1개>을 뽑으면 ${}_3C_2 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_4C_1 \cdot \boxed{{}_7C_1}$

○은 증권 or 통신 or 건설사 중 하나가 뽑히는 경우를 포함한다. 구체적 상황을 관찰해보면 아래 표와 같다.

<증권2 / 통신1 / 건설1>		
J_1, J_2, T_1, K_1이 뽑힌 경우	$J_1 \to T_1 \to K_1 \to J_2$	$J_2 \to T_1 \to K_1 \to J_1$
⋮	⋮	⋮

<증권1 / 통신2 / 건설1>		
J_1, T_1, T_2, K_1이 뽑힌 경우	$J_1 \to T_1 \to K_1 \to T_2$	$J_2 \to T_2 \to K_1 \to T_1$
⋮	⋮	⋮

<증권1 / 통신1 / 건설2>		
J_1, T_1, K_1, K_2이 뽑힌 경우	$J_1 \to T_1 \to K_1 \to K_2$	$J_2 \to T_1 \to K_2 \to K_1$
⋮	⋮	⋮

예측하건대 각각에 대하여 1가지로 세야 하는 것을 2가지로 셌기 때문에

${}_5C_2 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_6C_1$에 2을 나눠서 ${}_3C_2 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_4C_1 + {}_3C_1 \cdot {}_3C_2 \cdot {}_4C_1 + {}_3C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_4C_2$을 표현할 수 있다.

티칭 **뽑기의 오류 : 동동연 배고려** : 공식이 아니다. 오류가 발생할 수 있음을 인지하라는 것.

<증권1개 → 통신1개 → 건설1개 → 남은 7개 중 1개>을 뽑으면 결국 동일집단에서 동일개수(1개)가 연속적으로(2번) 뽑는 일이 발생하므로 동일집단에서 뽑힌 2개의 회사끼리 배열되는 경우가 자동으로 고려된다.

예제 033

REVIEW 여사건의 아이디어 (적어도가 없지만 여사건)

2004. 3. 가형(%). 25번. 3점

$3 \cdot 6 \cdot 9$ 게임'은 참가자들이 돌아가며 자연수를 1부터 차례로 말하되 3, 6, 9가 들어가 있는 수는 말하지 않는 게임이다. 예를 들면 3, 13, 60, 369, 462, 900등은 말하지 않아야 한다. '$3 \cdot 6 \cdot 9$ 게임'을 할 때, 1부터 999까지의 자연수 중 말하지 않아야 하는 수의 개수를 구하시오.

하나하나 확인 하면서 순열 · 조합의 공식으로 한 번에 셀 수 없다는 것을 느꼈으면 된다.

전체상황 (개수로 분류) <3,6,9>가 포함된 개수로 분류

상황 0 : 3,6,9 가 0개
상황 1 : 3,6,9 가 1개
상황 2 : 3,6,9 가 2개
상황 3 : 3,6,9 가 3개

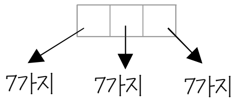
여사건의 아이디어 $n(\text{문제의 조건}) = n(\text{전체}) - n(\text{상황}0)$이 효율적이다.

$n(\text{전체})$는 1부터 999까지 자연수이므로 999개이다.

$n(\text{상황}0)$은 0, 1, 2, 4, 5, 7, 8 총 7개의 숫자를 가지고 만들 수 있는 <세 자리 이하의 자연수이다.>

⇨ 0을 차수가 가장 높은 자리에 두고 다른 자연수와 일대일대응 시킨다.

즉, 001, 002, 004, ⋯, 010, 011, ⋯, 100, 101, ⋯, 888와 같이 숫자를 배열하는 경우의 수를 구한다.



그런데 000은 숫자 0에 대응하기 때문에 자연수가 아니므로 1가지는 빼야 한다. ⇨ $n(\text{상황}0) = 7 \times 7 \times 7 - 1$

$$n(\text{문제의 조건}) = n(\text{전체}) - n(\text{상황}0) = 999 - (7^3 - 1) = 657$$

코칭 이처럼 <적어도>라는 말이 없어도 여사건이 효율적인 경우도 많이 있다.
<3,6,9>에서 삼의 배수라는 표현을 쓰지 않은 것은 0이 빠졌기 때문이다.

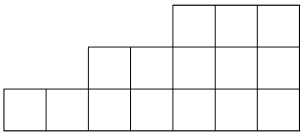
예제 034

REVIEW 도형의 개수 + 집합과 경우의 수의 아이디어

2007. 10. 나형(50%). 7번. 4점

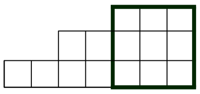
그림은 합동인 정사각형 15개를 연결하여 만든 도형을 나타낸 것이다.
이 도형의 선들로 이루어질 수 있는 직사각형의 개수는?

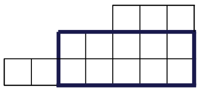
① 64　② 68　③ 72　④ 76　⑤ 80

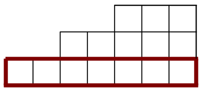


집합적 아이디어

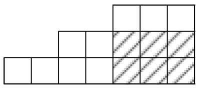
상황을 집합으로 생각해본다.

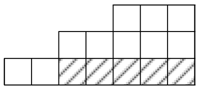

〈집합 A〉

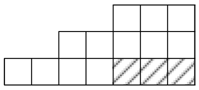

〈집합 B〉

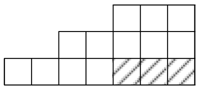

〈집합 C〉

각 집합 안에 있는 모든 직사각형을 더할 경우 여러 번 세지는 경우가 생긴다.


집합 $A\cap B$


집합 $B\cap C$


집합 $C\cap A$


집합 $A\cap B\cap C$

그래서 우리는 고1 때 배웠던 유한집합의 원소의 수를 세는 공식을 이용한다.

$$\begin{aligned} n(A\cup B\cup C) &= n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C) \\ &= {}_4C_2\cdot{}_4C_2+{}_3C_2\cdot{}_6C_2+{}_2C_2\cdot{}_8C_2-{}_4C_2\cdot{}_3C_2-{}_2C_2\cdot{}_6C_2-{}_2C_2\cdot{}_4C_2+{}_2C_2\cdot{}_4C_2 \\ &= 36+45+28-18-15-6+6=76 \end{aligned}$$

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)=76$$

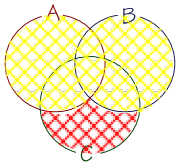
경우의 수적 아이디어

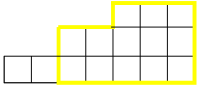
$n(A\cup B\cup C)=n(A\cup B)+n(A\cup B$가 아닌 $C)$으로 세보면

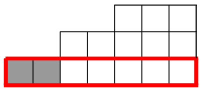
$=n(A)+n(B)-n(A\cap B)+n(A\cup B$가 아닌 $C)$

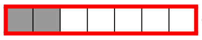
$={}_4C_2\cdot{}_4C_2+{}_3C_2\cdot{}_6C_2-{}_4C_2\cdot{}_3C_2+n(A\cup B$가 아닌 $C)$

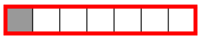
$=36+45-18+n(A\cup B$가 아닌 $C)$　여기에서 $n(A\cup B$가 아닌 $C)$은 일일이 센다.

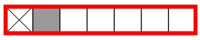



〈집합 $A\cup B$〉


〈집합 C〉

즉, 위의 표에서 안에서 직사각형을 구하되 부분이 포함되는 직사각형을 구한다.

일일이 세보면 의 어두운 부분이 포함된 7개와

의 ╳부분은 제외하고 어두운 부분이 포함된 6개의 직사각형이 있다.

결국 $n(A\cup B$가 아닌 $C)=13$

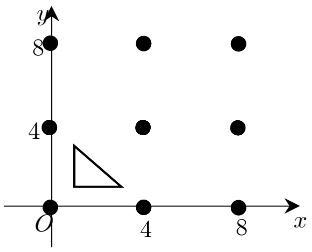
$n(A\cup B\cup C)=n(A\cup B)+n(A\cup B$가 아닌 $C)=63+13=76$

예제 035

REVIEW 도형과 경우의 수

2010. 6. 가형(53%). 나형(47%). 17번. 4점

좌표평면 위에 9개의 점 $(i, j)(i=0, 4, 8, j=0, 4, 8)$이 있다. 이 9개의 점 중 네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형 중에서 내부에 세 점 $(1, 1), (3, 1), (1, 3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 포함하는 사각형의 개수는?

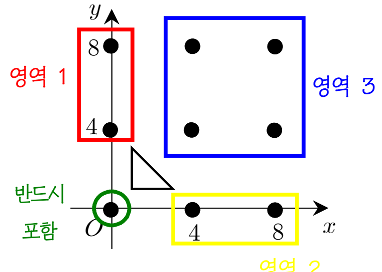


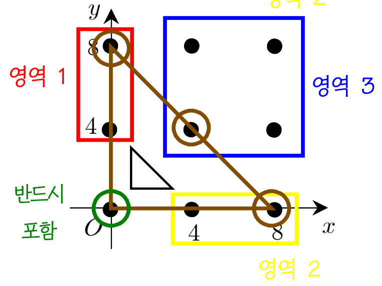
① 13 ② 15 ③ 17
④ 19 ⑤ 21

실제로 추론을 통해서 (하나하나 해 보면서) 다음의 사실을 느껴야 한다.

원점은 반드시 포함되어야 한다.

x축과 y축 위의 점도 반드시 한 개씩 포함되어야 한다.
(둘 중 하나라도 없으면 삼각형을 포함 할 수 없다.)
여기까지를 그림으로 나타내면 오른쪽과 같다.





<원점>이 포함된 상태에서 <각 영역에서 점 하나씩 선정>하여 연결하면 반드시 삼각형을 포함하게 된다.

⇨ n(전체) $= {}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_4C_1$라고 하는 순간 틀린다. 변칙사항이 존재한다.
즉, 세 점이 일직선상에 존재해서 사각형을 결정하지 못하는 경우가 딱 한번 존재한다.

$$n(\text{전체}) = {}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_4C_1 - 1 = 15$$

코칭 이렇게 경우의 수의 규칙성을 파악할 뿐만 아니라 변칙사항이 생길 수 있을 거라는 생각이 어디에서 오겠는가?
그렇다. 직관이다. 직관은 이렇게 문제를 통한 구체적 연습을 통해서 경험이 누적되면 자연스럽게 생긴다.
누군가에게는 그럴 수 있다고 떠오르는 생각이 누군가에게는 절대 할 수 없을 것 같은 생각이 든다.
사실 이 책 앞에서 <개념의 외연 : 도형의 개수>부분에서 점들이 일직선상에 존재하게 되는 경우 빼야 되는 경우가 생긴다는 것은 이미 배웠다.

이 문제를 풀고 못 풀고는 배움의 차이가 아니다, 경험의 차이이다.

꾸준히 문제를 통해서 연습한다면 누구나 직관이 충분히 길러질 것이다. 좋은 배움을 찾아 해매지 마라.
지금 앞에 계시는 선생님이면 충분하다. 매일 꾸준히 문제를 풀면서 생각하는 충분한 경험을 쌓을 수 있도록 도움을 청하라.

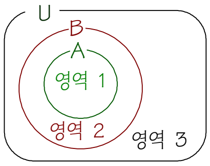
예제 036

REVIEW 집합과 경우의 수

2009. 4. 가형(31%). 24번. 4점

집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B에 대하여 $A\subset B$를 만족하는 순서쌍 (A, B)의 개수를 구하시오.

$A\subset B$를 만족하는 순서쌍 (A, B) 을 벤다이어그램을 이용하여 표현하면 아래와 같다.



위의 벤다이어그램에서 1, 2, 3, 4, 5의 각 원소의 위치가 결정되면 두 부분집합의 순서쌍인 (A, B)도 하나로 결정된다.

⇨ 조건에 맞게 각 영역에 원소를 배치하는 경우의 수를 구한다.

공집합이 아닌 두 부분집합 A, B에 의하여

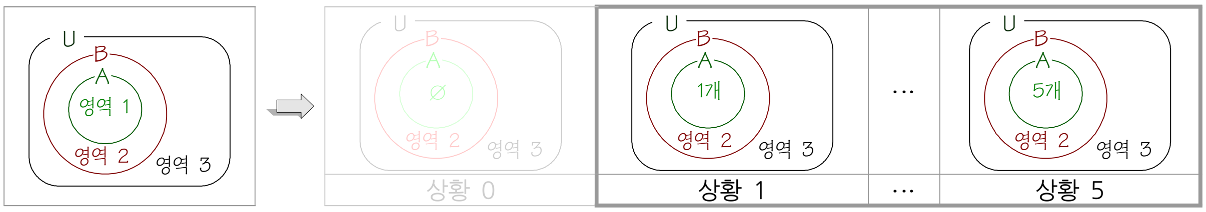
n(문제의 조건) $=$ n(각 원소가 영역 1,2,3 중 하나를 선택) $-$ n(각 원소가 영역 2,3 중 하나를 선택)

$= 3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3 - 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 211$

n(문제의 조건) $= 211$

위의 내용이 직관적으로 명확히 이해가 가지 않는다면 상황을 분할해봐야 한다.

전체상황 : (개수로 분류) <영역1> 들어가는 원소의 개수는 0개 ~ 5개이다.



이 중 <상황 1 ~ 상황 5>은 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B라는 문제의 조건을 정확히 만족한다.

결국 5개의 원소가 <영역1>에는 들어가는 않는 경우의 수를 전체에서 빼면 된다.

즉, n(문제의 조건) $=$ $\underbrace{n(\text{전체})}_{\text{각 원소가 3개의 영역 중 한 영역을 선택하는 경우의 수}}$ $-$ $\underbrace{n(\text{상황0})}_{\text{각 원소가 2개의 영역 중 한 영역을 선택하는 경우의 수}}$ $= 3^5 - 2^5 = 211$

n(문제의 조건) $= n$(전체) $- n$(상황0) $= 3^5 - 2^5 = 211$

PART 03

이해하면 공식은 없다

1. 중복순열과 곱의 법칙
2. 같은 것을 포함한 순열과 조합
3. 원순열과 고정

촌철살인 #3 이해와 반복

01 생략은 결과다. 의지의 문제가 아니다.

- 수학을 공부하면서 흔히 하는 물음이 있다. '좀 더 효율적인 방법이 있나요?' '없다.' 수학은 바른 이해와 반복만 있을 뿐이다. 정확히 이해하고 반복해서 익숙해지면 그것을 기반으로 효율적인 방법들도 위력을 발휘한다.

  자기 자신이 흔히 쓰는 논리와 방향이 다른 논리의 공식은 외워봤자 어차피 까먹는다. 아니 오히려 잔상이 되어 문제 풀 때 간섭을 일으킨다.

  생략하는 방법을 배우려고 하지 말라. 옆에 잘하는 친구가 생략해서 쉽게 푸는 것 같아 보여도 따라할 필요 없다. 본인이 이해가는 방식으로 풀고 그 사고가 정착이 되면 그때 사고의 외연을 넓히면 되는 것이다. 그 친구가 잘하는 이유는 너보다 많이 알아서가 아니라 아는 것을 충분히 연습했기 때문이다, 그 친구가 아는 것을 알 필요 없다. 그 친구 충분히 연습하지 않았다면 알기만 할뿐 너와 별 다를 바 없었을 테니까. 열심히 연습하면 배우지 않아도 머리가 알아서 생략할 것이다.

수학은 철저히 사고력 싸움이고 수학에 효율이라는 것은 '자연스러운 생략'이다.
공식은 계산과정을 조금 줄여주는 것뿐이다.

02 어떤 공식이 본인이 가진 논리로부터 연결되어 자연스럽게 이해되는 공식이 아니라면 외울 필요 없다. 혹은 아직은 외울 때가 안 된 것이다.

- 근의 공식도 헷갈리는데 짝수공식을 외우면 효율적일까? 절대 그렇지 않다.

  오히려 일차식의 계수가 짝수여도 홀수공식으로 계속 풀다가 짝수공식으로 효율적으로 풀 수 있다는 사실을 느끼면 훨씬 기억이 잘 된다. 그리고 어떤 공식을 잊어버렸다면 <비효율적>이겠지만 무조건 증명해서 그 공식을 써야 한다. 증명보다 암기가 효율적인 것 같지만 절대 그렇지 않다. 효율성의 함정에 빠지지 마라. 빨리 가고 싶다면 많이 하면 된다.

이 단원의 특징은 지금까지 공부했던 사고방식을 기반으로 이해하는 것이다.
이 단원은 본질적으로 새로운 공식이 하나도 없다.

PART 01 근본 사고방식

#1. 일대일 대응 경우의 수적인 본질이 같은 상황

#2. 분할적 사고 〈전제〉 모든 경우의 논리적 나열 능력

1. 자리를 기준 2. 대상을 기준
3. 개수로 분류 4. 배열 전 모든 상황
: 분할하는 순간 상황은 고정된다.

#3. 합의 법칙과 곱의 법칙

1. 합의 법칙 2. 곱의 법칙
3. 센다의 법칙 4. 수형도의 활용

#4. 여사건의 아이디어

PART.1 개념의 외연

#1. 정수론 1탄
#2. 센다의 법칙
#3. 경우의 수를 세는 방법은 무한가지

전체적으로 분할적 사고를 하되 부분적으로 공식을 쓴다.

PART 02 근본에 가까운 공식

#1. 계승, 순열, 조합의 공식

1. 계승의 뜻과 공식
2. 순열과 조합의 뜻과 공식
3. 조합의 기본 성질 : ${}_{n}C_{r} = {}_{n}C_{n-r}$
4. 논리의 확신 : 경우의 수적인 본질이 같은 상황

#2. 순열과 조합의 상황

1. 서로 다른 대상, 서로 다른 자리
2. 조합과 자동배열
3. 뽑기의 오류 : 〈동동연〉이면 〈배고려〉

#3. 순열과 조합의 수식적 활용

1. 순열의 정의식과 계산식 2. 조합의 정의식과 계산식
3. 정의되는 기호들 4. 순열과 조합으로 표현

PART.2 개념의 외연

#1. 순열 조합으로 표현된 방정식
#2. 여러 가지 상황의 배열
#3. 여사건의 아이디어 + 특정인
#4. 정수론 2탄
#5. 도형과 경우의 수
#6. 집합과 경우의 수

PART 03 이해하면 공식은 없다

#1. 중복순열과 곱의 법칙 중복순열은 곱의 법칙이다.

#2. 같은 것을 포함한 순열과 조합 같은 것을 포함한 순열은 조합이다

1. 같은 것을 포함한 순열의 뜻과 공식
2. 배열 취소의 관점
3. 자동배열의 상황
4. 같은 것들 중에서 일부를 뽑는 것은 공식이 없다.

#3. 원순열과 고정

1. 원순열의 상황 2. 원순열의 경우의 수
3. 다각형 순열 4. 목걸이 순열

PART.3 개념의 외연

#1. 경로의 수 문제
#2. 입체 순열

PART 04 분할의 상황

#1. 자연수의 분할

1. 자연수 분할의 기본 정의 · 낙수효과
2. 페러스 다이어그램과 성질, 켤레분할
3. 자연수 분할의 상황

#2. 분할의 상황

1. 분할의 상황 1 : 뽑기와 분할의 경우의 수가 다른 경우
2. 분할의 상황 2 : 뽑기와 분할의 경우의 수가 같은 경우
3. 선분할 개념 : 기준이 생기면 〈뽑기의 오류〉 발생하지 않는다.
4. 분할의 공식화 : 〈동동연〉이면 〈배고려〉
5. 분할 후 분배와 선분할 개념

#3. 집합의 분할

1. 집합 분할의 상황
2. 집합 분할의 성질
3. 서로 다른 대상, 서로 같은 자리

PART.4 개념의 외연

#1. 리그와 토너먼트

PART 05 중복조합과 일대일 대응

#1. 중복조합의 상황

1. 중복조합의 뜻과 공식
2. 구분막대기를 이용한 일대일 대응
3. 중복조합의 공식 : 암기가 아닌 Reading

${}_{n}H_{r} = {}_{n+r-1}C_{n-1}$

#2. 중복조합과 일대일 대응

1. 중복조합과 일대일 대응
: 일대일 대응 + 공식
2. 서로 같은 대상, 서로 다른 자리
3. 중복조합의 적어도의 상황
: 미리 뽑아놓고 생각한다.

PART.5 개념의 외연

#1. 같은 것과 다른 것 총 정리
#2. 중복조합과 곱의 법칙
#3. 전개식과 경우의 수
#4. 부정방정식과 일대일 대응
#5. 함수의 개수 총정리

PART.6 개념의 외연

#1. 삼항정리
#2. 정수론 3탄

PART 06 이항정리와 조합의 연속 합

#1. 이항정리와 이항계수의 성질

1. 이항계수의 의미와 이항전개식
2. 특정항의 계수 : 나열된 식의 구조와 추론
3. 이항전개식 간단히 하기
4. 이항계수의 성질 : 이항정리 + 항등식의 마법
1) 연속 합 2) 교대 합 3) 짝수 합
4) 홀수 합 5) 절반 합

#2. 조합의 식 변형과 이항계수의 성질

#3. 파스칼 삼각형

1. 이항계수의 또 다른 성질
2. 파스칼 삼각형 공식 : ${}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_{r} = {}_{n}C_{r}$
3. 이항계수의 성질과 파스칼 삼각형 공식의 구분법

#4. 분할적 사고와 관점 합

1. 이항전개식을 이용한 설명
2. 다른 방식을 이용한 설명

뼈대가 되는 기본 개념

#1 중복순열과 곱의 법칙

수형도를 통해 구체적인 몇 가지 상황들을 확인하면 n^r과 r^n이 헷갈리지 않는다.

1. 중복순열의 뜻과 공식

1) 중복순열의 뜻

- 서로 다른 n개 중 중복을 허용하여 r개를 뽑아 배열하는 경우의 수를 기호로 ${}_n\Pi_r$이라고 한다.

이것은 순서 그대로 [엔 파이 알] 이라고 읽는다.

2) 중복순열의 공식

- 중복순열의 공식이란 ${}_n\Pi_r = n^r$을 말하는 것이다. 앞에 순열과 조합에 비해서는 외우는 게 훨씬 쉽다고 느껴질지 모르겠지만 생각보다 n^r과 r^n을 헷갈리는 학생들이 꽤 많다. 그래서 이 식은 공식처럼 외워서 사용하면 안 된다.
- 실제 중복순열의 상황은 <분할적 사고와 곱의 법칙>으로 다 해결될 뿐만 아니라 이렇게 원리적으로 접근해야 n^r와 r^n이 헷갈리지 않는다. (물론 기호와 공식 자체는 너무 기본이기 때문에 알아둔다.)

코칭 사실 지금까지 중복순열로 구별될 수 있는 문제를 계속 풀어왔다.
<Part 2. 개념의 외연 : 정수론 2탄>에서 숫자를 중복해서 만들 수 있는 세 자리 정수든 세 자리 이하의 정수든 생각해보면 결국 중복순열이다. 하지만 중복순열을 언급하지 않고 분할적 사고와 곱의 법칙으로 자연스럽게 풀어왔다.
<Part 2. 개념의 외연 : 집합과 경우의 수>에서도 벤다이어그램에 원소를 배치하는 상황 자체가 중복순열의 상황이다. 하지만 역시 분할적 사고와 곱의 법칙으로 자연스럽게 풀어왔다. 즉, 중복순열 문제는 중복순열을 몰라도 풀 수 있다.

티칭 이 책의 뒤에서 중복조합을 배운다. 이미 학습한 <순열>이 <조합과 배열>로 표현되기 때문에 <중복순열> 역시 <중복조합과 배열>로 표현 될 것이라고 생각하는 것은 큰 착각이다.
중복조합과 중복순열은 서로 별개의 개념이며 중복순열에서는 뽑는 것과 배열을 따로 생각하지 않는다.
그냥 곱의 법칙으로 한 번에 세면 모든 경우가 고려된다.

개념의 용어화

중복순열은 곱의 법칙 그 이상도 이하도 아니다. : 일종의 구호처럼 문제를 풀 때마다 항상 상기한다.

050 이해를 위한 예제

서로 다른 3개의 편지를 서로 다른 2개의 우체통에 넣는 경우의 수는 2^3인가? 3^2인가?

서로 다른 세 편지를 a,b,c, 서로 다른 두 우체통을 A, B라고 해보자.

2^3이라고 주장하는 부류

a를 넣을 수 있는 우체통이 2개 / b를 넣을 수 있는 우체통이 2개 / c를 넣을 수 있는 우체통이 2개 각각 2개씩 이므로

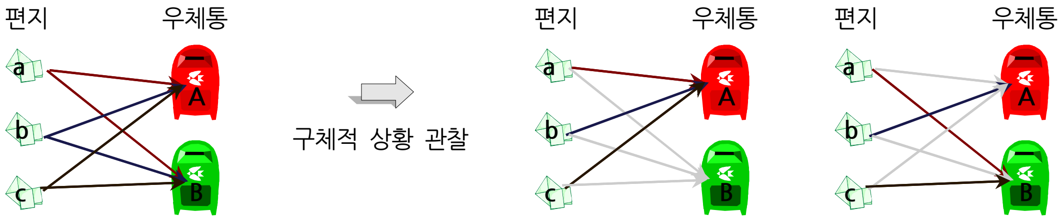
⇨ $2\times2\times2 = 2^3$

3^2이라고 주장하는 부류

A에 넣을 수 있는 편지가 3개 / B에 넣을 수 있는 편지도 3개이므로

⇨ $3\times3 = 3^2$

2^3이라고 주장



수형도를 통해서 전체 상황을 표현한 후, 구체적 상황을 관찰해보면 오류가 생기는 상황이 없다는 것을 느낄 수 있다.

3^2이라고 주장

A는 a 또는 b 또는 c 를 넣을 수 있으므로 3가지?

우체통 A에는 물론 a, b, c 중 1개씩을 넣는 3가지 경우도 있지만 a, b를 동시에 넣을 수도 있고, a, b, c를 모두 넣을 수도 있다.

결국 A가 선택할 수 있는 3가지, 그 각각에 대하여 B가 선택할 수 있는 3가지를 위수도로 나타내면 위와 같은 데 한 가지 구체적 경우만 확인해도 말이 안 된다. 위의 그림과 같이 3^2은 a가 A와 B 모두에 들어가는 경우의 수를 센 것이다.

정답은 ${}_2\Pi_3 = 2^3$

#2 같은 것을 포함한 순열과 조합

같은 것은 포함한 순열을 편의상 <같 · 포 · 순>이라 부르기도 한다.

같은 것을 포함한 순열의 핵심은 <나열하지 않는다는 것>으로 그 본질이 조합과 같다.
같은 것을 포함한 순열은 나열 후 <나열 취소>하는 것이라고 생각해도 된다.

1. 같은 것을 포함한 순열의 뜻과 공식

1) 같은 것을 포함한 순열의 뜻

- 같은 것을 포함한 순열의 있는 그대로의 의미를 생각하면 <같은 것이 포함된 어떤 대상들을 일렬로 배열>이라는 뜻이다.

2) 같은 것을 포함한 순열은 조합이다.

- <같은 몇 개의 대상>을 기준으로 생각할 경우 이들은 배열되는 자리 중 일부를 반드시 차지 할 것이고 결국 배열되는 자리 중 <같은 몇 개의 대상>이 들어갈 자리를 뽑는 경우의 수를 생각할 수 있다.

⇨ 이 상황은 <같은 몇 개의 대상>이 배치될 자리만 뽑고 배열하지 않는 것으로 조합의 상황과 같다.

3) 같은 것을 포함한 순열 <같 · 포 · 순> 공식

- n개의 대상에서 같은 것이 p개, q개, r개 존재할 때 이것을 배열하는 가짓수는 $\frac{n!}{p!q!r!}$ 이다.

051 이해를 위한 예제

a, a, a, a, b, b, b, c, c, d, e의 11개의 문자를 일렬로 배열할 때 나올 수 있는 모든 경우의 수를 조합을 통해서 설명하고 그 결과가 $\frac{11!}{4!3!2!}$ 임을 보여라.

전체상황 (대상을 기준) 4개의 a가 어딘가에는 배치된다.

상황 1	a	a	a	a							
상황 2	a	a	a		a						
					⋮						
상황 ${}_{11}C_4$								a	a	a	a

: $n(\text{전체}) = {}_{11}C_4 \times n(\text{상황}1)$

(어차피 남은 대상은 동일하며 남은 자리역시 구분이 가능한 7개의 자리이므로 같은 경우의 수가 발생한다.)

상황 1 (대상을 기준) 3개의 b가 남은 7자리 중 어딘가에는 배치된다.

상황 1-1	a	a	a	a	b	b	b				
상황 1-2	a	a	a	a	b		b	b			
						⋮					
상황 1-${}_7C_3$	a	a	a	a					b	b	b

: $n(\text{상황}1) = {}_7C_3 \times n(\text{상황}1-1)$

상황 1-1 (대상을 기준) 2개의 c가 남은 4자리 중 어딘가에는 배치된다.

상황 1-1-1	a	a	a	a	b	b	b	c	c		
상황 1-1-2	a	a	a	a	b	b	b	c		c	
						⋮					
상황 1-1-${}_4C_2$	a	a	a	a	b	b	b			c	c

: $n(\text{상황}1-1) = {}_4C_2 \times n(\text{상황}1-1-1)$

여기에서 $n(\text{상황}1-1-1)$은 남은 두 자리에 d와 e를 배열하는 경우의 수 이므로 $2!$이다.

$$n(\text{전체}) = {}_{11}C_4 \times n(\text{상황}1) = {}_{11}C_4 \times {}_7C_3 \times n(\text{상황}1-1)$$
$$= {}_{11}C_4 \times {}_7C_3 \times {}_4C_2 \times n(\text{상황}1-1-1) = {}_{11}C_4 \times {}_7C_3 \times {}_4C_2 \times 2!$$

${}_{11}C_4 \times {}_7C_3 \times {}_4C_2 \times 2$을 조합의 정의식을 이용하여 표현하면 $\frac{11!}{4!3!2!}$ 임을 확인 할 수 있다.

$$ {}_{11}C_4 \times {}_7C_3 \times {}_4C_2 \times 2 = \frac{11!}{4!7!} \times \frac{7!}{3!4!} \times \frac{4!}{2!2!} \times 2 = \frac{11!}{4!3!2!}$$

2. 배열 취소의 관점

- 각각에 대하여 같은 경우의 수가 발생하면 곱하지만 각각에 대하여 같은 경우의 수만큼 더 셌다면 나누면 된다.
- 모든 상황들에 대하여 1가지로 세야 하는 것을 5가지로 셌다면 5로 다시 나누면 그만이다.

052 이해를 위한 예제

$a,\ a,\ a,\ a,\ b,\ b,\ b,\ c,\ c,\ d,\ e$의 11개의 문자를 일렬로 배열할 때 나올 수 있는 모든 경우의 수가 $\dfrac{11!}{4!3!2!}$임을 조합을 이용하지 않고 설명하라.

$a,\ a,\ a,\ a,\ b,\ b,\ b,\ c,\ c,\ d,\ e$ 에 아래 첨자를 붙여 $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ b_1\ b_2\ b_3\ c_1\ c_2\ d\ e$라고 해보자.
이 11개의 문자를 서로 다른 것으로 보고 배열하는 경우의 수는 11!이다.

$a,\ a,\ a,\ a,\ b,\ b,\ b,\ c,\ c,\ d,\ e$의 위치들이 결정된 각 상황을 관찰한다. 여기에서는 다음 두 가지 상황만 관찰해본다.

a	a	a	a	b	b	b	c	c	d	e
a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	d	e
a_1	a_2	a_4	a_3	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	d	e
					$\vdots$					
a_4	a_3	a_2	a_1	b_3	b_2	b_1	c_2	c_1	d	e

<관찰1>

같은 색깔 안에서 배열한 경우의 수 $4!3!2!$

a	a	b	b	a	a	b	c	c	d	e
a_1	a_2	b_1	b_2	a_3	a_4	b_3	c_1	c_2	d	e
a_1	a_2	b_1	b_2	a_4	a_3	b_3	c_1	c_2	d	e
					$\vdots$					
a_4	a_3	b_3	b_2	a_2	a_1	b_1	c_2	c_1	d	e

<관찰 2>

같은 색깔 안에서 배열한 경우의 수 $4!3!2!$

<관찰1>과 같이 각 문자의 위치가 $a\ a\ a\ a\ b\ b\ b\ c\ c\ d\ e$처럼 정해진 경우에 대하여 $11!$에서는 같은 색깔 안에서 같은 문자끼리 배열된 $4!3!2!$가지를 모두 고려한 것이므로 $4!3!2!$가지를 1가지로 계산해야 한다.

<관찰2>도 마찬가지로 각 문자의 위치가 $a\ a\ b\ b\ a\ a\ b\ c\ c\ d\ e$과 같이 정해진 경우에 대하여 $11!$에서는 같은 색깔 안에서 같은 문자끼리 배열된 $4!3!2!$가지를 모두 고려한 것이므로 $4!3!2!$가지를 1가지로 계산해야 한다. 즉, 각각에 대하여 같은 문자끼리 배열한 경우의 수인 $4!3!2!$가지를 1가지로 계산해야 하므로 $\dfrac{11!}{4!3!2!}$

($11!$에서 잘못 나열한 것을 나열 취소했다고 생각한다.)

3. 자동배열의 상황

- 자동배열의 상황은 조합의 상황이라는 것을 앞서 설명했다. 이것은 당연히 <같 · 포 · 순>의 관점으로도 설명할 수 있다.

053 이해를 위한 예제

a_1 a_2 a_3 b c d을 배열하되 a_1 a_2 a_3는 항상 아래의 숫자가 작은 것이 더 왼쪽에 오도록 배열하는 경우의 수를 구하고, 같은 것을 포함한 순열을 이용하여 설명하여라.

a	a	a	b	c	d
a	a	b	a	c	d

a_1	a_2	a_3	b	c	d
a_1	a_2	b	a_3	c	d

⋮

결국 a가 들어갈 세 자리가 결정되면 a_1 a_2 a_3이던 a a a이던 배열하지 않으므로 <경우의 수적 본질이 같은 상황>이다.

즉, a a a b c d를 배열하는 경우의 수와 정확하게 일대일 대응한다. 즉, $\frac{6!}{3!}$

$$\frac{6!}{3!}$$

4. 같은 것들 중에서 일부를 뽑는 것은 공식이 없다.

- 일일이 따져야 한다. 뽑는 경우를 일일이 따진 후, <같 · 포 · 순>의 공식을 생각할 수 있다.

전체적으로는 분할적 사고를 쓰되 부분적으로 공식을 쓴다.

054 이해를 위한 예제 2011. 11. 가형(94%). 5번. 3점

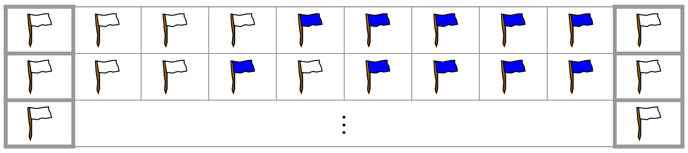
흰색 깃발 5개, 파란색 깃발 5개를 일렬로 모두 나열할 때, 양 끝에 흰색 깃발이 놓이는 경우의 수는?
(단, 같은 색 깃발끼리는 서로 구별하지 않는다.)

① 56 ② 63 ③ 70 ④ 77 ⑤ 84

같은 색 깃발끼리는 서로 구별하지 않는다. - 같은 것을 포함한 순열이라는 것을 알려주고 있다.

양 끝에 흰색 깃발 - ${}_5C_2$가 아니다. 이것은 서로 다른 5개 중 2개를 뽑는 것이다.

서로 같은 5개의 깃발 중 2개를 뽑는 경우의 수는 1가지다.



결국 주어진 상황은 같은 것이 3개, 5개가 포함된 8개를 일렬로 배열하는 상황과 <경우의 수적 본질이 같은 상황>이다.

즉, <같 · 포 · 순>의 공식을 이용하면 $\frac{8!}{3!5!} = 56$

$$\frac{8!}{3!5!} = 56$$

055 이해를 위한 예제 2011. 11. 가형(94%). 5번. 3점 변형

흰색 깃발 5개, 파란색 깃발 5개를 일렬로 모두 나열할 때, 양 끝에 흰색과 파란색 깃발이 각각 하나씩 놓이는 경우의 수는? (단, 같은 색 깃발끼리는 서로 구별하지 않는다.)

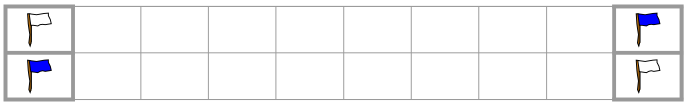
같은 것에서 일부를 뽑을 때는 일일이 세야 한다. (공식이 없다.) ~~조합공식 쓰면 망~~

양 끝에 흰색과 파란색 깃발이 각각 하나씩 - 일일이 따져보면 아래 두 가지 상황이다.

전체상황 (배열 전 모든 상황) 일일이 센다.

상황 1

상황 2



: $n(\text{전체}) = 2\times n(\text{상황}\,1)$

결국 (상황 1)은 4개, 4개가 포함된 8개를 일렬로 배열하는 상황과 <경우의 수적 본질이 같은 상황>이다.

즉, <같 · 포 · 순>의 공식을 이용하면 $n(\text{상황}\,1) = \dfrac{8!}{4!\,4!} = 70$

$$n(\text{전체}) = 2\times n(\text{상황}\,1) = 2\times 70 = 140$$

개념의 용어화

전체적으로는 분할적 사고를 쓰되 부분적으로 공식을 쓴다. : 이것은 이미 앞에서부터 강조되었던 말이다.

같은 것들에서 일부를 뽑는 것은 일일이 따진다. : 일종의 구호처럼 문제를 풀 때마다 항상 상기한다.

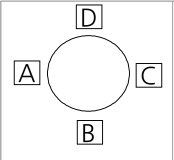
#3 원순열과 고정

<회전해서 같은 것은 같은 경우로 본다.>라는 말이 없으면 원순열이 아니다. 즉, 이 말이 왜 반드시 나오는지 생각해본다. 원순열은 각 자리를 구분하는 기준이 생기는 순간 더 이상 원순열이 아니다.

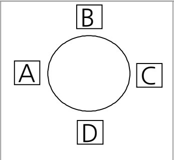
1. 원순열의 상황 : 회전해서 같은 상황이면 같은 경우이다.

1) 회전했을 때 같은 경우

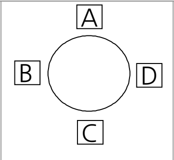
- 아래 그림과 같이 원탁에 A, B, C, D 네 명을 배열할 때 다음 상황 중 회전해서 같은 경우를 찾아보면



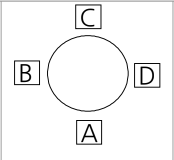
상황 1



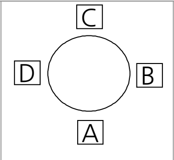
상황 2



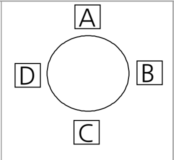
상황 3



상황 4



상황 5

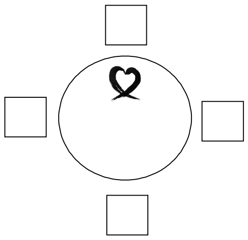


상황 6

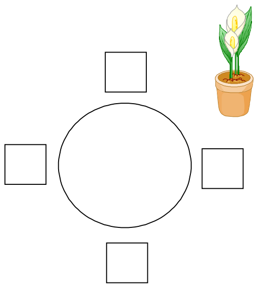
회전시켜 A의 위치를 12시 방향으로 고정했을 때 겹쳐지는 경우는 <상황 1, 3, 5>와 <상황 2, 4, 6>이다. 원순열에서 이렇게 같은 경우는 경우의 수를 1가지로 센다.

2) 자리를 구분할 수 있는 기준이 생기는 순간 원순열이 아니다.

- <그림 1>은  의 낙서 하나로 A, B, C, D가 모두 자신의 위치를 구분하므로 원순열이 아니다.


<그림 1>

- <그림 2>는 인 화분을 기준으로 A, B, C, D가 모두 자신의 위치를 구분하므로 원순열이 아니다.


<그림 2>

개념의 용어화

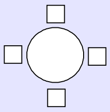
원순열은 고정이다. : 공식으로 생각하지 말라는 뜻이다.

2. 원순열의 경우의 수 (예제를 통한 이해)

- <고정>과 <나열 후 취소>의 관점 (핵심은 고정!)
- 배열된 모든 경우를 관찰한다고 가정했을 때, 회전하여 특정 대상을 특정 위치에 고정하여 관찰한다.

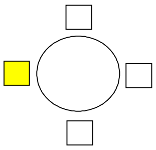
056 이해를 위한 예제

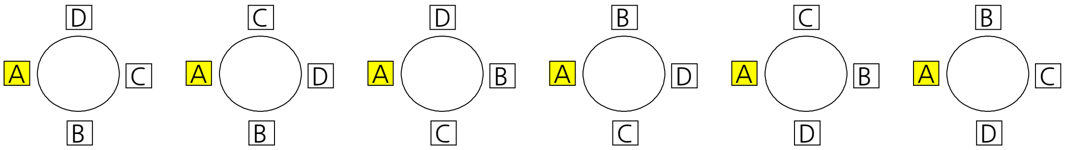
A, B, C, D를 다음과 같은 원탁에 배열하는 경우의 수를 구하여라.
(단, 회전해서 같은 것은 같은 경우로 본다.) - 이 말이 있어야 원순열



원순열은 고정이다.

A, B, C, D를 원순열로 배열한 모든 경우에 대하여 회전하여 A의 위치를 고정시킨 후 관찰한다.
원순열로 배열된 모든 경우에 대하여 A가 항상 🟨 위치에 있도록 회전하여 고정하면





원순열에서 대상 A가 어딘가는 앉을 것이므로 (대상 A를 기준)으로 상황을 분할할 때

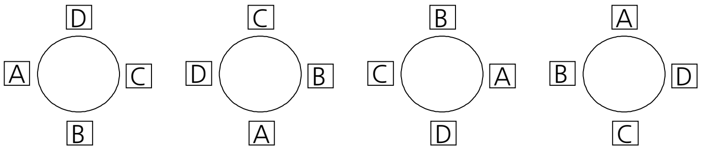
⇨ A를 배치하는 경우의 수는 1가지이다. (원순열의 모든 경우에 대하여 A를 동일한 자리에 있도록 만들 수 있다.)

⇨ A가 고정되는 순간 더 이상 원순열이 아니다. A를 기준으로 모든 자리는 구분이 가기 때문이다.

n(전체) $= 1\times 3!$ (A를 기준으로 A의 자리를 정하는 경우의 수 × A를 기준으로 나머지 배열)

원순열 - 나열 후 취소의 관점

A, B, C, D를 네 자리에 임의로 배열할 경우의 수를 4!으로 계산할 경우



과 같이 각각에 대하여 4가지씩 같은 경우가 발생.

⇨ 4가지를 1가지로 계산해야 하므로 $4!$을 4로 나눈다. 즉, 4개의 대상을 원순열로 내열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{4}$

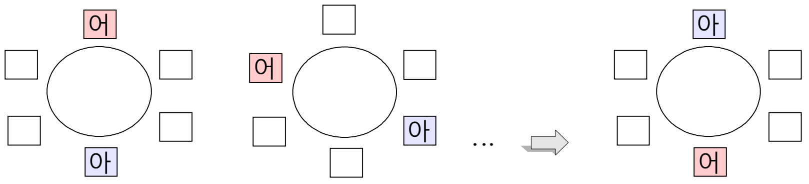
나열 후 회전해서 같은 경우의 수로 나눈다.

n(전체) $= \frac{4!}{4}$ (직순열로 배열 ÷ 회전해서 같은 경우가 발생하는 경우의 수)

057 이해를 위한 예제

어머니와 아버지를 포함하여 총 6명이 원탁에 동일한 간격으로 둘러앉으려고 한다. 이때 어머니와 아버지는 반드시 마주보고 앉는 경우의 수를 구하여라. (단, 회전해서 같은 것은 같은 경우로 본다.) - 이 말이 있어야 원순열

원순열은 고정이다. - 6명을 원순열로 배열한 모든 경우에 대하여 회전하여 어머니와 아버지의 위치를 고정한 후 관찰



<상황1>

원순열에서 대상 <어머니와 아버지>가 어딘가는 앉을 것이므로 (어머니와 아버지를 기준)으로 상황을 분할할 때

⇨ 어머니와 아버지를 배치하는 경우의 수는 1가지이다. (원순열의 모든 경우는 회전하여 <상황1>의 상태로 만들 수 있다.)

⇨ 어머니와 아버지가 고정되는 순간 더 이상 원순열이 아니다.

나머지 4명을 남은 4자리에 배열하는 경우의 수는 계승의 상황과 <경우의 수적 본질이 같은 상황>이다.

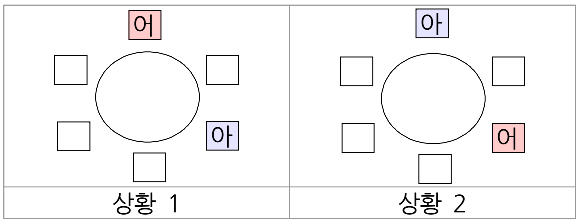
$n(\text{전체}) = 1\times 4!$ (어머니와 아버지의 자리를 정하는 경우의 수 × 어머니와 아버지를 기준으로 나머지 배열)

058 이해를 위한 예제

어머니와 아버지를 포함하여 총 6명이 원탁에 동일한 간격으로 둘러앉으려고 한다. 어머니와 아버지 사이에 1명만 있도록 앉는 경우의 수를 구하여라. (단, 회전해서 같은 것은 같은 경우로 본다.) - 이 말이 있어야 원순열

원순열은 고정이다. - 6명을 원순열로 배열한 모든 경우에 대하여 회전하여 어머니와 아버지의 위치를 고정한 후 관찰

전체상황 (대상을 기준) A가 어딘가에는 온다.



: $n(\text{전체}) = 2\times n(\text{상황}\,1)$

6명을 모두 배열했다고 가정했을 때 회전해서 어머니와 아버지의 위치를 <상황1> 또는 <상황2>로 고정 할 수 있다.
<상황 1>과 <상황 2>는 회전해도 절대 겹칠 수 없다. 직접 앉아보면 <상황 1>은 어머니의 입장에서 왼쪽에 아버지가 있고, <상황 2>는 오른쪽에 아버지가 있다. 이 두 가지 상황은 완전히 구분이 가능한 상황이다.

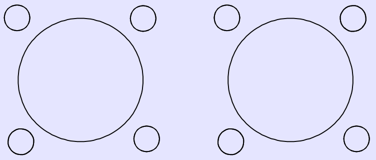
어머니와 아버지가 고정되는 순간 어머니와 아버지를 기준으로 모두 자신의 위치를 구분하므로 <계승의 상황>과 <경우의 수적 본질이 같은 상황>이다. 즉, $n(\text{상황}\,1) = 4!$

$n(\text{전체}) = 2\times n(\text{상황}\,1) = 2\times 4!$ (어머니와 아버지의 자리를 정하는 경우의 수 × 어머니와 아버지를 기준으로 나머지 배열)

059 이해를 위한 예제

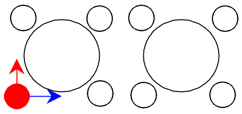
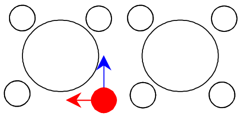
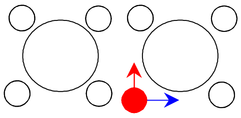
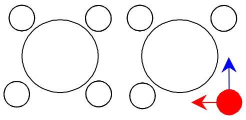
서로 같은 두 개의 원탁과 8개의 의자가 그림과 같이 나란히 있다.
어른 4명, 아이 4명이 앉는 방법은 모두 몇 가지인가?
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 한다.)

① $7!$　② $2\times7!$　③ $4\times7!$　④ $8!$　⑤ $4!\times4!$

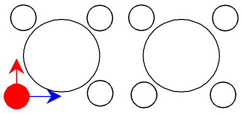
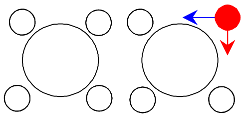


회전해서 같은 경우인지 확인하는 방법은 직접 앉아보는 것이다. (물론 사고실험이다.)

아래 그림에서 빨간색은 앉아서 왼쪽 방향을 보는 것이고 파란색은 오른쪽 방향을 보는 것이다.

			
오른쪽 방향으로 원탁이 있네?	오른쪽 방향 뒤 쪽 원탁이 있네?	왼쪽 방향 뒤 쪽 원탁이 있네?	왼쪽 방향으로 원탁이 있네?

이 네 가지는 구분이 가는 상황이다.

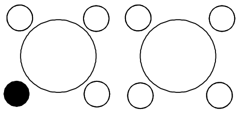
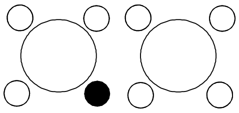
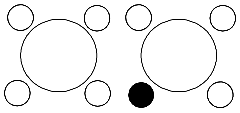
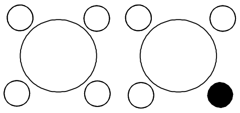
	
오른쪽 방향으로 원탁이 있네? 왼쪽으로는 의자 한 개	오른쪽 방향으로 원탁이 있네? 왼쪽으로는 의자 한 개

이 두 가지는 구분이 가지 않는다. 즉, 어떤 대상을 기준으로 회전했을 때 처음 위치와 같아지는 순간은 1번 더 생긴다. 그러므로 2가지를 한 가지로 센다.

$$n(\text{전체}) = \frac{8!}{2} = 4\times7!$$ (직 순열로 배열 ÷ 회전해서 같은 경우가 발생하는 경우의 수)

8명 중 한 명을 A라고 가정해 본다.

전체상황 (대상을 기준) A가 어딘가에는 온다.

			
상황 1	상황 2	상황 3	상황 4

8명을 모두 배열했다고 가정했을 때 대상들을 회전시켜 A의 위치를 위와 같이 고정한 후 관찰할 수 있다.
A의 위치를 정할 수 있는 경우는 위의 4가지뿐이다. (나머지는 회전했을 때 같은 경우다. - 헷갈리면 직접 앉아봐라.)

A의 위치가 위와 같이 고정되었을 때, 나머지 7명은 A를 기준으로 모두 자신의 위치를 구분하므로
일반적인 순열과 <경우의 수적 본질이 같은 상황>이다.

$$n(\text{전체}) = 4\times7!$$ (A를 기준으로 A의 자리를 정하는 경우의 수 × A를 기준으로 나머지 배열)

티칭 헷갈리면 직접 앉았다고 가정하여 생각해본다.

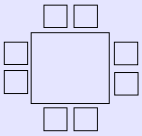
3. 다각형 순열

- 원순열의 원리 그대로 다각형 순열을 해결 할 수 있다. 다각형 순열도 기준이 되는 대상을 고정시키는 순간 더 이상 다각형 순열이 아니다.

코칭 사실 다각형 순열이라는 말은 편의상 만들어낸 말이고 모두 원순열이라는 단원에 포함된 문제들일 뿐이다.

060 이해를 위한 예제

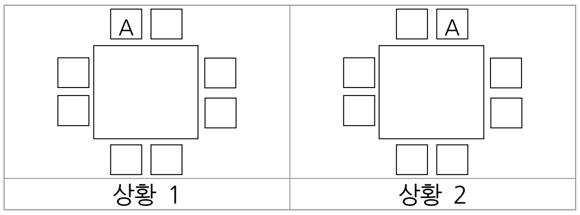
그림과 같은 정사각형 탁자에 8명의 사람이 앉는 경우의 수를 구하여라.
(단, 회전해서 같은 것은 같은 경우로 본다.)



원순열은 고정이다.

8명 중 한 명을 A라고 가정해 본다.

전체상황 (대상을 기준) A가 어딘가에는 온다.



: $n(\text{전체}) = 2 \times n(\text{상황}1)$

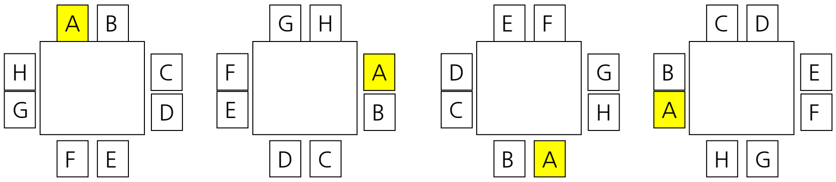
8명을 모두 배열했다고 가정했을 때 회전해서 A의 위치를 <상황1> 또는 <상황2>로 고정 할 수 있다.
<상황 1>과 <상황 2>는 회전해도 절대 겹칠 수 없다. 직접 앉아보면 <상황 1>은 오른쪽에 모서리가 있고, <상황 2>는 왼쪽에 모서리가 있다. 이 두 가지 상황은 완전히 구분이 가능한 상황이다.

A가 두 자리로 고정되는 순간 A를 기준으로 모두 자신의 위치를 구분하므로 <계승의 상황>과 <경우의 수적 본질이 같은 상황>이다. 즉, $n(\text{상황}1) = 7!$

$$n(\text{전체}) = 2 \times n(\text{상황}1) = 2 \times 7!$$

원순열 - 나열 후 취소의 관점

8명을 A, B, C, D, E, F, G, H라고 할 때,

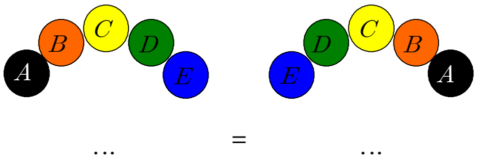


위의 그림과 같이 $8!$으로 그냥 배열할 경우 각각에 대하여 4번씩 같은 경우의 수가 발생하므로 4가지는 1가지로 세야한다.

$$n(\text{전체}) = \frac{8!}{4} = \frac{8 \times 7!}{4} = 2 \times 7!$$

4. 목걸이 순열

- 목걸이 순열은 어렵지 않다. 목걸이는 뒤집어도 같은 목걸이이기 때문에 $\frac{\text{원순열의 수}}{2}$이다.
- 목걸이를 뒤집을 경우 다음 두 가지 상황은 같은 상황이다.



⇨ 목걸이 순열의 수 $= \frac{\text{원순열의 수}}{2}$

예제를 통해 개념의 외연을 넓혀라

개념의 외연	#1. 경로의 수
	#2. 입체 순열

<개념의 외연>이라는 부분은 현재 배우고 있는 경우의 수의 국한된 내용만 다루는 것이 아니다.
현재 단원에 해당하는 문제를 풀기 위해서 필요한 수학적 개념이나 유형에 필요한 사고방식을 두루 다룬다.

수학에는 순서가 없다. 하지만 배움에는 순서가 있다.

그래서 순서가 없는 수학에 순서를 정한 것이 교육과정이다.
어떤 내용은 너무 어렵거나 복합적인 생각들을 담고 있어서 여러 학년에 걸쳐 배운다.
이런 경우 보통은 문제를 통해서 익힌다는 느낌이 강한데, 이런 개념들을 집약적으로 정리해주는 부분이 될 것이다.

#1 경로의 수

결국 <화살표의 배열>로 풀 것인가 상황을 <분할>시켜 풀 것인가의 문제
문제의 조건이 많아 분할해야 하는 경우도 많다면 어쩔 수 없이 일일이 세야 하는 경우도 있다.
경로의 수 문제에서 이런 경우는 <합의 법칙 연속 적용>을 통해서 푼다.

1. 경로의 수 VS 최단 경로의 수

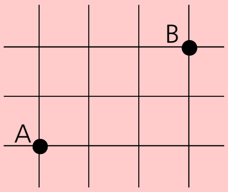
- 경로의 수 문제는 크게 <경로의 수>와 <최단 경로의 수> 문제로 나눌 수 있다.
  <경로의 수>문제도 결국에는 <최단 경로의 수>의 방식을 이용하여 푼다.
- 경로의 수 문제의 핵심은 <특정 경로>와 <화살표의 배열의 상황>이 일대일로 대응한다는 사실을 이해하는 것이다.
  즉, 경로 문제는 결국 화살표의 배열로 푼다.

061 이해를 위한 예제

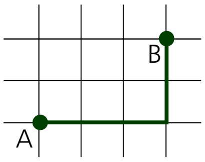
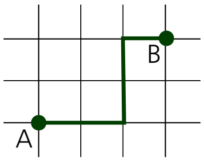
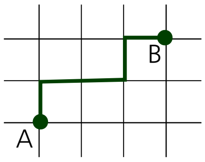
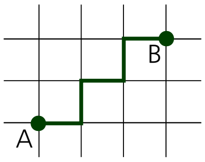
다음과 같이 정사각형으로 이루어진 모눈종이가 있다. 주어진 선을 따라 한 칸씩 움직일 때.

(1) A에서 B로 가는 최단 경로의 수를 구하여라.

(2) A에서 7번을 움직여서 B에 도착하는 경우의 수를 구하여라. 단, 모눈종이는 충분히 넓다.)



(1) A에서 B로 가는 최단 경로의 수 ⇨ 다음의 대응을 생각한다.

			
→ → → ↑ ↑	→ → ↑ ↑ →	↑ → → ↑ →	→ ↑ → ↑ →

결국 최단 경로로 가는 모든 경우의 수는 → → → ↑ ↑을 배열하는 경우의 수와 같다.

$$\frac{5!}{3!2!}$$

(2) A에서 7번을 움직여서 B에 도착하는 경우의 수 ⇨ 상황을 두 가지로 분할한다.

상황 1 : → → → ↑ ↑ → ← : B에 도착하는 최단 경로에 → ← 을 추가하면 최종위치는 B이다.

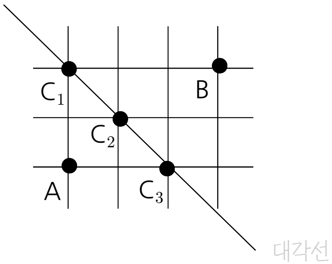
상황 2 : → → → ↑ ↑ ↑ ↓ : B에 도착하는 최단 경로에 ↑ ↓ 을 추가해도 최종위치는 B이다.

두 상황에서 화살표를 배열하는 상황과 길을 찾아가는 상황이 일대일로 대응한다.

$$n(\text{전체}) = n(\text{상황}\,1) + n(\text{상황}\,2) = \frac{7!}{4!2!} + \frac{7!}{3!3!}$$

2. 최단 경로 : 대각선 방법과 합의 법칙 반복적용

1) 대각선 방법 : A에서 B로 가는 최단 경로의 수는 다음과 같은 기준에 의해 나눠질 수 있다.



- C_1을 지나 최단거리로 가는 상황, C_2을 지나 최단거리로 가는 상황, C_3을 지나 최단거리로 가는 상황

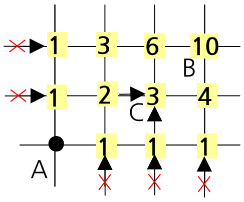
⇨ $n(A \to B)$인 전체상황은 정확히 이 세 가지 상황으로 분할되고 중복되거나 빠지는 경우는 없다.

- 즉, $n(A \to B) = n(A \to C_1 \to B) + n(A \to C_2 \to B) + n(A \to C_3 \to B)$

$$= 1 + 2 \times 3 + 3$$

(실제로 계산해서 $\frac{5!}{3!2!}$과 같음을 확인해 보았으면 한다.)

2) 합의 법칙 반복적용 : A에서 B로 최단 경로로 가기 위해서는 ↑ →의 방향으로만 움직여야 한다.



- C까지 도착하는 최단 경로의 수는 (↑인 1가지)와 (→인 2가지)를 더해서 3가지이다.
  이런 방식으로 B까지 계속 더해 나간다.

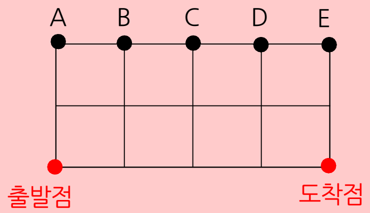
⇨ ↑ 또는 → 인 경우를 더하면 되지만 $\overset{\uparrow}{\times}$ 처럼 상황 상 불가능한 경우도 있다.

3) 대칭과 일대일 대응 (예제를 통한 학습)

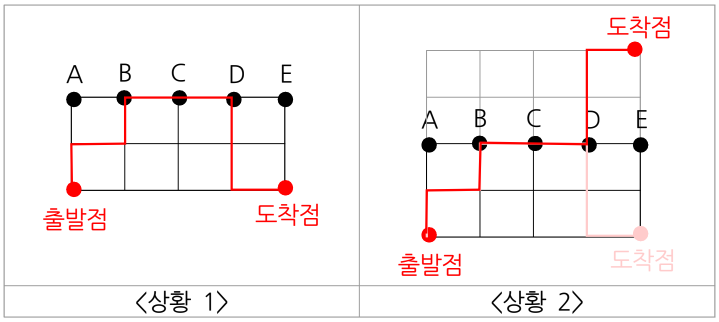
- 예제를 통해 대칭의 아이디어를 기억한다.

062 이해를 위한 예제

오른쪽 그림과 같은 도로에서 출발점에서 출발한 철수가 지점 A, B, C, D, E 중 적어도 한 개의 지점을 지나 도착점으로 오는 최단 경로의 수를 구하여라.



특정 지점을 거쳐 되돌아오는 최단경로 문제는 대칭된 경우와 일대일 대응된다.

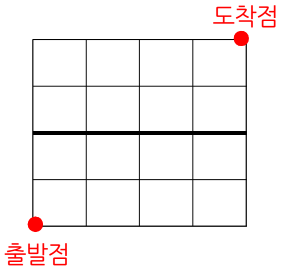


〈상황 1〉 〈상황 2〉

〈상황 1〉과 〈상황 2〉가 대응되는 것과 같이 〈모든 경로〉를 〈대칭한 경로〉에 일대일로 대응한다.

즉, 주어진 경로의 수는 아래 그림에서 〈출발점 → 도착점〉으로 가는 최단경로의 수와 같다.

(굵은 선 부분을 반드시 지날 것이므로 문제의 조건의 A, B, C, D, E 중 적어도 한 점을 지날 수밖에 없다.)

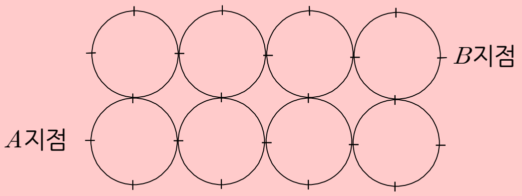


결국 이 경우는 다시 → → → → ↑ ↑ ↑ ↑ 을 배열하는 경우의 일대일 대응하므로

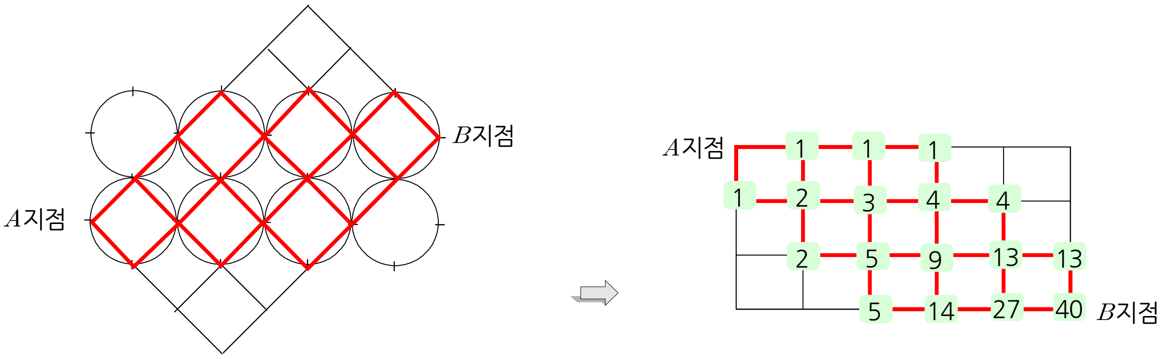
$$n(\text{전체}) = \frac{8!}{4!4!} = 70$$

063 이해를 위한 예제 2008. 11. 나형(15%). 25번. 4점

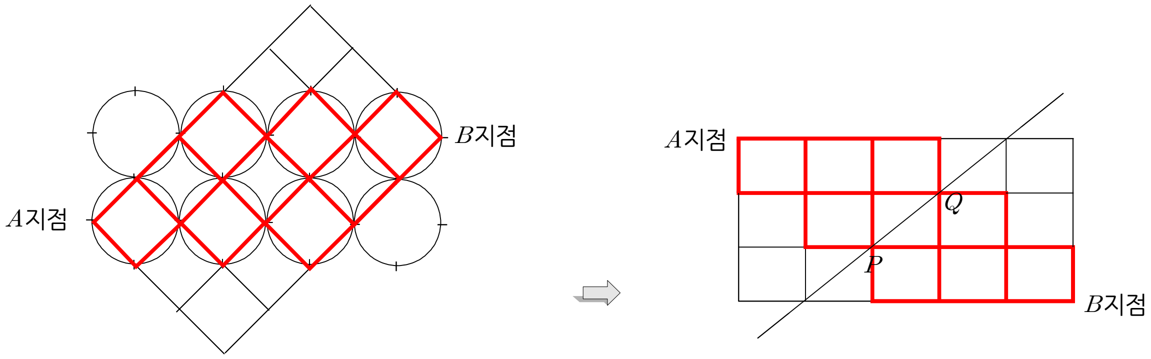
직사각형 모양의 잔디밭에 산책로가 만들어져 있다.
이 산책로는 그림과 같이 반지름의 길이가 같은 원 8개가 서로 외접하고 있는 형태이다. A지점에서 출발하여 산책로를 따라 최단 거리로 B지점에 도착하는 경우의 수를 구하시오. (단, 원 위에 표시된 점은 원과 직사각형 또는 원과 원의 접점을 나타낸다.)



주어진 상황을 단순화해도 문제의 본질은 변하지 않는다.

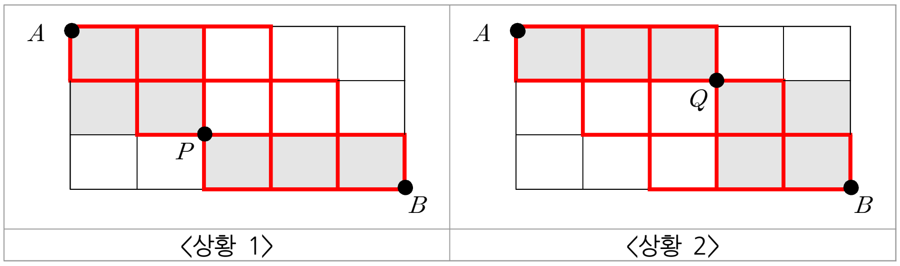


합의 법칙을 연속으로 적용하면 40가지



대각선 법을 이용하여 상황을 분할한다.

$\boxed{\text{전체상황}}$



〈상황 1〉 〈상황 2〉

: $n(\text{전체}) = 2\times n(\text{상황 1})$

〈상황 1〉과 〈상황 2〉는 각각 같은 경로의 수를 갖는다는 것을 알 수 있다. (느껴지지 않는다면 각각 세서 더해야 한다.)

$\mathrm{n}(\mathrm{A}\to\mathrm{P}) = \frac{4!}{2!2!} - 1 = 5$이고, $\mathrm{n}(\mathrm{P}\to\mathrm{B}) = \frac{4!}{3!} = 4$이므로 $n(\text{상황 1}) = \mathrm{n}(\mathrm{A}\to\mathrm{P}\to\mathrm{B}) = 5\times4 = 20$

$n(\text{전체}) = 2\times n(\text{상황 1}) = 2\times \mathrm{n}(\mathrm{A}\to\mathrm{P}\to\mathrm{B}) = 2\times5\times4 = 40$

티칭 위치는 점으로, 길은 선으로 바꿔도 문제의 본질은 변하지 않는다. 수학자 오일러가 쾨니히스베르크 다리 문제를 풀 때 했던 말이다. 수학에서 굉장히 중요한 사고방식 중의 하나가 문제의 본질이 변하지 않게 유지하면서 상황을 단순화하는 사고방식이다.

#2 입체순열

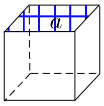
모든 응용된 문제를 풀어가는 핵심은 결국 분할적사고이다.
원순열의 핵심인 〈고정〉 그리고 〈분할적 사고〉에 의해 논리적으로 풀어간다. 단, 입체는 2번 고정해야 한다.

064 이해를 위한 예제

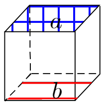
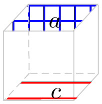
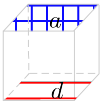
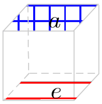
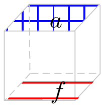
정육면체에 서로 다른 여섯 가지 색 a, b, c, d, e, f를 모두 한 번씩 칠할 때,
서로 다른 정육면체의 경우의 수를 구하여라. (단, 회전해서 같은 것은 같은 경우로 본다.)

원순열은 고정이다. : 모든 경우를 나열했다고 가정했을 때 정육면체를 돌려서 a가 위쪽을 향하게 할 수 있다.

a의 자리를 정하는 경우 ⇨ 1가지 (1차 고정)



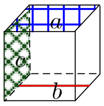
$\boxed{\text{전체상황}}$: (자리를 기준) a의 맞은편에 누군가는 칠해진다.

				
〈상황 1〉	〈상황 2〉	〈상황 3〉	〈상황 4〉	〈상황 5〉

: $n(\text{전체}) = 5 \times n(\text{상황}1)$

원순열은 고정이다. : (상황 1)에서 b가 바닥으로 고정된 상태에서 옆면에 c, d, e, f를 칠한 모든 경우를 나열했다고 가정했을 때 정육면체를 돌려서 c가 왼쪽에 있게 할 수 있다.

(상황 1) : c의 자리를 정하는 경우 ⇨ 1가지 (2차 고정)



밑면이 고정된 상황에서 남은 3개의 면은 c를 기준으로 구분할 수 있는 자리이다. 즉, $n(\text{상황}1) = 3!$

결국 $n(\text{전체}) = 5 \times n(\text{상황}1) = 5 \times 3!$

공부는 **예제**를 가지고 하는 거야

일단 풀고 맞았다고 하더라도 뒤의 해설을 정독하여 읽는다. 왜냐하면 풀이과정이 암기되어서 문제가 그냥 풀리거나 그냥 직관적으로 판단이 되어서 문제가 풀리는 경우도 많기 때문이다. 우리가 문제를 푸는 이유는 앞에서 배운 개념을 확인하기 위해서다. 이 문제를 푸는 것이 중요한 게 아니라 다른 어려운 문제에 까지 적용할 수 있는 개념을 익히는 게 중요한 것이다.

예제 037

2006. 4. 가형(66%). 14번. 4점

자연수 1, 2, 3으로 중복을 허용해서 5자리의 수를 만들어 작은 수부터 차례대로 배열하였다.

$$3^3\text{번째 수를 } a_1,$$
$$2\times 3^3\text{번째 수를 } a_2,$$
$$3\times 3^3\text{번째 수를 } a_3,$$
$$\vdots$$
$$9\times 3^3\text{번째 수를 } a_9$$

라 할 때, $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_9$ 중에서 3의 배수인 것의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

예제 038

2009. 9. 나형(35%). 30번. 4점

다음 표와 같이 3개 과목에 각각 2개의 수준으로 구성된 6개의 과제가 있다.

각 과목의 과제는 수준 I 의 과제를 제출한 후에만 수준 II 의 과제를 제출할 수 있다.

예를 들어 '국어A→수학A→국어B→영어A→영어B→수학B' 순서로 과제를 제출 할 수 있다.

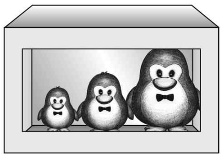
과목 수준	국어	수학	영어
I	국어A	수학A	영어A
II	국어B	수학B	영어B

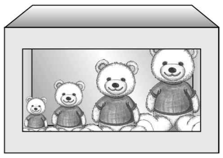
6개의 과제를 모두 제출할 때, 제출 순서를 정하는 경우의 수를 구하시오.

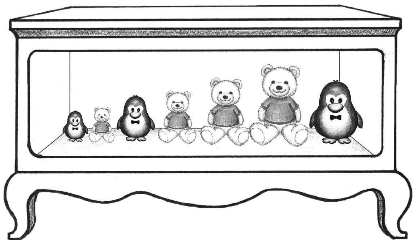
예제 039

2014. 7 B형(36%). 27번. 4점

그림과 같이 크기가 서로 다른 3개의 펭귄 인형과 4개의 곰 인형이 두 상자 A, B에 왼쪽부터 크기가 작은 것에서 큰 것 순으로 담겨져 있다. 다음 조건을 만족시키도록 상자 A, B의 모든 인형을 일렬로 진열하는 경우의 수를 구하시오.


상자 A


상자 B



(가) 같은 상자에 담겨있는 인형은 왼쪽부터 크기가 작은 것에서 큰 것 순으로 진열한다.

(나) 상자 A의 왼쪽에서 두 번째 펭귄 인형은 상자 B의 왼쪽에서 두 번째 곰 인형보다 왼쪽에 진열한다.

예제 040

2004. 11. 나형(42%). 14번. 4점

여덟 개의 a와 네 개의 b를 모두 사용하여 만든 12자리 문자열 중에서 다음 조건을 모두 만족시키는 문자열의 개수는?

(가) b는 연속해서 나올 수 없다.

(나) 첫째 자리 문자가 b이면 마지막 자리 문자는 a이다.

① 70 ② 105 ③ 140 ④ 175 ⑤ 210

예제 041

2004. 6. 나형(22%). 30번. 4점

7개의 문자 $a,\ a,\ b,\ b,\ c,\ d,\ e$ 를 일렬로 나열할 때, a끼리 또는 b끼리 이웃하게 되는 모든 경우의 수를 구하시오.

예제 042

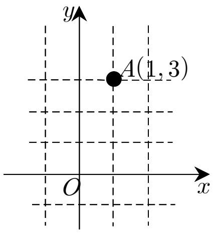
2006. 3. 가형(44%). 19번. 3점

6개의 숫자 $1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9$ 를 이용하여 다섯 자리 자연수를 만들 때 7만 중복하여 사용할 수 있다. 7을 2개 이상 포함하고, 7끼리는 이웃하지 않는 서로 다른 자연수의 개수를 구하시오.

예제 043

2004. 3. 가형(%). 29번. 4점

좌표평면 위에서 상하 또는 좌우방향으로 한 번에 1만큼씩 움직이는 점P가 있다. 이 때, 원점을 출발한 점P가 6번 움직여서 최종 위치가 점 $A(1,\ 3)$이 되는 경우의 수를 구하시오.



예제 044

2009. 6. 가형(22%), 나형(15%). 25번. 4점

좌표평면 위의 점들의 집합 $S=\{(x,y)\square x,y$와 y는 정수$\}$가 있다. 집합 S에 속하는 한 점에서 S에 속하는 다른 점으로 이동하는 '점프'는 다음 규칙을 만족시킨다.

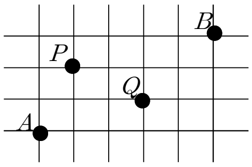
> 점 P에서 한 번의 '점프'로 점 Q로 이동할 때,
> 선분 PQ의 길이는 1 또는 $\sqrt{2}$이다.

점 $A(-2,0)$에서 점 $B(2,0)$까지 4번만 '점프'하여 이동하는 경우의 수를 구하시오.
(단, 이동하는 과정에서 지나는 점이 다르면 다른 경우이다.)

예제 045

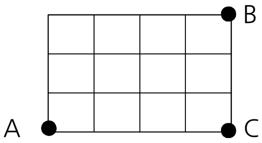
2004. 10. 가형(44%), 나형(29%). 24번. 4점

그림과 같이 바둑판 모양의 도로망이 있다. 교차로 P와 교차로 Q를 지날 때에는 직진 또는 우회전은 할 수 있으나 좌회전은 할 수 없다고 한다. 이 때, A지점에서 B지점까지 최단거리로 가는 방법의 수를 구하시



예제 046

철수는 A에서 B로 최단경로로 가는 중에 목적지가 C로 바뀌었다는 전화를 받고 목적지를 수정하여 다시 최단경로로 간다고 하자. 이때 철수가 선택할 수 있는 모든 경로의 수를 구하시오. (단, 왔던 길을 다시 되돌아 갈수 있고 C를 거쳐 B로 가던 중 전화를 받고 다시 C로 되돌아가는 경로의 수도 포함한다.)

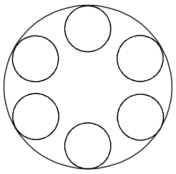


예제 047

2011. 9. 가형(94%). 6번. 3점

그림과 같이 최대 6개의 용기를 넣을 수 있는 원형의 실험 기구가 있다. 서로 다른 6개의 용기 A, B, C, D, E, F를 이 실험 기구에 모두 넣을 때, A와 B가 이웃하게 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

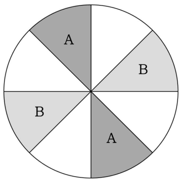
① 36 ② 48 ③ 60 ④ 72 ⑤ 84



예제 048

2009. 10. 나형(37%). 20번. 3점

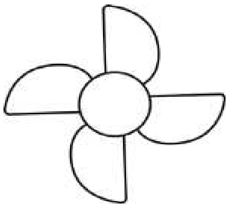
8등분된 원판에 A, B, C, D, E, F 의 6가지 색을 모두 사용하여 영역을 구분하려고 한다. 그림과 같이 A, B 두 가지 색은 이미 칠해져 있을 때, 칠해져 있지 않은 영역에 칠할 수 있는 방법의 수를 구하시오. (단, 한 영역에는 한 가지 색을 칠하고, 회전하여 같은 경우에는 한 가지 방법으로 한다.)



예제 049

2007. 3. 가형(28%). 15번. 4점

A, B, C, D 4가지 색의 일부 또는 전부를 사용하여 그림과 같은 프로펠러의 중앙 부분과 4개의 날개 부분을 모두 칠하려고 한다. 인접한 중앙 부분과 날개 부분은 서로 다른 색으로 칠하기로 할 때, 칠할 수 있는 방법의 수는?
(단, 4개의 날개는 모두 합동이고, 회전하여 같은 경우에는 한 가지 방법으로 한다.)

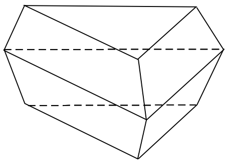


① 60 ② 72 ③ 84 ④ 96 ⑤ 108

예제 050

2010. 3. 가형(69%). 15번. 4점

그림과 같이 합동인 정삼각형 2개와 합동인 등변사다리꼴 6개로 이루어진 팔면체가 있다. 팔면체의 각 면에는 한 가지의 색을 칠한다고 할 때, 서로 다른 8개의 색을 모두 사용하여 팔면체의 각 면을 칠하는 경우의 수는?
(단, 팔면체를 회전시켰을 때 색의 배열이 일치하면 같은 경우로 생각한다.)



① 6520 ② 6620 ③ 6720 ④ 6820 ⑤ 6920

정답과 해설

예제 037

REVIEW 중복순열은 곱의 법칙 그 이상도 이하도 아니다. + 배수판정법

2006. 4. 가형(66%). 14번. 4점

자연수 1, 2, 3으로 중복을 허용해서 5자리의 수를 만들어 작은 수부터 차례대로 배열하였다.

$$3^3\text{번째 수를 } a_1,$$
$$2\times 3^3\text{번째 수를 } a_2,$$
$$3\times 3^3\text{번째 수를 } a_3,$$
$$\vdots$$
$$9\times 3^3\text{번째 수를 } a_9$$

라 할 때, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_9 중에서 3의 배수인 것의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\boxed{}\boxed{}\boxed{}$인 빈 칸에 1,2,3을 중복을 허락하여 배열할 수 있는 모든 경우의 수는 3^3가지이고,

이 중 가장 큰 수는 $\boxed{3}\boxed{3}\boxed{3}$이다.

여기까지가 중복순열이고, 이제부터는 추론이다. 문제의 조건에 맞게 순서대로 배열하면 다음과 같다.

1	1	1	1	1	1 번째
1	1	1	1	2	2 번째
⋮					⋮
1	1	3	3	3	3^3 번째
1	2	1	1	1	3^3+1 번째
1	2	1	1	2	3^3+2 번째
⋮					⋮
1	2	3	3	3	$2\cdot3^3$번째

1	3	1	1	1	$2\cdot3^3+1$ 번째
1	3	1	1	2	$2\cdot3^3+2$ 번째
⋮					⋮
1	3	3	3	3	$3\cdot3^3$ 번째
2	1	1	1	1	$3\cdot3^3+1$ 번째
2	1	1	1	2	$3\cdot3^3+2$ 번째
⋮					⋮
2	1	3	3	3	$4\cdot3^3$번째

⋯

결국, a_n은 $\boxed{}\boxed{}\boxed{3}\boxed{3}\boxed{3}$에서 $\boxed{}\boxed{}$부분에 1,2,3을 중복을 허락하여 배열할 수 있는 모든 수를 작은 수부터 나열한 것이다.

$a_1=11333$, $a_2=12333$, $a_3=13333$, $a_4=21333$, $a_5=22333$, $a_6=23333$, $a_7=31333$, $a_8=32333$, $a_9=33333$

3의 배수는 a_2, a_4, a_9이다. (3의 배수 판정법에 의하여 $\boxed{}\boxed{}\boxed{3}\boxed{3}\boxed{3}$중 뒤에 세 수의 합은 3의 배수이므로 $\boxed{}\boxed{}$부분의 합만 3의 배수이면 각 자리의 모든 수의 합은 3의 배수가 된다.)

정답은 ③

예제 038

REVIEW 같은 것을 포함한 순열 + 순서가 정해진 경우

2009. 9. 나형(35%). 30번. 4점

다음 표와 같이 3개 과목에 각각 2개의 수준으로 구성된 6개의 과제가 있다.

각 과목의 과제는 수준Ⅰ의 과제를 제출한 후에만 수준Ⅱ의 과제를 제출할 수 있다.

예를 들어 ‘국어A→수학A→국어B→영어A→영어B→수학B’ 순서로 과제를 제출 할 수 있다.

과목 수준	국어	수학	영어
Ⅰ	국어A	수학A	영어A
Ⅱ	국어B	수학B	영어B

6개의 과제를 모두 제출할 때, 제출 순서를 정하는 경우의 수를 구하시오.

풀이 1) 수준Ⅰ의 과제를 제출한 후에만 수준Ⅱ의 과제를 제출 - 국어는 국어, 수학은 수학, 영어는 영어끼리 순서가 정해져 있다. 즉, 문제의 상황은 같은 과목끼리는 같은 문자로 취급하여 <국국수수영영>을 배열하는 경우와 경우의 수적 본질이 같다.

$$\frac{6!}{2!2!2!} = 90$$

풀이 2) 같은 것은 포함한 순열과 조합은 본질적으로 같다. 각 과목의 제출 순서를 □□□□□□의 6칸에 나타낸다고 할 때, 국어A, B는 6칸 중 어딘가는 들어간다. 즉, $n(\text{국어배치}) = {}_6C_2$이다. (자리만 선정하면 자동배열)
이 경우, 각각에 대하여 수학 A, B도 남은 4칸 중 어딘가에 들어간다. 수학이 들어갈 자리를 선정하면 수학끼리는 자동 배열되고 남은 자리에 영어도 자동 배열된다. 즉, $n(\text{전체}) = {}_6C_2 \times {}_4C_2 = 15 \times 6 = 90$

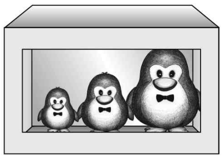
정답은 90

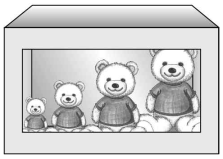
REVIEW 전체적으로는 분할적 사고를 쓰되 부분적으로 공식을 쓴다. + 같포순은 조합이다.

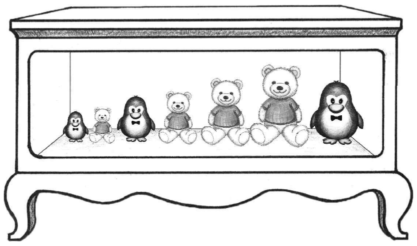
예제 039

2014. 7 B형(36%). 27번. 4점

그림과 같이 크기가 서로 다른 3개의 펭귄 인형과 4개의 곰 인형이 두 상자 A, B에 왼쪽부터 크기가 작은 것에서 큰 것 순으로 담겨져 있다. 다음 조건을 만족시키도록 상자 A, B의 모든 인형을 일렬로 진열하는 경우의 수를 구하시오.


상자 A


상자 B



(가) 같은 상자에 담겨있는 인형은 왼쪽부터 크기가 작은 것에서 큰 것 순으로 진열한다.
(나) 상자 A의 왼쪽에서 두 번째 펭귄 인형은 상자 B의 왼쪽에서 두 번째 곰 인형보다 왼쪽에 진열한다.

같은 상자에 담겨있는 인형 + 작은 것에서 큰 것 순으로 진열 - 즉 같은 종류의 인형끼리 순서가 정해져 자동 배열된다.

펭귄 인형을 크기가 작은 것부터 A_1, A_2, A_3이라 하고 곰 인형을 크기가 작은 것부터 B_1, B_2, B_3, B_4라고 하자.

상자 A의 왼쪽에서 두 번째 펭귄 인형은 상자 B의 왼쪽에서 두 번째 곰 인형보다 왼쪽에 진열한다.

(대상을 기준) A_2, B_2가 어딘가에는 들어갈 것이므로 A_2와 B_2를 기준으로 상황을 분할한다.

A_2, B_2가 조건에 맞게 어딘가는 들어가겠지만 $\boxed{A_2}\boxed{B_2}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$와 같이 들어가면 A_1과 B_1이 들어갈 자리가 없다.

전체상황 (대상을 기준) A_2, B_2가 어딘가에는 들어간다.

상황 1		A_2		B_2			
상황 2		A_2			B_2		
~~ ~~		~~A_2~~				~~B_2~~	
상황 3			A_2	B_2			
상황 4			A_2		B_2		
~~ ~~			~~A_2~~			~~B_2~~	
~~ ~~				~~A_2~~	~~B_2~~		

: n(전체) $=$ n(상황1) $+$ n(상황2) $+$ n(상황3) $+$ n(상황4)

B_2의 오른쪽에는 B_3, B_4가 들어갈 최소 두 자리가 필요하다. A_2의 위치를 고정시키고 B_2를 움직이며 생각해서 일일이 따지면 금방 모든 경우를 찾을 수 있다.

(상황1)은 $\boxed{A_1}\boxed{A_2}\boxed{B_1}\boxed{B_2}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$이고 남은 3칸에 A_3, B_3, B_4를 배치하는 경우의 수와 같다.
A_3의 자리가 결정되면 B_3, B_4는 자동 결정되므로 n(상황1) $= 3$

(상황2)는 $\boxed{A_1}\boxed{A_2}$🟨🟨$\boxed{B_2}\boxed{}\boxed{}$이고 🟨🟨의 두 칸 중 A_3의 위치만 결정되면 남은 문자는 모두 자동 배열된다. 즉, n(상황2) $= 2$

(상황3)은 🟨🟨$\boxed{A_2}\boxed{B_2}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$은 🟨🟨의 위치에 A_1을 배치하는 2가지 (B_1은 자동배치) 각각에 대하여 $\boxed{}\boxed{}\boxed{}$의 세 자리에 A_3를 배치하는 세 가지 (B_2, B_3는 자동배치)이므로 n(상황3) $= 2\times3 = 6$

(상황4)는 $\boxed{\text{상황 4}}\boxed{}\boxed{}\boxed{A_2}\boxed{A_3}\boxed{B_2}\boxed{B_3}\boxed{B_4}$(까지 자동배치임을 이해) 에서 $\boxed{}\boxed{}$의 위치에 A_1을 배치하는 2가지 (B_1은 자동배치) n(상황4) $= 2$

n(전체) $=$ n(상황1) $+$ n(상황2) $+$ n(상황3) $+$ n(상황4) $= 3 + 2 + 6 + 2 = 13$

티칭 이 문제에 대해 교육청에서 제시한 해설지이다.

펭귄 인형을 크기가 작은 것부터 a_1, a_2, a_3이라 하고 곰 인형을 크기가 작은 것부터 b_1, b_2, b_3, b_4라 하자.

(ⅰ) a_3이 b_2보다 왼쪽에 있는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$

(ⅱ) a_3이 b_2보다 오른쪽에 있는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!}=9$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는 13 - 끝이다. 해설을 스스로 이해해 본 후, 다음으로 넘어가자.

해설을 이해하지 못했다면 아직도 구체적으로 상황을 나열하면서 이해하는 습관이 안 되어 있는 것이다.

펭귄 인형을 크기가 작은 것부터 a_1, a_2, a_3이라 하고 곰 인형을 크기가 작은 것부터 b_1, b_2, b_3, b_4라 하자.

전체상황 (배열 전 모든 상황) a_3와 b_2의 위치관계는 2가지

(ⅰ) a_3이 b_2보다 왼쪽에 있는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$

⇨ b_2를 기준으로 생각한 것이다. 문제의 조건에서 a_1, a_2, b_1는 모두 b_2보다 왼쪽에 있어야 하는데 a_3는 b_2보다 왼쪽에 있을 수도 있고 오른쪽이 있을 수 있으므로 이 두 가지로 상황을 분할 한 것이다.

⇨ 설정된 상황에서 a_1, a_2, b_1, a_3는 모두 b_2보다 왼쪽에 있어야 하므로 상황은

				b_2	b_3	b_4

으로 고정된다. 결국 a_1, a_2, a_3, b_1를 남은 네 칸에 배열한 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$로 계산할 수 있다.

(ⅱ) a_3이 b_2보다 오른쪽에 있는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!}=9$

⇨

🟨	🟨	🟨	b_2	🟩	🟩	🟩

에서 🟨🟨🟨에는 a_1, a_2, b_1이 들어가야 하므로 $\frac{3!}{2!}$이고 그 각각에 대하여

🟩🟩🟩에는 a_3, b_3, b_4가 들어가야 하므로 $\frac{3!}{2!}$이다.

그래서 $\frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!}=9$이다.

여기까지에서도 b_2의 위치가 진짜 저 두 가지밖에 없다는 확신은 b_2의 위치를 움직이면서 고정시켜봐야 가질 수 있다.

역시 경우의 수는 전체적으로는 분할적 사고를 쓰되 부분적으로 공식을 쓴다.

코칭 첫 번째 풀이든, 두 번째 풀이든 풀이에 걸리는 시간은 엄청난 차이가 있지 않다.

경우의 수의 핵심은 <효율적 풀이>에 있지 않고, <정확한 풀이와 논리의 확신>에 있다.

효율적 풀이는 정확하게 푸는 연습을 하다보면 자연스럽게 길러진다.

예제 040

REVIEW 전체적으로는 분할적 사고를 쓰되 부분적으로 공식을 쓴다.

\+ 같은 것들에서 일부를 뽑는 것은 일일이 따진다.

\+ 같 · 포 · 순은 조합이다. + 이웃하지 않게 배열하는 경우의 수

2004. 11. 나형(42%). 14번. 4점

여덟 개의 a와 네 개의 b를 모두 사용하여 만든 12자리 문자열 중에서 다음 조건을 모두 만족시키는 문자열의 개수는?

(가) b는 연속해서 나올 수 없다.
(나) 첫째 자리 문자가 b이면 마지막 자리 문자는 a이다.

① 70 ② 105 ③ 140 ④ 175 ⑤ 210

전체상황 : (자리를 기준) 첫 번째 자리에 뭔가는 온다.

상황 1 :	a		⋯	
상황 2 :	b	a	⋯	a

: n(전체) $=$ n(상황1) $+$ n(상황2)

(상황 2)에서 b는 연속해서 나올 수 없으므로 a의 위치가 고정된다.

결국 (상황 1)에서 남은 자리 11개에 a a a a a a a과 b b b b을 배열하되 b는 이웃하지 않게 배열해야 한다.

즉, ✓ a ✓ a ✓ a ✓ a ✓ a ✓ a ✓ a ✓ 의 8개의 자리 중 4개의 자리를 뽑아서 b를 배치하면 된다.

n(상황1) $= {}_8C_4$ (a의 순서나 b의 순서는 고려하지 않는다.)

(상황 2)에서는 a a a a a a 과 b b b을 배열하되 b는 이웃하지 않게 배열해야 한다.

즉, ✓ a ✓ a ✓ a ✓ a ✓ a ✓ a ✓의 7개의 자리 중 3개를 뽑아서 b를 배치하면 된다. n(상황2) $= {}_7C_3$

(a의 순서나 b의 순서는 고려하지 않는다.)

n(전체) $=$ n(상황1) $+$ n(상황2) $= {}_8C_4 + {}_7C_3 = 35 + 70 = 105$

코칭 원래 <같 · 포 · 순>은 조합은 같은 상황이다. 상황에 공식을 대입하려고 하지 않는다.
<같 · 포 · 순>은 조합으로 자연스럽게 풀어나간다.

예제 041

REVIEW 집합의 아이디어 + 덩어리 배열의 아이디어 + 같 · 포 · 순

2004. 6. 나형(22%). 30번. 4점

7개의 문자 $a,\ a,\ b,\ b,\ c,\ d,\ e$ 를 일렬로 나열할 때, a끼리 또는 b끼리 이웃하게 되는 모든 경우의 수를 구하시오.

풀이 1) 집합적 아이디어 $n(A\cup B)\ =\ n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

a끼리 또는 b끼리 이웃하게 되는 모든 경우 - 이것은 <덩어리 배열의 아이디어>로 풀 경우 동시에 발생하는 경우가 생긴다.

즉, n(전체) $=$ n(a끼리 이웃) $+$ n(b끼리 이웃) $-$ n(a끼리/b끼리 이웃)

n(a끼리 이웃)은 $\boxed{aa}$를 하나의 덩어리로 보고 $\boxed{aa},\ b,\ b,\ c,\ d,\ e$ 6개를 배열하는 경우의 수와 같다.

즉, n(a끼리 이웃) $=\ \dfrac{6!}{2!}\ =\ 360$

n(b끼리 이웃)은 $\boxed{bb}$를 하나의 덩어리로 보고 $\boxed{bb},\ a,\ a,\ c,\ d,\ e$ 6개를 배열하는 경우의 수와 같다.

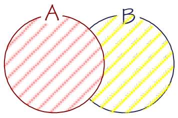
즉, n(b끼리 이웃) $=\ \dfrac{6!}{2!}\ =\ 360$

n(a끼리/b끼리 이웃)은 $\boxed{aa}$, $\boxed{bb}$를 각각 하나의 덩어리로 보고 $\boxed{aa},\ \boxed{bb},\ c,\ d,\ e$ 5개를 배열한 경우의 수와 같다.

즉, n(a끼리/b끼리 이웃) $=\ 5!\ =\ 120$

n(a끼리 이웃) $+$ n(b끼리 이웃) $-$ n(a끼리/b끼리 이웃) $=\ \dfrac{6!}{2!}\ +\ \dfrac{6!}{2!}\ -\ 5!\ =\ 360\ +\ 360\ -\ 120\ =\ 600$

풀이 2) 경우의 수적 아이디어 - $n(A\cup B)\ =\ n(A)\ +\ n(A$가 아닌 $B)$



: 상황이 복잡해질수록 동시에 발생하는 상황이 일어나지 않도록 상황을 분할하는 게 중요하다.

a끼리 또는 b끼리 이웃하게 되는 모든 경우 - 이것은 <덩어리 배열의 아이디어>로 풀 경우 동시에 발생하는 경우가 생긴다.

즉, n(전체) $=$ n(a끼리 이웃) $+$ n(a끼리 이웃× /b끼리 이웃)

n(a끼리 이웃)은 $\boxed{aa}$를 하나의 덩어리로 보고 $\boxed{aa},\ b,\ b,\ c,\ d,\ e$ 6개를 배열하는 경우의 수와 같다.

즉, n(a끼리 이웃) $=\ \dfrac{6!}{2!}\ =\ 360$

n(a끼리 이웃× /b끼리 이웃)은 $\boxed{bb}$를 하나의 덩어리로 보고 $\boxed{bb}\ c\ d\ e$ 4개를 배열하되 그 각각에 대하여

✓ $\boxed{bb}$ ✓ c ✓ d ✓ e ✓ 의 5개의 자리에 중 2 자리에 $a\ a$ 를 배치한 경우의 수와 같다.

즉, n(a끼리 이웃× /b끼리 이웃) $=\ 4!\times{}_5C_2\ =\ 4!\times{}_5C_2\ =\ 240$

n(a끼리 이웃) $+$ n(a끼리 이웃× /b끼리 이웃) $=\ \dfrac{6!}{2!}\ +\ {}_5C_2\ =\ 360\ +\ 240\ =\ 600$

예제 042

REVIEW 전체적으로는 분할적 사고를 쓰되 부분적으로 공식을 쓴다. + 같 · 포 · 순은 조합이다.

2006. 3. 가형(44%). 19번. 3점

6개의 숫자 1, 2, 3, 5, 7, 9 를 이용하여 다섯 자리 자연수를 만들 때 7만 중복하여 사용할 수 있다. 7을 2개 이상 포함하고, 7끼리는 이웃하지 않는 서로 다른 자연수의 개수를 구하시오.

전체상황 : (개수로 분류) 7의 사용되는 개수로 상황을 분류한다.

상황 1 : 7이 두 개
상황 2 : 7이 세 개
~~상황 3 : 7이 네 개~~ : $n(\text{전체}) = n(\text{상황}1) + n(\text{상황}2)$

7이 네 개인 다섯 자리 자연수는 반드시 이웃 7끼리 이웃할 수밖에 없다.

(상황1)은 7, 7은 이웃할 수 없으므로 ✓ □ ✓ □ ✓ □ ✓ 의 4자리 중 2자리를 뽑아 배치하면 되므로 ${}_4C_2$

이 경우, 각각에 대하여 □의 자리에는 7을 제외한 1, 2, 3, 5, 9 중 3개를 뽑아 배열한 경우의 수이므로 ${}_5P_3$

결국, $n(\text{상황}1) = {}_4C_2 \times {}_5P_3$

(상황2)는 7, 7, 7은 이웃 할 수 없으므로 다섯자리 자연수에서 7 □ 7 □ 7 와 같이 위치가 고정되고, 1, 2, 3, 5, 9 중 2개를 뽑아 남은 빈 자리에 배열한 경우의 수이므로 즉, $n(\text{상황}2) = {}_5P_2$

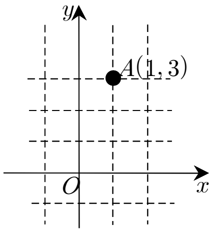
$$n(\text{전체}) = n(\text{상황}1) + n(\text{상황}2) = {}_4C_2 \times {}_5P_3 + {}_5P_2 = 360 + 20 = 380$$

예제 043

REVIEW 경로의 수 문제 : 화살표의 배열

2004. 3. 가형(%). 29번. 4점

좌표평면 위에서 상하 또는 좌우방향으로 한 번에 1만큼씩 움직이는 점 P가 있다. 이 때, 원점을 출발한 점 P가 6번 움직여서 최종 위치가 점 $A(1, 3)$이 되는 경우의 수를 구하시오.



최종 위치가 점 $A(1, 3)$ - 원점에서 최종위치까지 최단거리로 가는 경로의 수는 → ↑ ↑ ↑을 배열하는 상황과 일대일 대응한다.

6번 움직여서 - 6번 움직여서 최종위치가 $A(1, 3)$이 된다는 말은 최단거리인 → ↑ ↑ ↑에서 → ← 가 추가되거나 ↑ ↓가 추가된 상황을 말한다.

전체상황 : (배열 전 모든 상황) 6번 움직여서 최종위치가 $A(1, 3)$

상황 1 : → ↑ ↑ ↑ → ←
상황 2 : → ↑ ↑ ↑ ↑ ↓ : $n(\text{전체}) = n(\text{상황}1) + n(\text{상황}2)$

각 상황에서 화살표를 배열하는 경우의 수는 같은 것을 포함한 순열을 통해서 구할 수 있다.

$$n(\text{전체}) = n(\text{상황}1) + n(\text{상황}2) = \frac{6!}{4!} + \frac{6!}{2!3!} = 90$$

티칭 6번 움직여서 최종 위치가 점 $A(1, 3)$ 라는 표현은 문제가 상당히 신경을 쓴 표현으로 중간에 $A(1, 3)$을 거쳐도 최종위치만 $A(1, 3)$이면 상관없다는 뜻을 내포한다. 즉, → ↑ ↑ ↑ → ← 를 마음대로 배열해도 상관없다는 뜻이다.

예제 044

REVIEW 경로의 수 문제 : 화살표의 배열

2009. 6. 가형(22%), 나형(15%). 25번. 4점

좌표평면 위의 점들의 집합 $S=\{(x,y)□x,y$와 y는 정수$\}$가 있다. 집합 S에 속하는 한 점에서 S에 속하는 다른 점으로 이동하는 '점프'는 다음 규칙을 만족시킨다.

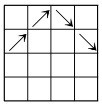
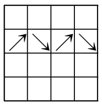
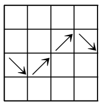
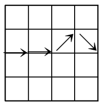
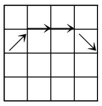
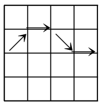
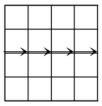
> 점 P에서 한 번의 '점프'로 점 Q로 이동할 때,
> 선분 PQ의 길이는 1또는 $\sqrt{2}$ 이다.

- 결국 ↗ ↘ →과 같이 이동한다는 뜻이다.

점 $A(-2,0)$ 에서 점 $B(2,0)$ 까지 4번만 '점프'하여 이동하는 경우의 수를 구하시오.
(단, 이동하는 과정에서 지나는 점이 다르면 다른 경우이다.)

조건에 맞게 점프하여 이동하는 몇 가지 경우를 나열해보면 다음과 같다.

전체상황 : (배열 전 모든 상황) 에서 파악된 사실을 기반으로 화살표를 배열하기 전 모든 상황을 생각한다.

상황 1				상황 2				상황 3
			⋯				⋯	
↗↗↘↘	↗↘↗↘	↘↗↗↘	⋯	→→↗↘	↗→→↘	↗→↘→	⋯	→→→→

(상황 1)에서 이동하는 모든 상황은 결국 ↗↗↘↘을 배열하는 경우와 일대일 대응한다는 사실을 이해한다.

즉, $n(\text{상황}1) = \dfrac{4!}{2!2!} = 6$

(상황 2)에서 이동하는 모든 상황은 결국 ↗↘→→을 배열하는 경우와 일대일 대응한다는 사실을 이해한다.

즉, $n(\text{상황}2) = \dfrac{4!}{2!} = 12$

(상황 3)은 →→→→의 경우 한 가지 뿐이다.

즉, $n(\text{상황}3) = 1$

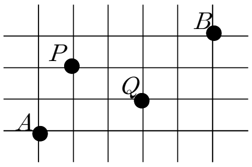
$$n(\text{전체}) = n(\text{상황}1) + n(\text{상황}2) + n(\text{상황}3) = \frac{4!}{2!2!} + \frac{4!}{2!} + 1 = 6 + 12 + 1 = 19$$

예제 045

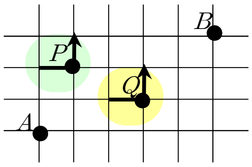
REVIEW 경로의 수 문제 : 화살표의 배열

2004. 10. 가형(44%), 나형(29%). 24번. 4점

그림과 같이 바둑판 모양의 도로망이 있다. 교차로 P와 교차로 Q를 지날 때에는 직진 또는 우회전은 할 수 있으나 좌회전은 할 수 없다고 한다. 이 때, A지점에서 B지점까지 최단거리로 가는 방법의 수를 구하시



여사건의 아이디어를 생각한다.



A에서 B까지 가는 최단경로의 수는 →→→→→↑↑↑을 배열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{8!}{5!3!}$이다.

좌회전은 할 수 없다. - 최단거리로 가는 경로 중 P와 Q에서 좌회전이 포함된 경로는 🟢와 🟡이다.

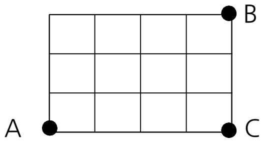
🟢에 해당하는 경로의 수 $=$ 1이고, 🟡에 해당하는 경로의 수 $= \frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!} = 9$이다.

n(문제의 조건) $=$ n(최단경로) $-$ n(P 좌회전) $-$ n(Q 좌회전) $= \frac{8!}{5!3!} - 1 - \frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!} = 56 - 1 - 9 = 46$

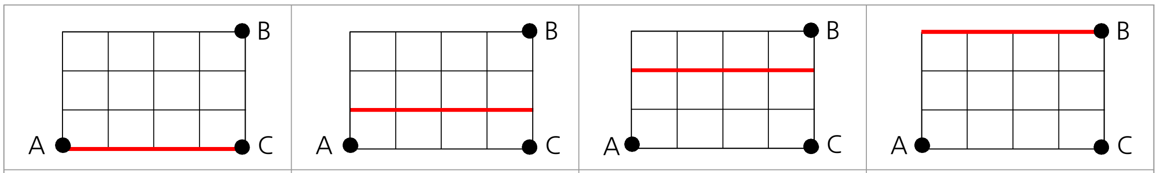
예제 046

REVIEW 경로의 수 문제 : 대칭과 일대일 대응

철수는 A에서 B로 최단경로로 가는 중에 목적지가 C로 바뀌었다는 전화를 받고 목적지를 수정하여 다시 최단경로로 간다고 하자. 이때 철수가 선택할 수 있는 모든 경로의 수를 구하시오. (단, 왔던 길을 다시 되돌아 갈수 있고 C를 거쳐 B로 가던 중 전화를 받고 다시 C로 되돌아가는 경로의 수도 포함한다.)

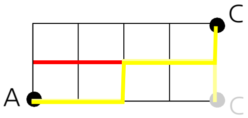


전체상황은 크게 연락을 받은 위치에 따라서 크게 4가지 상황으로 나눌 수 있다.



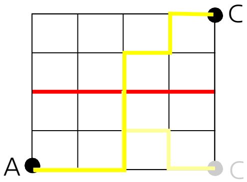
〈상황 1〉 〈상황 2〉 〈상황 3〉 〈상황 4〉

〈상황 1〉은 1가지이다. $n(\text{상황}\,1) = 1$



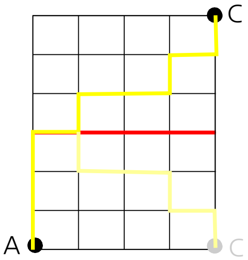
〈상황 2〉의 모든 경로는 C를 ▬ 에 대칭시켜 만든 경로와 일대일 대응하므로 $n(\text{상황}\,2) = \dfrac{6!}{2!4!} = 15$

위의 그림은 대응의 한 가지 예시일 뿐 나머지 모든 경우에 대해서도 대응되는 경로가 있음을 확신해야 한다.



〈상황 3〉의 모든 경로는 C를 ▬ 에 대칭시켜 만든 경로와 일대일 대응하므로 $n(\text{상황}\,3) = \dfrac{8!}{4!4!} = 70$

위의 그림은 대응의 한 가지 예시일 뿐 나머지 모든 경우에 대해서도 대응되는 경로가 있음을 확신해야 한다.



〈상황 4〉의 모든 경로는 C를 ▬ 에 대칭시켜 만든 경로와 일대일 대응하므로 $n(\text{상황}\,4) = \dfrac{10!}{4!6!} = 210$

위의 그림은 대응의 한 가지 예시일 뿐 나머지 모든 경우에 대해서도 대응되는 경로가 있음을 확신해야 한다.

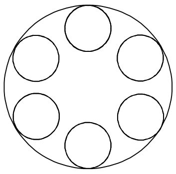
$$n(\text{전체}) = n(\text{상황}\,1) + n(\text{상황}\,2) + n(\text{상황}\,3) + n(\text{상황}\,4) = 1 + 15 + 70 + 210 = 296$$

예제 047

REVIEW 전체적으로는 분할적 사고를 쓰되 부분적으로 공식을 쓴다. + 원순열은 고정이다.

2011. 9. 가형(94%). 6번. 3점

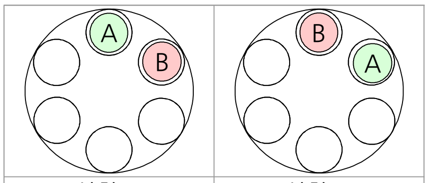
그림과 같이 최대 6개의 용기를 넣을 수 있는 원형의 실험 기구가 있다. 서로 다른 6개의 용기 A, B, C, D, E, F를 이 실험 기구에 모두 넣을 때, A와 B가 이웃하게 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



① 36 ② 48 ③ 60 ④ 72 ⑤ 84

원순열은 고정이다. - 6명을 원순열로 배열한 모든 경우에 대하여 회전하여 A와 B의 위치를 고정한 후 관찰

전체상황 (대상을 기준) A와 B가 어딘가에는 온다.



상황 1 상황 2

: $n(\text{전체}) = 2\times n(\text{상황}1)$

6개를 모두 배열했다고 가정했을 때 회전해서 A와 B의 위치를 <상황1> 또는 <상황2>로 고정 할 수 있다.

<상황 1>과 <상황 2>는 회전해도 절대 겹칠 수 없다. 이 두 가지 상황은 완전히 구분이 가능한 상황이다.

A와 B가 고정되는 순간 A와 B를 기준으로 모두 위치를 구분하므로 <계승의 상황>과 <경우의 수적 본질이 같은 상황>이다.

즉, $n(\text{상황}1) = 4!$

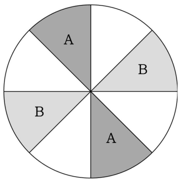
$n(\text{전체}) = 2\times n(\text{상황}1) = 2\times 4! = 48$ 정답은 ②

예제 048

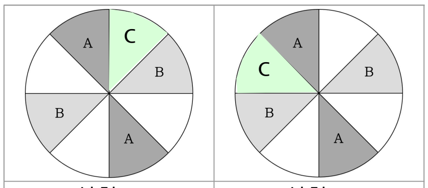
REVIEW 전체적으로는 분할적 사고를 쓰되 부분적으로 공식을 쓴다. + 원순열은 고정이다.

2009. 10. 나형(37%). 20번. 3점

8등분된 원판에 A, B, C, D, E, F 의 6가지 색을 모두 사용하여 영역을 구분하려고 한다. 그림과 같이 A, B 두 가지 색은 이미 칠해져 있을 때, 칠해져 있지 않은 영역에 칠할 수 있는 방법의 수를 구하시오. (단, 한 영역에는 한 가지 색을 칠하고, 회전하여 같은 경우에는 한 가지 방법으로 한다.)



전체상황 (대상을 기준) C가 어딘가에는 온다.



상황 1 상황 2

: $n(\text{전체}) = 2\times n(\text{상황}1)$

6명을 모두 배열했다고 가정했을 때 회전해서 C의 위치를 <상황1> 또는 <상황2>로 고정 할 수 있다.

<상황 1>은 C의 오른쪽에 A가 있고 <상황 2>는 C의 왼쪽에 A가 있으므로 회전해도 절대 겹칠 수 없다. 물론 오른쪽과 왼쪽에 이견이 있을 수 있는데 여기서의 필자가 기준으로 삼은 것은 마치 원탁에 앉는 것처럼 C위에 원의 중심을 바라보고 앉았을 때를 기준으로 오른쪽과 왼쪽을 정한 것이다.

C가 고정되는 순간 C를 기준으로 모두 위치를 구분하므로 <계승의 상황>과 <경우의 수적 본질이 같은 상황>이다.

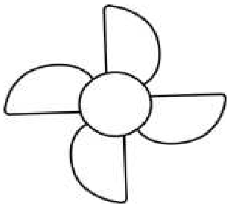
즉, $n(\text{상황}1) = 3!$

$n(\text{전체}) = 2\times n(\text{상황}1) = 2\times 3! = 12$

예제 049

REVIEW 전체적으로는 분할적 사고를 쓰되 부분적으로 공식을 쓴다. + 원순열은 고정이다.

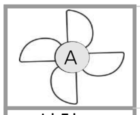
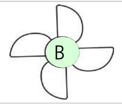
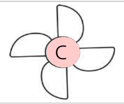
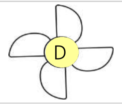
2007. 3. 가형(28%). 15번. 4점



A, B, C, D 4 가지 색의 일부 또는 전부를 사용하여 그림과 같은 프로펠러의 중앙 부분과 4 개의 날개 부분을 모두 칠하려고 한다. 인접한 중앙 부분과 날개 부분은 서로 다른 색으로 칠하기로 할 때, 칠할 수 있는 방법의 수는?
(단, 4개의 날개는 모두 합동이고, 회전하여 같은 경우에는 한 가지 방법으로 한다.)

① 60 ② 72 ③ 84 ④ 96 ⑤ 108

전체상황 : (자리를 기준) 중앙부분엔 어떤 색은 반드시 들어간다.

			
상황 1	상황 2	상황 3	상황 4

: $n(\text{전체}) = 4\times n(\text{상황}1)$

상황 1 (개수로 분류) 날개에 사용되는 색의 개수를 기준으로 상황을 분류

날개에 1가지 색	날개에 2가지 색	날개에 3가지 색
상황 1-1	상황 1-2	상황 1-3

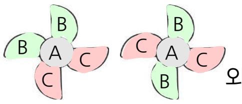
: $n(\text{상황}1) = n(\text{상황}1-1)+n(\text{상황}1-2)+n(\text{상황}1-3)$

대상 B를 기준으로 할 경우 B가 포함되는 경우와 배제되는 경우로 나눠야 하는데 또 합의 법칙을 써야하므로 개수로 분류했다.

<1가지 색>은 BBBB, CCCC, DDDD 이렇게 3가지이다. 즉, $n(\text{상황}1-1) = 3$

<2가지 색>은 일단 B, C, D 중 2개의 색을 뽑는 ${}_3C_2$를 곱한 후 상황을 B, C로 고정시키고 생각한다.

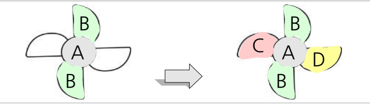
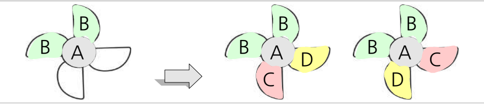
즉, $n(\text{상황}1-2) = {}_3C_2\times n(BBBC \text{ or } BBCC \text{ or } BCCC)$ 이 때, $n(BBBC)$와 $n(BCCC)$는 각각 1가지이고,



와 같이 $n(BBCC)$는 2가지이다. 그러므로 $n(\text{상황}1-2) = {}_3C_2\times(1+1+2) = 12$

<3가지 색>은 B, C, D가 모두 사용되는 것인데 어떤 색은 2번 사용되어야 하므로 3을 곱한 후 상황을 BBCD로 고정시키고 생각한다. 즉, $n(\text{상황}1-3) = 3\times n(BBCD)$

여기에서 $n(BBCD)$는 B, B를 고정하고 나머지 배열을 생각하는데 B, B를 고정하는 방법은 2가지이다.

	
<B 2개를 고정하는 방법 1>	<B 2개를 고정하는 방법 2>

결국 $n(BBCD) = 3$이므로

$n(\text{상황}1-3) = 3\times3 = 9$

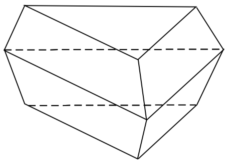
$n(\text{전체}) = 4\cdot n(\text{상황}1) = 4\cdot\{n(\text{상황}1-1)+n(\text{상황}1-2)+n(\text{상황}1-3)\} = 4\cdot\{3+12+9\} = 96$

예제 050

REVIEW 전체적으로는 분할적 사고를 쓰되 부분적으로 공식을 쓴다. + 원순열은 고정이다. + 입체순열

2010. 3. 가형(69%). 15번. 4점

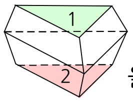
그림과 같이 합동인 정삼각형 2개와 합동인 등변사다리꼴 6개로 이루어진 팔면체가 있다. 팔면체의 각 면에는 한 가지의 색을 칠한다고 할 때, 서로 다른 8개의 색을 모두 사용하여 팔면체의 각 면을 칠하는 경우의 수는? (단, 팔면체를 회전시켰을 때 색의 배열이 일치하면 같은 경우로 생각한다.)



① 6520　② 6620　③ 6720　④ 6820　⑤ 6920

각 색깔을 숫자에 대응하여 1~8까지 8개의 색이 있다고 하자.

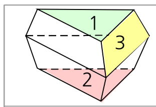
전체상황 : (자리를 기준) 윗면과 아랫면에 뭔가의 서로 다른 2개의 색이 들어간다.

$_8C_2$를 곱하는 순간 상황을 고정한다. 

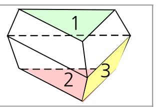
을 (상황1)이라 하자. ⇒ $n(\text{전체}) = {}_8C_2 \times n(\text{상황}1)$

여기에서 1번 색과 2번 색의 배열하는 경우는 고려하지 않는다. 위의 팔면체를 뒤집은 상황이기 때문이다.

상황 1 : (대상을 기준) 3번 색이 어딘가는 들어간다.



상황 1-1



상황 1-2

: $n(\text{상황}1) = 2 \times n(\text{상황}1-1)$

3이 배치되는 경우는 크게 위의 두 가지이다. 나머지는 회전시켜 같은 위치로 만들 수 있다.

이제 남은 자리는 <1, 2, 3의 색>을 기준으로 모두 위치를 구분할 수 있다. 그러므로 $n(\text{상황}1-1) = 5!$

상황 1-1의 상황을 생각해보면 일단 1에 가까운 사다리꼴과 2에 가까운 사다리꼴로 위치가 구분되고 3을 기준으로 오른쪽인지 왼쪽인지에 따라 또 구분이 간다. 그래서 남은 5개의 위치는 모두 구분이 가는 자리이다.

$$n(\text{전체}) = {}_8C_2 \times n(\text{상황}1) = {}_8C_2 \times 2 \times n(\text{상황}1-1) = {}_8C_2 \times 2 \times 5! = 6720$$

PART 04

분할의 상황

1. 자연수 분할
2. 분할의 상황
3. 집합의 분할

촌철살인 #4 〈분할적 사고〉와 〈분할의 상황〉

- 〈분할의 상황〉은 단원의 명칭으로 〈#1. 자연수 분할〉과 〈#3. 집합의 분할〉이 있다. 물론 〈#2. 분할의 상황과 선분할 개념〉이 있기는 하지만 사실 〈#3. 집합의 분할〉의 포함된 내용이다. 이 단원도 이 단원 나름의 성질과 공식이 있다.

하지만 역시 기억해야 하는 사실은
“전체적으로는 분할적 사고를 쓰되 부분적으로 공식을 쓴다.”
는 사실이다.

PART 01 근본 사고방식

#1. 일대일 대응 경우의 수적인 본질이 같은 상황

#2. 분할적 사고 〈전제〉 모든 경우의 논리적 나열 능력

1. 자리를 기준 2. 대상을 기준
3. 개수로 분류 4. 배열 전 모든 상황
: 분할하는 순간 상황은 고정된다.

#3. 합의 법칙과 곱의 법칙

1. 합의 법칙 2. 곱의 법칙
3. 센다의 법칙 4. 수형도의 활용

#4. 여사건의 아이디어

PART.1 개념의 외연

#1. 정수론 1탄
#2. 센다의 법칙
#3. 경우의 수를 세는 방법은 무한가지

전체적으로 분할적 사고를 하되 부분적으로 공식을 쓴다.

PART 02 근본에 가까운 공식

#1. 계승, 순열, 조합의 공식

1. 계승의 뜻과 공식
2. 순열과 조합의 뜻과 공식
3. 조합의 기본 성질 : ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$
4. 논리의 확신 : 경우의 수적인 본질이 같은 상황

#2. 순열과 조합의 상황

1. 서로 다른 대상, 서로 다른 자리
2. 조합과 자동배열
3. 뽑기의 오류 : 〈동동연〉이면 〈배고려〉

#3. 순열과 조합의 수식적 활용

1. 순열의 정의식과 계산식 2. 조합의 정의식과 계산식
3. 정의되는 기호들 4. 순열과 조합으로 표현

PART.2 개념의 외연

#1. 순열 조합으로 표현된 방정식
#2. 여러 가지 상황의 배열
#3. 여사건의 아이디어 + 특정인
#4. 정수론 2탄
#5. 도형과 경우의 수
#6. 집합과 경우의 수

PART 03 이해하면 공식은 없다

#1. 중복순열과 곱의 법칙 중복순열은 곱의 법칙이다.

#2. 같은 것을 포함한 순열과 조합 같은 것을 포함한 순열은 조합이다

1. 같은 것을 포함한 순열의 뜻과 공식
2. 배열 취소의 관점
3. 자동배열의 상황
4. 같은 것들 중에서 일부를 뽑는 것은 공식이 없다.

#3. 원순열과 고정

1. 원순열의 상황 2. 원순열의 경우의 수
3. 다각형 순열 4. 목걸이 순열

PART.3 개념의 외연

#1. 경로의 수 문제
#2. 입체 순열

PART 04 분할의 상황

#1. 자연수의 분할

1. 자연수 분할의 기본 정의 · 낙수효과
2. 페러스 다이어그램과 성질, 켤레분할
3. 자연수 분할의 상황

#2. 분할의 상황

1. 분할의 상황 1 : 뽑기와 분할의 경우의 수가 다른 경우
2. 분할의 상황 2 : 뽑기와 분할의 경우의 수가 같은 경우
3. 선분할 개념 : 기준이 생기면 〈뽑기의 오류〉 발생하지 않는다.
4. 분할의 공식화 : 〈동동연〉이면 〈배고려〉
5. 분할 후 분배와 선분할 개념

#3. 집합의 분할

1. 집합 분할의 상황
2. 집합 분할의 성질
3. 서로 다른 대상, 서로 같은 자리

PART.4 개념의 외연

#1. 리그와 토너먼트

PART 05 중복조합과 일대일 대응

#1. 중복조합의 상황

1. 중복조합의 뜻과 공식
2. 구분막대기를 이용한 일대일 대응
3. 중복조합의 공식 : 암기가 아닌 Reading

$${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_{r}$$

#2. 중복조합과 일대일 대응

1. 중복조합과 일대일 대응
: 일대일 대응 + 공식
2. 서로 같은 대상, 서로 다른 자리
3. 중복조합의 적어도의 상황
: 미리 뽑아놓고 생각한다.

PART.5 개념의 외연

#1. 같은 것과 다른 것 총 정리
#2. 중복조합과 곱의 법칙
#3. 전개식과 경우의 수
#4. 부정방정식과 일대일 대응
#5. 함수의 개수 총정리

PART 06 이항정리와 조합의 연속 합

#1. 이항정리와 이항계수의 성질

1. 이항계수의 의미와 이항전개식
2. 특정항의 계수 : 나열된 식의 구조와 추론
3. 이항전개식 간단히 하기
4. 이항계수의 성질 : 이항정리 + 항등식의 마법
1) 연속 합 2) 교대 합 3) 짝수 합
4) 홀수 합 5) 절반 합

#2. 조합의 식 변형과 이항계수의 성질

#3. 파스칼 삼각형

1. 이항계수의 또 다른 성질
2. 파스칼 삼각형 공식 : ${}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r = {}_nC_r$
3. 이항계수의 성질과 파스칼 삼각형 공식의 구분법

#4. 분할적 사고와 관점 합

1. 이항전개식을 이용한 설명
2. 다른 방식을 이용한 설명

PART.6 개념의 외연

#1. 삼항정리
#2. 정수론 3탄

#1 자연수 분할

빠짐없이 세는 연습

앞에서 배운 분할적 사고와는 구분해야 한다. 자연수 분할은 단원의 명칭이고 그 자체의 특징을 공부한다.
물론 분할적 사고 안에서 부분적으로 자연수 분할의 개념을 사용한다.

1. 자연수 분할의 기본정의

1) 자연수 분할이란?

- 주어진 자연수를 몇 개의 자연수의 합으로 나타내는 것을 자연수의 분할이라고 한다.

2) 자연수 분할의 수 : 낙수 효과

- 자연수 n을 $k(k \le n)$개의 자연수로 분할하는 방법의 수를 기호로 $P(n,k)$와 같이 나타낸다.
- $P(n,k)$은 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ (단, $n_1 \ge n_2 \ge \cdots \ge n_k > 0$)와 같이 나타내는 방법의 수이다.

  (P는 Partition의 약자로 P(n,k)는 피~ 엔 콤마 케이 또는 파티션 엔 콤마 케이라고 읽는다.)
- 자연수 n의 분할하는 모든 경우의 수는 $P(n,1) + P(n,2) + \cdots + P(n,n)$이다.

티칭 예전에 정치인님들께서는(?) 낙수효과를 주장하였다. 자연수 분할은 그 원리에 의해 분할이 이루어진다.
이것은 방법론적인 것으로, 다음과 같이 생각하면서 분할하면 실수할 가능성이 줄어든다.

- 재산을 가장 많이 가진 서열 1위가 서열 2위에게 1개씩 분배할 때마다 발생할 수 있는 경우들을 나열한다.
  (당연히 서열 1위보다 서열 2위의 재산이 많을 수는 없다. 그리고 처음엔 서열 1위 빼고 다 거지들이다.)

- 서열 2위가 서열 3위에게 재산을 분배할 수 있을 만큼 재산이 많아지면, 서열 1위는 서열 2위의 재산 분배가 이루어질 때까지 재산을 분배하지 않는다. ⇨ 이와 같은 원리가 하위 계층에게도 적용된다.
  (네가 줄 수 있는 능력이 있다면 나는 안줘. 뭐 이런 거다.)

- 서열 2위가 재산을 분배할 수 있는 능력이 없으면, 서열 1위가 서열 3위 이하의 계층으로도 재산을 분배할 수 있다.

- 낙수효과는 경우의 수가 적을 때에만 고려할만하다. 경우의 수가 많다면 서열 1위의 재산을 기준으로 서열 1위를 고정한 다음, 그 밑으로 다시 낙수효과를 적용한다. (다음 페이지의 예시를 통해 학습하자.)

예를 들어 8을 4개의 자연수로 분할하는 경우를 생각해보자.

		서열 1위		서열 2위		서열 3위		서열 4위	
8	$=$	5	$+$	1	$+$	1	$+$	1	서열 1위 빼고 다 거지들이다.
		4	$+$	2	$+$	1	$+$	1	서열 1위가 서열 2위에게 1개를 주었다.
		3	$+$	3	$+$	1	$+$	1	서열 2위에게 1개를 더 주었다. (서열 2위가 서열 3위에게 줄 수 있는 능력을 키웠다.)
		3	$+$	2	$+$	2	$+$	1	서열 2위가 능력이 있다면 서열 3위에게 주어야 한다.
		2	$+$	2	$+$	2	$+$	2	서열 2위와 서열 3위는 더 이상 능력이 없으므로 서열 1위가 서열 4위에게 주었다.

- 🟨부분까지는 낙수효과로 자연스럽게 계산이 되었다. 이렇게 낙수효과를 생각하면서 계산하면 <서열 1위>의 개수가 자연스럽게 줄어들게 된다. 하지만, 🟩처럼 서열이 없어지는 경우는 눈에 잘 띄지 않으므로, 반드시 주의하며 확인해봐야 한다. 복잡해지면 <서열 1위를 1개씩 줄여가며 차례로 고정>하고, 그 밑으로 낙수효과를 생각하며 나열해봐야 한다. (더 복잡해지면 서열 1위를 고정한 상태에서, 서열 2위도 1개씩 줄여가며 고정해야 한다.)

065 이해를 위한 예제

다음의 분할을 모두 나열하여라.

(1) $P(7,\ 3)$ (2) $P(8,\ 3)$ (3) $P(11,\ 5)$

(1) $P(7,\ 3)$

$7 = 5 + 1 + 1$

$= 4 + 2 + 1$ - 서열 1위가 2위에게 1개를 줬다.
서열 2위는 3위에게 줄 수 없다.
(주게 되면 서열 3위가 더 많아진다.)

$= 3 + 3 + 1$ - 서열 1위가 2위에게 1개를 줬다.

$= 3 + 2 + 2$ - 서열 2위가 3위에게 1개를 줬다.

더 이상 분배는 일어나지 않는다. $P(7,\ 3) = 4$

(2) $P(8,\ 3)$

$8 = 6 + 1 + 1$

$= 5 + 2 + 1$ - 서열 1위가 2위에게 1개를 줬다.
서열 2위는 3위에게 줄 수 없다.
(주게 되면 서열 3위가 더 많아진다.)

$= 4 + 3 + 1$ - 서열 1위가 2위에게 1개를 줬다.

$= 4 + 2 + 2$ - 서열 2위가 3위에게 1개를 줬다.

$= 3 + 3 + 2$ - 서열 1위가 2위에게 1개를 줬다.

더 이상 분배는 일어나지 않는다. $P(8,\ 3) = 5$

(3) $P(11,\ 5)$

$11 = 7 + 1 + 1 + 1 + 1$

$= 6 + 2 + 1 + 1 + 1$

$= 5 + 3 + 1 + 1 + 1$

$= 5 + 2 + 2 + 1 + 1$ 서열1위가 5로 고정된 모든 경우
$P(6,\ 4)$을 구하는 것이나 마찬가지

$= 4 + 4 + 1 + 1 + 1$

$= 4 + 3 + 2 + 1 + 1$

$= 4 + 2 + 2 + 2 + 1$ 서열1위가 4로 고정된 모든 경우
$P(7,\ 4)$을 구하는 것이나 마찬가지

$= 3 + 3 + 3 + 1 + 1$

$= 3 + 3 + 2 + 2 + 1$

$= 3 + 2 + 2 + 2 + 2$ 서열1위가 3으로 고정된 모든 경우

서열 1위가 2일 수는 없으므로 더 이상 분배는 일어나지 않는다. $P(11,\ 5) = 10$

066 이해를 위한 예제

$P(15,\ 5)$의 모든 경우를 나열해 보자. (끝판왕)

$15 = 11 + 1 + 1 + 1 + 1$

$= 10 + 2 + 1 + 1 + 1$ 낙수효과로 자연스럽게

$= 9 + 3 + 1 + 1 + 1$

$= 9 + 2 + 2 + 1 + 1$

- 서열1위가 9로 고정된 모든 경우

$= 8 + 4 + 1 + 1 + 1$

$= 8 + 3 + 2 + 1 + 1$

$= 8 + 2 + 2 + 2 + 1$

- 서열1위가 8로 고정된 모든 경우

$= 7 + 5 + 1 + 1 + 1$

$= 7 + 4 + 2 + 1 + 1$

$= 7 + 3 + 3 + 1 + 1$

$= 7 + 3 + 2 + 2 + 1$

$= 7 + 2 + 2 + 2 + 2$

- 서열1위가 7로 고정된 모든 경우.
- $P(8,\ 4)$을 구하는 것이나 마찬가지

$= 6 + 6 + 1 + 1 + 1$

$= 6 + 5 + 2 + 1 + 1$

$= 6 + 4 + 3 + 1 + 1$

$= 6 + 4 + 2 + 2 + 1$

$= 6 + 3 + 3 + 2 + 1$

$= 6 + 3 + 2 + 2 + 2$

- 서열1위가 6으로 고정된 모든 경우. 서열2위도 6부터 차례로 고정시키면서 그 아래에서 낙수효과 생각

$= 5 + 5 + 3 + 1 + 1$

$= 5 + 5 + 2 + 2 + 1$

$= 5 + 4 + 4 + 1 + 1$

$= 5 + 4 + 3 + 2 + 1$

$= 5 + 4 + 2 + 2 + 2$

$= 5 + 3 + 3 + 3 + 1$

$= 5 + 3 + 3 + 2 + 2$

- 서열1위가 5로 고정된 모든 경우. 서열2위도 5부터 차례로 고정시키면서 그 아래에서 낙수효과 생각 (서열 1위가 5이므로 서열 2위도 5를 넘을 수 없다.)

$= 4 + 4 + 4 + 1 + 1$

$= 4 + 4 + 3 + 2 + 1$

$= 4 + 4 + 2 + 2 + 2$

$= 4 + 3 + 3 + 3 + 2$

- 서열1위가 4로 고정된 모든 경우. 서열2위도 4부터 차례로 고정시키면서 그 아래에서 낙수효과 생각

$= 3 + 3 + 3 + 3 + 3$

서열1위가 3로 고정된 모든 경우도 간과하면 안 된다.

즉, $P(15,\ 5) = 30$

(중간에 한 번이라도 실수하면...?)

2. 패러스 다이어그램

- 자연수 분할의 상황을 상자배치에 일대일 대응하다.
- 패러스 다이어그램을 통해서 만들어낸 성질을 통해 자연수분할의 경우의 수를 획기적으로 빨리 구할 수 있다.

1) 상황의 이해

- 자연수 n의 분할인 $P(n,\ k)$에 대하여

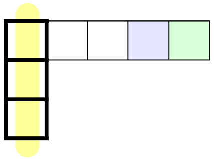
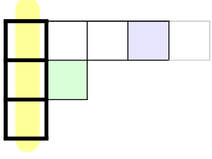
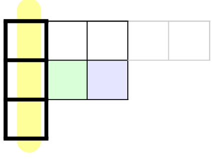
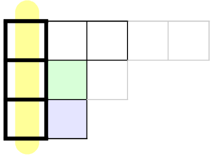
즉, $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ (단, $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k > 0$)를 그림으로 나타낼 때

첫째 행에 n_1개 둘째 행에 n_2개, $\cdots$, k째 행에 n_k개의 박스를 그리면 된다.

총 박스의 개수는 n개이며 k개의 박스는 고정시키고 남은 $n-k$개의 박스만 낙수효과에 의해 분배시킨다.

티칭 다음을 통해서 이해해보자.

$P(7,\ 3)$을 생각해보자 패러스 다이어그램은 <고정박스>와 <이동박스>로 구성된다.
3개의 박스는 고정시키고 그 위로 상자를 쌓는다.

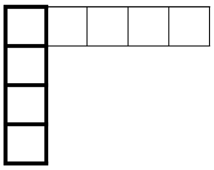
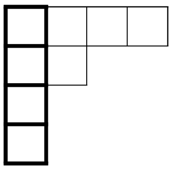
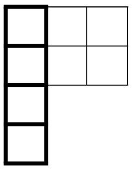
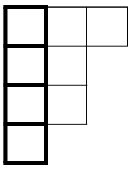
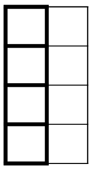
$7 = 5+1+1$	$7 = 4+2+1$	$7 = 3+3+1$	$7 = 3+2+2$
			

- 위의 첫 번째 줄의 고정박스 은 7을 세 개의 자연수로 분할을 하는 동안 변하지 않음을 이해한다.

067 이해를 위한 예제

자연수 분할 $P(8,\ 4)$을 패러스 다이어그램을 이용하여 모두 나타내어라.

박스4개를 고정하고 그 위로 4개의 박스를 낙수효과에 의해 분배하는 방법을 생각한다.

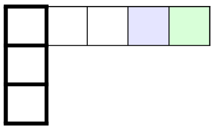
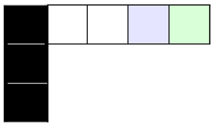
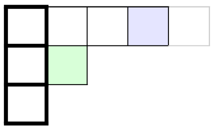
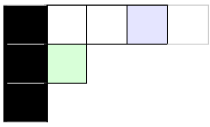
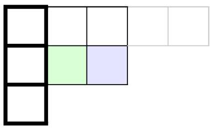
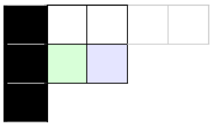
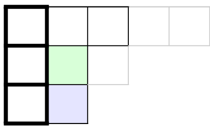
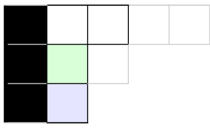
				
5 + 1 + 1 + 1	4 + 2 + 1 + 1	3 + 3 + 1 + 1	3 + 2 + 2 + 1	2 + 2 + 2 + 2

2) 성질 1 ⇨

$$\underbrace{P(n,\ k)}_{\text{n을 k개의 자연수로 분할하는 경우의 수}} = \underbrace{P(n-k,\ 1)+P(n-k,\ 2)+\cdots+P(n-k,\ k)}_{\text{n-k를 k개 이하의 자연수로 분할하는 경우의 수}}$$

- 구체적인 예를 통해서 이해해보자.

$P(7,\ 3)$을 생각해보자.

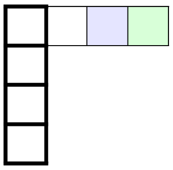
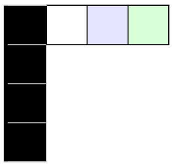
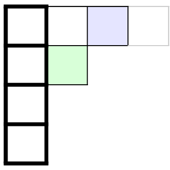
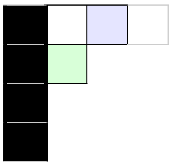
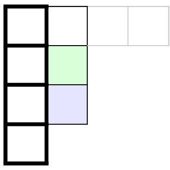
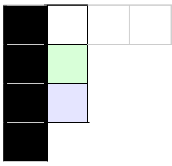
 $5+1+1$  4 (4를 한 개의 자연수로 분할)	 $4+2+1$  $3+1$ (4를 두 개의 자연수로 분할)	 $3+3+1$  $2+2$ (4를 두 개의 자연수로 분할)	 $3+2+2$  $2+1+1$ (4를 세 개의 자연수로 분할)

- $P(7,\ 3)$의 모든 상황은 7개의 박스 중 〈고정박스〉 3개를 지운 경우와 일대일 대응시킬 수 있다.
이것은 4를 3개 이하의 자연수로 분할시키는 경우와 같다.

결국, $P(7,3) = P(4,1) + P(4,\ 2) + P(4,3)$

.

$P(7,\ 4)$을 생각해보자.

 $4+1+1+1$  3 (3를 한 개의 자연수로 분할)	 $3+2+1+1$  $2+1$ (3를 한 개의 자연수로 분할)	 $2+2+2+1$  $1+1+1$ (3를 한 개의 자연수로 분할)

- $P(7,\ 4)$의 모든 상황은 7개의 박스 중 〈고정박스〉 4개를 지운 경우와 일대일 대응시킬 수 있다.
이것은 3을 3개 이하의 자연수로 분할시키는 경우와 같다.

결국, $P(7,3) = P(3,1) + P(3,\ 2) + P(3,3)$

- 공식을 쓰면 $P(7,\ 4) = P(3,\ 1)+P(3,\ 2)+P(3,\ 3)+P(3,\ 4)$인데 어차피 $P(3,\ 4)=0$이므로 상관없다.

$P(n,\ k)$	$=$	$P(n-k,\ 1)\ +\ P(n-k,\ 2)\ +\ \cdots\ +\ P(n-k,\ k)$
n을 k개의 자연수로 분할하는 경우의 수		고정박스 k를 지운 $n-k$개의 박스를 분할 남은 $n-k$개의 박스는 1개부터 최대 k개로 분할 (처음 고정박스가 있었던 k칸은 넘어갈 수 없다.)

- 이 때, $n-k$보다 k가 더 클 수도 있는데 그러면 어차피 $P(n-k,\ k)\ =\ 0$이므로 상관없다.

3) 성질 2

① $P(n,\ k)\ =\ 0\ \ (n<k)$　　예를 들어 $P(3,\ 4)\ =\ 0$

② $P(n,\ 1)\ =\ 1$　　⇨ 1 이면 1

③ $P(n,\ 2)\ =\ \left[\frac{n}{2}\right]$　　⇨ 2 이면 가우스

$P(n,\ 3)$　　3 이면 없어. ($P(n,\ 3)$은 규칙이 없다는 뜻이다.)

④ $P(n,\ n)\ =\ 1$　　⇨ 같으면 1

⑤ $P(n,\ n-1)\ =\ 1\ \ (n\geq 2)$　　⇨ 1 차이면 1

⑥ $P(n,\ n-2)\ =\ 2\ \ (n\geq 4)$　　⇨ 2 차이면 2 (단, $n\geq 4$)

⑦ $P(n,\ n-3)\ =\ 3\ \ (n\geq 6)$　　⇨ 3 차이면 3 (단, $n\geq 6$) 규칙은 여기까지

⑧ $P(n,\ n-4)\ =\ 5\ \ (n\geq 8)$　　⇨ 4 차이면 5 (단, $n\geq 8$) 이후로는 규칙이 없다는 사실을 인지하기 위해 여기까지 외운다.

티칭 구구단처럼 외운다. 구구단은 <1단>부터 <9단>까지 있다.
자연수 분할을 오른쪽 끝에 수만 보는 <끝단>과 왼쪽 수와 오른쪽 수의 차를 보는 <차단>이 있다.

- 끝단 : <1 이면 1> <2 이면 가우스> <3 이면 없어> - <끝단>을 먼저 적용한 후 <차단>을 적용한다.
- 차단 : <같으면 1> <1 차이여도 1> <2 차이면 2> <3 차이면 3> <4 차이면 5>

<차단>에서는 반드시 왼쪽 수가 <차의 2배 이상>이어야 한다는 조건이 있다. 하지만 사실 어차피 <끝단>을 먼저 적용한 다음, <차단>을 적용하기 때문에 ⑧ $P(n,\ n-4)\ =\ 5\ \ (n\geq 8)$에만 범위를 생각하면 된다.
예를 들어 $P(n,\ n-3)\ =\ 3$에서 $n<6$인 경우인 $n=5$를 대입하면 $P(5,\ 2)$이므로
<끝단에서 2 이면 가우스>로 먼저 계산된다. 즉, ⑧을 제외하면 범위 때문에 틀릴 염려는 없다.

- <끝단>이나 <차단>으로 빠르게 계산이 안 된다면 <성질 1>을 적용 후 다시 <끝단과 차단>을 적용해보면 된다.

4) 성질 2의 증명

티칭 ①, ②, ④, ⑤은 몇 가지 예를 정의에 입각해서 생각해보면 너무 당연하다. ⑥과 ⑦도 몇 가지 예를 생각해보면 금방 감이 오지만 ⑧을 증명함으로써 같은 방식으로 증명할 수 있다는 것을 여기에서 언급한다.

③의 유도과정 : $P(n,\ 2)\ =\ \left[\frac{n}{2}\right]$

- n이 짝수인 경우 (즉, $n\ =\ 2m$인 경우) - $P(2m,\ 2)$을 나열해 보면

$$\begin{array}{lclcl} 2m & = & (2m-1) & + & 1 \\ & = & (2m-2) & + & 2 \\ & \vdots & & \vdots & \\ & = & m & + & m \end{array}$$

⇨ 1부터 m까지 : 총 m가지

- n이 홀수인 경우 (즉, $n = 2m-1$인 경우) - $P(2m-1,\ 2)$을 나열해 보면

$$\begin{array}{cccccc} 2m-1 & = & (2m-2) & + & 1 \\ & = & (2m-3) & + & 2 \\ & \vdots & & \vdots & \\ & = & m & + & m-1 \end{array}$$

⇨ 1부터 $m-1$까지 : 총 $m-1$가지

즉, $P(2m,\ 2) = m = \left[\dfrac{2m}{2}\right]$라고 표현해도 상관없다. 즉, $n = 2m$인 경우 $P(n,\ 2) = \left[\dfrac{n}{2}\right]$

$P(2m-1,\ 2) = m-1 = \left[\dfrac{2m-1}{2}\right]$라고 표현해도 상관없다. 즉, $n = 2m-1$인 경우 $P(n,\ 2) = \left[\dfrac{n}{2}\right]$

결국, 공식 $P(n,\ 2) = \left[\dfrac{n}{2}\right]$이 성립한다.

⑧의 유도과정

$P(n,\ n-4)$ $(n \geqq 8)$ 에 성질1을 적용하면

$$\begin{aligned} P(n,\ n-4) &= P(4,\ 1) + P(4,\ 2) + \cdots + P(4,\ n-4)\ (n \geqq 8) \\ &= P(4,\ 1) + P(4,\ 2) + P(4,\ 3) + P(4,\ 4) \\ &= 1 + 2 + 1 + 1 = 5 \end{aligned}$$

(어차피 오른쪽 수가 더 크면 0 이므로)

- n이 7이면 P(4, 4)는 나오지 않는다. 그래서 $n \geqq 8$이 필요하다.

068 이해를 위한 예제

다음의 자연수 분할의 수를 성질을 이용하여 계산하여라.

(1) $P(7,\ 3)$ (2) $P(8,\ 3)$ (3) $P(11,\ 5)$ (4) $P(15,\ 5)$ (끝판 왕)

이제 빛의 속도로 다시 풀어보자.

(1) $P(7,\ 3) = P(4,\ 1) + P(4,\ 2) + P(4,\ 3) = 1 + \left[\dfrac{4}{2}\right] + 1 = 4$

(2) $P(8,\ 3) = P(5,\ 1) + P(5,\ 2) + P(5,\ 3) = 1 + \left[\dfrac{5}{2}\right] + 2 = 5$

(3) $P(11,\ 5) = P(6,\ 1) + P(6,\ 2) + P(6,\ 3) + P(6,\ 4) + P(6,\ 5)$

$= 1 + \left[\dfrac{6}{2}\right] + 3 + 2 + 1 = 10$

(4) $P(15,\ 5) = P(10,\ 1) + P(10,\ 2) + P(10,\ 3) + P(10,\ 4) + P(10,\ 5)$

$= 1 + \left[\dfrac{10}{2}\right] + P(10,\ 3) + P(10,\ 4) + P(10,\ 5)$ (하이라이트 부분은 아래 설명이 있다.)

$= 1 + \left[\dfrac{10}{2}\right] + 8 + 9 + 7 = 30$

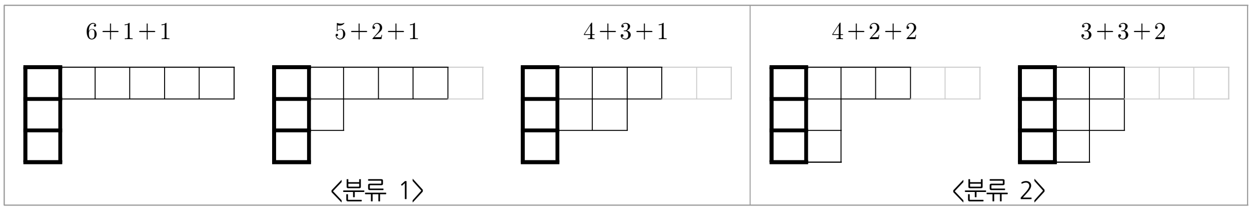
$$\begin{aligned} P(10,\ 3) &= P(7,\ 1) + P(7,\ 2) + P(7,\ 3) = 1 + \left[\frac{7}{2}\right] + P(7,\ 3) \\ &= 1 + \left[\frac{7}{2}\right] + P(4,\ 1) + P(4,\ 2) + P(4,\ 3) \\ &= 1 + \left[\frac{7}{2}\right] + 1 + \left[\frac{4}{2}\right] + 1 = 8 \end{aligned}$$

$P(10,\ 4) = P(6,\ 1) + P(6,\ 2) + P(6,\ 3) + P(6,\ 4) = 1 + \left[\dfrac{6}{2}\right] + 3 + 2 = 9$

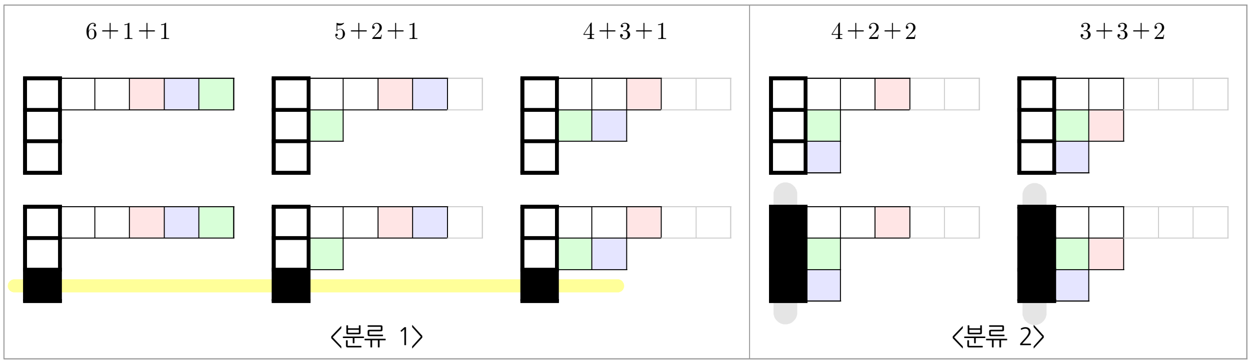
$P(10,\ 5) = P(5,\ 1) + P(5,\ 2) + P(5,\ 3) + P(5,\ 4) + P(5,\ 5) = 1 + \left[\dfrac{5}{2}\right] + 2 + 1 + 1 = 7$

5) 성질 3 : $P(n,\ k) = P(n-1,\ k-1) + P(n-k,\ k)$

$P(8,3)$을 생각해보자. 패러스 다이어그램은 <고정박스>와 <이동박스>로 구성된다.



1단계 : 패러스 다이어그램에서 <분류1 : 마지막 칸에 박스가 한 개만 있는 경우>와
<분류2 : 마지막 칸에 박스가 두 개 이상 있는 경우>로 상황을 분류한다.



2단계 : <분류1>은 마지막 칸에 <1개의 고정박스를 지운 경우>와 일대일 대응시킨다.
이 경우는 $P(8-1,\ 3-1)$의 상황과 일치한다.
<분류2>는 <한 줄의 고정박스를 지운 경우>와 일대일 대응시킨다. 이 경우는 $P(8-3,\ 3)$의 상황과 일치한다.

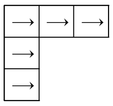
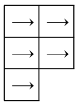
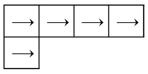
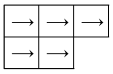
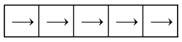
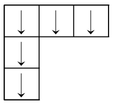
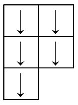
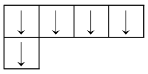
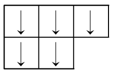
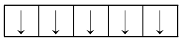
결국 $P(8,\ 3) = P(7,\ 2) + P(5,\ 3)$ ⇨ $P(n,\ k) = P(n-1,\ k-1) + P(n-k,\ k)$

6) 켤레분할 : n을 k개 이하의 자연수로 분할하는 경우의 수 = n을 k 이하의 자연수로 분할하는 경우의 수

- 개라는 말 한마디 차이일 뿐인데 경우를 따지는 것은 많은 차이가 있다.

- 5를 3개 이하의 자연수로 분할하는 모든 경우는 $P(5,\ 1) + P(5,\ 2) + P(5,\ 3)$과 같이 표현 할 수 있다.
- 5를 3 이하의 자연수로 분할하는 경우는 따로 표현이 없다. (더하는 숫자 중 4 이상의 숫자가 없다는 뜻이다.)

하지만 이 두 상황은 패러스 다이어그램을 이용하면 정확히 일대일 대응시킬 수 있다.

	5를 3개로 분할	5를 2개로 분할	5를 1개로 분할
5를 3개 이하	 3 + 1 + 1  2 + 2 + 1	 4 + 1  3 + 2	 5
	가장 큰 수가 3	가장 큰 수가 2	가장 큰 수가 1
5를 3 이하	 3 + 1 + 1  3 + 2	 2 + 1 + 1 + 1  2 + 2 + 1	 1+1+1+1+1

<5를 3개 이하>로 분할하는 모든 패러스 다이어그램에 대해서 읽어주는 방향만 바꾸어 주면

<5을 3 이하>로 분할하는 모든 경우가 표현된다. (즉, 일대일 대응된다.)

n을 k 이하의 자연수로 분할하는 경우의 수 ⇨ n을 k개 이하의 자연수로 분할하는 경우의 수
로 바꿔서 앞의 성질을 이용하여 계산하라.

069 이해를 위한 예제

자연수 7의 분할 중 3 이하의 자연수의 합으로 나타내어지는 서로 다른 분할의 수는?

일일이 세 봐야 켤레분할의 가치를 느낄 수 있다.

- 3이 2개가 있는 경우

$7 = 3+3+1$

- 3이 1개가 있는 경우

$7 = 3+2+2$
$= 3+2+1+1$
$= 3+1+1+1+1$

- 3이 하나도 없는 경우 (2의 개수를 기준으로 생각)

$7 = 2+2+2+1$
$= 2+2+1+1+1$
$= 2+1+1+1+1+1$
$= 1+1+1+1+1+1+1$

분할의 수는 $4 + 3 + 1 = 8$

켤레분할의 가치

자연수 7의 분할 중 3 이하의 자연수의 합 ⇨ 자연수 7의 분할 중 3개 이하의 자연수의 합

즉, $P(7,\ 1) + P(7,\ 2) + P(7,\ 3)$ (3이면 없어 + 4가 차이나긴 하지만 왼쪽수가 8보다 작다.)

$$= 1 + \left[\frac{7}{2}\right] + P(4,\ 1) + P(4,\ 2) + P(4,\ 3)$$

$$= 1 + \left[\frac{7}{2}\right] + 1 + \left[\frac{4}{2}\right] + 1 = 8$$

070 이해를 위한 예제

자연수 8의 분할 중 4 이하의 자연수의 합으로 나타내어지는 서로 다른 분할의 수는?

일일이 세 봐야 켤레분할의 가치를 느낄 수 있다.

- 4이 2개가 있는 경우

$8 = 4+4$

- 4이 1개가 있는 경우

$8 = 4+3+1$
$= 4+2+2$
$= 4+2+1+1$
$= 4+1+1+1+1$

- 4가 하나도 없는 경우

$8 = 3+3+2$ 3이 두 개있는 경우
$= 3+3+1+1$
$= 3+2+2+1$ 3이 한 개있는 경우
$= 3+2+1+1+1$
$= 3+1+1+1+1+1$

- 4가 하나도 없는 경우

$8 = 2+2+2+2$ 3이 하나도 없는 경우
$= 2+2+2+1+1$
$= 2+2+1+1+1+1$
$= 2+1+1+1+1+1+1$
$= 1+1+1+1+1+1+1+1$

분할의 수는 $10 + 4 + 1 = 15$

켤레분할의 가치

자연수 8의 분할 중 4 이하의 자연수의 합 ⇨ 자연수 8의 분할 중 4개 이하의 자연수의 합

$$P(8,\ 3) = P(5,\ 1) + P(5,\ 2) + P(5,\ 3) = 1 + \left[\frac{5}{2}\right] + 2 = 5$$

즉, $P(8,\ 1) + P(8,\ 2) + P(8,\ 3) + P(8,\ 4) = 1 + \left[\frac{8}{2}\right] + P(8,\ 3) + 5$

$$= 1 + 4 + 5 + 5 = 15$$

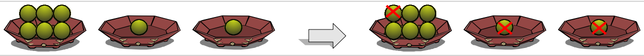
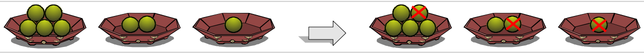
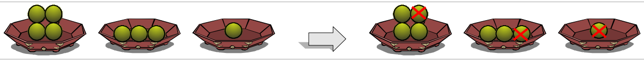
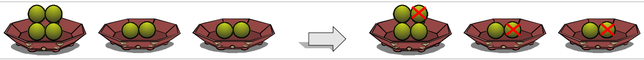
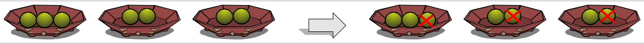
3. 자연수 분할의 상황

1) 서로 같은 대상, 서로 같은 자리

- 같은 대상을 같은 자리에 분배하는 경우는 자연수 분할의 상황에 대응된다.

$P(8,\ 3)$의 상황		같은 공 8개 같은 그릇 3개의 상황 (단, 각 그릇에 적어도 한 개의 공을 담는다.)
$8 = 6+1+1$		
$= 5+2+1$		
$= 4+3+1$		
$= 4+2+2$		
$= 3+3+2$		

- 같은 그릇이므로 담는 경우의 수를 따지지 않는다. 즉,  와 은 같은 상황이다.
그러므로 항상 공이 많은 것은 왼쪽에 배치한다고 생각하면 자연수 분할의 상황과 일대일로 대응한다.

$P(8,\ 3) = P(5,\ 1) + P(5,\ 2) + P(5,\ 3)$			같은 공 8개 같은 그릇 3개의 상황 (단, 각 그릇에 적어도 한 개의 공을 담는다.)
$P(5,\ 1)$	$5 = 5$		
$P(5,\ 2)$	$5 = 4+1$		
	$5 = 3+2$		
$P(5,\ 3)$	$5 = 3+1+1$		
	$5 = 2+2+1$		

$$P(n,\ k) = P(n-k,\ 1) + P(n-k,\ 2) + \cdots + P(n-k,\ k)$$

- 결국 그릇에 담긴 공을 하나씩 빼서 원래 상황과 일대일 대응시킨 것은 자연수 분할의 입장에서는 성질을 쓴 것과 같다.
- 앞에서 패러스 다이어그램을 통해서 설명했던 상황을 <같은 것을 같은 것에 분배하는 상황>을 통해서도 설명할 수 있다.

2) 자연수 분할에서 적어도의 상황

- 자연수 분할은 <같은 것>을 <같은 것>에 분배하는 경우에 대응된다는 것을 방금 다룬바 있다.
후에 배우는 중복조합은 <같은 것>을 <다른 것>에 분배하는 경우에 대응되게 되는데, 이것은 조금 뒤에 공부하게 된다.
⇨ 이것들은 <같은 것>에서 일부를 뽑아 대상에게 분배한다는 공통점이 있는데 이런 경우에 우리는 뽑는 경우의 수를 따지지 않는다. 이것은 이미 <Part 3. - 같은 것들에서 일부를 뽑는 것은 공식이 없다.>에서도 강조한 바 있다.

- 또한, 우리는 앞에서 뽑기의 오류 : 동동연 배고려와 <적어도의 상황에서 흔히 빠지는 오류>에 대해 다룬 적이 있다.
이것들은 조합을 통해서 연속적으로 뽑을 때, 인지하지 못하는 사이에 배열이 고려되어서 생기는 오류였다.

- 위의 두 가지 내용에서 <자연수 분할과 중복조합>에서는 뽑는 경우의 수를 고려하지 않기 때문에 <뽑기의 오류>가 생기지 않는다는 사실을 알 수 있다. 즉, 자연수 분할이나 후에 배우는 중복조합의 상황에서 <적어도의 상황>이 나올 경우, 미리 뽑아놓고 생각해도 전혀 지장이 없다. (아니, 계산의 효율성을 생각해서 미리 뽑아놓고 생각해야 한다.)

3) 조건이 추가된 자연수 분할의 상황

- 앞에서 배운 <자연수 분할의 성질>은 <조건이 추가 되지 않은 자연수 분할>문제에서만 쓸 수 있는 것이다.

만약 여러 가지 조건들이 추가 된다면 ⇨ 전체적으로는 분할적 사고를 쓰되 부분적으로 공식을 쓴다.

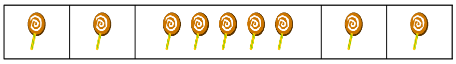
⇨ 이마저도 여의치 않으면 어쩔 수 없이 일일이 세야한다.

071 이해를 위한 예제

같은 종류의 사탕 9개를 같은 종류의 봉지 5개에 빈 봉지가 없도록 나누어 넣는 방법의 수를 구하여라.

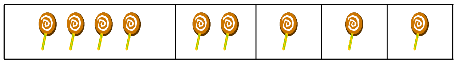
같은 종류의 사탕 9개를 같은 종류의 봉지 5개에 빈 봉지가 없도록 나누어 넣는 방법의 수

같은 것을 같은 것에 분배하고 있다. 직접 넣어 보자.

같은 봉지이므로  과  은

같은 상황이다. 즉, 배열하는 경우의 수는 따지지 않으므로 항상 사탕이 많은 봉지를 왼쪽에 배열한다고 생각하자.

은 $5+1+1+1+1$



은 $4+2+1+1+1$

은 $3+3+1+1+1$

은 $3+2+2+1+1$에 각각 대응한다.

즉, $P(9,\ 5) = 5$ (차단 : 왼쪽 수가 8보다 크거나 같을 때) 4 차이 나면 5

072 이해를 위한 예제

방정식 $2a+3b+5c=20$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같은 것은?

① 2, 3, 5의 합으로 이루어진 자연수 10의 분할의 수

② 2, 3, 5의 합으로 이루어진 자연수 20의 분할의 수

③ 세 자연수의 합으로 이루어진 자연수 10의 분할의 수

④ 세 자연수의 합으로 이루어진 자연수 20의 분할의 수

⑤ 5이하의 자연수의 합으로 이루어진 자연수 20의 분할의 수

정수해의 순서쌍을 $(a,\ b,\ c)$라고 하자.

예를 들어 순서쌍 $(1,\ 1,\ 3)$의 경우 2가 1개, 3이 1개, 5가 3개이므로 $5+5+5+2+3$으로 나타낼 수 있다.

순서쌍 $(5,\ 0,\ 2)$의 경우 2가 5개, 3이 0개, 5가 2개이므로 $5+5+2+2+2+2+2$로 나타낼 수 있다.

즉, $2a+3b+5c=20$은

$$\underbrace{(5+5+\cdots+5)}_{\text{5가 }c\text{개}}+\underbrace{(3+3+\cdots+3)}_{\text{3가 }b\text{개}}+\underbrace{(2+2+\cdots+2)}_{\text{2가 }a\text{개}}=20$$

으로 생각할 수 있다.

이와 같이 주어진 방정식의 음이 아닌 정수해의 개수는 2, 3, 5의 합으로 이루어진 자연수 20의 분할의 수와 같다.

정답은 ②

코칭 계수가 다른 부정방정식은 <자연수 분할>이라고 볼 수 있지만, 이것은 성질을 통해 쉽게 계산할 수 있는 형태가 아니므로 일일이 세야한다. 앞의 <Part 1. 근본 사고방식>에서 일일이 세는 3大 상황으로 이미 다룬 적 있다.

#2 분할의 상황 : 뽑기의 오류

1. 분할의 상황 1 : 뽑기와 분할의 경우의 수가 다른 경우

1) 4명 중 2명을 뽑는 경우 VS (2명/2명)으로 팀을 나누는 경우

- a, b, c, d 네 명 중 2명을 뽑는 경우의 수 : ${}_4C_2$

a, b	c, d
a, c	b, d
a, d	b, c
b, c	a, d
b, d	a, c
c, d	a, b

총 ${}_4C_2 = 6$가지 경우가 발생한다. (그냥 2명을 뽑는 경우는 남아있는 사람을 생각하지 않는다.)

- a, b, c, d 네 명을 2명과 2명으로 팀을 나누는 경우 : ${}_4C_2 \times \frac{1}{2}$

⇨ ${}_4C_2$라고 생각하는 이유

<4명 중 2명을 뽑으면 자동으로 2명이 남기 때문에 뽑기만 하면 2명, 2명으로 팀이 분할된다.>라고 보통은 생각한다.

a, b	c, d
a, c	b, d
a, d	b, c
b, c	a, d
b, d	a, c
c, d	a, b

하지만 ${}_4C_2$의 상황을 위와 같이 실제로 나열해보면 각 색깔별로 뽑은 사람은 다르지만 같은 분할이므로 경우의 수는 한 번만 세야 한다. (분할하는 경우는 저 흐릿한 남은 사람도 잘 봐야 한다.)

그래서 실제 분할의 경우의 수는 ${}_4C_2 \times \frac{1}{2}$이다.

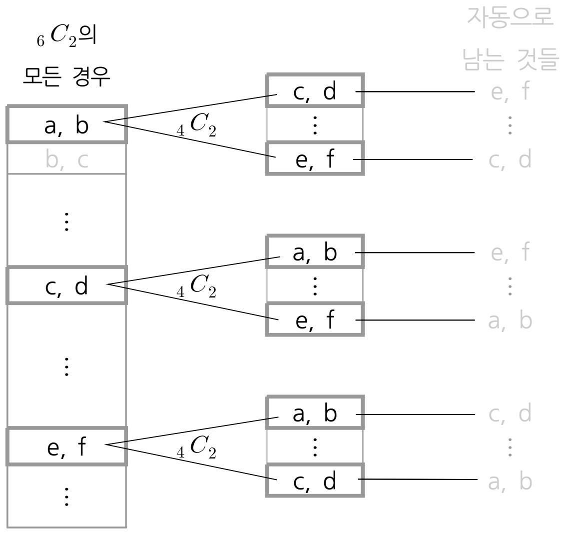
2) 6명을 (2명/2명/2명)으로 팀을 나누는 경우

- a, b, c, d, e, f 여섯 명을 2명/2명/2명으로 팀을 나누는 경우의 수 = ${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times \frac{1}{3!}$

⇨ ${}_6C_2 \times {}_4C_2$라고 생각하는 이유

<6명 중 2명을 뽑고, 남은 4명 중 2명을 뽑으면 자동으로 2명은 남는다. 즉, 6명은 2명, 2명, 2명으로 팀이 분할된다.> 라고 보통은 생각한다.

아래 수형도를 통해서 6명을 <2명 / 2명 / 2명>으로 나눈 경우 중 한 가지인 <ab / cd / ef> 로 팀이 나누어진 경우에 대해서 구체적으로 관찰해 본다. ${}_6C_2 \times {}_4C_2$는 <6명 중 2명 → 남은 4명 중 2명>의 방식으로 뽑은 것인데 이것을 수형도로 나타내면 아래와 같다.



마지막에 저 흐릿한 남은 사람까지 고려하면 결국 우리가 흔히 착각하는 ${}_6C_2 \times {}_4C_2$은 팀을 나누었을 뿐 아니라 배열까지 한 경우의 수라는 것을 알게 된다. 뽑기의 오류 : 동동연 배고려의 상황이 발생한 것이다.

즉, <2명 / 2명 / 2명>으로 분할해야 하는 상황이라면 <조합원의 수가 같은 조>를 배열한 경우의 수인 $3!$으로 나눔으로써 배열을 취소해야 한다. 결국 6명을 <2명 / 2명 / 2명>으로 나눈 분할의 수는 ${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times \frac{1}{3!}$이다.

3) a, b, c, d, e, f 여섯 명에서 ${}_6C_2 \times {}_4C_2$의 의미

- a, b, c, d, e, f 여섯 명을 A, B, C 기업에서 두 명씩 선출해가는 경우의 수를 생각해 본다.

<조합의 공식>과 <분할적 사고> 그리고 <곱의 법칙>를 논리적으로 적용하면

전체상황 : (자리를 기준) A기업에 누군가 두 명은 선출된다.

	A기업	B기업	C기업
상황 1	a, b		
상황 2	a, c		
⋮	⋮		
상황 ${}_6C_2$	e, f		

: $n(\text{전체}) = {}_6C_2 \times n(\text{상황}1)$

(어차피 모든 상황이 남은 기업 2개, 남은 사람 4명이므로 같은 경우의 수가 발생한다고 판단.)

$n(\text{상황}1)$은 a, b는 이미 뽑힌 상황에서 서로 다른 4명(c, d, e, f) 중 기업 B, C가 두 명씩 선출해 가는 경우의 수이다. 기업 B가 네 명 중 두 명을 선출하면 C에는 남은 두 사람이 자동 배치된다. 즉, $n(\text{상황}1) = {}_4C_2$이다.

$$n(\text{전체}) = {}_6C_2 \times n(\text{상황}1) = {}_6C_2 \times {}_4C_2$$

코칭 왜 이런 일이 발생하는지에 대한 상황적 구분법은 바로 다음 장에 설명된다.

2. 분할의 상황 2 : 뽑기와 분할의 경우의 수가 같은 경우

1) 4명 중 3명을 뽑는 경우 VS (3명/1명)으로 팀을 나누는 경우

- a, b, c, d 네 명 중 3명을 뽑는 경우 $= {}_4C_3$

a, b, c	d
a, b, d	c
a, c, d	b
b, c, d	a

${}_4C_3 = 4$가지 경우가 발생한다. 그냥 3명을 뽑는 경우는 남아있는 사람을 생각하지 않는다.

- a, b, c, d 네 명을 3명 / 1명으로 팀을 나누는 경우 $= {}_4C_3$

4명 중 3명을 뽑으면 자동으로 1명이 남기 때문에
3명, 1명으로 팀이 분할된다.

a, b, c	d
a, b, d	c
a, c, d	b
b, c, d	a

이 경우에는 남아있는 사람을 생각해도 〈뽑는 경우의 수〉와 〈분할의 경우의 수〉가 같다.

2) 분할의 상황이 생기는 이유 : 팀을 구분할 수 있는 기준이 없기 때문에

앞의 〈분할의 상황1〉의 1)의 경우를 생각해보자.

- 뽑는다는 것은 반드시 〈주체〉가 있게 마련이고 또 전체에서 일부를 뽑을 경우 반드시 〈남는 것〉이 있게 마련이다.
분할은 그냥 나눈다는 의미에서 그러는 〈주체〉가 없다.
2명을 뽑는 ${}_4C_2$는 〈뽑는 주체〉입장에서 〈a, b를 뽑은 상황〉과 〈c, d를 뽑은 상황〉을 구분한 것이다.
즉, 〈2명 / 2명〉으로 분할하는 경우에는 〈a, b를 뽑은 상황〉과 〈c, d를 뽑은 상황〉을 구별하면 안 되기 때문에 ${}_4C_2$로 계산하면 틀리는 것이다.
이처럼 뽑는 상황은 〈주체〉와 〈남는 것〉이라는 두 조를 구분할 수 있는 기준이 있는 상태인 반면에
분할의 상황은 〈2명으로 구성된 조〉와 〈2명으로 구성된 조〉라는 두 조를 구분할 수 있는 어떤 기준도 없는 상태이다.

앞의 〈분할의 상황1〉의 2), 3)의 경우를 생각해보자.

- 3)은 각 조에 A기업, B기업, C기업이라는 명칭이 붙어 있으므로 세 조를 구분할 수 있는 명확한 기준이 있는 반면에
(뽑는 주체가 명확하여 A기업의 입장에서 a, b가 뽑힌 경우와 c, d가 뽑힌 경우를 정확히 상황적으로 구분해야 하는 상황)
2)은 분할의 상황으로 〈2명인 조〉, 〈2명인 조〉, 〈2명인 조〉라는 세 조를 구분할 수 있는 어떤 기준도 없는 상태이다.
즉, 이 경우 역시 조를 구분할 수 있는 기준이 없는 경우에는 뽑는 상황을 설명하는 〈조합 공식〉을 이용할 경우 계산이 틀린다는 사실을 알 수 있다.

앞의 〈분할의 상황2〉의 1)의 경우를 생각해보자.

- 뽑는 경우의 수와 분할하는 경우의 수가 같다. 이유는 〈3명인 조〉와 〈1명인 조〉는 그 자체로 사람 수가 다르기 때문에 〈사람 수를 통하여 조를 구분할 수 있는 기준이 있다〉라고 생각 할 수 있다. 즉, 두 조를 구분할 수 있는 기준이 있는 경우에는 분할도 〈조합 공식〉을 자연스럽게 사용해도 계산이 틀리지 않는다.

티칭 조를 구분할 수 있는 기준이 생기는 순간 〈분할의 상황 : 뽑기의 오류〉는 발생하지 않는다.

3. 선분할 개념

- 기준이 생기는 순간 〈뽑기의 오류〉는 발생하지 않는다.

073 이해를 위한 예제

a, b, c, d 네 명을 2명과 2명으로 팀을 나누는 경우의 수를 a와 b를 기준으로 상황을 분할하여 분할의 공식을 사용하지 않고 설명하여라.

전체상황 : (대상을 기준) a와 b는 같은 조거나 다른 조이다.

상황 1	a와 b가 같은 조
상황 2	a와 b가 다른 조

: $n(\text{전체}) = n(\text{상황}1) + n(\text{상황}2) = 1 + n(\text{상황}2)$

$n(\text{상황}1)$은 ab / cd 인 경우 밖에 없다. $= 1$이다.

$n(\text{상황}2)$에서 a와 b가 다른 조인 경우에는 〈a가 있는 조〉와 〈b가 있는 조〉와 같이 두 조를 구분할 수 있는 명확한 기준이 생겼다. a ◯ b ◯ 에서 남은 빈자리에 c와 d를 배열하면 되므로 $n(\text{상황}2) = 2!$이다.

즉, $n(\text{전체}) = n(\text{상황}1) + n(\text{상황}2) = 1 + n(\text{상황}2) = 1 + 2! = 3$

티칭 물론 위와 같은 상황은 분할의 공식을 이용하는 것이 편하다. 또한, 앞으로 이 책에서도 분할의 공식을 이용한다. 하지만 굳이 위의 해설처럼 〈근본적 사고방식〉으로 접근한 것은 〈분할의 상황 : 뽑기의 오류〉가 발생하는 본질적 이유에 대해서 설명하기 위함이다.

- 분할의 상황은 두 조를 구분할 수 있는 기준이 없기 때문에 발생하고 두 조를 구분할 수 있는 기준이 생기는 순간 더 이상 분할이 아니다.

이것을 이해함으로서 다음 문제와 같이 두 조를 구분할 수 있는 명확한 조건을 준 상태에서 〈분할의 공식〉을 사용하는 문제처럼 내는 경우에 문제의 본질을 파악하고 〈분할의 공식〉이 아닌 그냥 〈조합의 뽑기〉로 풀어가는 것에 확신을 갖길 바란다.

074 이해를 위한 예제

키가 서로 다른 6명이 3대3 길거리 농구를 하고자 한다. 이중 가장 키가 큰 2명은 다른 조에 있도록 팀을 분할하는 경우의 수를 구하여라.

가장 키가 큰 두 명은 편의상 A와 B라고 할 경우 이제 두 팀은 A와 B를 기준으로 팀을 명확하게 구분할 수 있으므로 분할의 개념을 생각하지 않아도 된다. 즉, A가 남은 4명 중 2명을 뽑으면 남은 두면은 자연스럽게 B가 있는 팀으로 가게 되므로 팀을 나누는 모든 경우의 수는 ${}_4C_2$이다.

$$n(\text{전체}) = {}_4C_2$$

티칭 팀을 구분할 수 있는 기준이 생기는 순간 더 이상 분할의 상황이 아니므로 〈분할적 사고〉와 〈조합의 공식〉을 이용해 자연스럽게 풀어나간다.

4. 분할의 공식화 : 뽑기의 오류 : 동동연 배고려를 통해서 이해할 수 있다.

- a, b, c, d 네 명을 2명과 2명으로 팀을 나누는 경우 ⇨ ${}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!}$

${}_4C_2 = {}_4C_2 \times {}_2C_2$라고 표현해도 상관없다.

뽑기의 오류 : 동동연 배고려 이것은 동일 집단에서 동일 개수를 연속적으로 뽑았으므로 자동으로 배열이 고려된 것이다. 즉, 우리가 구하는 경우의 수는 팀을 나누기만 하면 되기 때문에 <2명 / 2명>으로 구성된 2팀을 배열하는 경우의 수인 $2!$으로 나누어 배열을 취소하면 된다.

- a, b, c, d, e, f 여섯 명을 2명/2명/2명으로 팀을 나누는 경우 ⇨ ${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!}$

${}_6C_2 \times {}_4C_2 = {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2$라고 표현해도 상관없다.

뽑기의 오류 : 동동연 배고려 이것은 동일 집단에서 동일 개수를 연속적으로 뽑았으므로 자동으로 배열이 고려된 것이다. 즉, 우리가 구하는 경우의 수는 팀을 나누기만 하면 되기 때문에 <2명 / 2명 / 2명>으로 구성된 3팀을 배열하는 경우의 수인 $3!$으로 나누어 배열을 취소하면 된다.

- 사람 열 명을 2명/2명/3명/3명으로 팀을 나누는 경우 ⇨ ${}_{10}C_2 \times {}_8C_2 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} \times \frac{1}{2!}$

${}_{10}C_2 \times {}_8C_2 \times {}_6C_3 = {}_{10}C_2 \times {}_8C_2 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3$라고 표현해도 상관없다.

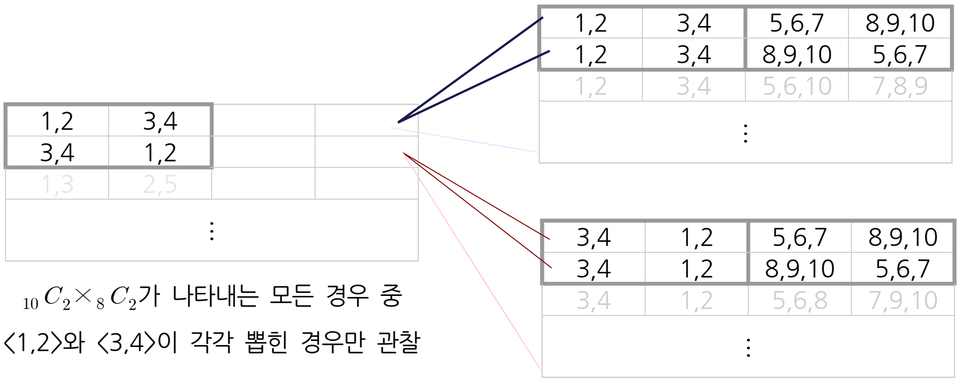
뽑기의 오류 : 동동연 배고려 이것은 동일 집단에서 동일 개수를 연속적으로 뽑았으므로 자동으로 배열이 고려된 것이다. 즉, 우리가 구하는 경우의 수는 팀을 나누기만 하면 되기 때문에, <2명 / 2명 / 3명 / 3명>으로 구성된 4팀 중 <2명 / 2명>인 팀끼리 배열한 경우의 수인 $2!$과 <3명 / 3명>인 팀끼리 배열한 경우의 수인 $2!$으로 두 번 나눠주면 된다.

- 마지막 부분에서 <2명 / 2명 / 3명 / 3명>을 <같 · 포 · 순>처럼 배열한 $\frac{4!}{2!2!}$으로 전체를 나누지는 않는다.

근본적 이해는 역시 구체적인 상황에 대한 관찰이다. 일단 10명의 사람을 1부터 10까지의 숫자에 일대일 대응시키고

1,2	3,4	5,6,7	8,9,10

과 같이 팀이 분할된 한 가지 경우만 관찰해 보자.



1,2	3,4		
3,4	1,2		
1,3	2,5		
⋮			

${}_{10}C_2 \times {}_8C_2$가 나타내는 모든 경우 중

<1,2>와 <3,4>이 각각 뽑힌 경우만 관찰

1,2	3,4	5,6,7	8,9,10
1,2	3,4	8,9,10	5,6,7
1,2	3,4	5,6,10	7,8,9
⋮			

3,4	1,2	5,6,7	8,9,10
3,4	1,2	8,9,10	5,6,7
3,4	1,2	5,6,8	7,9,10
⋮			

<1,2 / 3,4>로 고정된 상태에서 ${}_6C_3 \times {}_3C_3$가 나타내는 모든 경우 중

<5,6,7>와 <8,9,10>이 각각 뽑힌 경우만 관찰

- ${}_{10}C_2\times{}_8C_2\times{}_6C_3\times{}_3C_3$의 상황 중 $\boxed{1,2}\boxed{3,4}\boxed{5,6,7}\boxed{8,9,10}$ 로 팀이 분할된 모든 경우를 수형도로 나타낸 것이다. 보다시피 같은 분할에 대하여 <2명>인 팀은 <2명>인 팀끼리, <3명>인 팀은 <3명>인 팀끼리 배열되는 경우가 고려되기 때문에 전체를 $2!\times2!$으로 나눠야 한다.
- <같은 것을 포함한 순열>을 생각하여 2,2,3,3을 배열한 경우의 수인 $\frac{4!}{2!\times2!}$으로 전체를 나눈다고 생각하면 안 되는데, 이것은 오히려 <동일개수인 팀>들끼리 배열된 경우는 고려하지 않고 <동일개수가 아닌 팀>들끼리 배열된 경우를 고려한 것이기 때문이다. 즉, <2명> <3명>인 팀끼리 배열한 경우의 수만 계산된 것이기 때문이다.

뽑기의 오류 : 동동연 배고려는 말 그대로 <동일 개수>인 팀끼리 배열이 고려된다는 뜻이다.

즉, 분할을 조합으로 계산할 경우 <조합원 수가 같은 팀>끼리 배열되는 경우만 나눠주면 된다.

075 이해를 위한 예제

10종류의 꽃으로 서로 다른 꽃을 각각 3, 3, 4종류씩 묶어 꽃다발을 만들고자 한다. 꽃다발을 만들 수 있는 방법의 수를 적절히 표현한 것을 모두 골라라.

① ${}_{10}C_3\times{}_7C_3\times{}_4C_4\times\frac{1}{2!}$

② ${}_{10}C_4\times{}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{3!}$

③ ${}_{10}C_4\times{}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}$

④ ${}_{10}C_3\times{}_7C_4\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}$

⑤ ${}_{10}C_3\times{}_7C_3\times{}_4C_4$

분할의 공식을 이용한다.

상황을 이해했다면 10개를 3/3/4으로 분할하는 경우의 수이다. 공식처럼 해결이 가능하다.
단지 모두 골라라. 라고 했기 때문에 여러 가지 표현이 있을 수 있다는 사실을 눈치 챌 수 있다.
정의 식을 이용하여 모두 같음을 확인하자.

3/3/4의 순서로 식을 세운 경우 - ${}_{10}C_3\times{}_7C_3\times{}_4C_4\times\frac{1}{2!}=\frac{10!}{3!7!}\times\frac{7!}{3!4!}\times\frac{1}{2!}=\frac{10!}{3!3!4!2!}$

4/3/3의 순서로 식을 세운 경우 - ${}_{10}C_4\times{}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=\frac{10!}{4!6!}\times\frac{6!}{3!3!}\times\frac{1}{2!}=\frac{10!}{3!3!4!2!}$

3/4/3의 순서로 식을 세운 경우 - ${}_{10}C_3\times{}_7C_4\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=\frac{10!}{3!7!}\times\frac{7!}{4!3!}\times\frac{1}{2!}=\frac{10!}{3!3!4!2!}$

사실 표현이 다를 뿐 모두 같은 상황을 설명하고 있는 것이므로 ⇨ 계산하지 않고 같다는 사실을 안다.

경우의 수는 확신이다. 이렇게 간단한 공식적용에도 여러 가지 표현이 있을 수 있다.

정답은 ①,③,④

5. 분할 후 분배와 선분할 개념

1) 분할 후 분배

: 분할의 공식을 사용해서 일단 팀을 나눈 후에 분배를 하는 방법이다.

2) 선분할 개념

: 조를 구분 할 수 있는 기준이 있다면 <분할적 사고>로 상황을 나누고 곱의 법칙과 순열 · 조합 공식만으로 푸는 개념

076 이해를 위한 예제

남자 9명이 팀을 나누어 숙소에 입장하려고 한다. 다음 각 경우의 수를 <분할 후 분배>와 <선분할 개념>으로 식을 표현해 본다.

(1) 2/3/4으로 분할 후 숙소 A, B, C에 입장
(2) 2/2/5으로 분할 후 숙소 A, B, C에 입장
(3) 3/3/3으로 분할 후 숙소 A, B, C에 입장

분할 후 분배 : 분할의 공식 + 배열 (가장 일반적인 풀이)

(1) 2/3/4으로 분할 후 숙소 A, B, C에 입장하는 경우

<팀원수가 같은 팀>이 존재하지 않으므로 분할하는 경우의 수는 ${}_9C_2\times{}_7C_3\times{}_4C_4$이다. - 나눌 필요가 없다.

분할된 각각에 대하여 숙소 A, B, C에 분배하는 경우의 수 $3!$이므로

$$n(2/3/4\text{로 분할 후 } A,\ B,\ C\text{에 입장}) = {}_9C_2\times{}_7C_3\times{}_4C_4\times 3!$$

(2) 2/2/5으로 분할 후 숙소 A, B, C에 입장하는 경우

<팀원수가 같은 팀>이 2팀 존재하므로 분할하는 경우의 수는 ${}_9C_2\times{}_7C_2\times{}_5C_5\times\frac{1}{2!}$이다.

분할된 각각에 대하여 숙소 A, B, C에 분배하는 경우의 수 $3!$이므로

$$n(2/2/5\text{로 분할 후 } A,\ B,\ C\text{에 입장}) = {}_9C_2\times{}_7C_2\times{}_5C_5\times\frac{1}{2!}\times 3!$$

(3) 3/3/3으로 분할 후 숙소 A, B, C에 입장하는 경우

<팀원수가 같은 팀>이 3팀 존재하므로 분할하는 경우의 수는 ${}_9C_3\times{}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{3!}$이다.

분할된 각각에 대하여 숙소 A, B, C에 분배하는 경우의 수 $3!$이므로

$$n(3/3/3\text{으로 분할 후 } A,\ B,\ C\text{에 입장}) = {}_9C_3\times{}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{3!}\times 3!$$

선분할 개념 : 조를 구분할 수 있는 기준이 생긴다면 <분할적 사고 + 순열・조합>

(1) 2/3/4으로 분할 후 숙소 A, B, C에 입장하는 경우

전체상황

	A	B	C
상황 1	2명	3명	4명
상황 2	2명	4명	3명
⋮		⋮	
상황 3!	4명	3명	2명

상황 1 (자리를 기준) A에 누군가 두 명은 들어간다.

	A(2명)	B(3명)	C(4명)
상황 1-1	1,2		
상황 1-2	1,3		
⋮		⋮	
상황 1-${}_9C_2$	8,9		

$$n(\text{전체}) = \underline{3!\times} n(\text{상황}\,1) = 3!\times \underline{{}_9C_2}\times n(\text{상황}\,1-1) = 3!\times {}_9C_2\times \underline{{}_7C_3}$$

곱하는 순간 하나만 센다. 곱하는 순간 하나만 센다. (B에 들어갈 3명을 뽑으면 4명은 자동배열)

(2) 2/2/5으로 분할 후 숙소 A, B, C에 입장하는 경우

전체상황

	A	B	C
상황 1	5명	2명	2명
상황 2	2명	5명	2명
상황 3	2명	2명	5명

상황 1 (자리를 기준) A에 누군가 다섯 명은 들어간다.

	A(5명)	B(2명)	C(2명)
상황 1-1	1,2,3,4,5		
상황 1-2	1,2,3,4,6		
⋮		⋮	
상황 1-${}_9C_5$	5,6,7,8,9		

$$n(\text{전체}) = \underline{3\times} n(\text{상황}\,1) = 3\times \underline{{}_9C_5}\times n(\text{상황}\,1-1) = 3\times {}_9C_5\times \underline{{}_4C_2}$$

곱하는 순간 하나만 센다. 곱하는 순간 하나만 센다. (B에 들어갈 2명을 뽑으면 2명은 자동배열)

(3) 3/3/3으로 분할 후 숙소 A, B, C에 입장하는 경우

어차피 각 숙소에 들어가는 인원은 정해져 있으므로 각 숙소에 들어가는 팀원 수로 상황을 나눌 필요는 없다.

전체상황 (자리를 기준) 숙소 A에 누군가 3명은 들어간다.

	A(3명)	B(3명)	C(3명)
상황 1	1,2,3		
상황 2	1,2,4		
상황 ${}_9C_3$	7,8,9		

$$n(\text{전체}) = \underline{{}_9C_3}\times n(\text{상황}\,1) = {}_9C_3\times \underline{{}_6C_3}$$ (남은 3명은 자동배열)

곱하는 순간 하나만 센다. (B에 들어갈 3명을 뽑으면 3명은 자동배열)

077 이해를 위한 예제

2006. 9. 가형(51%), 나형(38%). 24번. 4점

수련회에 참가한 여학생 5명과 남학생 6명을 4개의 방에 배정하려고 한다. 여학생은 1호실에 3명, 2호실에 2명을 배정하고, 남학생은 3호실과 4호실에 각각 3명씩 배정하는 방법의 수를 구하시오.

분할 후 분배 : 분할의 공식 + 배열

문제의 상황을 표로 표현하면

1호실	2호실	3호실	4호실
여 3	여 2	남 3	남 3

1 단계 : 분할을 한다.

분할하는 전체 경우의 수는 여학생은 ${}_5C_3 \times {}_2C_2$ (조합원 수가 다르므로 나눌 필요가 없다.)

그 각각에 대하여 남학생은 ${}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!}$ (조합원 수가 같은 조를 배열하는 경우의 수로 나눈다.)

즉, $n(\text{분할}) = ({}_5C_3 \times {}_2C_2) \times \left({}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!}\right)$

2 단계 : 분할된 모든 경우에 대해서 분배한다.

분할된 모든 상황에 대하여 여학생은 자동분배 되므로

남학생 2팀을 3호실과 4호실에 분배하는 경우의 수 $2!$가지 존재한다.

즉, $n(\text{분배}) = 2!$

$$n(\text{전체}) = n(\text{분할}) \times n(\text{분배}) = ({}_5C_3 \times {}_2C_2) \times \left({}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!}\right) \times 2! = 200$$

선분할 개념 : 조를 구분할 수 있는 기준이 생긴다면 <분할적 사고 + 순열 · 조합>

남학생을 A, B, C, D, E, F라 하고 여학생을 a, b, c, d, e라고 하자.

모든 학생을 <번호가 붙어있는 각 방>에 배정하는 경우의 수를 구하는 것인데 4개의 조는 조를 구분할 수 있는 명확한 기준이 있는 것이다. 즉, 분할의 공식을 생각하지 않고 (자리를 기준)으로 상황을 논리적으로 분할해 나간다.

$\boxed{\text{전체상황}}$ (자리를 기준) 1호실에 여자 3명이 누군가는 들어간다.

	1호실	2호실	3호실	4호실
상황 1	a,b,c	d, e		
상황 2	a,b,d			
상황 ${}_5C_3$				

: $n(\text{전체}) = {}_5C_3 \times n(\text{상황 }1)$

$n(\text{상황 }1)$에서 남은 d, e는 2호실에 자동으로 배정되므로 경우의 수를 따질 필요가 없다.

$n(\text{상황 }1) = {}_6C_3$이다. (남자 6명 중 3호실에 들어갈 3명을 뽑는 경우의 수, 남은 3명은 4호실에 자동배정)

$$n(\text{전체}) = {}_5C_3 \times {}_6C_3 = 200$$

#3 집합의 분할

1. 집합의 분할의 상황

1) 집합의 분할의 뜻

- 주어진 집합을 몇 개의 공집합이 아니고 서로소인 부분집합으로 나누는 것.

(집합에서 서로소는 교집합의 원소가 존재하지 않는다는 뜻이다.)

2) 집합의 분할의 수

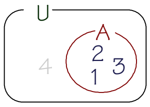
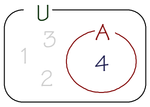
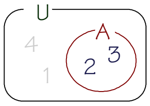
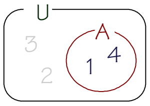
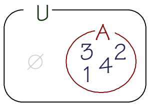
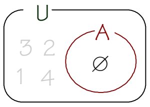
- 서로 다른 n개의 원소를 갖는 집합을 $k(k \leq n)$개의 부분집합으로 분할하는 방법의 수를 기호로 $S(n,\ k)$같이 나타낸다.
- 서로 다른 n개의 원소를 가지고 있는 집합의 분할의 수는 $S(n,\ 1)\ +\ S(n,\ 2)\ +\ \cdots\ +\ S(n,\ n)$이다.

S는 스털링 수(Stirling number)의 약자야. James Stirling은 영국의 수학자인데 스털링 수에 대한 자세한 내용은 행렬과 관련이 깊다. 여기에서는 #2의 내용을 약간 확장시킨 분할 문제라고 생각하면 된다. 읽을 때는 그냥 [에스 엔 콤마 케이] 또는 [스털링 n 콤마 k]라고 읽으면 된다.

예를 들어 $S(3,\ 2)$는 $\{a, b, c\}$를 2개의 부분집합으로 분할하는 경우의 수이므로 $\{a\} \cup \{b, c\}$, $\{b\} \cup \{a, c\}$, $\{c\} \cup \{a, b\}$와 같이 총 3가지이다. 분할의 순서는 무시한다. 즉, $\{a\} \cup \{b, c\}$와 $\{b, c\} \cup \{a\}$은 같은 분할이다.

3) 부분집합의 개수와 분할의 수의 근본적 차이 : 기준의 차이

- 집합 $U = \{1, 2, 3, 4\}$의 부분집합 A가 결정됨에 따라 결정되는 벤다이어그램을 관찰해 본다.

					
$A = \{1, 2, 3\}$	$A = \{4\}$	$A = \{1, 4\}$	$A = \{2, 3\}$	$A = \{1, 2, 3, 4\}$	$A = \varnothing$
집합의 분할에서 두 분할은 같은 분할이다.		집합의 분할에서 두 분할은 같은 분할이다.		집합의 분할에서 두 분할은 같은 분할이다.	

- 즉, 부분집합의 개수는 A라는 주체가 명확히 있어서 1을 뽑아서 자연스럽게 2, 3, 4가 남은 것과
2, 3, 4를 뽑아서 1이 남은 것이 구분이 가지만
집합의 분할은 두 조를 구분하지 않기 때문에 1을 뽑아서 자연스럽게 2, 3, 4가 남은 것과
2, 3, 4를 뽑아서 1이 남은 것이 구분이 가지 않는다. 즉 같은 분할이다.

4) 조합을 이용한 집합의 분할의 수 세기

- 서로 다른 n개의 원소를 순서를 고려하지 않고 분할한다는 점에서 <#2. 분할의 상황 : 뽑기의 오류>와 개념이 일치한다. 단지 각 조(여기에서는 부분집합)의 원소의 개수를 정해주지 않는다는 점에서 <자연수 분할>로 먼저 상황을 나누고 <분할의 공식>을 사용할 수 있다.

예를 들어 $S(5,\ 3)$를 구하기 위해서는 먼저 $P(5,\ 3)$을 생각한다.

$$\begin{aligned} 5 &= 3 + 1 + 1 \\ &= 2 + 2 + 1 \end{aligned}$$

즉, $S(5,\ 3)$의 상황을 각 부분집합의 원소의 개수를 기준으로 <3/1/1>와 <2/2/1> 두 가지 상황이 발생한다.
이 두 가지 상황을 분할의 공식을 이용하여 계산하고 더한다.

$$S(5,\ 3) = {}_5C_3 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} + {}_5C_2 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} = 25$$

⇨ $S(n,\ k)$를 셀 경우 일단 $P(n,\ k)$ 에 해당하는 모든 경우를 나열한 후 <분할의 공식>을 이용하여 센다.

2. 집합의 분할의 성질

1) 집합의 분할의 성질

① $S(n,\ 1) = 1$

② $S(n,\ n) = 1$

③ $S(n,\ 2) = 2^{n-1} - 1$

④ $S(n,\ n-1) = {}_nC_2$

⑤ $S(n,\ k) = S(n-1,\ k-1) + kS(n-1,\ k)$

2) 성질을 이용한 집합의 분할의 수 세기

: $S(n,3) = S(n-1,\ 2) + 3 \cdot S(n-2,\ 2) + 3^2 \cdot S(n-3,\ 2) + \cdots + 3^{n-3} \cdot S(2,\ 2)$

코칭 앞의 ⑤의 성질을 연속적으로 적용한 것이다. 이 공식은 활용도가 높은 공식이 아니므로 반드시 외울 필요는 없다. 어차피 외워도 까먹는다.
규칙을 공부하고, 기본이 되는 $S(n,\ k) = S(n-1,\ k-1) + kS(n-1,\ k)$ 식을 반복적으로 적용하다 보니, 공식이 외워졌다면, 그것은 아주 바람직하다.

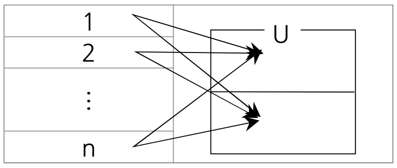
3) 성질의 증명

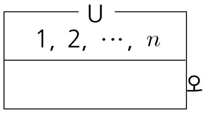
- 분할할 전체집합을 $U = \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$라고 하자.

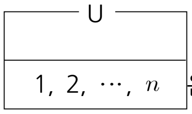
① 1개의 부분으로 분할하는 방법은 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$의 한 가지이므로 $S(n,\ 1)=1$이다.

② n개의 부분으로 분할하는 방법은 $\{1\}\cup\{2\}\cup\{3\}\cup\ \cdots\ \cup\{n\}$의 한 가지이므로 $S(n,\ n)=1$이다.

③ $S(n,\ 2) = 2^{n-1}-1$ 의 설명 ⇨ 벤다이어그램을 결정하는 경우의 수를 구한다.



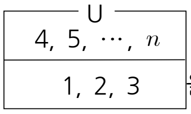
1 단계 : 2^n의 경우 중 

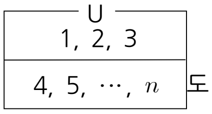
와 

은 집합은 두 개로 분할한 것이 아니므로 빼준다.

즉, 2^n-2

2 단계 : 2^n의 모든 경우를 나열했을 때 반드시 대칭적인 상황도 존재한다. 즉, 2가지를 1가지로 세야 한다. 즉 $\dfrac{2^n-2}{2}$

예를 들어 2^n에서는 

을 셌다면 

도 셌다. 그러므로 $S(n,\ 2) = \dfrac{2^n-2}{2} = 2^{n-1}-1$

④ 집합 $A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}$에서 $\{a_1,\ a_2\}\cup\{a_3\}\cup\ \cdots\ \cup\{a_n\}$, $\{a_1,\ a_3\}\cup\{a_2\}\cup\ \cdots\ \cup\{a_n\}$, $\cdots$의 경우를 말한다.
즉, n 개의 원소 중에서 2개를 택하여 하나의 부분집합을 만들고, 나머지 $(n-2)$개의 원소를 모두 자동으로 원소의 개수가 1개인 부분집합으로 만들면 된다. 따라서 n개의 원소 중에서 2개를 택하는 방법의 수와 같으므로 $S(n,\ n-1) = {}_nC_2$이다.

⑤ 특정원소 a_n을 기준으로 상황을 분할해본다.

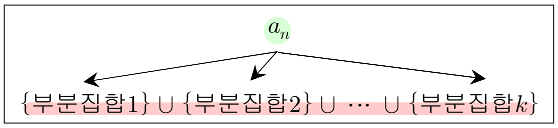
$\boxed{S(n,\ k)\text{의 전체상황}}$: (대상을 기준) 분할된 집합 중 $\{a_n\}$이 존재하는 경우와 $\{a_n\}$이 존재하지 않는 경우

상황 1	$\{a_n\}$이 존재
상황 2	$\{a_n\}$이 존재하지 않는 경우

: $n(\text{전체}) = n(\text{상황 }1) + n(\text{상황 }2)$

- $n(\text{상황 }1)$은 이미 부분집합 중 1개인 $\{a_n\}$이 존재하므로 a_n을 제외한 집합 $\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{n-1}\}$을 $k-1$개의 부분집합으로 분할하는 것과 같다. $n(\text{상황 }1) = S(n-1,\ k-1)$

- $n(\text{상황 }2)$에서 a_n을 제외한 집합 $\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{n-1}\}$을 k개의 부분집합으로 분할하는 경우의 수는 $S(n-1,\ k)$이다.



이 때, 분할된 모든 경우를 나열한다고 가정 했을 때 각각에 대하여 a_n을 k개의 분할된 부분집합 중 하나에 포함시키는 경우의 수는 k개다. $n(\text{상황 }2) = k\times S(n-1,\ k)$

$$S(n,\ k) = S(n-1,\ k-1) + kS(n-1,\ k)$$

예를 들어 $\{a,b,c,t\}$를 3개로 분할하는 $S(4,\ 3)$의 경우 t의 입장에서 $\{\ \}\cup\{\ \}\cup\{t\}$과 $\{\ \}\cup\{\ \}\cup\{\cdots,t\}$로 나눌 수 있다.

- $S(4-1,\ 2)$: $\{a\}\cup\{b,c\}\cup\{t\}$, $\{b\}\cup\{a,c\}\cup\{t\}$, $\{c\}\cup\{a,b\}\cup\{t\}$
- $S(4-1,\ 3)$: $\{a\}\cup\{b\}\cup\{c\}$ ⇨ $3\cdot S(4-1,\ 3)$: $\{a,t\}\cup\{b\}\cup\{c\}$, $\{a\}\cup\{b,t\}\cup\{c\}$, $\{a\}\cup\{b\}\cup\{c,t\}$

078 이해를 위한 예제

원소가 5개인 집합 $\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$를 2개의 공집합이 아닌 서로소인 부분집합으로 분할하는 방법의 수를 구하여라.

풀이 1) 조합을 이용한 분할의 수 세기

1 단계 : 자연수 분할을 이용하여 상황을 나눈다. 즉, $S(5,\ 2)$를 구하기 위해서는 먼저 $P(5,\ 2)$을 생각한다.

$$\begin{aligned}5 &= 4+1\\ &= 3+2\end{aligned}$$

2 단계 : $S(5,\ 2)$의 상황을 각 부분집합의 원소의 개수를 기준으로 <4/1>와 <3/2> 두 가지 상황이 발생한다.
이 두 가지 상황을 분할의 공식을 이용하여 계산하고 더한다.

$$S(5,\ 2) = {}_5C_4\times{}_1C_1 + {}_5C_3\times{}_2C_2 = 15$$

풀이 2) $S(n,\ 2) = 2^{n-1}-1$의 성질 활용

$$S(5,\ 2) = 2^{5-1}-1 = 2^4-1 = 15$$

079 이해를 위한 예제

$S(n+1,\ 3)-3S(n,\ 3)=31$을 만족하는 자연수 n의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

$S(n,\ k) = S(n-1,\ k-1) + kS(n-1,\ k)$이므로

<준식> $S(n+1,\ 3)-3S(n,\ 3) = 31 \iff S(n,\ 2) + 3\cdot S(n,\ 3) - 3S(n,\ 3) = 31$
$\iff S(n,\ 2) = 31$

이 때, $S(n,\ 2) = 2^{n-1}-1$이므로 $S(n,\ 2) = 31 \iff 2^{n-1}-1 = 31 \iff 2^{n-1} = 32$

$n=6$이므로 정답은 ③

티칭 $S(n,\ k) = S(n-1,\ k-1) + kS(n-1,\ k)$ 식을 있는 그대로 외우는 것이 아니라 상황을 기억하는 것.

$S(n-1,\ k-1)$: 어떤 원소 a 혼자 집합을 만들면 a를 제외한 나머지 $n-1$개를 $k-1$로만 분할하면 되겠군.

$kS(n-1,\ k)$: 어떤 원소 a 혼자 집합을 못 만들면 a가 어떤 부분집합의 원소로 포함될 테니까
a를 제외한 나머지 $n-1$개를 k로만 분할한 경우의 수인 $S(n-1,\ k)$에서
a를 부분집합의 원소로 넣을 수 있는 경우가 각각 k개 이므로 $kS(n-1,\ k)$가 되겠네.

이렇게 상황을 확인해 나가는 과정을 반복하다 보면, 이러한 과정이 이미지화 되어서 직관으로 바뀐다.
그러다 보면 $S(n,\ k) = S(n-1,\ k-1) + kS(n-1,\ k)$가 그냥 느껴지는 것이다.

080 이해를 위한 예제

집합의 분할에서 $S(7,\ 3)$을 구하시오.

풀이 1) 조합을 이용한 분할의 수 세기

1 단계 : 자연수 분할을 이용하여 상황을 나눈다. 즉, $S(7,\ 3)$를 구하기 위해서는 먼저 $P(7,\ 3)$을 생각한다.

$$\begin{aligned} 7 &= 5 + 1 + 1 \\ &= 4 + 2 + 1 \\ &= 3 + 3 + 1 \\ &= 3 + 2 + 2 \end{aligned}$$

2 단계 : $S(5,\ 2)$의 상황을 각 부분집합의 원소의 개수를 기준으로 〈5/1/1〉, 〈4/2/1〉, 〈3/3/1〉, 〈3/2/2〉 네 가지 상황이 발생한다. 이 두 가지 상황을 분할의 공식을 이용하여 계산하고 더한다.

$${}_7C_5 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_1C_1 \cdot \frac{1}{2!} + {}_7C_4 \cdot {}_3C_2 \cdot {}_1C_1 + {}_7C_3 \cdot {}_4C_3 \cdot {}_1C_1 \cdot \frac{1}{2!} + {}_7C_3 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!}$$

$$= 21 + 105 + 70 + 105 = 301$$

$$S(7,\ 3) = 301$$

풀이 2) 성질을 이용한 분할의 수 세기

$$\begin{aligned} S(7,\ 3) &= S(6,\ 2) + 3 \cdot S(6,\ 3) \\ &= S(6,\ 2) + 3 \cdot \{S(5,\ 2) + 3 \cdot S(5,\ 3)\} \\ &= S(6,\ 2) + 3 \cdot S(5,\ 2) + 3^2 \cdot S(5,\ 3) \\ &= S(6,\ 2) + 3 \cdot S(5,\ 2) + 3^2 \cdot \{S(4,\ 2) + 3 \cdot S(4,\ 3)\} \\ &= S(6,\ 2) + 3 \cdot S(5,\ 2) + 3^2 \cdot S(4,\ 2) + 3^3 \cdot S(4,\ 3) \\ &= S(6,\ 2) + 3 \cdot S(5,\ 2) + 3^2 \cdot S(4,\ 2) + 3^3 \cdot \{S(3,\ 2) + 3 \cdot S(3,\ 3)\} \\ &= S(6,\ 2) + 3 \cdot S(5,\ 2) + 3^2 \cdot S(4,\ 2) + 3^3 \cdot S(3,\ 2) + 3^4 \cdot S(3,\ 3) \\ &= 2^5 - 1 + 3 \cdot (2^4 - 1) + 3^2 \cdot (2^3 - 1) + 3^3 \cdot (2^2 - 1) + 3^4 \cdot 1 \\ &= 31 + 45 + 3^2 \cdot 63 + 162 = 301 \end{aligned}$$

$$S(7,\ 3) = 301$$

코칭 만약 $S(n, 3) = S(n-1,\ 2) + 3 \cdot S(n-2,\ 2) + 3^2 \cdot S(n-3,\ 2) + \cdots + 3^{n-3} \cdot S(2,\ 2)$이 잘 외워지지 않았다면, 처음에는 기본이 되는 성질을 연속적으로 적용하여 규칙을 느끼는 것이 중요하다.

3. 서로 다른 대상, 서로 같은 자리

: 다른 대상을 같은 자리에 분배하는 상황은 구체적 나열을 통해 집합의 <분할의 상황과 경우의 수적 본질이 같은 상황> 이라는 것을 이해한다.

081 이해를 위한 예제

서로 다른 5개의 구슬을 서로 같은 3개의 주머니에 넣는 방법의 수를 구하시오.
(단 주머니에 적어도 한 개씩의 구슬이 들어 있다.)

서로 다른 구슬을 편의상 a, b, c, d, e 라고 할 때 이것을 3개의 팀으로 분할하기만 하면
주머니는 서로 같은 주머니이므로 분배하는 경우는 따질 필요가 없다. 조합원 수가 정해진 것은 아니므로 $S(5,\ 3)$

자연수 분할을 이용하여 상황을 나눈다. 즉, $S(5,\ 3)$를 구하기 위해서는 먼저 $P(5,\ 3)$을 생각한다.

$$5 = 3 + 1 + 1 \Rightarrow {}_5C_3 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_1C_1 \cdot \frac{1}{2!}$$

$$= 2 + 2 + 1 \Rightarrow {}_5C_2 \cdot {}_3C_2 \cdot {}_1C_1 \cdot \frac{1}{2!}$$

$$n(\text{전체}) = {}_5C_3 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_1C_1 \cdot \frac{1}{2!} + {}_5C_2 \cdot {}_3C_2 \cdot {}_1C_1 \cdot \frac{1}{2!} = 25$$

예제를 통해 개념의 외연을 넓혀라

개념의 외연 #1. 리그와 토너먼트

<개념의 외연>이라는 부분은 현재 배우고 있는 경우의 수의 국한된 내용만 다루는 것이 아니다.
현재 단원에 해당하는 문제를 풀기 위해서 필요한 수학적 개념이나 유형에 필요한 사고방식을 두루 다룬다.

수학에는 순서가 없다. 하지만 배움에는 순서가 있다.

그래서 순서가 없는 수학에 순서를 정한 것이 교육과정이다.
어떤 내용은 너무 어렵거나 복합적인 생각들을 담고 있어서 여러 학년에 걸쳐 배운다.
이런 경우 보통은 문제를 통해서 익힌다는 느낌이 강한데, 이런 개념들을 집약적으로 정리해주는 부분이 될 것이다.

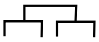
#1 리그와 토너먼트

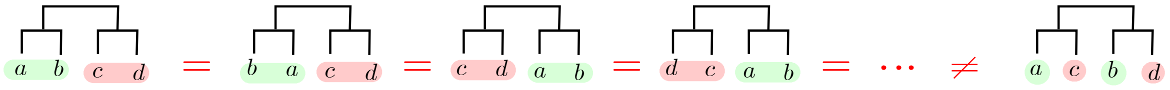
리그는 조합, 토너먼트는 분할의 상황이다.

1. 리그의 상황 : 조합의 상황

- 리그는 분할 분배와 상관없다. 단지, 토너먼트와 구분하기 위해서 넣었을 뿐이다. 리그전이라는 것은 대회에 참가한 모든 팀이 최소 한 번씩 경기를 하는 것을 말한다. 즉, 모든 두 팀이 한 번씩은 맞붙게 되므로 총 경기 수는 참가한 모든 팀 중 두 팀을 뽑는 조합의 수와 같다. 실제로 영국의 프리미어 리그는 20개 팀이 각각 두 번씩 모두 경기를 한다.
  즉, 프리미어 리그의 한 시즌 경기 수는 ${}_{20}C_2 \times 2$이다.

2. 토너먼트의 상황 : 분할의 상황

- a, b, c, d를 가지고  모양의 토너먼트 대진표를 작성할 때, 같은 대진표와 다른 대진표를 구분해본다.



그림과 상관없이 맞붙게 되는 상황이 달라야만 다른 대진표로 인정되는 것이다.
결국, a, b, c, d을 가지고  모양의 토너먼트 대진표를 작성하는 경우의 수는 4명을 2명/2명으로 분할하는 경우와 같다. 2명/2명으로 분할하기만 하면 어떻게 배치되어도 모두 같은 대진표라는 사실을 이해하면 된다.

$n(\text{전체}) = {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!}$이다.

082 이해를 위한 예제

6명이 2명씩 조를 만들어 네트워크 게임 시합을 리그전으로 한다. 이 때, 시합 방법의 수는?
(리그전이란 각 조가 1번씩 게임을 하는 것을 말한다.)

① 15가지　② 30가지　③ 45가지　④ 60가지　⑤ 75가지

먼저 팀을 분할하는 경우의 수는 ⇨ $n(2/2/2\text{로 분할}) = {}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{3!}$

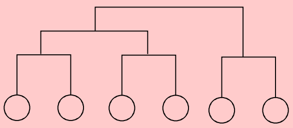
편의상 분할된 세 팀을 A, B, C라고 할 때 이 세 팀의 리그전 경기 수는 ⇨ $n(\text{리그전 경기 수}) = {}_3C_2$

즉, <팀을 분할>한 각각에 대하여 <리그전의 경기>가 발생할 수 있는 모든 경우의 수는

$$n(\text{전체}) = n(2/2/2\text{로 분할})\times n(\text{리그전 경기 수}) = \left({}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{3!}\right)\times\left({}_3C_2\right) = 45$$

083 이해를 위한 예제

6개의 팀이 그림과 같이 토너먼트로 시합을 할 때, 대진표를 만드는 방법의 수는?



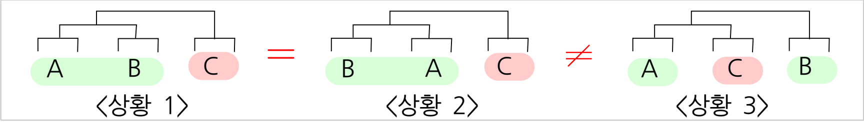
풀이 1)

1 단계 : 6명의 a, b, c, d, e, f를 <2명/ 2명/ 2명> 세 개의 조로 분할한다. ⇨ $n(1\text{단계}) = {}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{3!}$

2 단계 : 세 개로 조를 나눈 상황 중 한 개의 상황만 표현하면 다음과 같다.

- A : (a, b), B : (c, d), C : (e, f) (편의상 조의 이름 붙였다.)

어차피 토너먼트에서는 a b = b a 이므로 A 라고 표현하도록 하겠다.



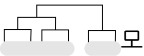
<상황 1>　<상황 2>　<상황 3>

위와 같이 결국 승자끼리 맞붙게 된다는 생각을 해보면 <상황1>과 <상황2>는 같은 대진표이고, <상황3>은 다른 대진표이다. 즉, 대진표를 작성하는 경우의 수는 각 여기에서 세 개의 조 A, B, C를 다시 <2개 / 1개>로 분할하는 경우의 수이므로 ⇨ $n(2\text{단계}) = {}_3C_2\times{}_1C_1$

그러므로 (1단계)로 분할한 각각에 대하여 (2단계)가 발생하는 경우의 수는 $n(\text{전체}) = n(1\text{단계})\times n(2\text{단계})$이다.

$$n(\text{전체}) = n(1\text{단계})\times n(2\text{단계}) = \left({}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{3!}\right)\times\left({}_3C_2\times{}_1C_1\right) = 45$$

풀이 2)

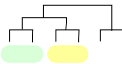
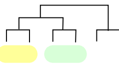
a, b, c, d, e, f를 가지고  모양의 토너먼트 대진표를 작성하는 경우의 수는

1 단계 : a, b, c, d, e, f를 와 에 들어갈 <4명 / 2명> 두 개의 조로 나눈다. $n(1단계) = {}_6C_4 \times {}_2C_2$

2 단계 : 두 개로 조를 나눈 상황 중 한 개의 상황만 표현하면 다음과 같다.

A : (a, b, c, d), B : (e, f) (편의상 조의 이름 붙였다.)

대진표 상에서 A조와 B조의 위치는 자동 결정된다. 1단계의 모든 상황에 대하여 A조를 다시 <2명 / 2명>으로

분할하면 토너먼트의 상황에서  과  은 같은 대진표이므로 분할된 두 조를 배열하는 경우의 수는 따지지 않는다. 즉, 대진표를 작성하는 경우의 수는 각 여기에서 네 명 a, b, c, d를 다시 <2명 / 2명>으로 분할하는 경우의 수이므로 ⇨ $n(2단계) = {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!}$

그러므로 (1단계)로 분할한 각각에 대하여 (2단계)가 발생하는 경우의 수는 $n(전체) = n(1단계) \times n(2단계)$

$$n(전체) = n(1단계) \times n(2단계) = ({}_6C_4 \times {}_2C_2) \times \left({}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!}\right) = 45$$

티칭 위의 두 상황을 각각 이해한다. 그리고 정확하게 셌다는 논리의 확신을 통해 계산하지 않고 같다는 사실을 안다. 논리의 확신을 가지고 어떤 방식으로도 풀 수 있어야 한다.

티칭 $\left({}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!}\right) \times ({}_3C_2 \times {}_1C_1) = \frac{6!}{2!4!} \times \frac{4!}{2!2!} \times \frac{1}{3!} \times 3 = \frac{6!}{2!2!2!2!}$

$3! = 3 \times 2!$

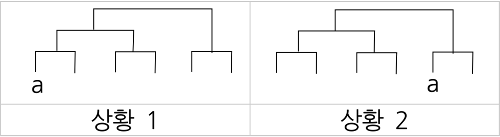
$$({}_6C_4 \times {}_2C_2) \times \left({}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!}\right) = \frac{6!}{2!4!} \times \frac{4!}{2!2!} \times \frac{1}{2!} = \frac{6!}{2!2!2!2!}$$

순열 조합으로 표현된 두 식이 같음을 확인 할 때 물론 위와 같이 숫자가 작으면 계산해도 되지만 일반적으로는 조합의 정의식을 이용한다는 것을 앞에서 여러 번 강조했다.

코칭 얼마든지 <같 · 포 · 순의 나열 취소의 관점>으로도 설명할 수 있으나 굳이 그 방법을 알아서 더 좋은 것이 없고 토너먼트 문제를 푸는 사고가 번잡해 질 수 있으므로 생략한다.

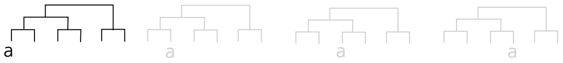
물론 더 복잡할 수 있다. 하지만 이 방식으로 풀 수 있느냐가 '정말 토너먼트를 본질적으로 이해했느냐'에 대한 척도가 될 수 있다.

$\boxed{\text{전체상황}}$ (대상을 기준) a, b, c, d, e, f 중 a가 어딘가에는 들어간다.



: $n(\text{전체}) = n(\text{상황}1) + n(\text{상황}2)$

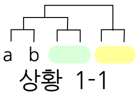
전체 상황은 크게 위의 두 가지 상황으로 나누어진다.



위의 네 가지 상황이 경우의 수를 구분할 필요가 없는 모든 같은 상황임을 이해하고 인정하면 된다.
예를 들어 a 옆에 b가 있다고 가정해보자. a는 b를 이겨야 올라가고 올라간 누군가와 준결승전을 치러야 한다는 점에서 위의 네 가지 대진표는 모두 같은 대진표이다.

(상황1)의 경우 a 옆자리에 누군가는 올 것이기 때문에 $n(\text{상황}1) = \underline{{}_5C_1} \cdot n(\text{상황}1-1)$

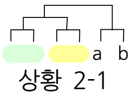
곱하는 순간 하나만 센다.



: (상황 1-1)의 경우 남은 네 명 중 🟩에 들어갈 2명을 뽑으면 남은 2명은 자동으로 🟨에 배치된다.
또한 토너먼트의 상황에서는 뽑은 사람끼리 배열하는 경우는 같은 대진표이므로 경우의 수를 따지지 않는다.
또한 🟩과 🟨은 구분이 가는 자리이므로 뽑기의 오류가 발생하지 않는다.
즉, $n(\text{상황}1-1) = {}_4C_2 = 6$

(상황2)의 경우 역시 a 옆자리에 누군가는 올 것이기 때문에 $n(\text{상황}1) = \underline{{}_5C_1} \cdot n(\text{상황}2-1)$

곱하는 순간 하나만 센다.



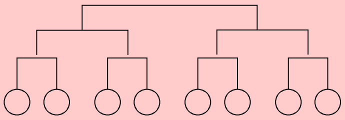
: (상황 2-1)의 경우 토너먼트의 상황에서 🟩과 🟨은 구분이 가지 않는 상황으로 분할의 상황이다.

즉, 남은 4명은 (2명/2명)으로 분할하면 $n(\text{상황}2-1) = {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \dfrac{1}{2!} = 3$

$n(\text{전체}) = n(\text{상황}1) + n(\text{상황}2) = {}_5C_1 \cdot n(\text{상황}1-1) + {}_5C_1 \cdot n(\text{상황}2-1) = {}_5C_1 \cdot 6 + {}_5C_1 \cdot 3 = 45$

084 이해를 위한 예제

8개의 팀이 그림과 같이 토너먼트로 시합을 할 때, 대진표를 만드는 방법의 수는?



풀이 1)

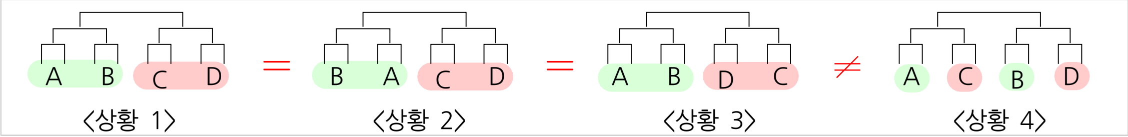
1 단계 : 8명의 a, b, c, d, e, f, g, h를 〈2명/ 2명/ 2명/ 2명〉 네 개의 조로 분할한다.

$$\Rightarrow n(1\text{단계}) = {}_8C_2\times{}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{4!}$$

2 단계 : 네 개로 조를 나눈 상황 중 한 개의 상황만 표현하면 다음과 같다.

A : (a, b), B : (c, d), C : (e, f), D : (g, h) (편의상 조의 이름 붙였다.)

어차피 토너먼트에서는 a b = b a 이므로 A 라고 표현하도록 하겠다.



〈상황 1〉 〈상황 2〉 〈상황 3〉 〈상황 4〉

위와 같이 결국 승자끼리 맞붙게 된다는 생각을 해보면 〈상황1〉 〈상황2〉 〈상황3〉은 같은 대진표이고, 〈상황4〉은 다른 대진표이다. 즉, 대진표를 작성하는 경우의 수는 각 여기에서 네 개의 조 A, B, C, D를 다시 〈2개 / 2개〉로 분할하는 경우의 수 이므로 $\Rightarrow n(2\text{단계}) = {}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}$

그러므로 (1단계)로 분할한 각각에 대하여 (2단계)가 발생하는 경우의 수는 $n(\text{전체}) = n(1\text{단계})\times n(2\text{단계})$

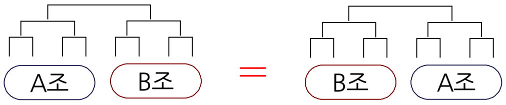
$$n(\text{전체}) = n(1\text{단계})\times n(2\text{단계}) = \left({}_8C_2\times{}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{4!}\right)\times\left({}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}\right) = 315$$

풀이 2)

1 단계 : 8명의 a, b, c, d, e, f, g, h를 〈4명/ 4명〉 두 개의 조로 분할한다. $n(1\text{단계}) = {}_8C_4\times{}_4C_4\times\frac{1}{2!}$

2 단계 : 두 개로 조를 나눈 상황 중 한 개의 상황만 표현하면 다음과 같다.

A : (a, b, c, d), B : (e, f, g, h)



토너먼트의 상황에서 위의 두 상황은 같은 상황이므로 분할한 〈4명/ 4명〉 두 개의 조의 배열은 생각하지 않는다.

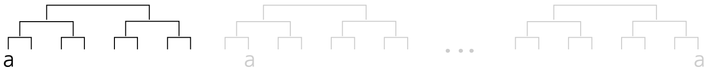
〈4명/ 4명〉으로 분할한 모든 경우에 대하여 A조를 다시 4명을 〈2명 / 2명〉으로 분할하고 B조도 〈2명 / 2명〉으로 분할한 경우의 수는 $\Rightarrow n(2\text{단계}) = \left({}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}\right)\times\left({}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}\right)$

$$n(\text{전체}) = n(1\text{단계})\times n(2\text{단계}) = \left({}_8C_4\times{}_4C_4\times\frac{1}{2!}\right)\times\left({}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}\right)\times\left({}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}\right) = 315$$

티칭 위의 두 상황을 각각 이해한다. 그리고 정확하게 셌다는 논리의 확신을 통해 계산하지 않고 같다는 사실을 안다. 논리의 확신을 가지고 어떤 방식으로도 풀 수 있어야 한다.

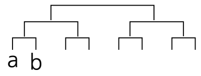
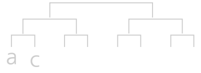
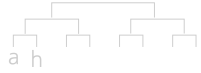
토너먼트도 상황만 정확히 이해하면 선분할 개념으로 풀 수 있다.

물론 더 복잡할 수 있다. 하지만 이 방식으로 풀 수 있느냐가 '정말 토너먼트를 본질적으로 이해했느냐'에 대한 척도가 될 수 있다.

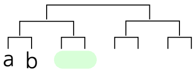


위의 모든 상황이 경우의 수를 구분할 필요가 없는 같은 상황임을 이해하고 인정하면 된다. a가 배치되는 경우는 1가지이다.

전체상황 (자리를 기준) a 옆자리에 누군가는 들어간다.

		…	
상황 1	상황 2	…	상황 7

: $n(\text{전체}) = 7 \times n(\text{상황}\,1)$



: (상황 1)에서 남은 여섯 명 중 🟩에 들어갈 2명을 뽑는다. 🟩은 a, b의 옆 자리라는 다른 자리와는 구분이 가능한 명확한 기준이 있기 때문에 ${}_6C_2$로 계산해도 뽑기의 오류가 발생하지 않는다.

이 경우, 각각에 대하여 다시 남은 4명은 <2명/ 2명>으로 분할만 하면 되므로

$$n(\text{상황}\,1) = {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!}$$

$$n(\text{전체}) = 7 \times n(\text{상황}\,1) = 7 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 315$$

일단 풀고 맞았다고 하더라도 뒤의 해설을 정독하여 읽는다. 왜냐하면 풀이과정이 암기되어서 문제가 그냥 풀리거나 그냥 직관적으로 판단이 되어서 문제가 풀리는 경우도 많기 때문이다. 우리가 문제를 푸는 이유는 앞에서 배운 개념을 확인하기 위해서다. 이 문제를 푸는 것이 중요한 게 아니라 다른 어려운 문제에 까지 적용할 수 있는 개념을 익히는 게 중요한 것이다.

예제 051 자연수 10의 분할 중에서 홀수의 자연수의 합으로 나타내어지는 서로 다른 분할의 수를 구하시오

예제 052 자연수 10의 분할 중 숫자 4를 포함하는 분할의 수는?

예제 053

다음 물음에 답하시오.

(1) 서로 같은 16개의 사탕을 5개의 같은 봉지에 담으려고 한다. 각 봉지에 2개 이상의 사탕이 있도록 넣는 방법의 수를 구하시오. (사탕은 서로 구분하지 않는다.)

(2) 서로 같은 16개의 사탕을 5개의 같은 봉지에 담으려고 한다. 사탕이 가장 적은 봉지에 사탕이 2개 있도록 넣는 방법의 수를 구하시오. (사탕은 서로 구분하지 않는다.)

예제 054

15개의 바둑돌을 20개의 같은 모양의 상자에 담으려고 한다. 각 상자에 3개 이하의 바둑돌이 있도록 넣는 방법의 수를 구하시오. (바둑돌은 서로 구분하지 않는다.)

예제 055

2006. 11. 가형(50%). 나형(46%) 14번. 4점

1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 하나씩 적힌 5개의 공을 3개의 상자 A, B, C에 넣으려고 한다. 어느 상자에도 넣어진 공에 적힌 수의 합이 13이상이 되는 경우가 없도록 공을 상자에 넣는 방법의 수는?
(단, 빈 상자의 경우에는 넣어진 공에 적힌 수의 합을 0으로 한다.)

① 233　② 228　③ 222　④ 215　⑤ 211

예제 056

2006. 11. 나형(38%). 23번. 4점

어른 2명과 어린이 3명이 함께 놀이 공원에 가서 어느 놀이기구를 타려고 한다.
이 놀이기구는 그림과 같이 앞줄에 2개, 뒷줄에 3개의 의자가 있다. 어린이가 어른과 반드시 같은 줄에 앉을 때, 5명이 모두 놀이기구의 의자에 앉는 방법의 수를 구하시오.

예제 057

2006. 6. 가형(63%), 나형(50%). 15번. 3점

어느 회사에서 사원 연수를 위하여 네 지역 서울, 부산, 광주, 대구에서 각각 3명씩 모두 12명의 사원을 선발하였다. 같은 지역에서 선발된 사원끼리는 같은 조에 속하지 않도록 각 지역에서 한 명씩 선택하여 4명으로 구성된 3개의 조로 나누는 방법의 수는?

① 80 ② 144 ③ 216 ④ 240 ⑤ 288

예제 058

2005. 3. 가형(56%). 9번. 3점

그림과 같은 6개의 빈칸에 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6의 6개의 수를 하나씩 써 넣으려고 한다. 1열, 2열, 3열의 숫자들의 합을 각각 a_1, a_2, a_3라 할 때, $a_1 < a_2 < a_3$이 되도록 빈 칸을 채우는 경우의 수는?

1열	2열	3열

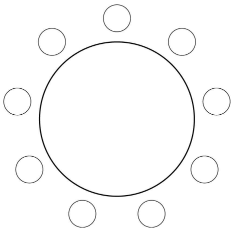
① 90 ② 120 ③ 150 ④ 180 ⑤ 210

예제 059

2013. 7. B형(36%). 27번. 4점

남학생 4명, 여학생 2명이 그림과 같이 9개의 자리가 있는 원탁에 다음 두 조건에 따라 앉으려고 할 때, 앉을 수 있는 모든 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) - 원순열의 상황 생각

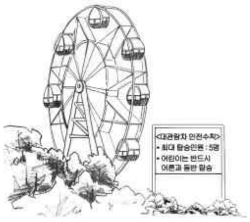
(가) 남학생, 여학생 모두 같은 성별끼리 2명씩 조를 만든다.
(나) 서로 다른 두 개의 조 사이에 반드시 한 자리를 비워둔다.



예제 060

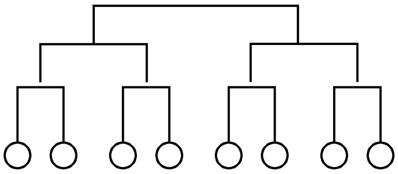
2008. 7. 나형(%). 22번. 4점

놀이공원의 대 관람차는 한 차량 당 최대 탑승 인원 이 5명이고, 안전을 위하여 어린이들은 반드시 어른을 한 명 이상 동반하여 탑승해야 한다. 어른 3명과 어린이 5명이 비어있는 서로 다른 8대의 차량 중 두 대의 차량을 선택하여 탑승하는 방법의 수를 n이라고 할 때, $\frac{n}{10}$의 값을 구하시오.



예제 061

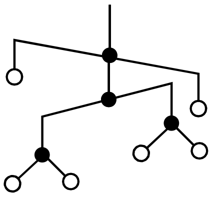
세계 피파 랭킹 1위에서 8위까지의 총 8개 나라가 참가한 축구 경기에서 다음 그림과 같은 토너먼트로 대진표를 만든다고 한다. 두 나라가 경기를 하면 랭킹이 높은 나라가 반드시 이긴다고 할 때, 랭킹 4위인 나라가 결승전에 나갈 수 있도록 대진표를 만드는 방법의 수를 구하여라.



예제 062

2007. 3. 가형(22%). 30번. 4점

좌우 대칭인 ⊓ 모양과 ∧ 모양의 철사가 각각 두 개씩 있다.
그림과 같이 각 철사의 가운데를 서로 연결한 후, 여섯 군데의 고리에 서로 다른 6개의 인형 A, B, C, D, E, F를 매달아 회전모빌을 만들려고 한다. 이때 만들 수 있는 서로 다른 회전모빌의 개수를 구하시오.
(단, 그림의 ● 부분은 회전 가능하고, ∧ 모양의 두 철사는 합동이다.)



정답과 해설

예제 051

REVIEW 자연수 분할의 성질 + 치환과 일대일 대응 VS 일일이 세는 것이 과연 비효율적인가?

자연수 10의 분할 중에서 홀수의 자연수의 합으로 나타내어지는 서로 다른 분할의 수를 구하시오

치환과 일대일 대응 (후에 중복조합에서 자주 사용되는 스킬)

홀수는 짝수 번 더해야 짝수가 나온다.

이 기본적인 성질을 기반으로 상황을 분류하면 상황은

전체상황 : (개수로 분류) 사용되는 홀수의 개수로 상황을 분류한다.

상황 1 : 홀수 2개
상황 2 : 홀수 4개
상황 3 : 홀수 6개
상황 4 : 홀수 8개
상황 5 : 홀수 10개

: n(전체) $=$ n(상황1)$+n$(상황2)$+n$(상황3)$+n$(상황4)$+n$(상황5)

〈상황 1〉의 경우 :

$10 = N_1 + N_2$ $(N_1 \geq N_2)$에서 $N_1 = 2n_1 - 1$, $N_2 = 2n_2 - 1$ (n_1, n_2는 자연수)라고 치환하면

$10 = (2n_1 - 1) + (2n_2 - 1)$이다. 이 두 방정식에서 홀수인 순서쌍의 $(N_1,\ N_2)$과 자연수 순서쌍 $(n_1,\ n_2)$은 일대일로 대응한다. 즉, $6 = n_1 + n_2$ $(n_1 \geq n_2)$의 순서쌍 $(n_1,\ n_2)$의 개수는 $P(6,\ 2) = \left[\frac{6}{2}\right] = 3$

〈상황 2〉의 경우 :

$10 = N_1 + N_2 + N_2 + N_2$ $(N_1 \geq N_2 \geq N_3 \geq N_4)$에서 $N_1 = 2n_1 - 1$, $N_2 = 2n_2 - 1$, $N_3 = 2n_3 - 1$, $N_4 = 2n_4 - 1$ (n_1, n_2, n_3, n_4는 자연수)라고 치환하면 $10 = (2n_1 - 1) + (2n_2 - 1) + (2n_3 - 1) + (2n_4 - 1)$이다.

이 두 방정식에서 홀수인 순서쌍의 $(N_1,\ N_2,\ N_3,\ N_4)$과 자연수 순서쌍 $(n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4)$은 일대일로 대응한다.

즉, $7 = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ $(n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq n_4)$의 순서쌍 $(n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4)$의 개수는 $P(7,\ 4) = 3$

〈상황 3〉의 경우 : 마찬가지의 논리로

$10 = (2n_1 - 1) + (2n_2 - 1) + (2n_3 - 1) + (2n_4 - 1) + (2n_5 - 1) + (2n_6 - 1)$

$8 = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6$ 의 순서쌍 $(n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4,\ n_5,\ n_6)$의 개수는 $P(8,\ 6) = 2$

〈상황 4〉의 경우 : 마찬가지의 논리로

$10 = (2n_1 - 1) + (2n_2 - 1) + (2n_3 - 1) + (2n_4 - 1) + (2n_5 - 1) + (2n_6 - 1) + (2n_7 - 1) + (2n_8 - 1)$

$9 = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_8$의 순서쌍 $(n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4,\ n_5,\ n_6,\ n_7,\ n_8)$의 개수는 $P(9,\ 8) = 1$

〈상황 5〉의 경우 : 마찬가지의 논리로

$10 = (2n_1 - 1) + (2n_2 - 1) + (2n_3 - 1) + (2n_4 - 1) + (2n_5 - 1) + (2n_6 - 1) + (2n_7 - 1) + (2n_8 - 1) + (2n_9 - 1) + (2n_{10} - 1)$

$10 = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_8 + n_9 + n_{10}$의 순서쌍 $(n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4,\ n_5,\ n_6,\ n_7,\ n_8,\ n_9,\ n_{10})$의 개수는 $P(10,\ 10) = 1$

n(전체) $=$ n(상황1) $+$ n(상황2) $+$ n(상황3) $+$ n(상황4) $+$ n(상황5) $= 3 + 3 + 2 + 1 + 1 = 10$

낙수효과를 생각하며 일일이 세는 것은 결코 무식한 방법이 아니다.

$$\begin{aligned} 10 &= 9+1 \\ &= 7+3 \\ &= 5+5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 10 &= 7+1+1+1 \\ &= 5+3+1+1 \\ &= 3+3+3+1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 10 &= 5+1+1+1+1+1 \\ &= 3+3+1+1+1+1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 10 &= 3+1+1+1+1+1+1+1 \\ &= 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 \end{aligned}$$

10가지

예제 052

REVIEW 일대일 대응의 아이디어 + 자연수 분할의 성질

자연수 10의 분할 중 숫자 4를 포함하는 분할의 수는?

자연수 6을 분할하여 한 식에 4를 포함시키면 10의 분할이 된다.

즉, 자연수 10의 분할 중 숫자 4를 포함하는 분할의 수는 자연수 6을 분할한 수에 일대일 대응된다.

4를 포함시킬 때 4의 위치는 자동으로 결정되기 때문에 일대일 대응되는 것이 맞다.

$10 = 6 + 4$	$10 = 5 + 4 + 1$	$10 = 2 + 4 + 2$	$10 = 4 + 2 + 2 + 2$	$\cdots$
$6 = 6$	$6 = 5 + 1$	$6 = 4 + 2$	$6 = 2 + 2 + 2$	

결국 자연수 6을 분할하는 경우의 수를 따진다.

n(6의 분할의 수) $= P(6,1) + P(6,2) + P(6,3) + P(6,4) + P(6,5) + P(6,6)$

$$P(6,1) + P(6,2) + P(6,3) + P(6,4) + P(6,5) + P(6,6) = 1 + \left[\frac{6}{2}\right] + 3 + 2 + 1 + 1 = 11$$

코칭 근본 사고방식을 충분히 활용하되 부분적으로 이 단원의 성질을 쓰는 것이다.

문제를 읽으면서 공식부터 떠올리면 안 된다.

예제 053

REVIEW 자연수 분할의 상황과 성질

다음 물음에 답하시오.

(1) 서로 같은 16개의 사탕을 5개의 같은 봉지에 담으려고 한다. 각 봉지에 2개 이상의 사탕이 있도록 넣는 방법의 수를 구하시오. (사탕은 서로 구분하지 않는다.)

(2) 서로 같은 16개의 사탕을 5개의 같은 봉지에 담으려고 한다. 사탕이 가장 적은 봉지에 사탕이 2개 있도록 넣는 방법의 수를 구하시오. (사탕은 서로 구분하지 않는다.)

---

(1) 각 봉지에 2개 이상의 사탕이 있도록 16개의 사탕을 봉지에 담는 경우의 수는 2개씩의 사탕은 봉지에 미리 넣고 시작한다. 남은 6개의 사탕은 5개 이하의 봉지에 담으면 되는데 이유는 이미 모든 봉지에 2개씩의 사탕이 들어있기 때문이다.

즉, 서로 같은 6개를 서로 같은 5개에 분배하는 상황이고 한 봉지에 모두 넣을 수도 있는 상황이기 때문에

⇨ 자연수 6을 5이하의 자연수로 분할하는 경우의 수와 같다.

$$(1)\ P(6,1) + P(6,2) + P(6,3) + P(6,4) + P(6,5) = 1 + \left[\frac{6}{2}\right] + 3 + 2 + 1 = 10$$

(2) 앞의 (1)과 거의 비슷해 보이지만 가장 적은 봉지에 사탕이 2개가 있어야 하므로 남은 6개의 사탕을 $2+1+1+1+1$의 형태로 분배하는 경우를 배제해야 한다. 이럴 경우 이미 2개씩의 사탕이 봉지에 들어있기 때문에 사탕이 가장 적은 봉지에도 사탕이 3개가 있게 된다.

위의 10가지 경우 중 이 경우만 제외하면 된다.

$$(2)\ 9$$

티칭 자연수 분할의 적어도의 상황에서는 미리 몇 개를 뽑아서 넣을 때, 뽑는 경우의 수를 고려하지 않기 때문에 뽑기의 오류가 생기지 않는다.

코칭 (1)과 (2) - '둘의 다른 점을 느끼느냐 못 느끼느냐'의 차이는 본질적인 상황을 상상하면서 이해를 통해 공식을 쓰느냐 습관이나 암기된 사실에 근거해서 공식을 쓰느냐의 차이이다.

예제 054

REVIEW 자연수 분할의 성질 - 켤레분할

15개의 바둑돌을 20개의 같은 모양의 상자에 담으려고 한다. 각 상자에 3개 이하의 바둑돌이 있도록 넣는 방법의 수를 구하시오. (바둑돌은 서로 구분하지 않는다.)

3개 이하의 바둑돌이 있도록 넣는 방법의 수 - 결국 15를 3 이하의 자연수로 분할하는 경우의 수와 같다. 이것은 켤레분할의 성질에 의하여 15를 3개 이하의 자연수로 분할하는 경우의 수와 같다.

즉, $P(15,\ 1)+P(15,\ 2)+P(15,\ 3)=1+\left[\frac{15}{2}\right]+P(15,\ 3)$

$$=1+7+P(12,\ 1)+P(12,\ 2)+P(12,\ 3)$$

$$=1+7+1+\left[\frac{12}{2}\right]+P(12,\ 3)$$

$$=1+7+1+6+P(9,\ 1)+P(9,\ 2)+P(9,\ 3)$$

$$=1+7+1+6+1+\left[\frac{9}{2}\right]+P(9,\ 3)$$

$$=1+7+1+6+1+4+P(6,\ 1)+P(6,\ 2)+P(6,\ 3)$$

$$=1+7+1+6+1+4+1+\left[\frac{6}{2}\right]+3$$

정답은 27

티칭 20개의 같은 모양의 상자 - 상자가 충분히 많다는 뜻이다.

만약 15개의 바둑돌을 상자에 넣는데 상자가 3개밖에 없다면 자연수 15를 최대 3개로만 분할할 수 있다.

즉, $P(15,\ 4)$부터는 경우의 수가 고려되지 않는다는 뜻이다.

이 문제는 상자가 바둑돌보다도 많으므로 자연수 15를 15개로 분할할 수도 있다.

여기에서 상자는 15이든 20이든 관계없다. 그냥 충분히 많다는 뜻이다.

예제 055

REVIEW 여사건의 아이디어 + 선분할 개념 (조를 구분할 수 있는 기준이 있다면 분할의 상황이 아니다.)

2006. 11. 가형(50%). 나형(46%) 14번. 4점 ↱ 구분이 가는 상자라는 뜻이다.

1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 하나씩 적힌 5개의 공을 3개의 상자 A, B, C에 넣으려고 한다. 어느 상자에도 넣어진 공에 적힌 수의 합이 13이상이 되는 경우가 없도록 공을 상자에 넣는 방법의 수는?
(단, 빈 상자의 경우에는 넣어진 공에 적힌 수의 합을 0으로 한다.) - 빈 상자도 있을 수 있다는 뜻이다.

① 233 ② 228 ③ 222 ④ 215 ⑤ 211

적힌 수의 합이 13이상이 되는 경우가 없도록 - 적힌 숫자의 합의 최댓값을 기준으로 상황을 분류해 본다.
- 이 조건에 상관없이 공을 넣을 경우 <중복순열의 상황>이므로 3^5가지이다.

$\boxed{3^5\text{의 전체상황}}$: (배열 전 모든 상황) 적힌 수의 합의 최댓값을 기준

상황 1	최댓값 5
상황 2	최댓값 6
⋮	⋮
상황 9	최댓값 13
상황 10	최댓값 14
상황 11	최댓값 15

: $n(\text{상황}1) + \cdots + n(\text{상황}8)$보다 $3^5 - n(\text{상황}9) - n(\text{상황}10) - n(\text{상황}11)$이 낫다.

$n(\text{상황}9)$은 1~5의 모든 수의 합이 15이므로 여기에서 2가 적힌 공 하나는 빼내는 경우와 같다. 즉, (1,3,4,5 / 2)와 같이 공을 분할 한 후 이 두 개의 조를 서로 다른 세 상자 중 2개의 상자에 넣는 경우의 수이므로 $n(\text{상황}9) = {}_3P_2$

$n(\text{상황}10)$은 1~5의 모든 수의 합이 15이므로 여기에서 1이 적힌 공 하나는 빼내는 경우와 같다. 즉, (2,3,4,5 / 1)와 같이 공을 분할 한 후 이 두 개의 조를 서로 다른 세 상자 중 2개의 상자에 넣는 경우의 수이므로 $n(\text{상황}10) = {}_3P_2$

$n(\text{상황}11)$은 1~5의 모든 공을 서로 다른 세 상자 중 한 상자에 넣는 경우의 수이므로 $n(\text{상황}11) = 3$

$$3^5 - n(\text{상황}9) - n(\text{상황}10) - n(\text{상황}11) = 3^5 - {}_3P_2 - {}_3P_2 - 3 = 243 - 6 - 6 - 3 = 222$$

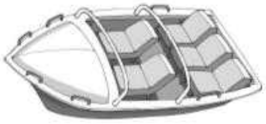
티칭 최댓값이 5인 경우부터 시작하는 이유는 1 ~ 5까지 자연수의 합이 15이고, 이것을 3등분 했을 때 각 값이 5이기 때문이다. 1~5까지의 자연수를 어떻게 분할해도 분할된 수들 중 합의 최댓값이 5보다 더 작은 경우는 존재하지 않는다.

예제 056

REVIEW 선분할 개념 VS 분할 후 분배

2006. 11. 나형(38%). 23번. 4점

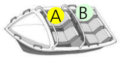
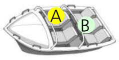
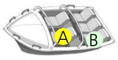
어른 2명과 어린이 3명이 함께 놀이 공원에 가서 어느 놀이기구를 타려고 한다. 이 놀이기구는 그림과 같이 앞줄에 2개, 뒷줄에 3개의 의자가 있다. 어린이가 어른과 반드시 같은 줄에 앉을 때, 5명이 모두 놀이기구의 의자에 앉는 방법의 수를 구하시오.

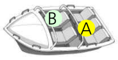
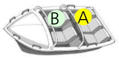
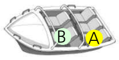


선분할 개념 : <분할 후 분배>의 논리가 아닌 <분할적 사고>로 논리적 접근

어른을 A, B 어린이를 a, b, c라고 할 경우 어른 A, B는 반드시 다른 줄에 앉는다.

전체상황 (대상을 기준) 어른 A, B가 조건에 맞게 어딘가에는 앉는다.

상황 1 : A가 앞 줄			
		…	
상황 1-1	상황 1-2		상황 1-6

상황 2 : B가 앞 줄			
			
상황 2-1	상황 2-2		상황 2-6

$n(\text{전체}) = 2\times n(\text{상황}1) = 2\times 6\times n(\text{상황}1-1)$

$n(\text{상황}1-1)$은 남은 3자리에 아이들을 배열하는 경우의 수 이므로 $3!$이다.

$$n(\text{전체}) = 2\times n(\text{상황}1) = 2\times 6\times n(\text{상황}1-1) = 2\times 6\times 3! = 72$$

분할 후 분배 : 분할과 분배를 따로 생각한다.

먼저 조를 나누는 경우를 생각한다. 어른은 반드시 다른 조에 들어가야 하므로 (1명/1명)으로 분할한다.

$${}_2C_1 \cdot {}_1C_1 \cdot \frac{1}{2!} = 1$$ (공식의 폐해 - 이 경우는 당연히 한 가지인데 공식을 안 쓰면 왠지 불안하다면 이해를 기반으로 공식을 학습하지 않은 것.)

자리가 2자리 / 3자리로 구분되어 있으므로 어린이를 (1명/2명)으로 분할하는 경우의 수는 ${}_3C_2 \cdot {}_1C_1 = 3$

그 각각에 대하여 어린이 두 조 (1명/2명)를 어른 A, B가 있는 조에 분배하는 경우는 2가지이므로

$n(\text{조를 정하기}) = 3\times 2$

이제 어른과 어린이가 포함되어 (2명/3명)으로 분할된 조를 에 배치할 때 2명인 조는 자동으로 앞자리에 배치된다. 즉, 2명인 조는 앞줄, 3명인 조는 뒷줄로 가는 경우에 대하여 그 안에서 자리를 배치하는 경우의 수는 $2!\times 3!$이다.

$$n(\text{전체}) = n(\text{조나누기})\times n(\text{자리배치}) = (3\times 2)\cdot(2!\times 3!) = 6\times 12 = 72$$

코칭 푸는 방식이나 공식을 이용하는 것이 과연 효율적인가?

나는 어떤 방식으로도 경우의 수를 정확히 셀 수 있으며 (물론 효율성의 차이는 있겠지만) 틀린 답에 대한 오류를 찾아낼 수 있다. - 이 확신만 있다면 효율적인 풀이는 자동으로 생각나는 것이다.

예제 057

REVIEW 분할의 상황 (지금까지 분할의 공식을 썼던 상황과는 또 다른 느낌)
- 구체적으로 나열하면 충분히 이해할 수 있다.

2006. 6. 가형(63%), 나형(50%). 15번. 3점

어느 회사에서 사원 연수를 위하여 네 지역 서울, 부산, 광주, 대구에서 각각 3명씩 모두 12명의 사원을 선발하였다. 같은 지역에서 선발된 사원끼리는 같은 조에 속하지 않도록 각 지역에서 한 명씩 선택하여 4명으로 구성된 3개의 조로 나누는 방법의 수는?

① 80 ② 144 ③ 216 ④ 240 ⑤ 288

선분할 개념 : <분할 후 분배>의 논리가 아닌 <분할적 사고>로 논리적 접근

서울의 세 명을 S_1, S_2, S_3 부산의 세 명을 B_1, B_2, B_3, 광주의 세 명을 K_1, K_2, K_3, 대구의 세 명을 D_1, D_2, D_3라 하자.

같은 지역에서 선발된 사원끼리는 같은 조에 속하지 않도록

이 조건에 의하여 S_1, S_2, S_3 는 반드시 다른 조에 속하게 된다. 3개의 조로 분할한 모든 경우를 나열했다고 상상해보자. 어쨌든 세 조에는 S_1, S_2, S_3가 포함되어 있을 것이므로 <3개의 조로 분할한 모든 경우>를 <S_1이 있는 조 / S_2가 있는 조 / S_3가 있는 조>의 순서로 배열할 수 있다.

$\boxed{\text{전체상황}}$: 조건에 맞게 모든 조를 분할한 상황을 나열했다고 가정

	S_1이 있는 조	S_2가 있는 조	S_3가 있는 조
상황 1	S_1 B_1 K_1 D_1	S_2 B_2 K_2 D_2	S_3 B_3 K_3 D_3
상황 2	S_1 B_1 K_1 D_1	S_2 B_2 K_3 D_2	S_3 B_3 K_2 D_3
상황 ?	S_1 B_3 K_3 D_3	S_2 B_1 K_1 D_1	S_3 B_2 K_2 D_2

S_1, S_2, S_3를 기준으로 구성원이 다르면 다른 분할이다.

세 조를 S_1, S_2, S_3를 기준으로 구분할 수 있으므로 더 이상 뽑기의 오류는 생기지 않는다.

n(전체) $=$ n(S_1조의 조합원 뽑기) $\times$ n(남은 사람 중 S_2조의 조합원 뽑기) 남은 사람은 자동으로 S_3조로 들어간다.

$= ({}_3C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_3C_1) \times ({}_2C_1 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_2C_1) = 216$

뽑기의 오류

n(전체) $= ({}_3C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_3C_1) \times ({}_2C_1 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_2C_1) \times ({}_1C_1 \cdot {}_1C_1 \cdot {}_1C_1 \cdot {}_1C_1) \times \frac{1}{3!} = 216$

⬜ 각 지역에서 1명씩 뽑아 1개의 조를 만든 경우

🟩 그 각각에 대하여 남은 사람 중 1명씩 뽑아 1개의 조를 만든 경우

🟥 마지막으로 남은 사암들은 뽑아 또 하나의 조를 구성

🟨 결과적으로 조합원 수가 같은 조가 3개의 조이므로 3개를 배열하는 경우의 수로 나눈다. (분할의 공식)

티칭 결과적으로는 맞으나 나는 이 방식을 인정할 수 없다, 앞에서 <분할의 공식>은 <동동연 배고려>의 상황을 직접 나열하면서 받아들이고 이해했다. 하지만, 이 상황은 조를 구성 할 때 <동일집단에서 동일개수를 연속적으로 뽑은 경우도 고려>되었지만 <다른 집단에서 뽑은 경우>도 섞여있다. 그래서 앞에서 배운 <상황>과는 미묘한 차이가 있다고 느껴지는 <상황>임이 분명하다. 그냥 무작정 공식을 적용하는 것은 경우의 수에서 안 좋은 습관이므로 위의 공식을 쓰려면 실제 상황을 나열함으로서 써도 된다는 확신을 가지고 써야 한다. (다음 페이지에서 설명한다.)

$$({}_3C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_3C_1) \times ({}_2C_1 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_2C_1) \times ({}_1C_1 \cdot {}_1C_1 \cdot {}_1C_1 \cdot {}_1C_1)$$

이 식은 (서울 3명 중 1명 → 부산 3명 중 1명 → ⋯ → 서울 남은 2명 중 1명 → 부산 남은 2명 중 1명 → ⋯)의 방식으로 뽑은 것이다.

위의 식으로 결정된 상황 중 하나인 $\begin{array}{|c|c|c|}\hline S_1\ B_1\ K_1\ D_1 & S_2\ B_2\ K_2\ D_2 & S_3\ B_3\ K_3\ D_3 \\ \hline\end{array}$ 처럼 조가 분할된 경우만 살펴보면

$$S_1 \to B_1 \to K_1 \to D_1 \to S_2 \to B_2 \to K_2 \to D_2 \to S_3 \to B_3 \to K_3 \to D_3$$
$$S_1 \to B_1 \to K_1 \to D_1 \to S_3 \to B_3 \to K_3 \to D_3 \to S_2 \to B_2 \to K_2 \to D_2$$
$$S_2 \to B_2 \to K_2 \to D_2 \to S_1 \to B_1 \to K_1 \to D_1 \to S_3 \to B_3 \to K_3 \to D_3$$
$$S_2 \to B_2 \to K_2 \to D_2 \to S_3 \to B_3 \to K_3 \to D_3 \to S_1 \to B_1 \to K_1 \to D_1$$
$$S_3 \to B_3 \to K_3 \to D_3 \to S_1 \to B_1 \to K_1 \to D_1 \to S_2 \to B_2 \to K_2 \to D_2$$
$$S_3 \to B_3 \to K_3 \to D_3 \to S_2 \to B_2 \to K_2 \to D_2 \to S_1 \to B_1 \to K_1 \to D_1$$

위와 같이 3개의 조를 배열한 경우가 고려됐음을 이해해보자. 즉, 분할된 각각에 대하여 조를 배열한 경우를 고려했으므로 그래서 전체를 3!으로 나누는 것이다. 이처럼 앞에서 <분할의 상황>을 이해했던 방식과 같은 방식으로 구체적인 한 가지 상황을 관찰하여 이해를 기반으로 공식을 적용할 수 있다.

예제 058

REVIEW 분할의 상황과 자동배열

2005. 3. 가형(56%). 9번. 3점

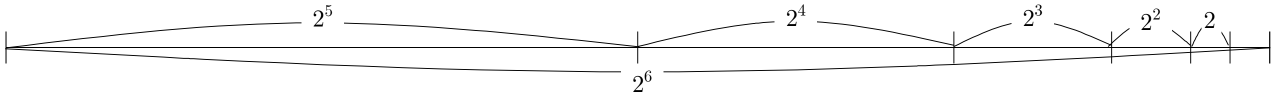
그림과 같은 6개의 빈칸에 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6의 6개의 수를 하나씩 써 넣으려고 한다. 1열, 2열, 3열의 숫자들의 합을 각각 a_1, a_2, a_3라 할 때, $a_1 < a_2 < a_3$이 되도록 빈 칸을 채우는 경우의 수는?

1열	2열	3열

① 90 ② 120 ③ 150 ④ 180 ⑤ 210

티칭 이 문제의 핵심은 $2 + 2^2 + \cdots + 2^n < 2^{n+1}$ 라는 사실을 직감하고 있느냐이다.

아래 그림을 보면 쉽게 이해할 수 있을 거라 믿는다.



결국 이 문제는 위의 성질에 의하여 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6를 (2개 / 2개 / 2개)로만 팀을 분할하면 열은 자동으로 정해진다는 사실을 알 수 있다. 단지, 분할된 각각에 대하여 같은 열에서 위/아래 자리 배치하는 경우가 2가지씩 존재하므로

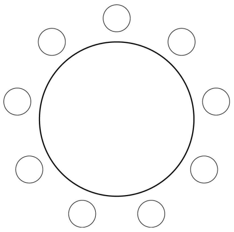
$$n(\text{전체}) = n(\text{조 나누기}) \times n(\text{자리배치}) = \left({}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!}\right) \cdot (2 \times 2 \times 2) = 120$$

예제 059

REVIEW 전체적으로는 분할적 사고를 쓰되 부분적으로 공식을 쓴다. + 원순열은 고정이다. +분할의 공식

2013. 7. B형(36%). 27번. 4점

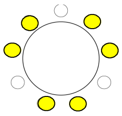
남학생 4명, 여학생 2명이 그림과 같이 9개의 자리가 있는 원탁에 다음 두 조건에 따라 앉으려고 할 때, 앉을 수 있는 모든 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) - 원순열의 상황 생각



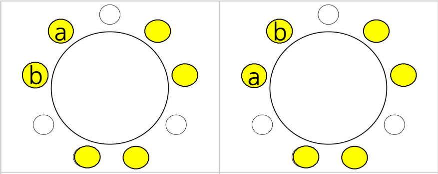
(가) 남학생, 여학생 모두 같은 성별끼리 2명씩 조를 만든다.
(나) 서로 다른 두 개의 조 사이에 반드시 한 자리를 비워둔다.

선분할 개념 + 원순열은 고정

남학생을 A, B, C, D 여학생을 a, b라고 하자.
서로 다른 두 개의 조 사이에 반드시 한 자리를 비워둔다.에서 앉는 자리를 정하는 경우는 오른쪽과 같다.
다른 경우는 모두 회전해서 오른쪽과 같이 만들 수 있으므로 경우의 수를 따질 필요가 없다.



$\boxed{\text{전체상황}}$ (대상을 기준) 여학생 2명이 어딘가에는 앉는다.



상황 1 상황 2

: $n(\text{전체}) = 2 \times n(\text{상황}1)$

배열된 모든 경우를 나열했다고 가정했을 때 각 상황들을 회전시켜 여학생의 위치를 고정하면 위와 같이 2가지 상황만 발생할 수 있다.
이 경우, 각각에 대하여 (상황 1)은 여학생을 기준으로 모두 위치를 구분하므로 $4!$이다. (남학생의 조를 굳이 나눌 필요가 없다.)

$$n(\text{전체}) = 2 \times n(\text{상황}1) = 2 \times 4! = 48$$

코칭 아래는 교육청이 제시한 해설지로 <분할 후 분배>, <원순열 공식>을 활용하고 있다.

(ⅰ) 남학생 4명 중 2명씩 조를 만드는 경우의 수 ${}_4C_2 \times \dfrac{1}{2!}$

(ⅱ) 2명의 학생과 1개의 빈자리를 묶어서 생각하면 3개의 묶음을 원형으로 배열하는 원순열의 경우의 수 $(3-1)!$

(ⅲ) 같은 조의 학생끼리 서로 자리를 바꾸는 경우의 수 2^3

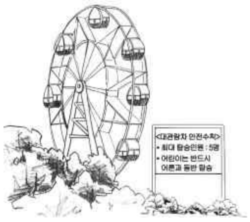
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $\therefore\ {}_4C_2 \times \dfrac{1}{2!} \times (3-1)! \times 2^3 = 48$

'풀이가 좋다, 나쁘다'를 떠나서 공식을 강요하는 풀이이다. 하지만 이 풀이도 완벽히 이해하고 확신하며 쓴다면 괜찮다.

예제 060

REVIEW 원순열인 줄 알았지? (자리를 구분할 수 있는 기준이 생기는 순간 원순열이 아니다.)
분할의 상황과 선분할 개념

2008. 7. 나형(%). 22번. 4점



놀이공원의 대 관람차는 한 차량 당 최대 탑승 인원 이 5명이고, 안전을 위하여 어린이들은 반드시 어른을 한 명 이상 동반하여 탑승해야 한다. 어른 3명과 어린이 5명이 비어있는 서로 다른 8대의 차량 중 두 대의 차량을 선택하여 탑승하는 방법의 수를 n이라고 할 때, $\frac{n}{10}$의 값을 구하시오.

선분할 개념 : <분할 후 분배>의 논리가 아닌 <분할적 사고>로 논리적 접근

서로 다른 8대의 차량 - 이 조건 때문에 원순열이 아니다. 회전하더라도 각자의 자리를 구분한다.

(서로 같은 8대의 차량이었으면 원순열)

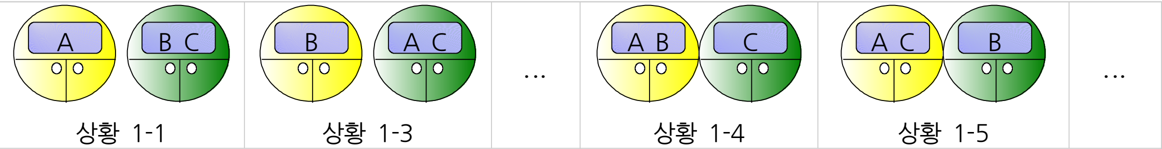
일단 8대의 차량 중 탑승할 2대의 차량을 고르는 경우의 수는 $_8C_2$

$n(\text{전체}) = {}_8C_2 \times n(\text{상황}1)$: 이제 (차량1)과 (차량2)로 고정된 상황에서 탑승하는 경우의 수를 따진다.

곱하는 순간 하나만 센다.

어른 3명을 편의상 A, B, C라 하고 어린이 5명을 a, b, c, d, e라고 하자.

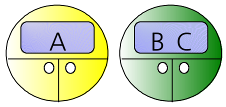
$\boxed{\text{상황 1}}$ (자리를 기준) (차량1)에 어른이 2명 들어가거나 1명 들어간다.



(차량1)에 1명 ⇨ $_3C_1$ (차량1)에 2명 ⇨ $_3C_2$

즉, $n(\text{상황}1) = 6 \times n(\text{상황}1-1)$: 이제 (차량1)에 어른 A (차량2)에 어른 B,C로 고정된 상황에서 경우의 수를 따진다.

곱하는 순간 하나만 센다.



상황 1-1

한 차량 당 최대 탑승 인원 이 5명 이므로

(차량1)에 탑승 가능한 어린이 수는 (4명 or 3명 or 2명)이다.

(차량1)에 1명이 들어갈 경우 (차량2)는 정원초과

(차량1)에만 들어갈 어린이만 뽑으면 나머지 어린이는 자동 배치되므로 경우의 수를 따질 필요가 없다.

즉, $n(\text{상황}1-1) = {}_5C_4 + {}_5C_3 + {}_5C_2$

$n(\text{전체}) = {}_8C_2 \times n(\text{상황}1) = {}_8C_2 \times 6 \times n(\text{상황}1-1) = {}_8C_2 \cdot 6 \cdot \{{}_5C_4 + {}_5C_3 + {}_5C_2\} = 4200$이므로 $\frac{n}{10} = 420$

분할 후 분배 : 분할과 분배를 따로 생각한다.

어른 3명을 편의상 A, B, C라 하고 어린이 5명을 a, b, c, d, e라고 하자.

8명을 두 개의 팀으로 나누어 두 대의 차량에 배치하는 경우를 따진다.

한 차량 당 최대 탑승 인원 이 5명 이므로 분할의 경우는 (상황1 : 5명/3명), (상황2 : 4명/4명) - 두 가지가 있다.

즉, $n(\text{전체}) = \{n(\text{상황}1) + n(\text{상황}2)\} \cdot n(\text{분배})$

(상황1)은 어른을 한 명 이상 동반하여 탑승해야 하므로 먼저 어른을 (2명/1명)으로 분할한다. ⇨ ${}_3C_2 \cdot {}_1C_1$

이 경우, 각각에 대하여 어린이를 투입하여 조를 완성한다.

즉, 어른 2명 있는 조에 (1명을 투입 or 3명을 투입)하면 나머지는 자동배치 (상황 1 : 5명/3명)의 조가 완성된다.

⇨ ${}_3C_2 \cdot {}_1C_1 \cdot ({}_5C_1 + {}_5C_3)$

(상황2)역시 어른을 한 명 이상 동반하여 탑승해야 하므로 먼저 어른을 (2명/1명)으로 분할한다. ⇨ ${}_3C_2 \cdot {}_1C_1$

이 경우, 각각에 대하여 어린이를 투입하여 조를 완성한다. 즉, 어른 2명 있는 조에 (2명을 투입)하면 나머지는 자동배치 (상황2 : 5명/3명)의 조가 완성된다. ⇨ ${}_3C_2 \cdot {}_1C_1 \cdot {}_5C_2$

결국 조건에 맞게 분할하는 전체 경우의 수는 ${}_3C_2 \cdot {}_1C_1 \cdot ({}_5C_1 + {}_5C_3) + {}_3C_2 \cdot {}_1C_1 \cdot {}_5C_2$

두 팀으로 분할된 각각에 대하여, 두 팀을 서로 다른 8대의 차량 중 두 대의 차량에 분배하는 경우의 수는 ${}_8P_2$이다.

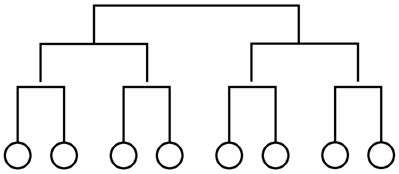
$$n(\text{전체}) = \{n(\text{상황}1) + n(\text{상황}2)\} \cdot n(\text{분배}) = \{{}_3C_2 \cdot {}_1C_1 \cdot ({}_5C_1 + {}_5C_3) + {}_3C_2 \cdot {}_1C_1 \cdot {}_5C_2\} \times {}_8P_2 = 4200$$

코칭 풀이에 확신이 있다면 어떤 풀이든 괜찮다. 억지로 상황을 공식에 끼워 맞추어 푸는 것은 결코 효율적이지 않다.

예제 061

REVIEW 전체적으로는 분할적 사고를 쓰되 부분적으로 공식을 쓴다. + 토너먼트와 선분할 개념

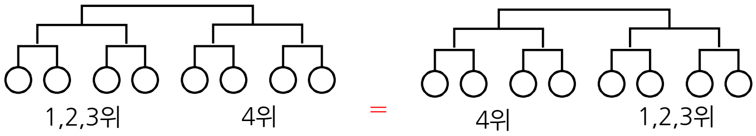
세계 피파 랭킹 1위에서 8위까지의 총 8개 나라가 참가한 축구 경기에서 다음 그림과 같은 토너먼트로 대진표를 만든다고 한다. 두 나라가 경기를 하면 랭킹이 높은 나라가 반드시 이긴다고 할 때, 랭킹 4위인 나라가 결승전에 나갈 수 있도록 대진표를 만드는 방법의 수를 구하여라.



토너먼트의 상황을 이해하고 선분할 개념으로 풀어보자.

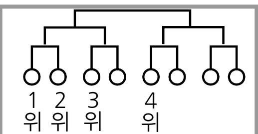
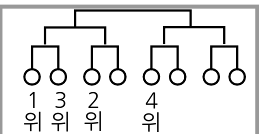
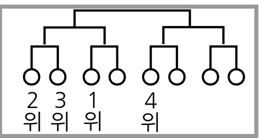
토너먼트는 같은 대진표와 다른 대진표만 구분할 수 있으면 된다.

랭킹 4위인 나라가 결승전에 나갈 수 있도록 대진표 이므로 (1위, 2위 ,3위)와 (4위)는 각각 다른 조에 속해 있어야 한다.



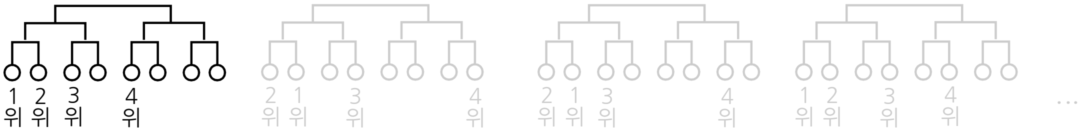
토너먼트의 상황에서 위의 두 상황이 경우의 수를 구분할 필요가 없는 같은 상황임을 이해하자.

$\boxed{\text{전체상황}}$: (배열 전 모든 상황) (1위, 2위, 3위)를 (2명/1명)으로 분할한 경우로 나눈다.

상 황 1		상 황 2		상 황 3	

$n(\text{전체}) = {}_3C_2 \times {}_1C_1 \times n(\text{상황 } 1)$

(상황 1)에 대하여



역시 위의 대진표가 모두 같은 대진표임을 이해하자. 모든 상황이 1위와 2위가 맞붙고, 1위가 이긴 후 3위랑 맞붙고...4위는 결승전 가고..

(상황1)은 3위 옆자리에 들어갈 1명을 뽑는 경우 각각에 대하여 4위 옆자리에 들어갈 한 명을 뽑으면 된다.

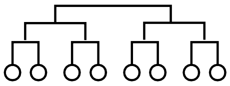
나머지는 자동으로 남은 두 자리에 들어가며 이 둘을 배열하는 경우 역시 같은 대진표이므로 경우의 수를 따질 필요가 없다.

⇨ ${}_4C_1 \times {}_3C_1$

지금처럼 조를 구분할 수 있는 명확한 기준(3위 옆자리, 4위 옆자리라는 기준)이 있다면 <뽑기의 오류>는 발생하지 않는다.

$n(\text{전체}) = {}_3C_2 \times {}_1C_1 \times n(\text{상황 } 1) = {}_3C_2 \times {}_1C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 = 36$

분할로 풀어보자.



위의 토너먼트의 대진표를 작성하는 방법은 8명을 (4명/4명)으로 분할 한 뒤 다시 4명을 (2명/2명)으로 분할한다.
또는 8명을 (2명/2명/2명/2명)으로 분할하고 분할된 4팀을 다시 (2팀/2팀)으로 분할해도 된다.

8명을 (4명/4명)으로 분할하되 1위, 2위, 3위는 같은 조, 4위는 다른 조에 있도록 분할한다.
이 때 두 조는 (1,2,3위가 있는 조 / 4위가 있는 조)로 구분할 수 있는 명확한 기준이 있으므로 남은 4명 중 1명을 뽑아 1,2,3위가 있는 조로 보내면 남은 세 명은 자동으로 4위가 있는 조로 가게 된다. 즉, 문제의 조건에 맞게 8명을 (4명/4명)으로 분할하는 경우의 수는 ${}_4C_1$
토너먼트의 상황에서는 (4명/4명)으로 분할된 조를 배열하는 경우는 구분할 필요가 없다. 단지 분할된 각각에 대하여 4명을 다시 (2명/2명)으로 분할해야 하므로

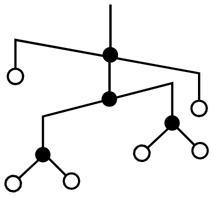
$$n(\text{전체}) = {}_4C_1 \times \left({}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!}\right) \times \left({}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!}\right) = 36$$

예제 062

REVIEW 전체적으로는 분할적 사고를 쓰되 부분적으로 공식을 쓴다. + 분할의 상황

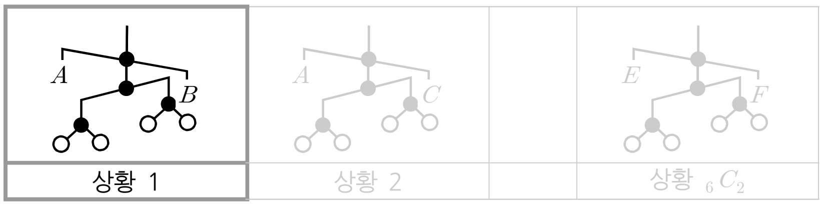
- 토너먼트의 상황과 본질적으로는 같다.

2007. 3. 가형(22%). 30번. 4점

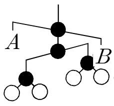
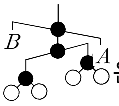


좌우 대칭인 ┌─┐ 모양과 ∧ 모양의 철사가 각각 두 개씩 있다.
그림과 같이 각 철사의 가운데를 서로 연결한 후, 여섯 군데의 고리에 서로 다른 6개의 인형 A, B, C, D, E, F를 매달아 회전모빌을 만들려고 한다. 이때 만들 수 있는 서로 다른 회전모빌의 개수를 구하시오.
(단, 그림의 ● 부분은 회전 가능하고, ∧ 모양의 두 철사는 합동이다.)

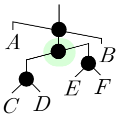
전체상황 : (자리를 기준) 가장 위의 두 자리에 누군가는 들어간다.

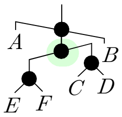


$n(\text{전체}) = {}_6C_2 \times n(\text{상황}\,1)$

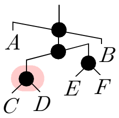
모빌이 회전 가능하므로  과  은 구분하지 않는다. (즉, 같은 모빌이다.)

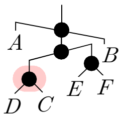
(상황1)에서 남은 4명을 <2명 / 2명>으로 분할하기만 하면 이것을 배열하는 경우는 고려하지 않아도 된다.





: ● 이 회전 가능하므로 이 두 모빌은 같은 모빌이다.





: ● 이 회전 가능하므로 이 두 모빌도 같은 모빌이다.

결국, $n(\text{상황}\,1) = {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!}$

$$n(\text{전체}) = {}_6C_2 \times n(\text{상황}\,1) = {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 45$$

PART 05

중복조합

1. 중복조합의 상황
2. 중복조합과 일대일 대응

촌철살인 #5 일대일 대응의 힘

01 〈경우의 수적 본질이 같다.〉라는 확신

- 〈경우의 수적 본질이 같다.〉라는 확신은 곧 직관이다. 이것은 공식처럼 유도되어 나오는 것은 아니지만 우리에게 명확히 존재하는 것이다. 직관은 구체적 경험의 산물이라는 것은 앞에서도 언급했다.

중복조합의 문제는 일대일 대응을 통해 중복조합의 상황과 〈경우의 수적 본질이 같다.〉라는 확신을 한 후 결국은 공식으로 푼다. 이 확신은 구체적 나열을 통해서만 가능하다. 문제에서 주어진 상황을 도식화 하여 문자나 숫자 등을 이용하여 간단히 표현하고 이것을 구체적으로 나열하면 중복조합의 상황임을 확신할 수 있는 것이다.

중복조합 문제가 잘 감이 안 오는 것은 당연한 것이다. 일일이 나열해봐야 중복조합임을 눈치 챌 수 있기 때문이다. 이것이 이 단원의 특징이고 핵심이다.

PART 01 근본 사고방식

#1. 일대일 대응 경우의 수적인 본질이 같은 상황

#2. 분할적 사고 〈전제〉 모든 경우의 논리적 나열 능력

1. 자리를 기준
2. 대상을 기준
3. 개수로 분류
4. 배열 전 모든 상황

: 분할하는 순간 상황은 고정된다.

#3. 합의 법칙과 곱의 법칙

1. 합의 법칙
2. 곱의 법칙
3. 센다의 법칙
4. 수형도의 활용

#4. 여사건의 아이디어

PART.1 개념의 외연

#1. 정수론 1탄

#2. 센다의 법칙

#3. 경우의 수를 세는 방법은 무한가지

전체적으로 분할적 사고를 하되 부분적으로 공식을 쓴다.

PART 02 근본에 가까운 공식

#1. 계승, 순열, 조합의 공식

1. 계승의 뜻과 공식
2. 순열과 조합의 뜻과 공식
3. 조합의 기본 성질 : ${}_{n}C_{r} = {}_{n}C_{n-r}$
4. 논리의 확신 : 경우의 수적인 본질이 같은 상황

#2. 순열과 조합의 상황

1. 서로 다른 대상, 서로 다른 자리
2. 조합과 자동배열
3. 뽑기의 오류 : 〈동동연〉이면 〈배고려〉

#3. 순열과 조합의 수식적 활용

1. 순열의 정의식과 계산식
2. 조합의 정의식과 계산식
3. 정의되는 기호들
4. 순열과 조합으로 표현

PART.2 개념의 외연

#1. 순열 조합으로 표현된 방정식

#2. 여러 가지 상황의 배열

#3. 여사건의 아이디어 + 특정인

#4. 정수론 2탄

#5. 도형과 경우의 수

#6. 집합과 경우의 수

PART 03 이해하면 공식은 없다

#1. 중복순열과 곱의 법칙 중복순열은 곱의 법칙이다.

#2. 같은 것을 포함한 순열과 조합 같은 것을 포함한 순열은 조합이다

1. 같은 것을 포함한 순열의 뜻과 공식
2. 배열 취소의 관점
3. 자동배열의 상황
4. 같은 것들 중에서 일부를 뽑는 것은 공식이 없다.

#3. 원순열과 고정

1. 원순열의 상황
2. 원순열의 경우의 수
3. 다각형 순열
4. 목걸이 순열

PART.3 개념의 외연

#1. 경로의 수 문제

#2. 입체 순열

PART 04 분할의 상황

#1. 자연수의 분할

1. 자연수 분할의 기본 정의 · 낙수효과
2. 페러스 다이어그램과 성질, 켤레분할
3. 자연수 분할의 상황

#2. 분할의 상황

1. 분할의 상황 1 : 뽑기와 분할의 경우의 수가 다른 경우
2. 분할의 상황 2 : 뽑기와 분할의 경우의 수가 같은 경우
3. 선분할 개념 : 기준이 생기면 〈뽑기의 오류〉 발생하지 않는다.
4. 분할의 공식화 : 〈동동연〉이면 〈배고려〉
5. 분할 후 분배와 선분할 개념

#3. 집합의 분할

1. 집합 분할의 상황
2. 집합 분할의 성질
3. 서로 다른 대상, 서로 같은 자리

PART.4 개념의 외연

#1. 리그와 토너먼트

PART 05 중복조합과 일대일 대응

#1. 중복조합의 상황

1. 중복조합의 뜻과 공식
2. 구분막대기를 이용한 일대일 대응
3. 중복조합의 공식 : 암기가 아닌 Reading

$${}_{n}H_{r} = {}_{n+r-1}C_{n-1}$$

#2. 중복조합과 일대일 대응

1. 중복조합과 일대일 대응
   : 일대일 대응 + 공식
2. 서로 같은 대상, 서로 다른 자리
3. 중복조합의 적어도의 상황
   : 미리 뽑아놓고 생각한다.

PART.5 개념의 외연

#1. 같은 것과 다른 것 총 정리

#2. 중복조합과 곱의 법칙

#3. 전개식과 경우의 수

#4. 부정방정식과 일대일 대응

#5. 함수의 개수 총정리

PART 06 이항정리와 조합의 연속 합

#1. 이항정리와 이항계수의 성질

1. 이항계수의 의미와 이항전개식
2. 특정항의 계수 : 나열된 식의 구조와 추론
3. 이항전개식 간단히 하기
4. 이항계수의 성질 : 이항정리 + 항등식의 마법
   1) 연속 합 2) 교대 합 3) 짝수 합
   4) 홀수 합 5) 절반 합

#2. 조합의 식 변형과 이항계수의 성질

#3. 파스칼 삼각형

1. 이항계수의 또 다른 성질
2. 파스칼 삼각형 공식 : ${}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_{r} = {}_{n}C_{r}$
3. 이항계수의 성질과 파스칼 삼각형 공식의 구분법

#4. 분할적 사고와 관점 합

1. 이항전개식을 이용한 설명
2. 다른 방식을 이용한 설명

PART.6 개념의 외연

#1. 삼항정리

#2. 정수론 3탄

뼈대가 되는 기본 개념

#1 중복조합의 상황

1. 중복조합의 뜻과 공식

1) 중복조합의 뜻

- 서로 다른 n개 중 중복을 허락하여 r개를 뽑는 경우의 수 기호로 $_nH_r$라고 한다.

H는 homogeneous (동종의)의 약자이고, 읽을 때는 그냥 알파벳 순서대로 [엔 에이치 알] 이라고 읽으면 된다.
구분막대기의 상황을 이해하면 왜 중복조합이 <동종의>라는 의미를 가지게 되었는지 알게 된다.

2) 중복조합의 공식

- $_nH_r = {}_{n+r-1}C_{n-1}$: 이 공식은 절대 외우지 않는다. 아래 구분막대기의 상황을 이해하고 자연스럽게 Reading

2. 구분막대기를 이용한 일대일 대응

- 서로 다른 a, b, c 중 중복을 허용하여 2개를 뽑는 모든 경우는 aa, bb, cc, ab, bc, ca이다.
이 결과를 <같은 경우의 수>가 나오는 <다른 상황 : 구분막대기의 상황>에 일대일 대응시켜본다.

1 단계 : 3개의 문자를 구분해 줄 수 있는 구분 막대기 2개를 준비

⇨ a ‖ b ‖ c 세 개의 문자를 막대기를 이용하여 나눌 때, 막대기 ‖ 는 2개면 충분하다.
이제 구분막대기를 기준으로 나누어지는 자리를 생각한다. - <자리 1> ‖ <자리 2> ‖ <자리 3>
<자리 1에는 a만>, <자리 2에는 b만>, <자리 3에는 c만> 들어갈 수 있다고 생각한다.

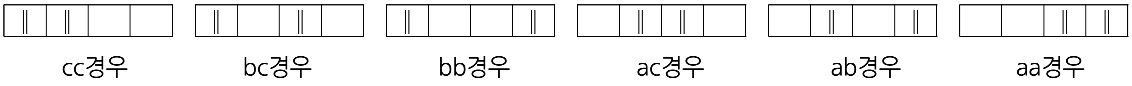
2 단계 : 구분막대기 2개 + 우리가 뽑는 대상 2개 = 총 4개의 상자

⇨ 상자 2개와 구분막대기가 들어갈 상자 2개 총 4개의 상자를 준비한다. □□□□

3 단계 : 상자에 구분막대기 배치 → 남는 자리에 대상은 자동배열

⇨ 1 단계에서 설명했듯이 a, b, c의 자리는 정해져 있다.
구분막대기가 배치되면 각 자리에 a, b, c가 자동으로 채워진다고 생각한다.

⇨ 구분막대기의 자리가 정해진 모든 경우가 <중복조합의 모든 상황>에 일대일로 대응된다.



4 단계 : 중복조합을 조합으로 읽기

⇨ 이런 방식으로 생각하면 결국 a, b, c 중 2개를 중복하여 뽑는 것 $_3H_2$는

$_3H_2$ a, b, c 3개를 구분할 수 있는 구분막대기 2개 + 뽑는 대상 2개 = 총 4개의 상자에서
구분막대기가 들어갈 2자리를 뽑는 경우의 수와 같다. 즉, $_3H_2 = {}_{2+2}C_2 = {}_4C_2$

3. 중복조합의 공식 : 암기가 아닌 Reading

$$ {}_{n}H_{r} = {}_{n+r-1}C_{n-1} $$

- ${}_{n}H_{r}$: 총 $n+r-1$개의 상자(구분막대기 n-1개 + 우리가 뽑는 대상 r개)에서 구분막대기가 들어갈 $n-1$자리를 뽑는 경우의 수이므로 ${}_{(n-1)+r}C_{r} = {}_{n+r-1}C_{n-1}$이다.

코칭 ${}_{n+r-1}C_{n-1}$은 조합의 성질에 의하여 ${}_{n+r-1}C_{r}$로 표현될 수 있지만 따로 외울 필요는 없다.

085 이해를 위한 예제

서로 다른 a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 7개를 뽑는 상황을 구분막대기의 상황에 일대일 대응하도록 각각 구분막대기를 표시하여라.

(1) aaaaaaa	⇨										
(2) bbbbbbb	⇨										
(3) ccccccc	⇨										
(4) aaabbbb	⇨										
(5) abbccdd	⇨										
(6) aaccddd	⇨										

(1) aaaaaaa	⇨								∥	∥	∥
(2) bbbbbbb	⇨	∥								∥	∥
(3) ccccccc	⇨	∥	∥								∥
(4) aaabbbb	⇨				∥					∥	∥
(5) abbccdd	⇨		∥			∥			∥		
(6) aaccddd	⇨			∥	∥				∥		

086 이해를 위한 예제

서로 다른 a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 7개를 뽑는 경우의 수를 구하여라.

${}_{4}H_{7}$: 총 10개의 상자(구분막대기 3개 + 우리가 뽑는 대상 7개)에서 구분막대기가 들어갈 3자리를 뽑는 경우의 수이므로 ${}_{10}C_{3}$

$$ \text{즉, } {}_{4}H_{7} = {}_{10}C_{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120 $$

087 이해를 위한 예제 2011. 11. 가형(85%). 22번. 3점

자연수 r에 대하여 ${}_3H_r = {}_7C_2$일 때, ${}_5H_r$의 값을 구하시오.

${}_3H_r$: 총 $r+2$개의 상자(구분막대기 2개 + 우리가 뽑는 대상 r개)에서 구분막대기가 들어갈 2자리를 뽑는 경우의 수 이므로 ${}_{r+2}C_2$

즉, ${}_3H_r = {}_7C_2 \Leftrightarrow {}_{r+2}C_2 = {}_7C_2 \Leftrightarrow r = 5$ 이므로 ${}_5H_5$를 구한다.

${}_5H_5$: 총 9개의 상자(구분막대기 4개 + 우리가 뽑는 대상 5개)에서 구분막대기가 들어갈 4자리를 뽑는 경우의 수이므로 ${}_9C_4$

즉, ${}_5H_5 = {}_9C_4 = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$

#2 중복조합과 일대일 대응

일대일 대응을 통해서 중복조합의 상황이라는 것을 파악하는 것이 핵심.

1. 중복조합과 일대일 대응 : 결국 일대일 대응과 공식으로 푼다.

- 서로 다른 n개 중 r개를 뽑아서 배열하는 경우의 수를 ${}_nP_r$의 공식으로 한 번에 세듯이
  서로 다른 n개 중 r개를 뽑는 경우의 수를 ${}_nC_r$의 공식으로 한 번에 세듯이
  서로 다른 n개 중 중복을 허용하여 r개를 뽑는 경우의 수를 ${}_nH_r$의 공식으로 한 번에 센다.

- 단, 중복조합의 상황은 <순열의 상황이나 조합의 상황>보다는 좀 더 파악하기가 어렵다.
  그래서 일대일 대응을 통해서 중복조합의 상황이라는 것을 먼저 파악한 후 공식을 쓴다.

중복조합을 연습한다는 것 = 일대일 대응을 통해 중복조합의 상황이라는 것을 파악하는 연습

088 이해를 위한 예제 2011. 10. 나형(67%). 27번. 3점

축구공, 농구공, 배구공 중에서 4개의 공을 선택하는 방법의 수를 구하시오.
(단, 각 종류의 공은 4개 이상씩 있고, 같은 종류의 공은 서로 구별하지 않는다.)

1단계 : 상황의 이해

주어진 상황을 만족하는 몇 가지 상황을 나열해보면 축축축축, 축축축농, 축축농배, 배배배배, …

이 경우를 가지고 분석해 볼 때 주어진 상황은 <중복가능하고> <배열하지 않는> 중복조합의 상황이다.

2단계 : 공식 사용

결국 서로 다른 3개 중 중복을 허락하여 4개를 뽑은 것이므로 ${}_3H_4$이다.

${}_3H_4$: 총 6개의 상자(구분막대기 2개 + 우리가 뽑는 대상 4개)에서 구분막대기가 들어갈 2자리를 뽑는 경우의 수 이므로 ${}_6C_2$

$${}_3H_4 = {}_6C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$$

089 이해를 위한 예제 2012. 10. 나형(39%). 27번. 4점

반지름의 길이가 서로 다른 여섯 종류의 원판이 각각 3개씩 18개가 있다.
원판을 다음과 같은 규칙으로 쌓으려고 한다.

(가) 원판 3개를 택하여 원판의 중심이 일치하도록 쌓는다.
(나) 반지름의 길이가 작은 원판은 반지름의 길이가 큰 원판 위에 쌓는다.
(다) 반지름의 길이가 같은 원판은 구별하지 않으면서 쌓는다.

그림은 반지름의 길이가 같은 두 개의 원판과 반지름의 길이가 작은 한 개의 원판을 규칙에 따라 쌓은 예이다. 이와 같이 쌓는 방법의 수를 구하시오.

반지름의 길이가 서로 다른 여섯 종류의 원판이 각각 3개씩 18개

- (가)에서 총 3개를 쌓는데 각 원판이 3개 이상씩 있다는 말은 중복이 허용된다는 것이다.

반지름의 길이가 작은 원판은 반지름의 길이가 큰 원판 위에 쌓는다.

반지름의 길이가 같은 원판은 구별하지 않으면서 쌓는다.

- 쌓는 순서가 정해져 있으므로 세 개의 원판을 택하면 자동 배열된다. 편의상 반지름이 작은 원판부터 1, 2, 3, 4, 5, 6 에 대응시킨 후 실제 상황을 나열해보면

1	1	1	1	2	1	2	
1	1	1	2	2	1	2	
1	2	3	3	3	5	6	…

위의 상황이 서로 다른 6개에서 3개를 택하는 중복조합의 수이므로 (위에까지 보고 직관적으로 느껴지지 않는다면 더 나열해 봐야 한다.)

$${}_6H_3 = {}_8C_5 = 56$$

코칭 ${}_6H_3 = {}_8C_5$ 라고 쓴 이유는 구분막대기 5개, 대상 3개 총 8개의 칸 중 구분막대기가 들어갈 5개의 칸을 뽑는 경우의 수라고 읽어주었기 때문이다. 일반적인 공식 ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$에 대입하면 바로 ${}_8C_3$이 나오긴 하지만 중요한 것은 아니다.

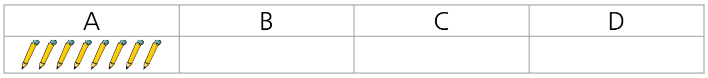
2. 서로 같은 대상, 서로 다른 자리

- 같은 대상을 다른 자리에 분배하는 상황은 중복조합의 상황이다.
  이 상황이 중복조합의 상황과 경우의 수적 본질이 같은 상황이라는 것을 이해할 수 있는 방법은 <일대일 대응>뿐이다.

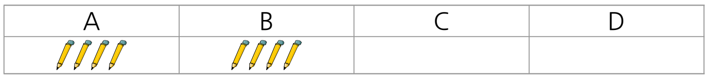
090 이해를 위한 예제

4 명의 학생에게 8 자루의 연필 모두를 나누어 주는 방법의 수를 구하시오.
(단, 연필은 서로 구별하지 않으며 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)

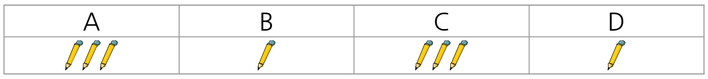
1단계 : 상황의 이해와 일대일 대응



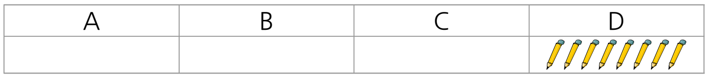
- AAAAAAAA에 대응



- AAAABBBB에 대응



- AAABCCCD에 대응



- DDDDDDDD에 대응

⋮

대응된 상황을 관찰해 보면 <중복가능하고> <배열하지 않는> 중복조합의 상황이다.

2단계 : 공식 사용

결국 서로 다른 4개 중 중복을 허락하여 8개를 뽑은 것이므로 ${}_4H_8$이다.

${}_4H_8$: 총 11개의 상자(구분막대기 3개 + 우리가 뽑는 대상 8개)에서 구분막대기가 들어갈 3자리를 뽑는 경우의 수 이므로 ${}_{11}C_3$

$$ {}_4H_8 = {}_{11}C_3 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 165 $$

3. 중복조합에서 적어도의 상황 : 미리 뽑아놓고 생각한다.

1) 기존의 <적어도> 상황 : 미리 뽑아놓고 생각 X

- 미리 뽑아놓고 생각하면 의하여 의도하지 않게 배열하는 경우의 수가 고려되어 우리가 생각해야 하는 상황보다 더 많은 경우의 수가 나온다.
- 이런 상황을 <뽑기의 오류>라고 하며 이미 앞에서 여러 차례 강조한 바 있다.

2) 중복조합의 <적어도> 상황 : 미리 뽑아놓고 생각 O

- 중복조합의 상황은 보통 같은 것을 다른 것에 분배하는 상황이다. 그래서 미리 뽑을 때 생각하더라도 뽑는 경우의 수를 따지지는 않는다, (서로 같은 aaaa중 3개를 뽑는 경우의 수는 ${}_4C_3$이 아니라 1가지이다.)

  즉, 뽑는 경우의 수를 고려하지 않기 때문에 <뽑기의 오류>의 상황 또한 발생하지 않는다.

⇨ 그래서 결과적으로 중복조합에서 적어도의 상황이 발생하는 경우에는 미리 뽑아놓고 생각해야 한다.

091 이해를 위한 예제

남자 4명과 여자 3명 중 적어도 남녀 한 명씩 포함하여 총 3명을 뽑는 경우의 수를

$$n(\text{전체}) = n(\text{남}1\text{명},\ \text{여}1\text{명}) \times n(\text{남은 사람 중 }1\text{명}) = {}_4C_1 \times {}_3C_1 \times {}_5C_1$$

과 같이 계산하는 것의 잘못됨을 지적하고 올바른 풀이를 제시하여라.

잘못된 풀이 : $n(\text{전체}) = n(\text{남}1\text{명},\ \text{여}1\text{명}) \times n(\text{남은 사람 중 }1\text{명}) = {}_4C_1 \times {}_3C_1 \times {}_5C_1 = 60$

처음에 남자집단에서 1명을 뽑고 (물론 여자도 한명 뽑았지만) 연속해서 남은 사람 중 1명을 뽑으면 남자집단(동일집단)에서 1명을 뽑는 경우가 고려된다. (물론 여자도 마찬가지다.)
이 과정을 통해 자연스럽게 남자가 배열되는 경우가 고려된다. 아래 실제 상황을 나열해보면

남자 : A, B, C, D 여자 : a, b, c라고 할 때,

${}_4C_1 \times {}_3C_1 \times {}_5C_1$은 A → a → B와 같이 뽑는 경우와 B → a → A와 같이 뽑는 경우를 모두 고려한다.
A → a → b와 같이 뽑는 경우와 A → b → a와 같이 뽑는 경우도 모두 고려된다.
각 두 가지 경우는 1가지로 세져야 한다. 결국 모든 상황이 2번씩 세어진다.

올바른 풀이 : 상황을 개수로 분류한다.

즉, $n(\text{전체}) = n(\text{남}2\text{명},\ \text{여}1\text{명}) + n(\text{남}1\text{명},\ \text{여}2\text{명}) = {}_4C_2 \times {}_3C_1 + {}_4C_1 \times {}_3C_2 = 18+12 = 30$

092 이해를 위한 예제

a, b 두 개 중 중복을 허락하여 5개를 뽑을 때, 적어도 a, b 각각 1개씩은 포함하는 경우의 수를 구하여라.

aaaab	aaa	일대일 대응
aaabb	aab	
aabbb	abb	
abbbb	bbb	

a와 b가 적어도 하나씩 뽑힌 모든 상황은 a, b를 한 개씩 지운 상황과 일대일 대응된다.

a, b 두 개 중 중복을 허락하여 5개를 뽑을 때 적어도 a, b 한 개씩은 포함하는 경우의 수
= a, b 중 중복을 허락하여 3개를 뽑는 상황과 동일하다.

$_2H_3$: 총 4개의 상자(구분막대기 1개 + 우리가 뽑는 대상 3개)에서 구분막대기가 들어갈 1자리를 뽑는 경우의 수이므로 $_4C_1$

$$_2H_3 = {}_4C_1 = 4$$

티칭 중복조합의 적어도의 상황에서는 미리 뽑혀 있다고 생각한 후 중복조합의 공식을 생각해도 상관없다.
(미리 뽑는 경우의 수는 따지는 것이 아니다.)

093 이해를 위한 예제

◈, ♥, ♣, ♠의 각 문양이 새겨져 있는 카드가 각 4장씩 있다. 각 문양의 카드마다 1부터 4까지의 숫자가 하나씩 새겨져 있을 때, 이 16장의 카드 중에서 6장을 뽑는 경우의 수는? (단, 각 문양의 카드는 적어도 한 장씩 포함되어 있다.)

상황을 생각해보면

◈1 ◈2 ◈3 ◈4, ♥1 ♥2 ♥3 ♥4, ♣1 ♣2 ♣3 ♣4, ♠1 ♠2 ♠3 ♠4

여기 16장의 카드는 모두 다르다. 이 중 6장을 뽑는 것은 중복조합이 아니다.

전체상황 : (개수로 분류) 적어도 한 장씩이 뽑힐 수 있는 모든 가능한 경우로 분류한다.

상황 1 : 2장/2장/1장/1장
상황 2 : 3장/1장/1장/1장 : n(전체) = n(상황1) + n(상황2)

(상황 1)에서는 일단 2장을 선택할 카드의 종류를 정하는 경우의 수는 $_4C_2$이다.

즉, n(상황1) = $\underline{_4C_2\ \times}$ $\underline{n(\text{◈2개/♥2개/♣1개/♠1개})}$ = $_4C_2\times(_4C_2\times{}_4C_2\times{}_4C_1\times{}_4C_1) = 3456$

곱하는 순간 하나만 센다.

(상황 2)에서도 일단 3장을 선택할 카드의 종류를 정하는 경우의 수는 $_4C_1$이다.

즉, n(상황2) = n $\underline{_4C_1\ \times}$ $\underline{n(\text{◈3개/♥1개/♣1개/♠1개})}$ = $_4C_1\times(_4C_3\times{}_4C_1\times{}_4C_1\times{}_4C_1) = 1024$

곱하는 순간 하나만 센다.

$$n(\text{전체}) = n(\text{상황}1)+n(\text{상황}2) = 3456+1024 = 4480$$

094 이해를 위한 예제

◈, ♥, ♣, ♠의 각 문양이 새겨져 있는 카드가 각 8장씩 있다. 각 문양의 8장의 카드는 모두 같은 카드라고 할 때, 이 32장의 카드 중에서 8장을 뽑는 경우의 수는? (단, 각 문양의 카드는 적어도 한 장씩 포함되어 있다.)

상황을 생각해보면 $\boxed{◈}\times 8$, $\boxed{♥}\times 8$, $\boxed{♣}\times 8$, $\boxed{♠}\times 8$이다. 서로 같은 카드가 8장씩 있는 것이다.

1 단계 : 상황의 이해

◈ ◈ ◈ ◈ ◈ ◈ ◈ ◈
♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥
♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣
♠ ♠ ♠ ♠ ♠ ♠ ♠ ♠
◈ ◈ ◈ ◈ ♥ ♥ ♥ ♣
⋮

이처럼 같은 카드가 8장씩 있는 상황에서 8장을 뽑는 가능한 경우를 나열해보면
◈, ♥, ♣, ♠의 문양 중 <중복을 허락하여> <8개를 뽑는 상황>과 <경우의 수적 본질이 같은 상황>이라는 것을 알 수 있다. 직관적으로 와 닿지 않는다면 준제의 조건에 맞게 더 많이 나열해 보아야 한다.

2 단계 : <중복조합>에서 적어도의 상황과 공식

1단계에서 중복조합의 상황이라는 것을 알았다면 적어도의 상황에서는 모든 문양의 카드를 1장씩을 미리 뽑아두고, 나머지를 중복조합으로 뽑으면 된다. ◈♥♣♠과 같이 하나씩 뽑힌 상황에서 중복을 허락하여 4개만 더 뽑으면 되므로

$$ {}_{4개의\ 문양}H_4 = {}_7C_4 = {}_7C_3 = 35 $$

예제를 통해 개념의 외연을 넓혀라

개념의 외연	#1. <서로 같은>과 <서로 다른> 총 정리
	#2. 중복조합과 곱의 법칙 : 두 종류 이상의 같은 것을 다른 것에 분배
	#3. 전개식과 경우의 수
	#4. 부정방정식과 일대일 대응
	#5. 함수의 개수 총정리

<개념의 외연>이라는 부분은 현재 배우고 있는 경우의 수의 국한된 내용만 다루는 것이 아니다.
현재 단원에 해당하는 문제를 풀기 위해서 필요한 수학적 개념이나 유형에 필요한 사고방식을 두루 다룬다.

수학에는 순서가 없다. 하지만 배움에는 순서가 있다.

그래서 순서가 없는 수학에 순서를 정한 것이 교육과정이다.
어떤 내용은 너무 어렵거나 복합적인 생각들을 담고 있어서 여러 학년에 걸쳐 배운다.
이런 경우 보통은 문제를 통해서 익힌다는 느낌이 강한데, 이런 개념들을 집약적으로 정리해주는 부분이 될 것이다.

#1 <서로 같은>과 <서로 다른> 총 정리

외우는 것이 아니다. 외우는 순간 풀 수 없게 된다. <경우의 수적 본질이 같은 상황>이라는 것을 이해하는 것.

1. 서로 다른 대상, 서로 다른 자리

- 순열과 조합의 상황이다.
- 서로 다른 것들 중에서 일부를 뽑을 때만 조합의 공식이 사용된다. 같은 것이 2개만 포함되어 있더라도 상황을 일일이 나누어 풀어야한다. ⇨ 같은 것들에서 일부를 뽑는 것은 일일이 따진다.

2. 서로 같은 대상, 서로 같은 자리

- 자연수 분할의 상황이다.

3. 서로 다른 대상, 서로 같은 자리

- 집합의 분할의 상황이다.

4. 서로 같은 대상, 서로 다른 자리

- 중복조합의 상황이다.

코칭 각 상황별로 앞의 단원으로 돌아가 복습해 보길 바란다.

#2 중복조합과 곱의 법칙

두 종류 이상의 같은 것을 다른 것에 분배

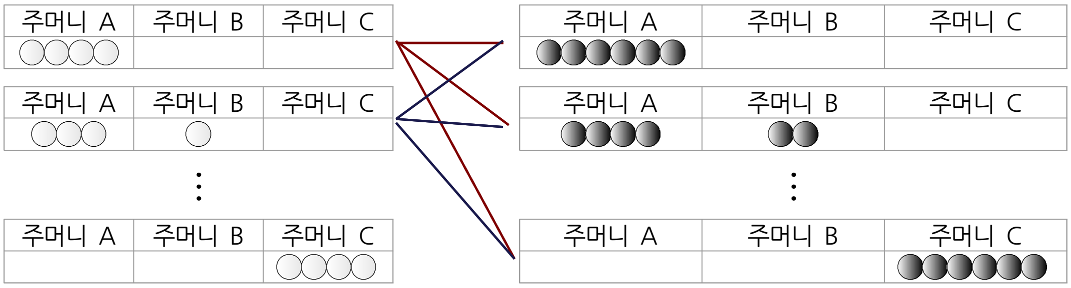
1. 곱의 법칙의 상황 (예제를 통한 이해)

- 서로 같은 대상을 서로 다른 자리에 분배하는 상황은 중복순열의 상황과 일대일 대응한다.
- 만약 서로 같은 대상이 두 종류를 서로 다른 자리에 분배하는 상황이라면 각각을 중복조합의 상황에 대응시킨 후 수형도로 연결하면 <곱의 법칙>의 상황이 발생한다는 사실을 알 수 있다.

095 이해를 위한 예제

모양과 크기가 같은 흰 공 4개와 검은 공 6개를 주머니 A, B, C 에 넣는 경우의 수를 구하여라.
(단, 공이 없는 주머니도 있을 수 있다.)

흰 공을 넣는 경우와 검은 공을 넣는 경우를 각각 따로 생각하여 나열해보면 다음과 같다.



$_3H_4$ 가지 $_3H_6$ 가지

1 단계 : <흰 공을 넣는 모든 상황>과 <검은 공을 넣는 모든 상황>을 따로 나열한 후 수형도로 연결하면
<흰 공 4개와 검은 공 6개를 주머니에 넣는 모든 상황>이 표현됨을 이해한다.

2 단계 : 각 상황은 중복조합의 상황이다.

주머니 A	주머니 B	주머니 C
○○○○		

- AAAA에 대응

주머니 A	주머니 B	주머니 C
○○○	○	

- AAAB에 대응

주머니 A	주머니 B	주머니 C
○○	○	○

- AABC에 대응

주머니 A	주머니 B	주머니 C
		○○○○

- CCCC에 대응

이처럼 각 상황은 A, B, C 중 중복을 허락하여 4개를 뽑는 상황에 대응된다. 즉, $_3H_4$
검은 공을 넣는 경우도 마찬가지로 생각하면 $_3H_6$이다.

3단계 : 곱한다. 즉, $_3H_4 \times {}_3H_6 = {}_6C_2 \times {}_8C_2 = {}_6C_2 \times {}_8C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \times \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 420$

$_3H_4$ = (구분막대기 2 + 대상 4) 총 6자리 중 구분막대기가 들어갈 2자리를 뽑는 경우의 수

$_3H_4 \times {}_3H_6 = 420$

2. 변칙상황 (곱의 법칙 + 적어도)

- 위와 같이 <서로 같은 대상이 두 종류를 서로 다른 자리에 분배하는 상황> 즉, 곱의 법칙의 상황과 앞에서 이미 학습한 <적어도의 상황> 즉, 미리 뽑아놓고 생각해도 뽑기의 오류가 발생하지 않음이 섞이면 어떻게 될까?
  아마도 많은 학생들이 두 가지 상황을 풀었던 방식을 섞어서 접근하려고 할 것이다. 이러한 시도 자체가 나쁜 것은 아니지만, 그 과정에서 오류가 발생할 수 있음을 이해해야 한다. 이 때 발생하는 오류도 뽑기의 오류이다.

096 이해를 위한 예제

모양과 크기가 같은 흰 공 3개와 검은 공 3개를 주머니 A, B, C 에 넣는 경우의 수를 구하여라.
(단, 모든 주머니에는 적어도 한 개의 공이 들어가야 한다.)

미리 공 1개씩을 넣어 놓고 시작하는 것이 적절하지 않음을 느낀다.

예를 들어 흰 공을 1개씩 넣어 놓고 서로 같은 세 개의 검은 공을 검은 공을 서로 다른 세 주머니에 분배하는 중복조합의 수인 ${}_3H_3$의 상황을 생각해보면

주머니 A	주머니 B	주머니 C
○	○	○

주머니 A	주머니 B	주머니 C
○○	○	●●●

와 같은 상황은 고려되지 않음을 알 수 있다.

또한 위의 상황을 생각하여 미리 뽑아서 넣은 경우를 일일이 따져도 문제가 생긴다. 예를 들어 미리 넣는 상황의 케이스를 분류한다고 생각해보자. 모든 케이스를 분류하면 너무 많아지므로 아래 두 가지 상황만 관찰해보자.

상황 1 :

주머니 A	주머니 B	주머니 C
○	○	○

와 같이 먼저 분배한 후 ${}_3H_3$으로 계산

상황 2 :

주머니 A	주머니 B	주머니 C
○	○	●

와 같이 먼저 분배한 후 ${}_3H_1 \times {}_3H_2$으로 계산

위의 두 가지 상황만 생각하더라도 벌써 중복되는 경우가 여러 번 발생한다.

상황 1에서

주머니 A	주머니 B	주머니 C
○	○	○

\-

주머니 A	주머니 B	주머니 C
		●●●

의 상황은

상황 2에서

주머니 A	주머니 B	주머니 C
○	○	●

\-

주머니 A	주머니 B	주머니 C
		○●●

과 같은 상황이다.

즉, 적어도의 상황에서 뽑는 경우의 수를 따져야 하는 상황이라면 미리 뽑아놓고 생각할 경우<뽑기의 오류>의 덫에 걸린다.

(다음 페이지에 계속된다.)

결국 이 문제를 푸는 해법은 여사건의 아이디어에 있다.
즉, $n(\text{문제의 상황}) = n(\text{3개의 주머니}) - n(\text{빈 주머니 1개}) - n(\text{빈 주머니 2개})$와 같이 센다.
특히 $n(\text{빈 주머니 1개})$의 경우는 $n(\text{2개의 주머니}) - n(\text{1개의 주머니})$로 구할 수 있다.

$n(\text{3개의 주머니}) = {}_3H_3 \times {}_3H_3$
이 중에는 2개의 주머니에 들어간 경우와 1개의 주머니에만 들어간 경우가 모두 포함되어 있다.

$$\begin{aligned} n(\text{빈 주머니 1개}) &= n(\text{2개의 주머니}) - n(\text{1개의 주머니}) \\ &= {}_3C_2 \times \{{}_2H_3 \times {}_2H_3 - 2\} \end{aligned}$$

${}_3C_2$를 곱한 이유는 A, B, C 주머니 중 6개의 곱이 들어가 2개의 주머니를 뽑은 것이다.
$\{{}_2H_3 \times {}_2H_3 - 2\}$에서 2를 뺀 이유는 ${}_2H_3 \times {}_2H_3$은 6개의 공이 한 주머니에 들어간 경우의 수를 포함하기 때문이다.

$n(\text{빈 주머니 2개}) = 3$
6개의 공이 모두 한 주머니에 들어간 경우의 수 이므로 총 3가지이다.

$$\begin{aligned} n(\text{문제의 상황}) &= n(\text{3개의 주머니}) - n(\text{빈 주머니 1개}) - n(\text{빈 주머니 2개}) \\ &= {}_3H_3 \times {}_3H_3 - {}_3C_2 \times \{{}_2H_3 \times {}_2H_3 - 2\} - 3 = 55 \end{aligned}$$

#3 전개식과 경우의 수

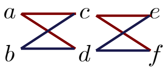
전개식은 경우의 수와 많은 인연이 있다.
기본적으로 식의 전개는 경우의 수의 관점으로 생각해야 하고,
항의 종류를 세는 것에서 곱의 법칙과 중복조합의 원리를 찾을 수 있다.
또 각 항의 계수에서는 순열, 같은 것을 포함한 순열, 조합을 발견할 수 있는데,
이것은 이항정리에서 따로 다룰 정도로 중요하다.

1. 다항식의 전개 : 집단에서 대상을 뽑아 나열

식의 전개 ⇨ 집단에서 대상을 한 개씩 뽑아 곱한 모든 경우의 나열

- 여기에서 집단이란 곱해져 있는 인수에 해당하는 식을 말하는 것이고 대상이란 그 인수 안에 대해져 있는 각 항을 말하는 것이다.

(보기1)	$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ 집단1 집단2
(보기2)	$(a+b)(c+d)(e+f) = ace + ade + bce + bde + acf + adf + bcf + bdf$ 집단1 집단2 집단3



- 🟢과 같이 전개식의 항은 각 집단에서 하나씩의 대상을 뽑아 곱하여 만든 것이다.
- (보기2)와 같이 전개식에 동류항이 없다고 판단될 때 항의 개수는 ⇨ 수형도와 곱의 법칙이다.

2. 특정항의 계수 : 동류항이 생기는 경우

- 전개식에서 특정항의 계수는 동류항이 발생 할 수 있는 모든 경우를 나열함으로서 찾을 수 있다.
(숫자를 제외한 부분이 같으면, 문자와 차수가 같으면 동류항이다.)

097 이해를 위한 예제

$(x+1)(x+2)(x+3)$의 전개식 중 x^2의 계수를 경우의 수의 관점으로 찾아라.

세 개의 집단	$(x+1)$	$(x+2)$	$(x+3)$	$=$	$\cdots + (3x^2+2x^2+x^2) + \cdots$
x^2이 나오는 상황 1	x	x	3	⇨	$3x^2$
x^2이 나오는 상황 2	x	2	x	⇨	$2x^2$
x^2이 나오는 상황 3	1	x	x	⇨	x^2

위와 같이 모든 경우를 나열하면 x^2의 계수는 6이다. 규칙이 있는 경우에는 순열과 조합으로 계수를 표현할 수 있는 경우도 있지만 보통은 지금처럼 모든 가능한 경우를 다 찾아봐야 한다.

정답은 6

3. 전개식에서 항의 종류 : 동류항이 생기는 경우

- 앞서 <1.다항식의 전개>의 (보기2)와 같은 동류항이 없는 경우는 수형도와 곱의 법칙으로 개수를 셀 수 있었다.

동류항이 있는 경우는 중복조합이다. 즉, 일대일 대응과 공식으로 푼다.

098 이해를 위한 예제

$(a+b+c+d)^5$의 전개식에서 나올 수 있는 항의 개수를 구하여라.

1 단계 : 전개식의 각 상황의 이해와 일대일 대응

다섯 개의 집단	$(a+b+c+d)$	$(a+b+c+d)$	$(a+b+c+d)$	$(a+b+c+d)$	$(a+b+c+d)$		일대일 대응
상황 1	a	a	a	a	a	⇨ a^5	$aaaaa$에 대응
상황 2	a	a	a	a	b	⇨ a^4b	$aaaab$에 대응
상황 3	a	a	b	c	d	⇨ a^2bcd	$aabcd$에 대응
⋮	⋮						
상황 ?	d	d	d	d	d	⇨ d^5	$ddddd$에 대응

대응된 상황을 관찰해 보면 <중복가능하고> <배열하지 않는> 중복조합의 상황이다.

2 단계 : 공식 사용

결국 서로 다른 4개 중 중복을 허락하여 5개를 뽑은 것이므로 ${}_4H_5$이다.

${}_4H_5$: 총 8개의 상자(구분막대기 3개 + 우리가 뽑는 대상 5개)에서 구분막대기가 들어갈 3자리를 뽑는 경우의 수이므로 ${}_8C_3$

$${}_4H_5 = {}_8C_3 = \frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1} = 56$$

#4 부정방정식과 일대일 대응

앞서서 부정방정식은 일일이 세는 3大 상황 중 하나로 설명한 적이 있다.
각 문자의 계수가 다른 경우에는 그렇지만 계수가 같은 경우에는 중복조합의 아이디어로 셀 수 있다.

1. 계수가 같은 부정방정식에서 해의 개수 1 (예제를 통한 설명)

- 중복조합의 아이디어

099 이해를 위한 예제

방정식 $x+y+z=5$에서 음이 아닌 정수 x, y, z에 대하여 해의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수를 구하여라.

1단계 : 상황의 이해와 일대일 대응

대응된 상황을 관찰해 보면 〈중복가능하고〉 〈배열하지 않는〉 중복조합의 상황이다.

x + y + z = 5			
5	0	0	- $xxxxx$에 대응
4	1	0	- $xxxxy$에 대응
3	1	1	- $xxxyz$에 대응
	⋮		⋮
0	0	5	- $zzzzz$에 대응

2단계 : 공식 사용

결국, 서로 다른 3개 중 중복을 허락하여 5개를 뽑은 것이므로 ${}_3H_5$이다.

$$ {}_3H_5 = {}_7C_2 = \frac{7\cdot 6}{2\cdot 1} = 21 $$

100 이해를 위한 예제

방정식 $x+y+z=5$에서 자연수 x, y, z에 대하여 해의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수를 구하여라.

1단계 : 상황의 이해와 일대일 대응

대응된 상황을 관찰해 보면 〈중복가능하고〉 〈배열하지 않는〉 중복조합의 상황인데 특이점은 각 대상이 적어도 하나씩은 뽑히는 상황과 대응한다는 것이다.

⇨ 중복조합의 적어도의 상황에서는 미리 뽑혀 있다고 생각한 후 중복조합의 공식을 생각한다.

x + y + z = 5			
3	1	1	- $xxxyz$에 대응
2	2	1	- $xxyyz$에 대응
	⋮		⋮
1	1	3	- $xyzzz$에 대응

2단계 : 공식 사용

xyz가 이미 하나씩 뽑혀있다면 결국 서로 다른 3개 중 중복을 허락하여 2개만 더 뽑는 것이므로 ${}_3H_2$이다.

$$ {}_3H_2 = {}_4C_2 = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1} = 6 $$

티칭 $x\geq 1$, $y\geq 1$, $z\geq 1$라고 표현한 후, 바로 다음 페이지에 나오는 〈치환과 일대일대응〉을 이용해서도 풀 수 있다.

2. 계수가 같은 부정방정식에서 해의 개수 2 (예제를 통한 설명)

- 치환과 일대일대응

101 **이해를 위한 예제**

$x+y+z=7$에서 $x \geq 2$, $y \geq 3$, $z \geq -1$을 만족하는 정수 x, y, z에 대하여 해의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수를 구하여라.

1단계 : 치환과 일대일 대응

주어진 범위 $x \geq 2$, $y \geq 3$, $z \geq -1$을 변형하여 $x-2 \geq 0$, $y-3 \geq 0$, $z+1 \geq 0$을 만든다.

⇨ $x-2=X$, $y-3=Y$, $z+1=Z$ 라고 치환하면 X, Y, Z 는 음 아닌 정수가 된다.

⇨ 주어진 방정식을 X, Y, Z로 표현하면

$$x+y+z = 7 \quad \Leftrightarrow \quad (X+2)+(Y+3)+(Z-1) = 7 \quad \Leftrightarrow \quad X+Y+Z = 3$$

주어진 범위를 만족하는 x가 하나 결정되면 그것에 대응하는 X도 하나로 결정된다.
주어진 범위를 만족하는 y가 하나 결정되면 그것에 대응하는 Y도 하나로 결정된다.
주어진 범위를 만족하는 z가 하나 결정되면 그것에 대응하는 Z도 하나로 결정된다.

$x+y+z=7$에서 $x \geq 2$, $y \geq 3$, $z \geq -1$을 만족하는 정수 x, y, z에 대하여 해의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$	$X+Y+Z = 3$에서 음 아닌 정수 X, Y, Z 에 대하여 해의 순서쌍 $(X,\ Y,\ Z)$
결국 위 조건을 만족하는 $(x,\ y,\ z)$과 $(X,\ Y,\ Z)$은 일대일로 대응한다.	

2단계 : 바뀐 문제

$X+Y+Z = 3$에서 음 아닌 정수 X, Y, Z 에 대하여 해의 순서쌍 $(X,\ Y,\ Z)$을 구하는 기본 문제로 바뀌었다.

3단계 : 상황의 이해와 일대일 대응 (생략) → 공식 사용

결국, 서로 다른 3개 중 중복을 허락하여 3개를 뽑은 것이므로 ${}_3H_3$이다.

$${}_3H_3 = {}_5C_2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

3. 문자가 여러 개인 계수가 같은 부등식 (예제를 통한 설명)

- 방정식으로 일대일 대응

102 이해를 위한 예제

$x+y+z \leq 7$에서 음이 아닌 정수 x, y, z에 대하여 해의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하여라.

1단계 : 방정식으로 일대일 대응

$x+y+z \leq 7$	$(1,2,3)$	$(2,1,1)$	$(0,1,1)$	$(5,0,2)$	$(0,0,0)$	$\cdots$
$x+y+z+w = 7$	$(1,2,3,1)$	$(2,1,1,3)$	$(0,1,1,5)$	$(5,0,2,0)$	$(0,0,0,7)$	$\cdots$

w를 추가해서 부등식을 등식으로 바꾸는 순간 각 식의 해는 일대일로 대응함을 확인할 수 있다.

2단계 : 바뀐 문제

$x+y+z+w = 7$에서 음 아닌 정수 x, y, z, w 에 대하여 해의 순서쌍 (x, y, z, w)을 구하는 기본 문제로 바뀌었다.

3단계 : 상황의 이해와 일대일 대응 (생략) → 공식 사용

결국, 서로 다른 4개 중 중복을 허락하여 7개를 뽑은 것이므로 ${}_4H_7$이다.

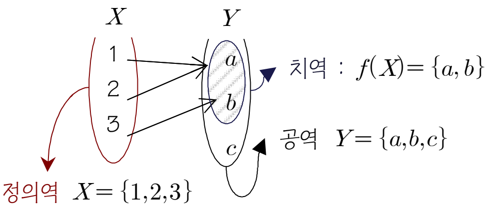
$$ {}_4H_7 = {}_{10}C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120 $$

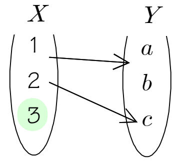
#5 함수의 개수 총정리

1. 함수의 정의와 함수의 개수 : 중복순열과 곱의 법칙

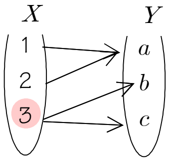
함수가 정의되기 위해서

정의역의 원소는 **모두 한 번씩만** 대응





함수 아니다.



함수 아니다.

103 이해를 위한 예제

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$일 때, 함수 f : $X\rightarrow Y$에 대하여 함수 f의 개수가 5^3가지인지 3^5가지인지 판단하고 설명해 보아라.

아직도 5^3과 3^5이 헷갈리는 사람이 있는가?

5^3 : n(1이 선택하는) × n(2가 선택하는) × n(3이 선택하는)

3^5 : n(4가 선택받는) × n(5가 선택받는) × n(6이 선택받는) × n(7이 선택받는) × n(8이 선택받는)

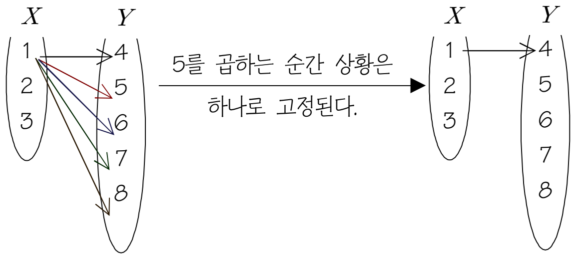
둘 다 말이 되는 듯하다.

5^3을 분석해 보자.

n(전체) = n(1이 선택하는) × n(나머지)

= 5 × n(나머지)

여기까지를 분석하면 5를 곱하는 순간 상황은 하나로 고정된다. (곱의 법칙 : 하나만 세서 곱한다.)



n(전체) = 5 × n(2가 선택하는) × n(나머지)

= 5 × 5 × n(나머지)

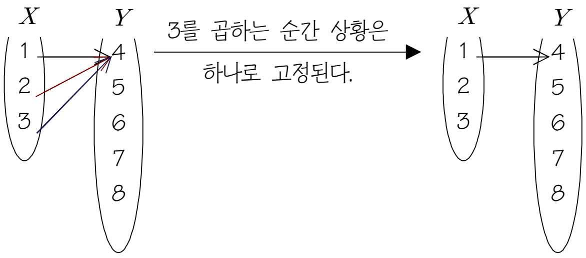
<1 → 4>로 고정된 상황에서 2가 선택하는 모든 상황을 생각해보면 함수의 정의에 정확히 부합한다.

3^5을 분석해 보자.

n(전체) = n(4가 선택받는) × n(나머지)

= 3 × n(나머지)

여기까지를 분석하면 3를 곱하는 순간 상황은 하나로 고정된다. (곱의 법칙 : 하나만 세서 곱한다.)



여기까진 큰 이상이 없는 것 같지만...

n(전체) = 3 × n(나머지)

= 3 × n(5가 선택받는) × n(나머지)

<1 → 4>로 고정된 상황에서 5가 선택받는 모든 상황을 생각해보면, <1 → 4>이면서 <1 → 5>인 경우도 고려된다. 이것은 함수로 정의되지 않으므로 잘못된 경우의 수이다.

정답은 5^3

티칭 함수의 개수 = 화살표의 머리를 배열하는 경우의 수

- 함수가 달라져도 화살표의 꼬리부분은 변함없다.
- 함수가 달라지면 화살표의 머리 부분의 배열만 바뀐다.

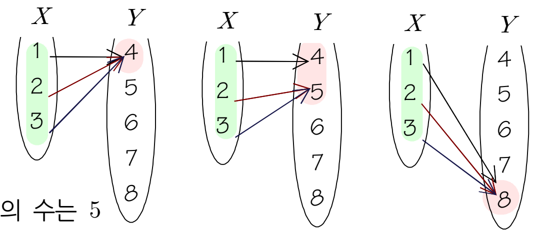
⇨ 결국 함수의 개수라는 것은 〈꼬리는 고정〉하고 조건에 맞게 〈함수의 머리 부분을 배열〉하는 경우의 수와 같다.

즉, 1로 시작하는 〈화살표의 머리를 배열〉하는 경우의 수는 5

그 각각에 대하여 2로 시작하는 〈화살표의 머리를 배열〉하는 경우의 수는 5

그 각각에 대하여 3으로 시작하는 〈화살표의 머리를 배열〉하는 경우의 수는 5

이므로 5^3



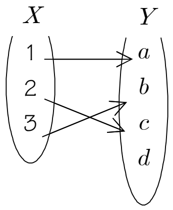
2. 일대일 함수와 일대일 대응 : 순열

- 일대일 함수 : $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- 일대일 대응(함수) : $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ and $f(X) = Y$ (치역=공역)

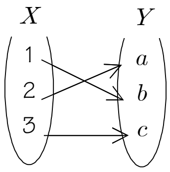
⇨ 함수에서 〈일대일 대응〉이라는 것은 사실 뒤에 〈함수〉가 생략된 것이다.

즉, 〈일대일 대응〉은 〈일대일 대응함수〉이다.

이처럼 〈일대일 함수 + 대응〉으로 '대응'이 강조되었기 때문에 공역의 모든 원소도 모두 한 번씩 대응되어야 한다.



일대일 함수
(일대일 대응은 아님)

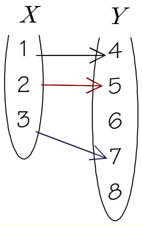


일대일 대응
(일대일 함수도 됨)

104 이해를 위한 예제

집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$, $Y = \{4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$일 때, 함수 $f : X \to Y$에 대하여 조건 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$를 만족하는 함수 f는 몇 가지인가?

일대일 함수가 되려면 정의역의 원소가 공역의 같은 원소를 선택하면 안 된다.
즉, 다섯 개의 공역의 원소 4, 5, 6, 7, 8 중 3개를 택하여
화살표의 머리 부분을 배열하는 경우와 같다.



$${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

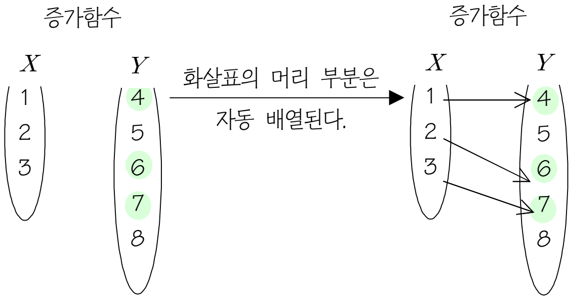
3. 증가함수와 감소함수 : 조합

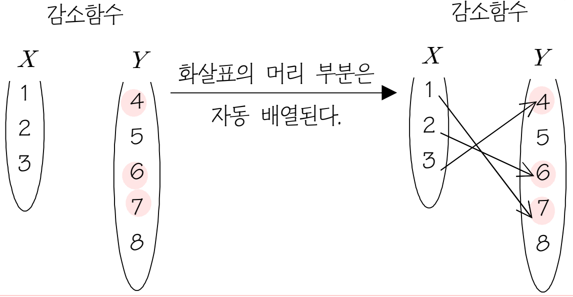
- 다음 조건을 만족시키는 함수를 증가함수와 감소함수라고 한다.

- 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$인 함수 $f : X \to Y$ 에 대하여
- 증가함수 : $x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$
- 감소함수 : $x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$

- 증가함수 또는 감수함수는 당연히 <일대일 함수>이다.
- 공역의 원소가 선택되면 화살표의 머리 부분은 자동 배열된다.

- 증가함수와 감소함수의 개수는 조합의 수와 같다.





105 이해를 위한 예제

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$일 때, 조건 “$x_1 < x_2$이면 $f(x_1) < f(x_2)$이다.”을 만족하는 함수 $f : X \to Y$의 개수를 구하여라.

공역의 원소 중 화살표의 머리 부분이 배열될 3개의 원소를 택한다.

$$\text{함수 } f\text{의 개수는 } {}_5C_2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

4. 단조증가함수와 단조감소함수 : 중복조합

- 다음 조건을 만족시키는 함수를 단조증가함수와 단조감소함수라고 한다.
  $f : X \to Y$ 에 대하여
- 단조증가함수 : $x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1) \le f(x_2)$
- 단조감소함수 : $x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1) \ge f(x_2)$

- 단조증가함수는 감소하지는 않는 함수라는 의미로 다른 말로 <비감소 함수>라고 부르기도 한다.
- 단조감소함수는 증가하지는 않는 함수라는 의미로 다른 말로 <비증가 함수>라고 부르기도 한다.

- <함수>를 <치역의 원소의 순서쌍>에 일대일 대응시키면 <중복조합>의 상황이라는 것을 눈치 챌 수 있다.
  꼭 함수문제가 아니더라도 등호가 포함된 부등식($\le$, $\ge$)이 나오면 중복조합의 상황을 의심해봐야 한다.

106 이해를 위한 예제

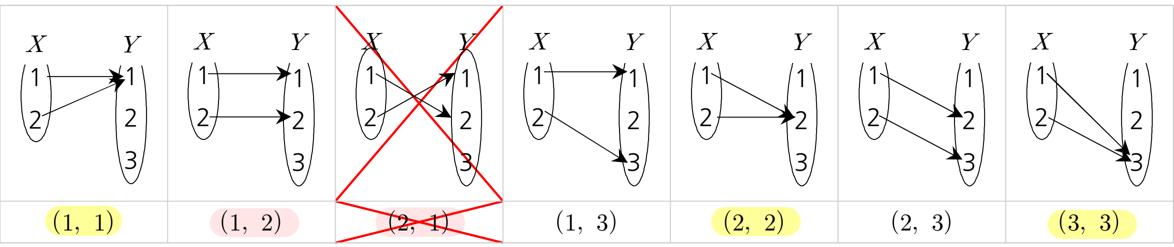
$X=\{1,\ 2\}$이고, $Y=\{1,\ 2,\ 3\}$에서 $f : X \to Y$ 에서 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \le f(x_2)$을 만족하는 함수를 나열한 후 중복조합의 상황과 일대일로 대응함을 설명하고 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구해보자.

1 단계 : <함수>를 <치역의 원소의 순서쌍>에 일대일 대응

함수가 결정되는 모든 상황에서 정의역의 각 원소인 1과 2는 반드시 무엇인가를 선택한다.

즉, 1과 2가 어떤 원소를 선택하면 함수가 결정되는데 그런 경우를 (1이 선택, 2가 선택)에 대응시켜본다.

모든 함수는 바로 이 <치역의 원소의 순서쌍>에 일대일 대응시킬 수 있다.



결국, 🟥에서 <배열하는 순서는 고려하지 않음>을 알게 되었고

🟨에서 <중복은 허용>한다는 사실을 알 수 있다.

2단계 : 상황의 이해와 일대일 대응 (생략) → 공식 사용

결국, 서로 다른 3개 중 중복을 허락하여 2개를 뽑은 것이므로 ${}_3H_2$이다.

$$ {}_3H_2 = {}_4C_2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6 $$

5. 공역과 치역이 같은 함수의 개수 : 분할 후 분배 / 여사건의 아이디어

: 경우의 수는 그렇다. 조금만 달라져도 문제 푸는 방식에 따른 효율성이 달라질 수 있다.

107 이해를 위한 예제

다음 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구하여라.

(1) $f: X \to Y$ 에서 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$이고, $Y = \{1,\ 2\}$일 때, 공역과 치역이 같은 함수

(2) $f: X \to Y$ 에서 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이고, $Y = \{1,\ 2,\ 3\}$일 때, 공역과 치역이 같은 함수

(1) $f: X \to Y$ 에서 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$이고, $Y = \{1,\ 2\}$일 때, 공역과 치역이 같은 함수의 개수

여사건의 아이디어 : 선택 받는 공역의 원소의 수로 전체상황을 분류할 경우 여사건의 아이디어를 생각할 수 있다.

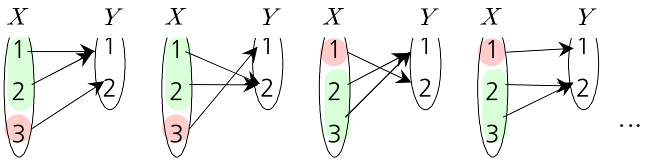
2^3의 전체상황 (개수로 분류) 공역에서 선택받는 원소의 개수로 상황을 분류

상황 1 : 공역에서 선택된 원소의 개수 1개

상황 2 : 공역에서 선택된 원소의 개수 2개 : n(문제의 조건) $=$ n(전체) $-$ n(상황1)

n(상황1)은 1만 선택받는 경우와 2만 선택받는 경우 2가지이다. 즉, n(상황1) $= 2$

즉, n(문제의 조건) $=$ n(전체) $-$ n(상황1) $= 2^3 - 2 = 6$



위와 같이 결국 정의역을 <2/1>로 팀을 나누어 같은 팀끼리 공역 같은 원소에 대응시키면 된다. 즉, 정의역의 원소를 <2/1>로 팀을 분할하고 → 각 팀끼리 통째로 공역의 원소에 대응시킨다. (즉, 화살표의 머리 부분을 분배한다고 생각하면 된다.)

결국, n(문제의 조건) $=$ n(2/1로 분할)$\times n$(분배)

$$n(\text{문제의 조건}) = n(2/1\text{로 분할}) \times n(\text{분배}) = {}_3C_2 \cdot {}_1C_1 \times 2! = 6$$

(2) $f: X \to Y$ 에서 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이고, $Y = \{1,\ 2,\ 3\}$일 때, 공역과 치역이 같은 함수

여사건의 아이디어 : 선택 받는 공역의 원소의 수로 전체상황을 분류할 경우 여사건의 아이디어를 생각할 수 있다.

3^4의 전체상황 (개수로 분류) 공역에서 선택받는 원소의 개수로 상황을 분류하면

상황 1 : 공역에서 선택된 원소의 개수 1개

상황 2 : 공역에서 선택된 원소의 개수 2개

상황 3 : 공역에서 선택된 원소의 개수 3개 : n(문제의 조건) $=$ n(전체) $-$ n(상황1) $-$ n(상황2)

n(상황1) $= 3$

n(상황2) $= \underline{{}_3C_2} \cdot \underline{(2^4 - 2)} = 42$

공역의 2개의 원소 선택 　선택받은 2개의 원소에 화살표의 머리부분이 배열되는 경우의 수 - 하나만 선택받은 경우의 수

$$n(\text{문제의 조건}) = n(\text{전체}) - n(\text{상황1}) - n(\text{상황2}) = 3^4 - 3 - 42 = 36$$

위와 같이 결국 정의역을 <2/1/1>로 팀을 나누어 같은 팀끼리 공역 같은 원소에 대응시키면 된다. 즉, 정의역의 원소를 <2/1/1>로 팀을 분할하고 → 각 팀끼리 통째로 공역의 원소에 대응시킨다. (즉, 화살표의 머리 부분을 분배한다고 생각하면 된다.)

결국, n(문제의 조건) $=$ n(2/1/1로 분할)$\times n$(분배)

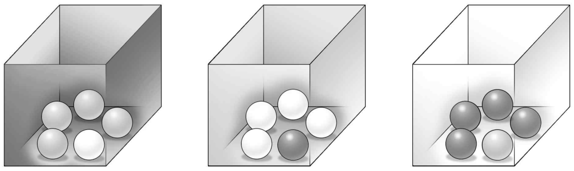
$$n(\text{문제의 조건}) = n(2/1/1\text{로 분할}) \times n(\text{분배}) = {}_4C_2 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_1C_1 \cdot \frac{1}{2!} \times 3! = 36$$

일단 풀고 맞았다고 하더라도 뒤의 해설을 정독하여 읽는다. 왜냐하면 풀이과정이 암기되어서 문제가 그냥 풀리거나 그냥 직관적으로 판단이 되어서 문제가 풀리는 경우도 많기 때문이다. 우리가 문제를 푸는 이유는 앞에서 배운 개념을 확인하기 위해서다. 이 문제를 푸는 것이 중요한 게 아니라 다른 어려운 문제에 까지 적용할 수 있는 개념을 익히는 게 중요한 것이다.

예제 063

2014. 10. A형(58%). 20번. 4점

빨간 공, 파란 공, 노란 공이 각각 5개씩 있다.
이 15개의 공만을 사용하여 빨간 상자, 파란 상자, 노란 상자에 상자의 색과 다른 색의 공을 5개씩 담으려고 한다. 공을 담는 경우의 수는?
(단, 같은 색의 공은 서로 구별하지 않는다.)



① 6 ② 12 ③ 18 ④ 24 ⑤ 30

예제 064

똑같이 생긴 상자 42개가 있다. 이 상자들을 차례대로 쌓아 올리려고 한다. 한 상자는 한 칸에 놓으면 자리가 딱 맞고 그 상자위에 다른 상자를 또 쌓을 수 있다. 그런데 상자가 놓을 수 있는 칸은 6칸(3×2형태) 밖에 없다. 또 한 한 칸에 최대로 쌓을 수 있는 상자의 개수는 8개이다. 그리고 모든 칸은 다른 칸과 구분이 된다. 상자를 쌓는 방법을 구하시오. (상자를 올리는 순서는 고려하지 않는다.)

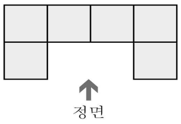
예제 065

7개의 문제가 있다. 모든 문제는 최소 1점부터 최대 4점까지 받을 수 있다. 그렇다면 24점을 받는 경우의 수는?

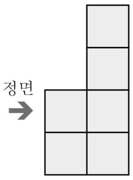
예제 066

2012. 10. 가형(40%). 29번. 4점

크기가 같은 정육면체 모양의 블록 12개를 모두 사용하여 쌓은 입체도형을 만들려고 한다. 이 도형을 위에서 내려다 본 모양이 〈그림 1〉, 정면을 기준으로오른쪽 옆에서 본 모양이 〈그림2〉와 같이 되도록 만들 수 있는 방법의 수를 구하시오. (단, 블록은 서로 구별하지 않는다.)



〈그림1〉



〈그림2〉

예제 067

2011. 10. 가형(58%). 24번. 3점

4명의 학생에게 8자루의 연필 모두를 나누어 주는 방법 중에서 연필을 한 자루도 받지 못하는 학생이 생기는 경우의 수를 구하시오. (단, 연필은 서로 구별하지 않는다.)

예제 068

2012. 11. 나형(59%). 12번. 3점

같은 종류의 주스 4병, 같은 종류의 생수 2병, 우유 1병을 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 1병도 받지 못하는 사람이 있을 수 있다.)

① 330 ② 315 ③ 300 ④ 285 ⑤ 270

예제 069

모양과 크기가 같은 흰 공 4개와 검은 공 6개를 주머니 A, B, C 중 2개에만 넣는 방법의 수를 구하여라.

① 95 ② 97 ③ 99 ④ 101 ⑤ 103

예제 070

다음 전개식 $(a+b+c+d)^5$에서 서로 다른 항의 개수를 올바로 표현한 것은?

① $_5H_4$ ② $_4H_5$ ③ $_5P_4$ ④ $_5C_4$ ⑤ $4!$

예제 071

2011. 6. 가형(57%). 22번. 3점

방정식 $x+y+z=17$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z에 대하여 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하시오.

예제 072

2014. 6. B형(71%). 20번. 4점

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c 의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$ 의 개수는?

(가) $a+b+c=6$

(나) 좌표평면에서 세 점 $(1,\ a)$, $(2,\ b)$, $(3,\ c)$ 가 직선 위에 있지 않다.

① 19 ② 20 ③ 21 ④ 22 ⑤ 23

예제 073

x, y, z, u에 대한 방정식 $x+y+z+3u=11$의 자연수 해의 개수를 구하시오.

예제 074

2013. 9. B형(88%). 8번. 3점

방정식 $x+y+z=4$ 를 만족시키는 -1 이상의 정수 x, y, z 의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$ 의 개수는?

① 21 ② 28 ③ 36 ④ 45 ⑤ 56

예제 075

2012. 7. 나형(45%) 23번. 3점

방정식 $x+y+z=20$을 만족시키는 양의 정수 중 짝수인 x, y, z에 대하여 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하시오.

예제 076

2016. 4. 가형(30%). 28번. 4점

다음 조건을 만족시키는 자연수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수를 구하시오.

(가) $x+y+z+w=18$

(나) x, y, z, w 중에서 2개는 3으로 나눈 나머지가 1이고, 2개는 3으로 나눈 나머지가 2이다.

예제 077

$x_1+x_2+\cdots+x_n \le r$을 만족하는 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$의 순서쌍의 개수를 중복조합을 이용하여 표현하여라.
(단, x_k는 음이 아닌 정수, k는 n이하의 정수)

예제 078

$A=\{1,2,3,4\}$일 때, 함수 f : $A \to A$중에서 A의 임의의 원소 a에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \le f(x_2)$를 만족시키는 함수 f의 개수를 구하여라.

예제 079

2004. 9. 가형(49%). 나형(31%). 25번. 4점

집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$에 대하여 다음 세 조건을 모두 만족하는 함수 f : $A \to A$의 개수를 구하시오.

(가) 함수 f는 일대일 대응　(나) $f(1)=7$　(다) $k \ge 2$이면 $f(k) \le k$

예제 080

2014. 11. B형(66%). 26번. 4점

다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구하시오.

(가) $a \times b \times c$는 홀수이다.

(나) $a \le b \le c \le 20$

예제 081

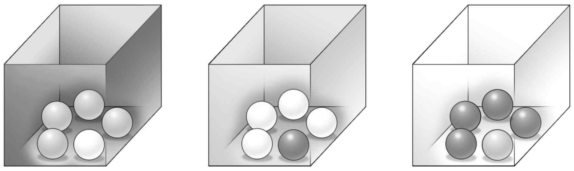
두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $Y=\{a,\ b,\ c\}$가 있다. $f : X \to Y$인 함수 f 중 치역과 공역이 같은 함수의 개수를 구하시오.

정답과 해설

예제 063 REVIEW 중복조합과 일대일 대응

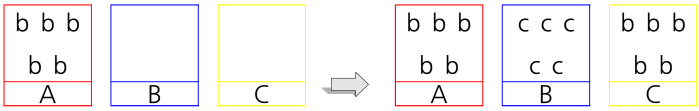
2014. 10. A형(58%). 20번. 4점

빨간 공, 파란 공, 노란 공이 각각 5개씩 있다. 이 15개의 공만을 사용하여 빨간 상자, 파란 상자, 노란 상자에 상자의 색과 다른 색의 공을 5개씩 담으려고 한다. 공을 담는 경우의 수는? (단, 같은 색의 공은 서로 구별하지 않는다.)

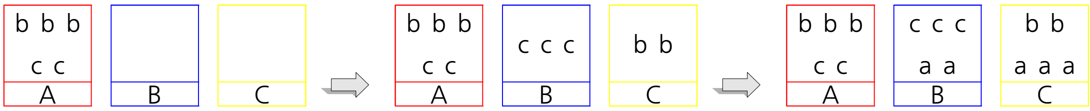


① 6 ② 12 ③ 18 ④ 24 ⑤ 30

빨간 상자를 A, 파란 상자를 B, 노란 상자를 C라고 하자. 또한 빨간 공을 a, 파란 공을 b, 노란 공을 c라 하자.
주어진 상황을 이해하기 위해 (자리를 기준)으로 나열해본다. A상자에 a가 아닌 어떤 공을 들어갈 것이므로



A에 b를 5개를 넣는 순간 남은 공은 자동 배치된다.



A에 b 3개, c 2개를 채우고 나면 남은 b와 c는 각자 자동 배치되고, a도 결국 각 상자를 5개씩 채워야 하므로 선택의 여지없이 B, C상자의 모자란 부분을 채우기 위해 자동 배치된다.
결국, 주어진 상황은 상자 A에 b와 c를 채우는 상황이고 이 상황은 중복조합의 상황으로 일대일 대응된다.
(예를 들어 a 5개 - aaaaa에 대응 / a 3개, b 2개 - aaabb에 대응 / … 이므로 서로 다른 2개 중 중복을 허락하여 5개 뽑는 상황)

$$n(\text{전체}) = {}_2H_5 = {}_6C_1 = 6 \text{ 정답은 ①}$$

코칭 aaaaa, aaaab, aaabb, aabbb, abbbb, bbbbb - 이런 경우를 반드시 중복조합으로 셀 필요가 있는지는 생각해봐야 한다. 그냥 세는 게 더 편하다. 어떻게든 공식만을 쓰려고 하는 사람들은 경우의 수를 잘 할 수 없다.

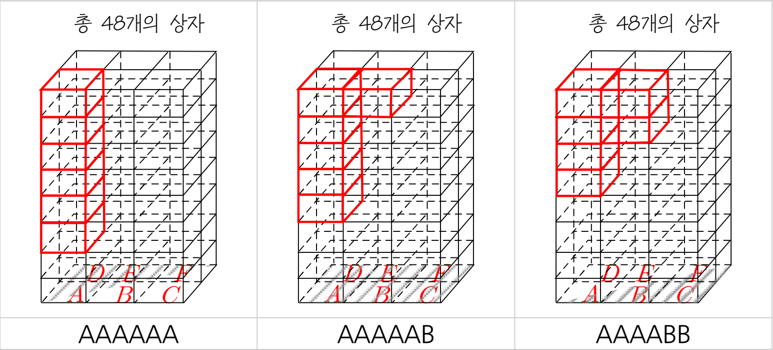
티칭 같은 것을 다른 것에 분배하는 상황임을 통해 중복조합의 상황이라는 것을 눈치 챌 수 있다.

예제 064

REVIEW 중복조합과 일대일 대응

똑같이 생긴 상자 42개가 있다. 이 상자들을 차례대로 쌓아 올리려고 한다. 한 상자는 한 칸에 놓으면 자리가 딱 맞고 그 상자위에 다른 상자를 또 쌓을 수 있다. 그런데 상자가 놓을 수 있는 칸은 6칸(3×2형태) 밖에 없다. 또한, 한 칸에 최대로 쌓을 수 있는 상자의 개수는 8개이다. 그리고 모든 칸은 다른 칸과 구분이 된다. 상자를 쌓는 방법을 구하시오. (상자를 올리는 순서는 고려하지 않는다.)

실제로 칸을 만들고 상자가 쌓인 것을 생각해보면 한 칸에 최대로 쌓을 수 있는 상자의 개수는 8개이므로 42개의 상자를 쌓는 것을 생각하기보다는 48개를 최대로 쌓아놓고 6개를 빼는 것이 생각하기 편하다.



AAAAAA AAAAAB AAAABB

위와 같이 각 칸에 A, B, C, D, E, F라는 이름을 붙여놓고 뺀 상자와 알파벳을 일대일 대응시키면 순서는 고려하지 않고 중복이 가능한 중복조합의 상황이라는 것을 눈치 챌 수 있다.

상자를 빼는 상황은 위와 같이 AAAAAA, AAAAAB, AAAABB도 가능하지만 AABBCC, ABCDEF 등도 가능하기 때문에 우리가 구하는 경우의 수는 서로 다른 6개의 문자 A, B, C, D, E, F 중 중복을 허락하여 6개를 뽑는 중복조합의 수와 같다는 사실을 알 수 있다. ${}_{6}H_{6} = {}_{11}C_{5} = 462$

$${}_{6}H_{6} = {}_{11}C_{5} = 462$$

티칭 모든 참고서의 공식 ${}_{n}H_{r} = {}_{n+r-1}C_{r}$에 대입하면 ${}_{6}H_{6} = {}_{11}C_{6}$이지만

우리는 (구분막대기 5개 + 우리가 뽑는 대상 6개)의 칸을 만들어 구분막대기가 들어갈 5칸을 뽑는다고 생각하기 때문에 ${}_{11}C_{5}$라고 썼음을 다시 한 번 강조한다.

예제 065

REVIEW 중복조합 + 여사건의 아이디어

7개의 문제가 있다. 모든 문제는 최소 1점부터 최대 4점까지 받을 수 있다. 그렇다면 24점을 받는 경우의 수는?

<예제 064>와 마찬가지로 우리가 최고로 얻을 수 있는 점수는 전체 만점(4점)를 받는다고 하여도 28점이기 때문에 점수를 얻는 경우의 수를 따지기 보다는 점수가 깎이는 경우의 수를 따지는 것이 낫다.
7개의 문제를 A, B, C, D, E, F, G에 대응시키고 각 문제에서 점수가 깎이는 상황을 알파벳의 배열에 일대일 대응시키면 다음과 같다.

A(-4)	A(-3)B(-1)	A(-2)B(-2)	⋯	C(-3)D(-1)	⋯	G(-4)
AAAA	AAAB	AABB	⋯	CCCD	⋯	GGGG

위의 상황의 경우의 수는 A, B, C, D, E, F, G 중 중복을 허용하여 4개를 뽑는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_7H_4$
그런데 문제에서 최소 1점이라는 조건을 주었기 때문에 한 문제에서 4점이 모두 깎이는 7가지 경우의 수는 빼야 한다.
이제 공식을 적용하면 ${}_7H_4$는 한 문제에서 4점 모두 깎이는 것을 포함하므로

$$ {}_7H_4 - 7 = {}_{10}C_6 - 7 = {}_{10}C_4 - 7 = 210 - 7 = 203 $$

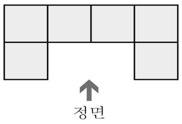
티칭 중복조합은 나열과 일대일 대응을 통해 중복조합의 상황이라는 것을 이해한 후 결국 공식으로 푼다.
공식도 <구분막대기>라는 상황을 설정해서 조합의 상황과 일대일 대응을 통해 설명했다는 사실을 기억한다면 중복조합에서 일대일 대응이라는 사고방식이 얼마나 핵심적인 사고방식인지 생각해 볼 수 있다.

예제 066

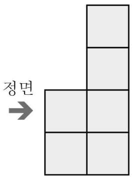
REVIEW 전체적으로는 분할적 사고를 쓰되 부분적으로 공식을 쓴다. + 중복조합

2012. 10. 가형(40%). 29번. 4점

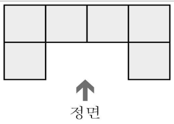
크기가 같은 정육면체 모양의 블록 12개를 모두 사용하여 쌓은 입체도형을 만들려고 한다. 이 도형을 위에서 내려다 본 모양이 <그림1>, 정면을 기준으로오른쪽 옆에서 본 모양이 <그림2>와 같이 되도록 만들 수 있는 방법의 수를 구하시오. (단, 블록은 서로 구별하지 않는다.)



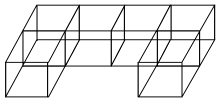
<그림1>



<그림2>



<그림 1>

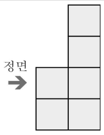


<그림 1-1>

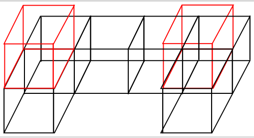
<그림 1>은 블록을 위에서 본 모습이다. (정면에서 본 모습이 아니다.)

이것을 만족하려면 상자는 <그림 1-1>과 같이 6개는 쌓여있어야 한다는 사실을 알 수 있다.

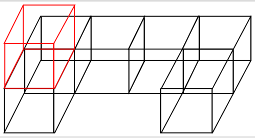
전체상황 : (자리를 기준) 앞에 줄이 <그림 2>처럼 보일 수 있는 모든 경우



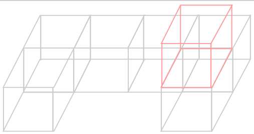
<그림 2>



<상황 1>



<상황 2>

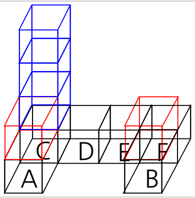


<상황 3>

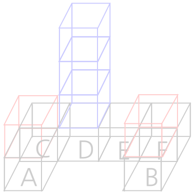
$n(\text{전체}) = n(\text{상황}1) + 2 \cdot n(\text{상황}2)$

<상황1>에서는 남은 블록이 4개이고, 이 네 개의 블록을 뒷줄에 <그림2>처럼 보이도록 쌓는 경우의 수를 따진다.

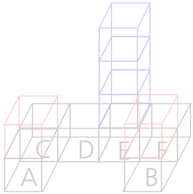
상황 1 : (대상을 기준) 3칸짜리 블록이 어딘가에는 들어간다.



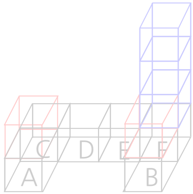
<상황 1-1>



<상황 1-2>



<상황 1-3>

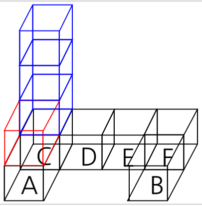


<상황 1-4>

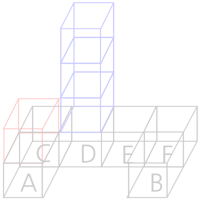
$n(\text{상황}1) = 4 \cdot n(\text{상황}1-1)$

$n(\text{상황}1-1)$은 남은 한 개의 블록이 D, E, F 중 어딘가에는 하나 들어가므로 $n(\text{상황}1-1) = 3$

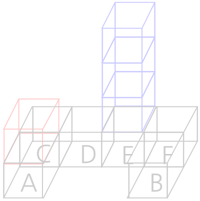
상황 2 : (대상을 기준) 3칸짜리 블록이 어딘가에는 들어간다.



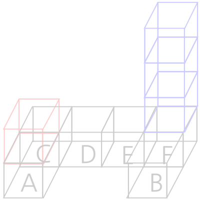
<상황 2-1>



<상황 1-2>



<상황 1-3>



<상황 1-4>

$n(\text{상황}2) = 4 \cdot n(\text{상황}2-1)$

$n(\text{상황}2-1)$은 남은 두 개의 블록이 D, E, F 중 어딘가에는 하나 들어가는 상황이다.

이 상황은 DD / EE / FF / DF …에 대응될 수 있으므로 서로 다른 세 문자 D, E, F에서 중복을 허락하여 2개를 뽑는 중복조합의 수와 같다. ⇨ $n(\text{상황}2-1) = {}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$

$n(\text{전체}) = n(\text{상황}1) + 2 \cdot n(\text{상황}2) = 4 \cdot n(\text{상황}1-1) + 2 \cdot 4 \cdot n(\text{상황}2-1) = 12 + 48 = 60$

예제 067

REVIEW 중복조합 + 여사건의 아이디어

2011. 10. 가형(58%). 24번. 3점

4명의 학생에게 8자루의 연필 모두를 나누어 주는 방법 중에서 연필을 한 자루도 받지 못하는 학생이 생기는 경우의 수를 구하시오. (단, 연필은 서로 구별하지 않는다.)

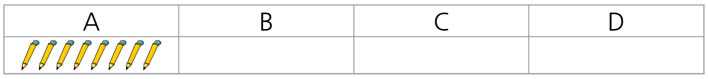
같은 것을 다른 것에 분배하는 상황은 중복조합의 상황이다.

전체상황 : (개수로 분류) 한 자루도 받지 못하는 학생의 사람 수로 상황을 분류한다.

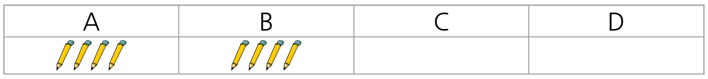
한 자루도 못 받는 학생 0명	한 자루도 못 받는 학생 1명	한 자루도 못 받는 학생 2명	한 자루도 못 받는 학생 3명
상황 0	상황 1	상황 2	상황 3

$n(\text{상황}\,1)+n(\text{상황}\,2)+n(\text{상황}\,3)=n(\text{전체})-n(\text{상황}\,0)$이므로 $n(\text{문제의 조건})=n(\text{전체})-n(\text{상황}\,0)$으로 계산한다.

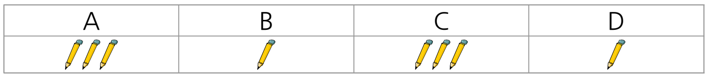
4명의 학생을 각각 A, B, C, D라고 하면 <전체상황>은 다음과 같이 표현될 수 있다.



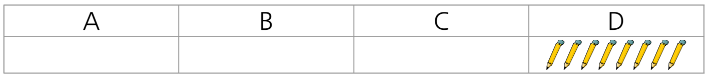
- AAAAAAAA에 대응



- AAAABBBB에 대응



- AAABCCCD에 대응

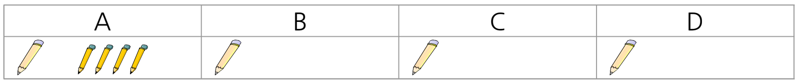


- DDDDDDDD에 대응

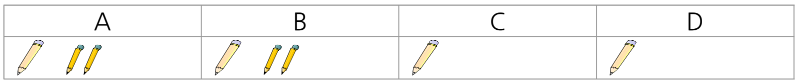
⋮

대응된 상황을 관찰해 보면 <중복가능하고> <배열하지 않는> 중복조합의 상황이다. ⇨ ${}_4H_8$

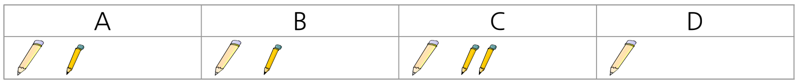
<상황 0>은 한 자루도 못 받는 학생 0명인 상황이므로 적어도 한 자루 씩은 받는 상황이다. 즉, 미리 한 개씩을 분배한 후, 나머지 4개의 연필을 분배한다. 그리고 이 상황을 알파벳에 일대일 대응시키면 역시 중복조합의 상황임을 알 수 있다.



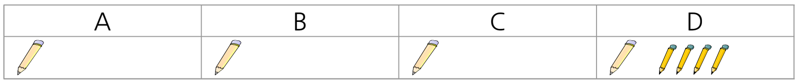
- AAAA에 대응



- AABB에 대응



- ABCC에 대응



- DDDD에 대응

⇨ $n(\text{상황}\,0)={}_4H_4$

$$n(\text{문제의 조건})=n(\text{전체})-n(\text{상황}\,0)={}_4H_8-{}_4H_4={}_{11}C_3-{}_7C_3=165-35=130$$

티칭 자연수 분할과 중복조합의 상황은 <같은 것>에서 일부를 뽑아 분배하는 상황이므로 뽑을 때 뽑는 경우의 수를 따지지 않으므로 <뽑기의 오류>의 상황이 발생하지 않는다. 자연수 분할과 중복조합에서 <적어도의 상황>은 오히려 미리 뽑아서 분배하고 시작해야 한다는 사실을 앞에서 강조한 바 있다.

예제 068

REVIEW 중복조합과 곱의 법칙

2012. 11. 나형(59%). 12번. 3점

같은 종류의 주스 4병, 같은 종류의 생수 2병, 우유 1병을 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 1병도 받지 못하는 사람이 있을 수 있다.)

① 330 ② 315 ③ 300 ④ 285 ⑤ 270

상황 1 : 같은 종류의 주스 4병을 3명에게 남김없이 나눠주는 상황
상황 2 : 같은 종류의 생수 2병을 3명에게 남김없이 나눠주는 상황
상황 3 : 같은 종류의 우유 1병을 3명에게 남김없이 나눠주는 상황

이 세 가지 상황을 각각 나열했다고 가정했을 때 수형도로 각각을 연결하면 문제의 조건에 부합하는 모든 경우가 표현된다.

$n(\text{전체}) = n(\text{상황}1) \times n(\text{상황}2) \times n(\text{상황}3)$

(상황1) : 세 명을 편의상 A, B, C라 하고 상황을 나열 한 후 알파벳의 배열에 일대일 대응해본다.

A(4병), B(0병), C(0병) - AAAA	A(3병), B(1병), C(0병) - AAAB	A(2병), B(1병), C(1병) - AABC	⋯

이 상황은 서로 다른 세 문자 A, B, C에서 순서는 고려하지 않고 중복을 허용하여 4개를 뽑는 중복조합의 상황이므로

⇨ $n(\text{상황}1) = {}_3H_4 = {}_6C_2 = 15$

(상황2) : 역시 세 명을 편의상 A, B, C라 하고 상황을 나열 한 후 알파벳의 배열에 일대일 대응해본다.

A(2병), B(0병), C(0병) - AA	A(1병), B(1병), C(0병) - AB	A(0병), B(0병), C(2병) - CC	⋯

이 상황은 서로 다른 세 문자 A, B, C에서 순서는 고려하지 않고 중복을 허용하여 2개를 뽑는 중복조합의 상황이므로

⇨ $n(\text{상황}2) = {}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$

(상황3) : 이 경우는 그냥 3가지이다. (우유 한 병을 A, B, C 중 한 명에게 나누어 주는 상황이므로)

$n(\text{전체}) = n(\text{상황}1) \times n(\text{상황}2) \times n(\text{상황}3) = 15 \times 6 \times 3 = 270$ 정답. ⑤

예제 069

REVIEW 전체적으로는 분할적 사고를 쓰되 부분적으로 공식을 쓴다. + 중복조합과 곱의 법칙

모양과 크기가 같은 흰 공 4개와 검은 공 6개를 주머니 A, B, C 중 2개에만 넣는 방법의 수를 구하여라.

① 95 ② 97 ③ 99 ④ 101 ⑤ 103

주머니 A, B, C 중 2개에만 에 의하여 A, B, C 중 공을 넣을 2개를 선택한다. ⇨ $n(\text{전체}) = \underline{{}_3C_2} \times n(\text{주머니 } A, B)$

곱하는 순간 하나만 센다.

주머니 A, B에 모양과 크기가 같은 흰 공 4개와 검은 공 6개를 넣는 상황은 다음과 같이 볼 수 있다.

상황 1 : 흰 공 4개를 2개의 주머니에 남김없이 넣는 상황

상황 2 : 검은 공 6개를 2개의 주머니에 남김없이 넣는 상황

이 두 가지 상황을 각각 나열했다고 가정했을 때 수형도로 각각을 연결하면 문제의 조건에 부합하는 모든 경우가 표현된다.

그런데 이 수형도의 상황 중 A(흰 공4, 검은 공6)과 B(흰 공4, 검은 공6) 두 가지는 두 개의 주머니에 넣는 상황이 아니므로 빼야 한다. ⇨ $n(\text{주머니 } A, B) = n(\text{상황}1) \times n(\text{상황}2) - 2$

(상황1) : 흰 공 4개를 주머니 A, B에 넣는 상황을 나열 한 후 알파벳의 배열에 일대일 대응해본다.

A(4개), B(0개) - AAAA	A(3개), B(1개) - AAAB	A(0개), B(4개) - BBBB	⋯

이 상황은 서로 다른 두 문자 A, B에서 순서는 고려하지 않고 중복을 허용하여 4개를 뽑는 중복조합의 상황이다.

⇨ $n(\text{상황}1) = {}_2H_4 = {}_5C_1 = 5$

(상황2) : 역시 검은 공 6개를 주머니 A, B에 넣는 상황을 나열 한 후 알파벳의 배열에 일대일 대응해본다.

A(6개), B(0개) - AAAAAA	A(5개), B(1개) - AAAAAB	A(0개), B(6개) - BBBBBB	⋯

이 상황 역시 서로 다른 두 문자 A, B에서 순서는 고려하지 않고 중복을 허용하여 6개를 뽑는 중복조합의 상황이다.

여기에서도 역시 AAAAAA와 BBBBBB는 주머니 2개가 아닌 1개에 넣는 상황이므로 2가지는 빼야 한다.

⇨ $n(\text{상황}2) = {}_2H_6 = {}_7C_1 = 7$

$n(\text{전체}) = {}_3C_2 \times n(\text{주머니 } A, B) = {}_3C_2 \times \{n(\text{상황}1) \times n(\text{상황}2) - 2\} = 3 \times \{5 \times 7 - 2\} = 99$ 정답. ③

예제 070

REVIEW 중복조합과 다항식에서 항의 개수

다음 전개식 $(a+b+c+d)^5$에서 서로 다른 항의 개수를 올바로 표현한 것은?

① ${}_5H_4$ ② ${}_4H_5$ ③ ${}_5P_4$ ④ ${}_5C_4$ ⑤ 4!

$(a+b+c+d)^5$을 나열하면, a^5, a^3bc, a^2bcd, ⋯과 같은 항들이 발생한다.

이런 항들의 종류는 a, b, c, d 중 중복을 허락하여 5개를 뽑는 중복조합의 수와 같다.

⇨ ${}_4H_5$

${}_4H_5$이므로 정답은 ②

예제 071

REVIEW 부정방정식(부등식)과 중복조합

2011. 6. 가형(57%). 22번. 3점

방정식 $x+y+z=17$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z에 대하여 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수를 구하시오.

$x+y+z=17$의 해의 순서쌍을 그 숫자에 대응하는 개수만큼 해당 문자를 배열한 상황에 일대일 대응시키면 중복조합의 상황임을 쉽게 알 수 있다.

$(17,\ 0,\ 0)$ - $xxxxx\ xxxxx\ xxxxx\ xx$
$(16,\ 1,\ 0)$ - $xxxxx\ xxxxx\ xxxxx\ xy$
$(15,\ 1,\ 1)$ - $xxxxx\ xxxxx\ xxxxx\ yz$
$\vdots$
$(0,\ 0,\ 17)$ - $yyyyy\ yyyyy\ yyyyy\ yy$

순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는 x, y, z 중 중복을 허락하여 17개를 뽑는 경우의 수와 같으므로

$${}_3H_{17} = {}_{19}C_2 = 171$$

예제 072

REVIEW 부정방정식(부등식)과 중복조합 + 여사건의 아이디어

2014. 6. B형(71%). 20번. 4점

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는?

(가) $a+b+c=6$
(나) 좌표평면에서 세 점 $(1,\ a)$, $(2,\ b)$, $(3,\ c)$가 직선 위에 있지 않다.

① 19 ② 20 ③ 21 ④ 22 ⑤ 23

$a+b+c=6$의 해의 순서쌍을 그 숫자에 대응하는 개수만큼 해당 문자를 배열한 상황에 일대일 대응시키면 중복조합의 상황임을 쉽게 알 수 있다.

$(6,\ 0,\ 0)$ - $aaaaaa$
$(5,\ 1,\ 0)$ - $aaaaab$
$\vdots$
$(0,\ 0,\ 6)$ - $cccccc$

순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 a, b, c 중 중복을 허락하여 6개를 뽑는 경우의 수와 같으므로 ${}_3H_6 = {}_8C_2 = 28$

그런데 문제의 조건 좌표평면에서 세 점 $(1,\ a)$, $(2,\ b)$, $(3,\ c)$이 직선 위에 있지 않다. 에서

임의의 두 점을 연결한 직선의 기울기가 다르므로 $\dfrac{b-a}{2-1} \neq \dfrac{c-b}{3-2} \Leftrightarrow 2b \neq a+c$이다.

즉, $(a,\ b,\ c)$ 중 $2b = a+c$인 상황을 일일이 세면 $(1,\ 2,\ 3)$, $(3,\ 2,\ 1)$, $(0,\ 2\ ,4)$, $(4,\ 2,\ 0)$, $(2,\ 2,\ 2)$이므로

n(문제의 조건) $= 28 - 5 = 23$ 정답. ⑤

예제 073

REVIEW 부정방정식(부등식)과 중복조합

\+ 여사건의 아이디어 + 전체적으로는 분할적 사고를 쓰되 부분적으로 공식을 쓴다.

x, y, z, u에 대한 방정식 $x+y+z+3u=11$의 자연수 해의 개수를 구하시오.

$x+y+z+3u = 11$은 두 가지 특징을 가지고 있다. u의 계수가 1이 아니라는 것과 자연수 해라는 것.

$x \geq 1,\ y \geq 1,\ z \geq 1,\ u \geq 1$인 정수에서 $x+y+z+3u = 11$의 해의 개수를 구하는 것이다.

수식적 테크닉을 활용하면 $X=x-1,\ Y=y-1,\ Z=z-1,\ U=u-1$이라고 치환하고 $X \geq 0,\ Y \geq 0,\ Z \geq 0,\ U \geq 0$인 정수를 만족하는

$(X+1)+(Y+1)+(Z+1)+3(U+1) = 11 \Leftrightarrow X+Y+Z+3U = 5$의 해의 순서쌍 (X, Y, Z, U)의 개수를 구한다.

여기에서 해의 순서쌍 (x, y, z, u)와 (X, Y, Z, U)이 일대일 대응임을 이해한다.

x가 결정되면 $X=x-1$에 의하여 X는 자동으로 결정되고 나머지 문자도 마찬가지이기 때문이다.

여기에서 U를 기준으로 경우를 나누면 ⇨ $n(\text{전체}) = n(U=0) + n(U=1)$

$U=0$인 경우, $X+Y+Z = 5$의 음 아닌 정수해의 개수이므로 ⇨ $n(U=0) = {}_3H_5$

$U=1$인 경우, $X+Y+Z = 2$의 음 아닌 정수해의 개수이므로 ⇨ $n(U=1) = {}_3H_2$

$$n(\text{전체}) = n(U=0) + n(U=1) = {}_3H_5 + {}_3H_2 = {}_7C_2 + {}_4C_2 = 21 + 6 = 27$$

티칭 기본적으로 계수가 같은 부정방정식에서 해의 개수는 해의 순서쌍을 그 숫자에 대응하는 개수만큼 해당 문자를 배열한 상황에 일대일 대응시킨다.

자연수 해의 개수는 <적어도의 상황>이라고 생각하여 미리 문자를 하나씩 뽑아 놓고 생각해도 되고

<치환과 일대일 대응>응 이용하여 풀어도 된다.

코칭 이제부터 계수가 1인 음 아닌 정수해의 개수는 해의 순서쌍과 문자의 배열의 대응관계를 생략하고 바로 공식을 쓰도록 하겠다.

예제 074

REVIEW 부정방정식(부등식)과 중복조합 + 치환과 일대일 대응

2013. 9. B형(88%). 8번. 3점

방정식 $x+y+z=4$ 를 만족시키는 -1 이상의 정수 x, y, z 의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$ 의 개수는?

① 21 ② 28 ③ 36 ④ 45 ⑤ 56

$x\ge-1$, $y\ge-1$, $z\ge-1$인 정수에서 $x+y+z = 4$의 해의 개수를 구하는 것이다.

수식적 테크닉을 활용하면 $X=x+1$, $Y=y+1$, $Z=z+1$이라고 치환하고 $X\ge0$, $Y\ge0$, $Z\ge0$인 정수를 만족하는 $(X-1)+(Y-1)+(Z-1)=4 \Leftrightarrow X+Y+Z=7$의 음 아닌 해의 순서쌍 $(X,\ Y,\ Z)$의 개수를 구한다.

여기에서 해의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$와 $(X,\ Y,\ Z)$이 일대일 대응임을 이해한다.

x가 결정되면 $X=x+1$에 의하여 X는 자동으로 결정되고 나머지 문자도 마찬가지이기 때문이다.

즉, ${}_3H_7={}_9C_2=36$ 정답. ③

예제 075

REVIEW 부정방정식(부등식)과 중복조합 + 치환과 일대일 대응

2012. 7. 나형(45%) 23번. 3점

방정식 $x+y+z=20$을 만족시키는 양의 정수 중 짝수인 x, y, z에 대하여 순서쌍 (x,y,z)의 개수를 구하시오.

수식적 테크닉을 활용하면 $x=2X+2$, $y=2Y+2$, $z=2Z+2$이라고 치환하고 $X\ge0$, $Y\ge0$, $Z\ge0$를 만족하는 순서쌍 $(X,\ Y,\ Z)$를 생각한다. 즉, $X=0,\ 1,\ \cdots$ 을 대입해보면 x는 양의 정수 중 짝수에 대응된다는 사실을 알 수 있다.

$(2X+2)+(2Y+2)+(2Z+2)=20 \Leftrightarrow X+Y+Z=7$의

음이 아닌 해의 순서쌍 $(X,\ Y,\ Z)$의 개수를 구한다.

여기에서 해의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$와 $(X,\ Y,\ Z)$이 일대일 대응임을 이해한다.

x가 결정되면 $x=2X+2$에 의하여 X는 자동으로 결정되고 나머지 문자도 마찬가지이기 때문이다.

${}_3H_7={}_9C_2=36$

티칭 앞의 <정수론 2탄>에서 예를 들면 3으로 나누어 3이 남는 자연수를 $3n+2$이라고 표현하는 것과 $3n-1$것은 결국 n의 범위의 차이라는 것을 언급했다. 여기에서 굳이 양의 짝수를 $2X$가 아닌 $2X+2$라고 표현한 것은 그래야 X의 범위가 $X=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$가 되어 중복조합의 공식을 쓰기 용이하기 때문이다.

예제 076

REVIEW 부정방정식(부등식)과 중복조합 + 치환과 일대일 대응

2016. 4. 가형(30%). 28번. 4점

다음 조건을 만족시키는 자연수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수를 구하시오.

(가) $x+y+z+w=18$

(나) x, y, z, w 중에서 2개는 3으로 나눈 나머지가 1이고, 2개는 3으로 나눈 나머지가 2이다.

x, y, z, w 중에서 2개는 3으로 나눈 나머지가 1이고, 2개는 3으로 나눈 나머지가 2 에 의하여

x, y, z, w 중 3으로 나눈 나머지가 1인 2개를 선택한다. (나머지 두 문자는 자동으로 3으로 나눈 나머지가 2)

⇨ $n(\text{전체}) = \underline{{}_4C_2\times} n(x,\ y\text{는 3으로 나눈 나머지가 1 / } z,\ w\text{는 3으로 나눈 나머지가 2})$

곱하는 순간 하나만 센다.

이제 수식적 테크닉을 활용하면 $x=3X+1$, $y=3Y+1$, $z=3Z+2$, $w=3W+2$이라고 치환하고

$X\ge 0$, $Y\ge 0$, $Z\ge 0$, $W\ge 0$에서 순서쌍 $(X,\ Y,\ Z,\ W)$를 생각한다.

$X = 0,\ 1,\ \cdots$ 을 대입해보면 x는 3으로 나눈 나머지가 1인 자연수에 대응된다는 사실을 알 수 있다.

$(3X+1)+(3Y+1)+(3Z+2)+(3W+2)=18 \quad \Leftrightarrow \quad X+Y+Z+W=4$의

음이 아닌 해의 순서쌍 $(X,\ Y,\ Z,\ W)$의 개수를 구한다.

여기에서 해의 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ w)$와 $(X,\ Y,\ Z,\ W)$이 일대일 대응임을 이해한다.

x가 결정되면 $x=3X+1$에 의하여 X는 자동으로 결정되고 나머지 문자도 마찬가지이기 때문이다.

$$n(\text{전체}) = {}_4C_2\times n(x,\ y\text{는 3으로 나눈 나머지가 1 / } z,\ w\text{는 3으로 나눈 나머지가 2})$$

$$= {}_4C_2\times {}_4H_4 = {}_4C_2\times {}_7C_3 = 210$$

예제 077

REVIEW 부정방정식(부등식)과 중복조합 + 방정식으로 일대일 대응

$x_1+x_2+\cdots+x_n\le r$을 만족하는 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$의 순서쌍의 개수를 중복조합을 이용하여 표현하여라.

(단, x_k는 음이 아닌 정수, k는 n이하의 정수)

문자가 여러 개인 계수가 같은 부등식 : 방정식으로 일대일 대응

$x_1+x_2+\cdots+x_n\le r$의 해 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$에 대하여 $x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}=r$을 만족하는 x_{n+1}이 하나로 정해지게 된다.

$x_1+x_2+\cdots+x_n\le r$의 해 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$와 $x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}=r$의 해 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ x_{n+1})$은 일대일로 대응한다.

또한, 주어진 식은 조건 <x_k는 음이 아닌 정수>에 의하여 공식처럼 셀 수 있다.

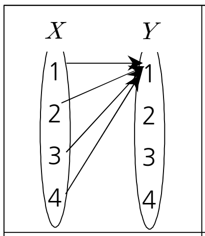
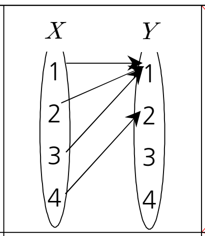
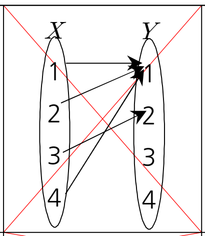
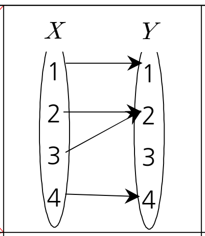
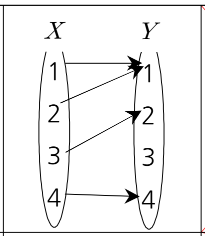
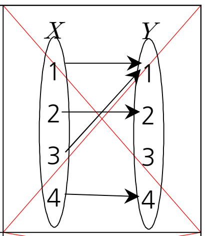
정답은 ${}_{n+1}H_r$

예제 078

REVIEW 함수의 개수 + 단조함수와 중복조합

$A=\{1,2,3,4\}$일 때, 함수 $f : A\to A$중에서 A의 임의의 원소 a에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1)\le f(x_2)$를 만족시키는 함수 f의 개수를 구하여라.

조건을 만족하는 함수는 <치역의 원소의 순서쌍>에 일대일 대응시킬 수 있다.

					
1,1,1,1	1,1,1,2	~~1,1,2,1~~	1,2,2,4	1,1,2,4	~~1,2,1,4~~
	배열하는 경우는 고려되지 않는다.			배열하는 경우는 고려되지않는다.	

조건에 맞는 경우의 수는 1,2,3,4 중에서 중복을 허락하여 4개를 뽑는 중복조합의 수와 같다.

$${}_4H_4 = {}_7C_3 = 35$$

예제 079

REVIEW 중복조합 + 등호가 들어간 부등호

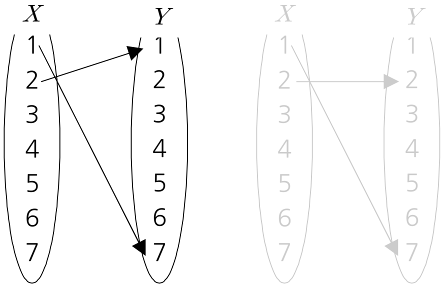
2004. 9. 가형(49%). 나형(31%). 25번. 4점

집합 $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$에 대하여 다음 세 조건을 모두 만족하는 함수 $f : A\to A$의 개수를 구하시오.

(가) 함수 f는 일대일 대응 (나) $f(1)=7$ (다) $k\ge 2$이면 $f(k)\le k$

등호가 포함된 부등식은 중복조합의 상황을 의심하라.

전체상황 (대상을 기준) 정의역의 2가 어디론가는 간다.



<상황 1> <상황 2>

<함수 f는 일대일 대응, $k\ge 2$이면 $f(k)\le k$에 맞게 배치한다고 할 때>에 의하여 정의역의 원소 2가 대응될 수 있는 경우는 위의 두 가지 뿐이다.

이 두 가지가 각각에 대하여 같은 경우의 수가 발생한다는 사실을 이해하는 것이 이 문제의 핵심이다.

3의 입장에서 봤을 때 <상황 1>에서도 두 가지 경우가 있고 <상황 2>에서도 두 가지 경우가 있다.

결국, 곱의 법칙으로 계산하면

$n(\text{전체}) = n(2\text{배치})\times n(3\text{배치})\times n(4\text{배치})\times n(5\text{배치})\times n(6\text{배치})\times n(7\text{배치})$

$= 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 1 = 32$ - 마지막 숫자 7은 6까지 배열되고 나면 선택사항이 없다. 자동배열 된다.

정답은 32

예제 080

REVIEW 중복조합 + 등호가 들어간 부등호

2014. 11. B형(66%). 26번. 4점

다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구하시오.

(가) $a \times b \times c$는 홀수이다.

(나) $a \leq b \leq c \leq 20$

등호가 포함된 부등식은 중복조합의 상황을 의심하라.

$a \times b \times c$는 홀수 - 세 수는 모두 홀수이다.

$a \leq b \leq c \leq 20$ - 이 조건을 만족하는 홀수인 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$를 나열해보면

$$(1,\ 1,\ 1),\ (1,\ 1,\ 3),\ (1,\ 1,\ 5),\ \cdots,\ (9,\ 9,\ 9),\ (9,\ 9,\ 11),\ (9,\ 9,\ 13),\ \cdots,\ (19,\ 19,\ 19)$$

위의 상황은 중복을 허락하고 배열하는 경우의 수는 고려하지 않으므로 중복조합의 상황이다.

1부터 19까지의 10개의 홀수 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수이므로

$$_{10}H_3 = {}_{12}C_9 = {}_{12}C_3 = 220$$

예제 081

REVIEW 함수의 개수 + <치역 = 공역>

두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $Y=\{a,\ b,\ c\}$가 있다. $f : X \to Y$인 함수 f 중 치역과 공역이 같은 함수의 개수를 구하시오.

여사건의 아이디어로 풀어보자.

여사건의 아이디어 : 선택 받는 공역의 원소의 수로 전체 상황을 분류할 경우, 여사건의 아이디어를 생각할 수 있다.

3^6의 전체상황 (개수로 분류) 공역에서 선택받는 원소의 개수로 상황을 분류

상황 1 : 공역에서 선택된 원소의 개수 1개
상황 2 : 공역에서 선택된 원소의 개수 2개
상황 3 : 공역에서 선택된 원소의 개수 3개 : n(문제의 조건) $=$ n(전체) $-$ n(상황1) $-$ n(상황2)

(상황1)은 a만 선택받은 경우, a만 선택받은 경우, a만 선택받은 경우 3가지이다. n(상황1) $= 3$

(상황2)는 공역의 원소 중 두 개의 원소만 선택받는 경우의 수이므로 n(상황2) $=$ $\underline{{}_3C_2\times}\,n$($a$와 b가 선택받음)

곱하는 순간 하나만 센다.

그런데, n(a와 b가 선택받음) $= 2^6 - 2$ (a만 선택받은 경우와 b만 선택받은 경우를 뺀다.)

n(상황2) $=$ ${}_3C_2\times n$(a와 b가 선택받음) $=$ ${}_3C_2\times(2^6-2)$

n(문제의 조건) $=$ n(전체) $-$ n(상황1) $-$ n(상황2) $= 3^6 - 3 - {}_3C_2\times(2^6-2) = 540$

분할 후 분배로 풀어보자.

$X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$를 3개의 부분집합으로 분할한 후, 각각의 부분집합을 a, b, c에 대응시키면 된다.

예를 들어 부분집합을 a에 대응시킨다는 말은 그 부분집합의 원소를 모두 a에 대응시킨다는 말이다.

이때, 집합 X를 3개의 부분집합으로 분할하는 방법의 수는 $S(6,\ 3)$이므로 n(전체) $= S(6,\ 3)\times 3!$

대응시키는 방법은 화살표의 머리 부분을 배열하는 경우의 수이므로 3!

여기에서 $S(6,\ 3)$은 집합의 분할의 성질을 이용하여 계산해 보겠다.

$$S(6,\ 3) = S(5,\ 2) + 3\cdot S(5,\ 3) = S(5,\ 2) + 3\cdot S(4,\ 2) + 9\cdot S(4,\ 3)$$
$$= (2^4-1) + 3(2^3-1) + 9\cdot {}_4C_2 = 90$$

n(전체) $= S(6,\ 3)\times 3! = 90\times 6 = 540$

티칭 사실 치역의 원소가 4개인 경우도 두 가지 방법 모두 그게 그거다. 첫 번째 방법에서 집합의 연산법칙을 적용하지 않고, 위와 같이 동시에 발생하는 경우가 없도록 상황을 분할하면 조금 복잡할 뿐이다.

PART 06

이항정리와 조합의 연속 합

1. 이항정리와 이항계수의 성질
2. 조합의 식 변형과 이항계수의 성질
3. 파스칼 삼각형
4. 분할적 사고와 관점 합

촌철살인 #6 분할적 사고의 학습방법

01 복잡한 항등식 구조의 공식 우리가 말하는 공식이란 사실 항등식이다.

- 예를 들면 시그마 공식에서 $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ 역시 이 자연수라는 범위 안에서 항등식이다.

이렇게 복잡한 합의 구조의 항등식(공식)으로 배우는 것이 대표적으로 수열과 이항정리이다. 이런 항등식은 식의 구조를 면밀히 분석하지 않고 기존의 공식들처럼 숫자를 대입하는 방식으로 외우면 조금만 변형되어도 상당히 헷갈리고 잘 와 닿지 않는다. 그래서 식의 구조와 바뀐 식의 모양을 정리하는 방법까지 정확하게 학습해야 하는 단원이기도 하다.

이 단원은 경우의 수에서 유일하게 〈사고방식〉의 느낌보다 〈공식〉의 느낌이 강한 단원 이기는 하지만 앞에서 공부한 〈사고방식〉이 없으면 공식 자체를 이해 할 수도 없으니 가히 경우의 수라 부를 만하다.
이해를 하고 난 후에는 4가지 공식의 구조의 차이를 정확하게 기억해서 어느 정도는 암기를 기반으로 해야 한다.

PART 01 근본 사고방식

#1. 일대일 대응 경우의 수적인 본질이 같은 상황

#2. 분할적 사고 〈전제〉 모든 경우의 논리적 나열 능력

1. 자리를 기준
2. 대상을 기준
3. 개수로 분류
4. 배열 전 모든 상황

: 분할하는 순간 상황은 고정된다.

#3. 합의 법칙과 곱의 법칙

1. 합의 법칙
2. 곱의 법칙
3. 센다의 법칙
4. 수형도의 활용

#4. 여사건의 아이디어

PART.1 개념의 외연

#1. 정수론 1탄

#2. 센다의 법칙

#3. 경우의 수를 세는 방법은
무한가지

전체적으로 분할적 사고를 하되 부분적으로 공식을 쓴다.

PART 02 근본에 가까운 공식

#1. 계승, 순열, 조합의 공식

1. 계승의 뜻과 공식
2. 순열과 조합의 뜻과 공식
3. 조합의 기본 성질 : ${}_{n}C_{r} = {}_{n}C_{n-r}$
4. 논리의 확신 : 경우의 수적인 본질이 같은 상황

#2. 순열과 조합의 상황

1. 서로 다른 대상, 서로 다른 자리
2. 조합과 자동배열
3. 뽑기의 오류 : 〈동동연〉이면 〈배고려〉

#3. 순열과 조합의 수식적 활용

1. 순열의 정의식과 계산식
2. 조합의 정의식과 계산식
3. 정의되는 기호들
4. 순열과 조합으로 표현

PART.2 개념의 외연

#1. 순열 조합으로 표현된 방정식

#2. 여러 가지 상황의 배열

#3. 여사건의 아이디어 + 특정인

#4. 정수론 2탄

#5. 도형과 경우의 수

#6. 집합과 경우의 수

PART 03 이해하면 공식은 없다

#1. 중복순열과 곱의 법칙 중복순열은 곱의 법칙이다.

#2. 같은 것을 포함한 순열과 조합 같은 것을 포함한 순열은 조합이다

1. 같은 것을 포함한 순열의 뜻과 공식
2. 배열 취소의 관점
3. 자동배열의 상황
4. 같은 것들 중에서 일부를 뽑는 것은 공식이 없다.

#3. 원순열과 고정

1. 원순열의 상황
2. 원순열의 경우의 수
3. 다각형 순열
4. 목걸이 순열

PART.3 개념의 외연

#1. 경로의 수 문제

#2. 입체 순열

PART 04 분할의 상황

#1. 자연수의 분할

1. 자연수 분할의 기본 정의 · 낙수효과
2. 페러스 다이어그램과 성질, 켤레분할
3. 자연수 분할의 상황

#2. 분할의 상황

1. 분할의 상황 1 : 뽑기와 분할의 경우의 수가 다른 경우
2. 분할의 상황 2 : 뽑기와 분할의 경우의 수가 같은 경우
3. 선분할 개념 : 기준이 생기면 〈뽑기의 오류〉 발생하지 않는다.
4. 분할의 공식화 : 〈동동연〉이면 〈배고려〉
5. 분할 후 분배와 선분할 개념

#3. 집합의 분할

1. 집합 분할의 상황
2. 집합 분할의 성질
3. 서로 다른 대상, 서로 같은 자리

PART.4 개념의 외연

#1. 리그와 토너먼트

PART 05 중복조합과 일대일 대응

#1. 중복조합의 상황

1. 중복조합의 뜻과 공식
2. 구분막대기를 이용한 일대일 대응
3. 중복조합의 공식 : 암기가 아닌 Reading
   ${}_{n}H_{r} = {}_{n+r-1}C_{n-1}$

#2. 중복조합과 일대일 대응

1. 중복조합과 일대일 대응
   : 일대일 대응 + 공식
2. 서로 같은 대상, 서로 다른 자리
3. 중복조합의 적어도의 상황
   : 미리 뽑아놓고 생각한다.

PART.5 개념의 외연

#1. 같은 것과 다른 것 총 정리

#2. 중복조합과 곱의 법칙

#3. 전개식과 경우의 수

#4. 부정방정식과 일대일 대응

#5. 함수의 개수 총정리

PART 06 이항정리와 조합의 연속 합

#1. 이항정리와 이항계수의 성질

1. 이항계수의 의미와 이항전개식
2. 특정항의 계수 : 나열된 식의 구조와 추론
3. 이항전개식 간단히 하기
4. 이항계수의 성질 : 이항정리 + 항등식의 마법
   1) 연속 합 2) 교대 합 3) 짝수 합
   4) 홀수 합 5) 절반 합

#2. 조합의 식 변형과 이항계수의 성질

#3. 파스칼 삼각형

1. 이항계수의 또 다른 성질
2. 파스칼 삼각형 공식 : ${}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_{r} = {}_{n}C_{r}$
3. 이항계수의 성질과 파스칼 삼각형 공식의 구분법

#4. 분할적 사고와 관점 합

1. 이항전개식을 이용한 설명
2. 다른 방식을 이용한 설명

PART.6 개념의 외연

#1. 삼항정리

#2. 정수론 3탄

#1 이항정리와 이항계수의 성질

다항식의 계수에서 경우의 수의 의미를 찾다.

1. 이항계수의 의미와 이항전개식

- 식의 전개란 각 집단에서 대상을 한 개씩 뽑아 곱한 모든 경우의 나열

⇨ $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = \underline{aaa} + \underline{aab + aba + baa} + \underline{abb + bab + bba} + \underline{bbb}$

$= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

- 전개식에서 특정 항이란 조건에 맞게 각 집단에서 한 개씩의 대상을 뽑아 곱하여 만드는 것이다.
  곱해져 있는 인수들을 집단이라고 하는데 반드시 각 집단에서 한!개!씩! 뽑은 후 곱한다.

- 전개식에서 특정항의 계수는 결국 경우의 수이다.

⇨ a^2b의 계수를 생각해 보자,

	집단 1	집단 2	집단 3
세 개의 집단	$(a+b)$	$(a+b)$	$(a+b)$
a^2b가 나오는 상황 1	a	a	b
a^2b가 나오는 상황 2	a	b	a
a^2b가 나오는 상황 3	b	a	a

세 집단에서 각각 대상 1개씩을 뽑아서 곱해야 하므로 각 집단 중 두 집단에서는 a, 한 집단에서는 b를 뽑는다.
경우의 수는 세 집단 중 b를 뽑을 한 집단을 선택하는 경우의 수와 같다.
a, b중 반드시 하나씩은 뽑혀야 하므로 남은 집단에서는 자동으로 a가 뽑힌다.

〈a^2b가 나오는 경우의 수〉 = 〈세 집단 중 b가 뽑히는 한 집단을 선택하는 경우의 수〉 = ${}_3C_1$

물론 a^2b가 나오는 모든 경우의 수를 〈세 집단 중 a가 뽑히는 두 집단은 선택하는 경우의 수〉라고 생각해도 되지만
〈관용적으로 뒤에 있는 b〉에 맞추어 생각한다. 전개식을 쓸 때도 〈뒤에 있는 b에 대한 오름차순〉으로 정리하는데
다시 한 번 말하지만 관용적으로 그렇다. 옳고 그름을 떠나서 관용을 따르는 게 좋다.

결론적으로, b를 기준으로 생각해서 $(a+b)^3$의 전개식에서 계수를 조합을 이용하여 표현하면

$$(a+b)^3 = {}_3C_0\,a^3b^0 + {}_3C_1\,a^2b^1 + {}_3C_2\,a^1b^2 + {}_3C_3a^0b^3$$

$$= {}_3C_0\,a^3 + {}_3C_1\,a^2b^1 + {}_3C_2\,a^1b^2 + {}_3C_3b^3 = \sum_{r=0}^{3} {}_3C_r\,a^{3-r}\,b^r$$

(3개의 집단 중 b를 r번 뽑고, a는 자동으로 $3-r$번 뽑힘)

- 이처럼 두 항에 대한 조합으로 표현된 전개식을 **이항전개식**이라 하고, 각 계수들을 **이항계수**라고 한다.

이항 전개식을 쓸 때 반드시 <계수의 의미>를 읽으면서 써내려간다.

- 첫 번째 전개식

$$(a+b)^{n} = {}_{n}C_{0}\,a^{n}b^{0} + {}_{n}C_{1}\,a^{n-1}b^{1} + \cdots + \underline{{}_{n}C_{r}\,a^{n-r}b^{r}} + \cdots + {}_{n}C_{n}a^{0}b^{n} = \sum_{r=0}^{n} {}_{n}C_{r}\,a^{n-r}b^{r}$$

여기에 $a=1$, $b=x$를 대입하면 n개(의 집단) 중 r개에서 b, 나머지 n-r개에서는 a를 뽑는다.

- 두 번째 전개식

$$(1+x)^{n} = {}_{n}C_{0} + {}_{n}C_{1}\,x + \cdots + \underline{{}_{n}C_{r}\,x^{r}} + \cdots + {}_{n}C_{n}x^{n} = \sum_{r=0}^{n} {}_{n}C_{r}\,x^{r}$$

(1의 거듭제곱은 1)

n개(의 집단) 중 r개에서 x를 뽑는다. 나머지는 자동으로 1이 뽑힌다.

2. 특정항의 계수 찾기 : 나열된 식의 구조와 추론

: 흔히 <일반항 + 부정 방정식을 이용해서 푼다.>라고 많이 서술되어 있는 부분이다.
그 일반항이라는 것은 이항전개식의 임의의 항을 변수를 이용하여 나타낸 것인데 이 방식을 기억하는 것은 본질이 아니다.
이항전개식의 나열된 식의 구조가 머릿속에서 펼쳐져 있을 때 <일반항을 이용한 풀이>도 본질적인 이해가 가능하다.

1) 이항 전개를 통해 <나열된 식의 구조>로 표현한 후 일일이 경우를 따진다.

- 이것이 본질이다. 또한 가장 경우의 수답게 문제를 푸는 것이기도 하다.

2) <항등식의 마법>을 이용해서 식을 변형한 후 계수를 찾는 아이디어

예를 들어 등비수열의 합 꼴인 $(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^n$은 $x \neq 1$라는 조건이 있다면 등비수열의 합 공식을 이용하여 $\dfrac{(1+x)\{(1+x)^n-1\}}{(1+x)-1}$와 같이 표현 할 수 있다. 즉, $(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^n$에서 x^2의 계수는 $\dfrac{(1+x)\{(1+x)^n-1\}}{(1+x)-1} = \dfrac{(1+x)^{n+1}-(x+1)}{x}$에서 x^2의 계수와 같은데 분모에 x가 있으므로 분자에서 x^3의 계수를 찾으면 된다. (후에 파스칼 삼각형의 공식을 이용하여 계수를 구할 수 있으나 <항등식의 마법>을 통하여 식 변형 후 이항계수를 구할 수 있다는 아이디어 자체를 기억하고 넘어가야 한다.)

3) 식 변형을 하면 오히려 안 풀리는 경우도 많다.

예를 들어 $(2+x)+(2+x)^2+\cdots+(2+x)^n$은 다항식이지만 등비수열의 합 공식을 이용하면 분모가 정리되지 않기 때문에 다항식이 나오지 않는다. (다항식을 다항식이 아닌 식으로 변형할 수 있는 것은 대학에서는 매우 흔한 일이고 고민해봤다면 고등학교에서도 꽤 많이 등장했음을 알 수 있다.)
이런 경우에는 주어진 식 그대로에서 특정항의 계수를 찾아야 할 것이다.

코칭 <나열된 식의 구조> : 고1 수열에서 규칙적인 합을 간단히 표현하는 시그마라는 기호를 배운다. 이항정리도 전개식을 주로 시그마를 이용해서 표현하는데 시그마는 그 자체로 하나의 표현일 뿐 본질이 아니다. 시그마에서 뭔가의 오류가 발생하거나 너무 복잡하게 문제가 풀리는 이유는 나열된 식의 구조를 생각하지 않고 시그마 그 자체를 외워서다.

코칭 <항등식의 마법> : 우리가 공부하는 수학의 가장 중요한 논리 중 하나가 항등식 논리이다. 항등식의 논리라는 것은 단지 고1 다항식에서 배우는 <미정계수법>이라는 방법으로 문제를 푸는 유형 하나가 아니다. 항등식의 논리란 주어진 식을 변형함으로서 불가능한 것을 가능하게 만들어 주는 일종의 마법이다. (더 어려운 공부를 하면 할수록 항등식의 식 변형 논리가 마법처럼 느껴질 것이다.)

예를 들어 원유는 그 자체로 쓸모가 거의 없지만 조금만 가공하면 우유, 치즈, 요거트 등으로 다양하게 사용할 수 있게 되는 것처럼 식도 그러하다.

⇨ 문제를 풀다 몰랐던 식 변형의 아이디어가 나오면 일종의 득템(?)하는 기분으로 정리해 두는 습관을 갖자!

108 이해를 위한 예제 2011. 11. 나형(87%). 8번. 3점

다항식 $(x+a)^7$의 전개식에서 x^4의 계수가 280 일 때, x^5의 계수는?(단, a는 상수이다.)

① 84 ② 91 ③ 98 ④ 105 ⑤ 112

원리를 생각하면서 공식을 써라.

$(x+a)^7 = (x+a)(x+a)(x+a)(x+a)(x+a)(x+a)(x+a)$의 전개식 중 x^4a^3의 계수는

7개의 집단 중 a를 뽑는 3개의 집단을 선택하는 경우의 수이므로 ${}_7C_3$ (나머지 4개의 집단에서는 자동으로 x가 뽑힌다.)

$(x+a)^7 = \cdots + {}_7C_3x^4a^3 + \cdots$ (특정 항은 항상 전체 식의 일부라는 것을 잊지 말아야 한다.)

x^4의 계수가 280 ⇨ x^4의 계수는 ${}_7C_3a^3$이므로 ${}_7C_3a^3 = 280 \Leftrightarrow 35a^3 = 280 \Leftrightarrow a^3 = 8 \Leftrightarrow a = 2$

x^5의 계수 ⇨ $(x+2)^7$의 전개식 중 우리가 구하는 x^5의 계수가 나오는 항은 ${}_7C_2x^52^2$이므로

x^5의 계수는 ${}_7C_2 2^2 = 84$이다.

정답은 84

코칭 <손>으로는 공식의 결과만 쓰더라도 위의 설명처럼 <마음속>으로는 항상 원리적 과정을 생각하면서 공식을 써야한다. 공식에 의미를 부여하고 의미를 읽어나가면서 공식을 사용하는 것은 아주 좋은 습관이다.

109 이해를 위한 예제 2008. 11. 나형(81%). 9번. 4점

$\left(x+\dfrac{1}{x^3}\right)^4$의 전개식에서 $\dfrac{1}{x^4}$의 계수는?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

기본으로부터 추론하라.

$$\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^4 = \left(x+\frac{1}{x^3}\right)\left(x+\frac{1}{x^3}\right)\left(x+\frac{1}{x^3}\right)\left(x+\frac{1}{x^3}\right)$$의

전개식을 생각할 때 각 집단에서 대상 x와 $\dfrac{1}{x^3}$을 각각 몇 번씩 뽑아야 $\dfrac{1}{x^4}$이 되는지 생각한다.

일일이 해보는 간단한 추론을 통해서 x는 두 번, $\dfrac{1}{x^3}$ 두 번을 뽑아서 곱해야 $\dfrac{1}{x^4}$이 된다는 것을 알 수 있다.

$\left(x+\dfrac{1}{x^3}\right)^4 = \cdots + {}_4C_2\,x^2\left(\dfrac{1}{x^3}\right)^2 + \cdots = \cdots + {}_4C_2\,\dfrac{1}{x^4} + \cdots$ 이므로 ${}_4C_2 = 6$

가장 많이 제시되어 있는 일반적 풀이 : 일반항을 활용하는 방법

$\left(x+\dfrac{1}{x^3}\right)^4$의 전개식에서 일반항은 ${}_4C_r\,x^r\left(\dfrac{1}{x^3}\right)^{4-r}$이다. (단, $r=0,1,\cdots,4$)

실제로 $r=0$부터 4까지 각각 대입했을 때 $\left(x+\dfrac{1}{x^3}\right)^4$의 전개식의 모든 항을 표현할 수 있다. 그래서 일반항이다.

일반항을 정리해 주면 ${}_4C_r\,x^r\left(\dfrac{1}{x^3}\right)^{4-r} = {}_4C_r\,x^r\left(x^{-3}\right)^{4-r} = {}_4C_r\,x^r\,x^{3r-12} = {}_4C_r\,x^{4r-12}$ (단, $r=0,1,\cdots,4$)이므로

우리가 찾는 x^{-4}은 일반항 ${}_4C_r\,x^{4r-12}$의 r에 2를 대입한 것과 같다. ${}_4C_2\,x^{-4}$이므로 $\dfrac{1}{x^4}$의 계수는 ${}_4C_2 = 6$

정답은 ②

110 이해를 위한 예제

다항식 $(3x+y)(x-2y)^5$ 의 전개식에서 x^3y^3 의 계수는?

① -200 ② -190 ③ -180 ④ -170 ⑤ -160

나열된 식의 구조로 표현 후 추론하라.

$(3x+y)(x-2y)^5 = (3x+y)\left(a_0x^5+a_1x^4y+\cdots+a_5y^5\right)$와 같이 $(x-2y)^5$ 만 전개했다고 가정한다.

편의상 각 항의 계수는 계산하지 않고 의미만 표현하였다.

	$(3x+y)$	$\left(a_0x^5+a_1x^4y+\cdots+a_5y^5\right)$
x^3y^3가 나오는 상황 1 :	$3x$	$a_3x^2y^3$
x^3y^3가 나오는 상황 2 :	y	$a_2x^3y^2$

$$\begin{aligned}(3x+y)(x-2y)^5 &= (3x+y)\left(a_0x^5+a_1x^4y+\cdots+a_5y^5\right) = \cdots + (3x)\times a_3x^2y^3 + (y)\times a_2x^3y^2 + \cdots \\ &= \cdots + (3x)\times {}_5C_3\,x^2(-2y)^3 + (y)\times {}_5C_2\,x^3(-2y)^2 + \cdots \\ &= \cdots + \left\{3\times {}_5C_3\times(-2)^3 + {}_5C_2\times(-2)^2\right\}x^3y^3 + \cdots \\ &= \cdots + (-240 + 40)x^3y^3 + \cdots\end{aligned}$$

x^3y^3 의 계수는 -200이므로 정답은 ①

티칭 $(x-2y)^5 = {}_5C_0\,x^5(-2y)^0 + {}_5C_1\,x^4(-2y)^1 + \cdots + {}_nC_5x^0(-2y)^5$을 y에 대한 오름차순으로 정리하고, y^r의 정리된 계수를 a_r이라고 한다면 $(x-2y)^5 = a_0x^5+a_1x^4y+\cdots+a_5y^5$으로 표현할 수 있다. 수학에서는 이렇게 필요에 따라 계산하지 않고, 의미만 표현한 간단한 식을 많이 이용한다.

가장 많이 제시되어 있는 일반적 풀이 : 일반항을 활용하는 방법

$(x-2y)^5$ 의 전개식의 일반항은 ${}_5\mathrm{C}_r\,x^{5-r}(-2y)^r = {}_5\mathrm{C}_r(-2)^rx^{5-r}y^r$ $(r=0,1,\cdots,5)$

$(3x+y)(x-2y)^5$ 의 전개식의 모든 항은 다음과 같이 표현된다.

$3x\times{}_5\mathrm{C}_r(-2)^rx^{5-r}y^r$ 또는 $y\times{}_5\mathrm{C}_r(-2)^rx^{5-r}y^r$ $(r=0,1,\cdots,5)$

두 식에 $r=0$부터 5까지 각각 대입했을 때 $(3x+y)(x-2y)^5$의 전개식의 모든 항을 표현할 수 있는 사실을 이해한다.

이 중에서 항 x^3y^3이 되는 경우는 $3x\times{}_5\mathrm{C}_r(-2)^rx^{5-r}y^r$에서 $r=3$인 경우와
$y\times{}_5\mathrm{C}_r(-2)^rx^{5-r}y^r$에서 $r=2$인 경우 두 가지가 존재한다.

이것을 대입하여 계수끼리 더하면 $3\times{}_5C_3\times(-2)^3 + {}_5C_2\times(-2)^2 = (-240 + 40) = -200$이다.

코칭 나열된 식의 구조를 통해 정확한 이해를 한 후에 일반항을 활용하여 푸는 것을 이해한다.
사실 시중의 해설들은 같은 일반항을 이용한 풀이라고 하더라도 여기 풀이 보다 훨씬 생략과 비약이 많을 수 있다.
그런 풀이도 물론 이해할 수는 있어야 하지만 <나열된 식의 구조>로 표현한 후 가장 기본적인 논리인 <식의 전개>를 통해서 풀어가는 것이 훨씬 직관적이며 절대로 더 복잡하거나 어렵지 않다.

111 이해를 위한 예제 2010. 7. 나형(51%). 20번. 3점

$\sum_{k=1}^{10}\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^k$ 의 전개식에서 상수항을 구하시오.

나열된 식의 구조로 표현 후 추론하라.

$$\sum_{k=1}^{10}\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^k = \left(x+\frac{1}{x^3}\right)+\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^2+\cdots+\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^k+\cdots+\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^{10}$$

$\left(x+\frac{1}{x^3}\right)$, $\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^2$, $\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^3$까지는 상수항이 나올 수 없으며 ($\frac{1}{x^3}$이 몇 번 뽑혔는지를 기준으로 추론해봐라.)

⇨ $\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^4$은 한 집단에서 $\frac{1}{x^3}$을 뽑으면 남은 세 집단에서 x가 뽑히므로 상수항이 나올 수 있다.

연습 삼아서 $\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^5$을 관찰해 보자. 한 집단에서 $\frac{1}{x^3}$을 뽑으면 네 집단에서 x가 뽑히므로 $\frac{1}{x^3}\times x^4$이 되어 상수항이 나오지 않고, 두 집단에서 $\frac{1}{x^3}$을 뽑으면 세 집단에서는 x가 뽑히므로 $\left(\frac{1}{x^3}\right)^2\times x^3$이 되어 역시 상수항이 나오지 않는다.

같은 추론으로 $\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^5$, $\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^6$, $\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^7$까지는 상수항이 나올 수 없다.

⇨ $\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^8$은 두 집단에서 $\frac{1}{x^3}$이 뽑으면 남은 여섯 집단에서 x가 뽑히므로 상수항이 나올 수 있다.

$\sum_{k=1}^{10}\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^k$에서 상수항이 나올 수 있는 항은 $\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^4$과 $\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^8$뿐이다.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^k &= \cdots+\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^4+\cdots+\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^8+\cdots \\ &= \cdots+\left(\cdots+{}_4C_1x^3\left(\frac{1}{x^3}\right)+\cdots\right)+\cdots+\left(\cdots+{}_8C_2x^6\left(\frac{1}{x^3}\right)^2+\cdots\right)+\cdots\end{aligned}$$

즉, 상수항은 ${}_4C_1 + {}_8C_2 = 32$

코칭 등비수열의 합 공식을 써서 식을 변형하면 오히려 계수를 찾을 수 없게 된다.
교과서는 식 변형의 방법을 설명할 뿐, 실제 상황에서 식을 변형할 것인가에 대한 판단은 결국 본인의 몫이다.
(다음 페이지에 일반항을 이용한 풀이가 나와 있다.)

가장 많이 제시되어 있는 일반적 풀이 : 일반항을 활용하는 방법

$\sum_{k=1}^{10}\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^k$: 시그마의 일반항 $\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^k$의 전개식의 일반항을 생각한다. $(k=1,2,\cdots,10)$

$$\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^k = \cdots + {}_kC_r x^{k-r}\left(\frac{1}{x^3}\right)^r + \cdots = \cdots + {}_kC_r x^{\boxed{k-4r}} + \cdots \quad (r=0,1,\cdots,k)$$

(일반항의 일반항이기 때문에 헷갈릴 수 있다.)

⇨ 🟩 의 설명 : ${}_kC_r x^{k-r}\left(\frac{1}{x^3}\right)^r = {}_kC_r x^{k-r}x^{-3r} = {}_kC_r x^{k-4r}$ (간단한 지수법칙)

${}_kC_r x^{k-r}\left(\frac{1}{x^3}\right)^r$의 $(k,\ r)$에 $(1,\ 0)$, $(1,\ 1)$을 대입하면 $\left(x+\frac{1}{x^3}\right)$의 모든 항이 표현된다.

$(2,\ 0)$, $(2,\ 1)$, $(2,\ 2)$을 대입하면 $\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^2$의 모든 항이 표현된다.

$(3,\ 0)$, $(3,\ 1)$, $(3,\ 2)$, $(3,\ 3)$을 대입하면 $\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^3$의 모든 항이 표현된다.

⋮

결국, 상수항은 $k-4r=0$인 경우이고 $k-4r=0$이 가능한 $(k,\ r)$은 $(4,\ 1)$과 $(8,\ 2)$뿐이다.

$$\sum_{k=1}^{10}\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^k = \cdots + {}_4C_1\,x^0 + \cdots + {}_8C_2\,x^0 + \cdots$$

상수항은 ${}_4C_1 + {}_8C_2 = 32$

코칭 압축적으로 표현된 식은 의미를 정확하게 알면 효율적일 수 있으나,
의미를 모르는 상태로 외워서 쓰는 것은 아무런 효과도, 필요도 없는 시간낭비일 뿐이다.

3. 이항전개식 간단히 하기

: 공식 전체 구조를 통째로 외워야 한다. 완벽하게 식의 구조적 특징을 기억한다.

1) 첫 번째 전개식 : <조합 × 등비수열>이 규칙적으로 더해진 모양 1

- (관찰1) 조합을 보고 힌트를 얻는다. (조합의 하단의 수 🟨 은 건드리지 않는다.)

$$\sum_{r=0}^{n} {}_{n}C_{r}\,a^{n-r}b^{r} = {}_{n}C_{0}\,a^{n}\,b^{0} + {}_{n}C_{1}\,a^{n-1}\,b^{1} + \cdots + {}_{n}C_{r}\,a^{n-r}\,b^{r} + \cdots + {}_{n}C_{n}a^{0}\,b^{n} = (a+b)^{n}$$

전개식을 간단히 만들기 위해 🟨 부분에 맞게 🟪을 조작한다.

- (관찰2) 어떻게 맞춰주는가?

편의상 🟨의 왼쪽 부분을 <고정수>, 오른쪽 부분을 <변동수>라고 하자.

$$\boxed{\sum_{r=0}^{n} {}_{\textcircled{n}}C_{\textcircled{r}}a^{n-r}b^{r}}$$

$\downarrow$ 고정수 $\searrow$ 변동수

(1) 변동수 확인 ⇨ <변동수>는 항상 0부터 끝까지(고정수까지) 더한다. (빠진 게 있으면 채운다.)

$$\sum_{r=0}^{n} {}_{n}C_{r}a^{n-r}b^{r} = {}_{n}C_{0}a^{n}b^{0} + {}_{n}C_{1}a^{n-1}b^{1} + \cdots + {}_{n}C_{r}a^{n-r}b^{r} + \cdots + {}_{n}C_{n}a^{0}b^{n} = (a+b)^{n}$$

(2) 지수 확인 ⇨ <변동수>와 <같은 지수>가 있는지 확인한다. (없으면 곱하고 나눠서 있게 한다.)

$$\sum_{r=0}^{n} {}_{n}C_{r}a^{n-r}b^{r} = {}_{n}C_{0}a^{n}b^{0} + {}_{n}C_{1}a^{n-1}b^{1} + \cdots + {}_{n}C_{r}a^{n-r}b^{r} + \cdots + {}_{n}C_{n}a^{0}b^{n} = (a+b)^{n}$$

(3) 지수 합 확인 ⇨ <지수의 합>은 <고정수>이다. (아니라면 곱하고 나눠서 있게 한다.)

$$\sum_{r=0}^{n} {}_{n}C_{r}a^{n-r}b^{r} = {}_{n}C_{0}a^{n}b^{0} + {}_{n}C_{1}a^{n-1}b^{1} + \cdots + {}_{n}C_{r}a^{n-r}b^{r} + \cdots + {}_{n}C_{n}a^{0}b^{n} = (a+b)^{n}$$

- 보통 (2)과 (3)은 동시에 맞춰진다. ⇨ 결과적으로 $(a+b)^{고정수}$로 간단하게 나타내어진다.

$$\sum_{r=0}^{n} {}_{n}C_{r}a^{n-r}b^{r} = {}_{n}C_{0}\,a^{n}\,b^{0} + {}_{n}C_{1}\,a^{n-1}\,b^{1} + \cdots + {}_{n}C_{r}\,a^{n-r}\,b^{r} + \cdots + {}_{n}C_{n}a^{0}\,b^{n} = (a+b)^{n}$$

외워라!!! <조합 X 등비수열>이 규칙적으로 더해진 모양	변동수 확인 : 0부터 끝까지 지수 확인 : 변동수와 같은 지수 지수 합 확인 : 지수 합 = 고정수	⇨ $(a+b)^{고정수}$

2) 두 번째 전개식 : <조합 × 등비수열>이 규칙적으로 더해진 모양 2

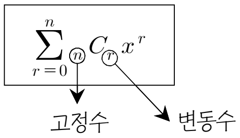
- (관찰1) 조합을 보고 힌트를 얻는다. (조합의 하단의 수 🟨 은 건드리지 않는다.)

$$\sum_{r=0}^{n} {}_{n}C_{r}\, x^{r} = {}_{n}C_{0} + {}_{n}C_{1}\, x + \cdots + {}_{n}C_{r}\, x^{r} + \cdots + {}_{n}C_{n} x^{n} = (1+x)^{n}$$

전개식을 간단히 만들기 위해 🟨 부분에 맞게 🟪을 조작한다.

- (관찰2) 어떻게 맞춰주는가?

편의상 🟨의 왼쪽 부분을 <고정수>, 오른쪽 부분을 <변동수>라고 하자.



(1) 변동수 확인 ⇨ <변동수>는 항상 0부터 끝까지(고정수까지) 더한다. (빠진 게 있으면 채운다.)

$$\sum_{r=0}^{n} {}_{n}C_{r}\, x^{r} = {}_{n}C_{0} + {}_{n}C_{1}\, x + \cdots + {}_{n}C_{r}\, x^{r} + \cdots + {}_{n}C_{n} x^{n} = (1+x)^{n}$$

(2) 지수 확인 ⇨ <변동수>와 <같은 지수>가 있는지 확인한다. (없으면 곱하고 나눠서 있게 한다.)

$$\sum_{r=0}^{n} {}_{n}C_{r}\, x^{r} = {}_{n}C_{0} + {}_{n}C_{1}\, x^{1} + \cdots + {}_{n}C_{r}\, x^{r} + \cdots + {}_{n}C_{n} x^{n} = (1+x)^{n}$$

(3) 보이지 않는 1의 존재를 까먹으면 안 된다.

$$\sum_{r=0}^{n} {}_{n}C_{r}\, x^{r} = {}_{n}C_{0}\, 1^{n} + {}_{n}C_{1}\, x^{1} 1^{n-1} + \cdots + {}_{n}C_{r}\, x^{r} 1^{n-r} + \cdots + {}_{n}C_{n} x^{n} 1^{0} = (1+x)^{n}$$

$$\sum_{r=0}^{n} {}_{n}C_{r}\, x^{r} = {}_{n}C_{0} + {}_{n}C_{1}\, x + \cdots + {}_{n}C_{r}\, x^{r} + \cdots + {}_{n}C_{n} x^{n} = (1+x)^{n}$$

외워라!!! <조합 X 등비수열>이 규칙적으로 더해진 모양	변동수 확인 : 0부터 끝까지 지수 확인 : 변동수와 같은 지수 보이지 않는 1의 존재	⇨ $(1+x)^{\text{고정수}}$

112 이해를 위한 예제 2010. 4. 가형(67%). 18번. 3점

$\sum_{k=0}^{5} {}_{5}C_{k}\left(\frac{3}{8}\right)^{k}\left(\frac{13}{8}\right)^{5-k}$ 의 값을 구하시오.

첫 번째 전개식

$\sum_{k=0}^{5} {}_{5}C_{k}\left(\frac{3}{8}\right)^{k}\left(\frac{13}{8}\right)^{5-k}$ ⇨ 🟩 0부터 끝까지 🟥 변동수와 같은 지수 ▭ 지수의 합이 고정수 5

즉, $\sum_{k=0}^{5} {}_{5}C_{k}\left(\frac{3}{8}\right)^{k}\left(\frac{13}{8}\right)^{5-k} = \left(\frac{3}{8} + \frac{13}{8}\right)^{5} = \left(\frac{16}{8}\right)^{5} = 32$

굳이 변형해서 두 번째 전개식의 모양으로 풀어보자.

간단한 지수법칙을 이용하여 변형하면 $\sum_{k=0}^{5} {}_{5}C_{k}\left(\frac{3}{8}\right)^{k}\left(\frac{13}{8}\right)^{5-k} = \left(\frac{13}{8}\right)^{5} \times \sum_{k=0}^{5} {}_{5}C_{k}\left(\frac{3}{8}\right)^{k}\left(\frac{8}{13}\right)^{k} = \left(\frac{13}{8}\right)^{5} \times \sum_{k=0}^{5} {}_{5}C_{k}\left(\frac{3}{13}\right)^{k}$

$\left(\frac{13}{8}\right)^{5} \times \sum_{k=0}^{5} {}_{5}C_{k}\left(\frac{3}{13}\right)^{k} (1)^{5-k}$ ⇨ 🟩 0부터 끝까지 🟥 변동수와 같은 지수 🟨 보이지 않는 1의 존재

$$\sum_{k=0}^{5} {}_{5}C_{k}\left(\frac{3}{8}\right)^{k}\left(\frac{13}{8}\right)^{5-k} = \left(\frac{13}{8}\right)^{5} \sum_{k=0}^{5} {}_{5}C_{k}\left(\frac{3}{13}\right)^{k} = \left(\frac{13}{8}\right)^{5}\left(1 + \frac{3}{13}\right)^{5} = \left(\frac{13}{8}\right)^{5}\left(\frac{16}{13}\right)^{5} = \left(\frac{16}{8}\right)^{5} = 32$$

정답은 32

113 이해를 위한 예제

다음 조합으로 표현된 식을 간단히 하여라.

(1) $\sum_{k=1}^{10} {}_{10}C_k 3^{10-k} 4^k$　　(2) $\sum_{k=0}^{10} {}_{10}C_k 3^{9-k} 4^k$　　(3) $\sum_{k=0}^{10} {}_{10}C_k 3^k 4^{k-1}$

(1) $\sum_{k=1}^{10} {}_{10}C_k 3^{10-k} 4^k$ ⇨ 🟩 1부터 끝까지 (0인 경우를 채운다) 🟥 변동수와 같은 지수 ○ 지수의 합이 고정수 10

$$\sum_{k=1}^{10} {}_{10}C_k 3^{10-k} 4^k = {}_{10}C_0 3^{10} 4^0 + {}_{10}C_1 3^9 4^1 + {}_{10}C_2 3^8 4^2 + \cdots + {}_{10}C_{10} 3^0 4^{10} - {}_{10}C_0 3^{10} 4^0$$

$$= (3+4)^{10} - {}_{10}C_0 3^{10} 4^0 = 7^{10} - 3^{10}$$

지수법칙을 통해 식을 변형해서 <두 번째 전개식>을 이용하는 것은 스스로 해본다.

$$7^{10} - 3^{10}$$

(2) $\sum_{k=0}^{10} {}_{10}C_k 3^{9-k} 4^k$ ⇨ 🟩 0부터 끝까지 🟥 변동수와 같은 지수 ○ 지수의 합이 9 (고정수 10이 되도록 변형한다.)

$$\sum_{k=0}^{10} {}_{10}C_k 3^{9-k} 4^k = \frac{1}{3} \times \sum_{k=0}^{10} {}_{10}C_k 3^{10-k} 4^k = \frac{1}{3} \cdot ({}_{10}C_0 3^{10} 4^0 + {}_{10}C_1 3^9 4^1 + {}_{10}C_2 3^8 4^2 + \cdots + {}_{10}C_{10} 3^0 4^{10})$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (3+4)^{10} = \frac{1}{3} \cdot 7^{10}$$

$$\frac{1}{3} \cdot 7^{10}$$

(3) $\sum_{k=0}^{10} {}_{10}C_k 3^k 4^{k-1}$ ⇨ 🟩 0부터 끝까지 🟥 변동수와 같은 지수 ○ 지수의 합이 $2k-1$

지수 합이 상수가 아닌 변수가 나왔다. 이런 경우는 억지로 <첫 번째 전개식>의 모양을 맞추기 보다는 <두 번째 전개식>이 효율적이다. (물론 억지로 첫 번째 식으로 맞출 수도 있다.)

$$\sum_{k=0}^{10} {}_{10}C_k 3^k 4^{k-1} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=0}^{10} {}_{10}C_k 3^k 4^k = \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=0}^{10} {}_{10}C_k 12^k (1)^{10-k} = \frac{1}{4} \cdot (1+12)^{10} = \frac{1}{4} \cdot 13^{10}$$

⇨ 🟩 0부터 끝까지 🟥 변동수와 같은 지수 🟨 보이지 않는 1의 존재

$$\frac{1}{4} \cdot 13^{10}$$

코칭 시그마를 자꾸 나열된 식의 구조로 표현하는 이유는 시그마의 모양보다는 나열된 식의 구조를 더 많이 관찰해야하기 때문이다. 시그마로 표현된 식이 헷갈릴 때는 항상 나열된 구조의 식으로 만든 다음 관찰해야 한다.

4. 이항계수의 성질 : 이항정리 + 항등식의 성질

: 두 번째 전개식 : 항등식 $(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1\,x + \cdots + {}_nC_r\,x^r + \cdots + {}_nC_n x^n$을 통해서 이항계수들 ${}_nC_0,\ {}_nC_1,\ \cdots,\ {}_nC_n$에 대한 공식을 유도하고 암기한다.

1) 연속 합 ($x=1$대입)

- ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n = 2^n$

2) 교대 합 ($x=-1$대입)

- ${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n(-1)^n = 0$

3) 짝수 합 1)의 식 + 2)의 식

- $2({}_nC_0 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_{\text{마지막짝수}}) = 2^n \quad \Leftrightarrow \quad {}_nC_0 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_{\text{마지막짝수}} = 2^{n-1}$

4) 홀수 합 1)의 식 - 2)의 식

- $2({}_nC_1 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_{\text{마지막홀수}}) = 2^n \quad \Leftrightarrow \quad {}_nC_1 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_{\text{마지막홀수}} = 2^{n-1}$

5) 절반 합 (조합의 성질)

- $(1+x)^{2n+1}$의 전개식과 같이 항이 짝수 개이면 조합의 성질에 의하여 다음과 같이 정리된다.

$${}_{2n+1}C_0 + {}_{2n+1}C_1 + \cdots + {}_{2n+1}C_n + {}_{2n+1}C_{n+1} + \cdots + {}_{2n+1}C_{2n} + {}_{2n+1}C_{2n+1} = 2^{2n+1}$$

- $2({}_{2n+1}C_0 + {}_{2n+1}C_1 + \cdots + {}_{2n+1}C_n) = 2({}_{2n+1}C_{n+1} + \cdots + {}_{2n+1}C_{2n} + {}_{2n+1}C_{2n+1}) = 2^{2n+1}$이므로

⇨
$$\begin{array}{|l|}\hline {}_{2n+1}C_0 + {}_{2n+1}C_1 + \cdots + {}_{2n+1}C_n = 2^{2n} \\ \hline {}_{2n+1}C_{n+1} + {}_{2n+1}C_{n+2} + \cdots + {}_{2n+1}C_{2n+1} = 2^{2n} \\ \hline \end{array}$$

티칭 사실 이항계수의 성질 중 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$은 다른 방식으로도 설명할 수 있다.

우리는 $U=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}$의 부분집합의 개수가 2^n이라는 사실을 이미 알고 있다.
이것은 굳이 따지자면 중복순열의 상황이지만 곱의 법칙을 이용해서 구했다. 부분집합이 생길 수 있는 전체 상황을 부분집합의 원소의 개수로 상황을 분류하면

2^n의 전체상황 (개수로 분류) 부분집합의 원소의 개수로 상황을 분류한다.

상황 0 : 부분집합의 원소의 개수가 0개
상황 1 : 부분집합의 원소의 개수가 1개
⋮
상황 n : 부분집합의 원소의 개수가 n개

: $n(\text{전체})=n(\text{상황}\,0)+n(\text{상황}\,1)+\cdots+n(\text{상황}\,n)$

각 상황은 조합으로 표현할 수 있다. 예컨대 (상황 2)는 원소가 2개인 부분집합의 개수이므로 $n(\text{상황}\,2)={}_nC_2$이다. 계산하지 않고 같다는 사실을 안다.

$$n(\text{전체})=n(\text{상황}\,0)+n(\text{상황}\,1)+\cdots+n(\text{상황}\,n)$$

$$2^n={}_nC_0+{}_nC_1+\cdots+{}_nC_n$$

- 역으로 원소의 개수에 따라 분류된 부분집합의 개수를 물어보는 문제는 역으로 이항계수의 성질을 이용해 구할 수 있다.

114 이해를 위한 예제

${}_{50}C_1-{}_{50}C_2+{}_{50}C_3-{}_{50}C_4+\cdots+{}_{50}C_{49}$의 값은?

① -2 ② 2 ③ 2^{50} ④ 2^{51} ⑤ 2^{52}

식의 모양을 암기하라! <교대 합>의 모양이다.

준 식 ${}_{50}C_1-{}_{50}C_2+{}_{50}C_3-{}_{50}C_4+\cdots+{}_{50}C_{49}$은 교대 합을 약간 변형해 놓은 것이다.

$(1+x)^{50}={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_{50}C_{50}x^{50}$ 에서 $x=-1$을 대입한 교대 합

${}_{50}C_0-{}_{50}C_1+{}_{50}C_2+\cdots-{}_{50}C_{49}+{}_{50}C_{50}=0$ 에서 ▭ 을 우변으로 이항시키면

⇨ ${}_{50}C_0+{}_{50}C_{50}={}_{50}C_1-{}_{50}C_2+{}_{50}C_3-{}_{50}C_4+\cdots+{}_{50}C_{49}\ \Leftrightarrow\ 2={}_{50}C_1-{}_{50}C_2+{}_{50}C_3-{}_{50}C_4+\cdots+{}_{50}C_{49}$

정답은 ②

115 이해를 위한 예제

$U=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 10\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 홀수인 집합의 개수를 구하시오.

식의 모양을 암기하라! <홀수 합>의 모양이다.

원소의 개수가 홀수인 경우는 1개인 경우, 3개인 경우, …, 9개인 경우로 나눌 수 있다.

즉, $n(\text{전체}) = n(\text{원소의 개수 1개}) + n(\text{원소의 개수 3개}) + \cdots + n(\text{원소의 개수 9개})$

$= {}_{10}C_1 + {}_{10}C_3 + \cdots + {}_{10}C_9 = 2^9$

정답은 2^9

코칭 공식이 헷갈리면 책에서 결과만 다시 찾아보는 것이 아니라, 과정을 다시 스스로 유도해 보아야 한다.
공식이 나오는 과정을 이해하는 것이 수학 실력 향상의 지름길이다. (이항계수의 성질을 다시 한 번 살펴보길 바란다.)

116 이해를 위한 예제

2005. 9. 가형(63%), 나형(43%). 25번. 4점

자연수 n에 대하여 $f(n)=\sum_{k=1}^{n}\left({}_{2k}C_1+{}_{2k}C_3+{}_{2k}C_5+\ \cdots\ +{}_{2k}C_{2k-1}\right)$일 때, $f(5)$의 값을 구하시오.

식의 모양을 암기하라! <홀수 합>의 모양이다.

준 식 $f(n)=\sum_{k=1}^{n}\left({}_{2k}C_1+{}_{2k}C_3+{}_{2k}C_5+\ \cdots\ +{}_{2k}C_{2k-1}\right)$에서 일반항을 관찰하면

${}_{2k}C_1+{}_{2k}C_3+{}_{2k}C_5+\ \cdots\ +{}_{2k}C_{2k-1}$은 $(1+x)^{2k}$의 전개식에 $x=1,\ x=-1$을 대입한
두 식을 더함으로써 얻을 수 있다. (물론 이것은 과정일 뿐 사실 <홀수 합>의 모양이므로 암기를 통해서 푸는 것이다.)

${}_{2k}C_1+{}_{2k}C_3+{}_{2k}C_5+\ \cdots\ +{}_{2k}C_{2k-1} = 2^{2k-1}$이므로 ⇨ $f(n) = \sum_{k=1}^{n}2^{2k-1}$

$f(5) = \sum_{k=1}^{5}2^{2k-1} = \dfrac{2(4^5-1)}{4-1} = 682$ (등비수열의 합 공식)

117 이해를 위한 예제

${}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+{}_{11}C_3+{}_{11}C_4+{}_{11}C_5$의 값은?

□ 2^5 □ 2^6 □ $2^{10}-1$ □ 2^{10} □ $2^{11}-1$

식의 모양을 암기하라! <절반 합>의 모양이다.

${}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+{}_{11}C_3+{}_{11}C_4+{}_{11}C_5+{}_{11}C_6+{}_{11}C_7+{}_{11}C_8+{}_{11}C_9+{}_{11}C_{10}+{}_{11}C_{11} = 2^{11}$

그런데 조합의 성질에 의하여 🟩 = 🟥

${}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+{}_{11}C_3+{}_{11}C_4+{}_{11}C_5 = {}_{11}C_6+{}_{11}C_7+{}_{11}C_8+{}_{11}C_9+{}_{11}C_{10}+{}_{11}C_{11}$이므로

$2\left({}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+{}_{11}C_3+{}_{11}C_4+{}_{11}C_5\right) = 2^{11}$ ⇨ ${}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+{}_{11}C_3+{}_{11}C_4+{}_{11}C_5 = 2^{10}$

정답은 ④

#2 조합의 식 변형과 이항계수의 성질

당장은 이항정리의 활용정도로 기억하면 되겠다. 후에 통계에서 이 식의 정리 기술을 통해서 중요한 공식들이 증명된다.

1. 조합의 식 변형 연습 1 : 〈일차식 × 조합〉이 규칙적으로 더해진 모양

$$\sum_{r=0}^{n} r \cdot {}_nC_r = n \cdot 2^{n-1}$$

1 단계 : $\sum_{r=0}^{n} r \cdot {}_nC_r = \sum_{r=1}^{n} r \cdot {}_nC_r$으로 고친다. <어차피 r=0이면 어차피 0 / 즉, 1부터 시작해도 상관없다.>

2 단계 : 조합의 변형과 이항계수의 성질

$$\sum_{r=1}^{n} r \cdot {}_nC_r = \sum_{r=1}^{n} r \cdot \frac{n!}{r!(n-r)!}$$ <조합의 정의식> $$= \sum_{r=1}^{n} r \cdot \frac{n!}{r(r-1)!(n-r)!} = \sum_{r=1}^{n} \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$$ <r!에서 r을 약분>

$$= \sum_{r=1}^{n} \frac{n \times (n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$$ <n!을 n×(n−1)!으로 조작 − 분모의 합의 분자에 있어야 조합으로 바꿀 수 있다.>

$$= n\sum_{r=1}^{n} {}_{n-1}C_{r-1}$$ <조합으로 표현> $$= n \times \left({}_{\boxed{n-1}}C_0 + {}_{\boxed{n-1}}C_1 + \cdots + {}_{\boxed{n-1}}C_{n-1}\right)$$ <나열된 식의 구조 관찰 : 연속 합>

$$= n \times 2^{\boxed{n-1}}$$

코칭 $\sum_{r=0}^{n} r \cdot {}_nC_r = n \cdot 2^{n-1}$: 결과는 외우지 않아도 좋다. 외우는 게 목적이었다면 항등식과 미분을 이용해서 설명했을 것이다. (나중에 통계에서 이항분포 평균공식 증명용이다.)

티칭 왜 $\sum_{r=0}^{n} r \cdot {}_nC_r = \sum_{r=1}^{n} r \cdot {}_nC_r$으로 고칠까? (Part2의 개념의 외연 #1의 준범체 식변자를 확인한다.)

$r=0$인 경우 $r!$은 $0!$이므로 오류가 없다. 하지만 $r! = r(r-1)!$으로 변형할 경우 $r=0$은 더 이상 대입할 수 없다.
$r=0$을 대입하는 순간 $0! = 0 \times (-1)!$이라는 정의되지 않는 식이 나오기 때문이다.

같은 식이지만 $\sum_{r=0}^{n} r \cdot {}_nC_r$을 $\sum_{r=1}^{n} r \cdot {}_nC_r$으로 변형하지 않으면 $\sum_{r=0}^{n} r \cdot \frac{n!}{r!(n-r)!}$에서 r을 약분할 수 없다.
(약분하는 순간, 문제는 미궁으로 빠진다.)

코칭 수학에는 항상 〈준 식〉과 〈변형 식〉이 있다. (Part2의 개념의 외연 #1의 준범체 식변자를 확인한다.)
식 변형 논리에서 〈준 식〉과 〈변형 식〉이 〈같은 식〉인지 〈다른 식〉인 판단하는 것은 굉장히 중요하다.
이것은 현재 고1과정의 수2-명제와도 깊은 관련이 있다.
올바른 식 변형이라는 것이 사실 내용은 별 것 없지만 익숙하게 다루는 데에는 상당히 시간과 노력이 필요하다.
문제를 풀 때마다 본인의 식 변형이 바른지 확인하는 습관이 필요하다.
올바른 식 변형 논리 ⇨ 준범체 식변자
(물론 쉽지 않다는 걸 안다. 주변의 선생님과 잘하는 친구들은 최대한 활용해야 한다.)

2. 조합의 식 변형 연습 2 : <$\frac{1}{\text{일차식}}$ × 조합>이 규칙적으로 더해진 모양

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{{}_{n}C_{r}}{r+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

- $\sum_{r=0}^{n}\frac{{}_{n}C_{r}}{r+1}=\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r+1}\times\frac{n!}{r!(n-r)!}$ <조합의 정의식> $=\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{(r+1)!(n-r)!}$ <(r+1)r! = (r+1)!>

$$=\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)\times n!}{(r+1)!(n-r)!}=\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)!}{(r+1)!(n-r)!}=\frac{1}{n+1}\sum_{r=0}^{n}{}_{n+1}C_{r+1}$$ <조합으로 표현>

$$=\frac{1}{n+1}\left({}_{\boxed{n+1}}C_0+{}_{\boxed{n+1}}C_1+{}_{\boxed{n+1}}C_2+\cdots+{}_{\boxed{n+1}}C_{n+1}-{}_{\boxed{n+1}}C_0\right)$$ <나열된 식의 구조 관찰 : 연속 합>

$$=\frac{1}{n+1}(2^{\boxed{n+1}}-1)=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

코칭 $\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_{n}C_{r}}{r+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$: 식 변형 연습을 할 뿐, 결과를 외울 필요는 없다. (아니 외우지 마라.)

3. 조합의 식 변형 연습 3 : <이차식 × 조합>이 규칙적으로 더해진 모양

$$\sum_{r=0}^{n} r^2 \times {}_nC_r = n(n-1)\times 2^{n-2} + n\times 2^{n-1}$$

1 단계 : $\sum_{r=0}^{n} r^2\times {}_nC_r = \sum_{r=1}^{n} r^2\times {}_nC_r$으로 고친다. <어차피 r=0이면 어차피 0 / 즉, 1부터 시작해도 상관없다.>

2 단계 : 조합의 변형과 이항계수의 성질

$\sum_{r=1}^{n} r^2\times {}_nC_r = \sum_{r=1}^{n} r^2\times \frac{n!}{r!(n-r)!}$ <조합의 정의식> $= \sum_{r=1}^{n} r\times \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$ <r 약분>

$= \sum_{r=1}^{n} \{(r-1)+1\}\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$ <식 변형>

$= \sum_{r=1}^{n} \left\{(r-1)\cdot\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\right\}$ <분배>

$= \sum_{r=1}^{n} (r-1)\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} + \sum_{r=1}^{n}\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$ <시그마의 분배 : 시그마의 성질>

$= \sum_{r=2}^{n} (r-1)\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} + \sum_{r=1}^{n}\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$ <어차피 r=1이면 어차피 0 / 즉, 2부터 시작해도 상관없다.>

$= \sum_{r=2}^{n} \frac{n!}{(r-2)!(n-r)!} + \sum_{r=1}^{n}\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$ <(r−1)약분>

$= n(n-1)\sum_{r=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(r-2)!(n-r)!} + n\sum_{r=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$ <조합으로 표현을 위한 분자 조작 : 분모 합 = 분자>

$= n(n-1)\sum_{r=2}^{n} {}_{n-2}C_{r-2} + n\sum_{r=1}^{n} {}_{n-1}C_{r-1}$ <조합으로 표현>

$= n(n-1)\left({}_{\boxed{n-2}}C_0 + {}_{\boxed{n-2}}C_1 + \cdots + {}_{\boxed{n-2}}C_{n-2}\right) + n\cdot\left({}_{\boxed{n-1}}C_0 + {}_{\boxed{n-1}}C_1 + \cdots + {}_{\boxed{n-1}}C_{n-1}\right)$

<나열된 식의 구조 관찰>

$= n(n-1)\,2^{\boxed{n-2}} + n\cdot 2^{\boxed{n-1}}$ <이항계수의 성질 : 연속 합>

코칭 $\sum_{r=0}^{n} r^2\times {}_nC_r = n(n-1)\times 2^{n-2} + n\times 2^{n-1}$: 절대 외우지 마라. 이 식 역시 외우는 것이 목적이 아니다.

(나중에 통계에서 나오는 이항분포 분산 공식 증명용이다.)

#3 파스칼 삼각형

이항정리의 전개식에서 계수를 삼각형 모양으로 나열하면 발견된 조합의 성질이다.
사실 이것은 파스칼이 최초로 했던 것은 아니다. 훨씬 이전에 이미 이항계수들을 삼각형의 모양으로 나열한 기록들이 있다.
말 그대로 발견된 성질이다. 외우고 익히고 활용할 줄 알면 된다.

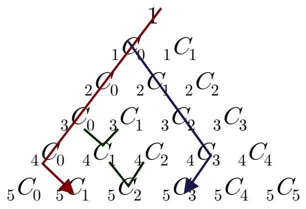
1. 이항계수의 또 다른 성질

- 이항계수를 삼각형의 모양으로 나열하면 다음의 성질을 발견할 수 있다.

⇨ 갈매기 : ∨ 하키스틱 : ↙ , ↘

사실, 갈매기를 발견한 것이고 하키스틱은
갈매기를 통해서 자연스럽게 발견할 수 있다.

$(1+x)^0$
$(1+x)^1$
$(1+x)^2$
$(1+x)^3$
$(1+x)^4$
$(1+x)^5$



- 실제로 몇 가지 예를 계산해보면

① 갈매기 : $_3C_0+{}_3C_1 = {}_4C_1$과 $_4C_1+{}_4C_2 = {}_5C_2$이 성립함을 알 수 있다.

② 하키스틱 : $1+{}_1C_0+{}_2C_0+{}_3C_0+{}_4C_0 = {}_5C_1$과

$_1C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3 = {}_5C_3$이 성립함을 알 수 있다.

2. 파스칼 삼각형 공식

$_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$ ⇨ $_nC_r$ 🟥

🟩 은 같고 🟥은 1만큼 차이난다. ⇨ 🟩은 1 커지고 🟥은 큰 걸 쓴다.

- 이제, 위에 나와 있는 단 하나의 식을 사용해서 ⟨갈매기⟩부터 ⟨하키스틱⟩까지 모든 ⟨파스칼 삼각형⟩의 문제를 풀어간다.

3. 이항계수의 성질과 파스칼 삼각형 공식의 구분법

- ⟨하키스틱⟩도 ⟨이항계수의 성질⟩과 마찬가지로 조합의 연속 합의 구조를 가지고 있다.
이 둘을 구분하는 것은 매우 간단하다.

⇨ ⟨이항계수의 성질⟩은 $_{\boxed{n}}C_0+{}_{\boxed{n}}C_1+\cdots+{}_{\boxed{n}}C_n$과 같이 C의 왼쪽 아래문자가 변하지 않는다. (그래서 고정수라고 했다.)

⇨ ⟨파스칼 삼각형⟩은 $_{\boxed{1}}C_0+{}_{\boxed{2}}C_1+\cdots+{}_{\boxed{n+1}}C_n$ 또는 $_{\boxed{1}}C_0+{}_{\boxed{2}}C_0+\cdots+{}_{\boxed{n+1}}C_0$과 같이
C의 왼쪽 아래문자가 변한다.

티칭 ⟨하키스틱⟩ 중 $_{\boxed{1}}C_0+{}_{\boxed{2}}C_1+\cdots+{}_{\boxed{n+1}}C_n$처럼 C의 앞뒤가 모두 바뀌는 모양은 ⟨조합의 성질⟩에 의하여
$_{\boxed{1}}C_1+{}_{\boxed{2}}C_1+\cdots+{}_{\boxed{n+1}}C_1$으로 바꿀 수도 있다. (물론, 바꾸지 않고 풀어도 된다.)

118 이해를 위한 예제

${}_{1}C_{1} + {}_{2}C_{1} + {}_{3}C_{1} + {}_{4}C_{1} + \cdots + {}_{n}C_{1} + {}_{n+1}C_{1}$을 간단히 하여라.

${}_{1}C_{1} + {}_{2}C_{1} + {}_{3}C_{1} + {}_{4}C_{1} + \cdots + {}_{n}C_{1} + {}_{n+1}C_{1} = {}_{2}C_{2} + {}_{2}C_{1} + {}_{3}C_{1} + {}_{4}C_{1} + \cdots + {}_{n}C_{1} + {}_{n+1}C_{1}$

🟩 : C의 왼쪽은 같고 오른쪽은 1차이 나도록 변형하였다.

정답은 ${}_{n+2}C_{2}$

119 이해를 위한 예제

다음 물음에 답하여라.

(1) 다음 등식 ${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$이 성립함을 증명하여라. (단, $1\leqq r\leqq n-1$)

(2) 두 식이 같을 수밖에 없음을 상황적으로 설명하여라.

증명은 조합의 정의식으로 한다.

(1) 다음 등식 ${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$이 성립함을 증명하여라. (단, $1\leqq r\leqq n-1$)

좌변과 우변을 각각 <조합의 정의식>을 이용하여 표현하여 같음을 확인한다.

좌변 $= {}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r = \dfrac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}+\dfrac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}$

$= \dfrac{r}{r}\times\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}+\dfrac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}\times\dfrac{(n-r)}{(n-r)}$ <계승이라 복잡해 보일 뿐 통분을 위한 식 변형>

$= \dfrac{r(n-1)!}{r!(n-r)!}+\dfrac{(n-r)(n-1)!}{r!(n-r)!}$

$= \dfrac{r(n-1)!+(n-r)(n-1)!}{r!(n-r)!} = \dfrac{\{r+(n-r)\}(n-1)!}{r!(n-r)!}$

$= \dfrac{n(n-1)!}{r!(n-r)!} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ <계승이라 복잡해 보일 뿐 공통인수로 묶었을 뿐이다.>

우변 $= {}_nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ <조합의 정의> 즉, 좌변과 우변은 같다.

(2) 두 식이 같을 수밖에 없음을 상황적으로 설명하여라.

${}_nC_r$은 서로 다른 n명 중 r명을 뽑은 경우의 수이다. n명의 사람은 편의상 번호 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$에 일대일 대응한다.

${}_nC_r$의 전체상황 (대상을 기준) 1은 뽑히거나 뽑히지 않았다.

상황 1 : 1

상황 2 : $\cancel{1}$

: $n(\text{상황}1)$ = $n(\text{상황}1)$ + $n(\text{상황}2)$

그런데 여기에서 $n(\text{상황}1)$은 이미 1 은 뽑힌 상황에서 남은 $n-1$명의 대상 중 $r-1$명을 뽑는 경우의 수와 같다.

$n(\text{상황}1) = {}_{n-1}C_{r-1}$

또한, $n(\text{상황}2)$는 이미 $\cancel{1}$이 배제된 상황에서 남은 $n-1$명의 대상 중 r명을 뽑는 경우의 수와 같다.

$n(\text{상황}2) = {}_{n-1}C_r$이므로 ⇨ ${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$

계산하지 않고 같다는 사실을 안다. : 경우의 수를 이미 논리적으로 접근하고 있다는 뜻이다.

#4 분할적 사고와 관점 합

계산하지 않고 같다는 사실을 안다.

<조합 × 조합>이 규칙적으로 더해진 모양을 우리는 <관점 합>이라고 한다. 이런 모양은 앞에서 공부한 <이항전개식의 변형>, <이항계수의 성질>, <조합의 식 변형>, <파스칼 삼각형>등으로 해결할 수 없다. 그래서 <관점 합>이다. <'계산하지 않고 같다'라는 확신>을 물어보는 경우의 수의 대표적인 문제이다. 이것은 사실 새로운 생각이 아니다. 가장 근본적인 경우의 수의 사고방식을 물어보는 것이다.

1. 이항 전개식을 이용한 설명

1) ${}_{20}C_{10} = \sum_{r=0}^{10} ({}_{10}C_r)^2$을 이항 전개식을 이용하여 설명한다.

- $(1+x)^{20} = (1+x)^{10}(1+x)^{10}$에서 x^{10}의 계수를 생각해본다.

1단계 : $(1+x)^{20}$의 전개식에 x^{10}의 계수의 표현 ⇨ ${}_{20}C_{10}$

2단계 : $(1+x)^{10}(1+x)^{10}$에서 x^{10}의 계수의 표현

나열된 식의 구조를 관찰한다.

$$(1+x)^{10}(1+x)^{10} = (\cdots + {}_{10}C_p x^p + \cdots)(\cdots + {}_{10}C_q x^q + \cdots) = \cdots + {}_{10}C_p x^p\, {}_{10}C_q x^q + \cdots$$

$(0 \le p, q \le 10$인 정수$)$

${}_{10}C_p x^p\, {}_{10}C_q x^q = {}_{10}C_p \times {}_{10}C_q\, x^{p+q}$에서 $p+q=10$인 순서쌍(p,q)로 나타내면 $(0,10), (1,9), (2,8), \cdots, (10,0)$이다.

즉, x^{10}의 계수는 ${}_{10}C_0 \times {}_{10}C_{10} + {}_{10}C_1 \times {}_{10}C_9 + \cdots + {}_{10}C_{10} \times {}_{10}C_0$이다.

$${}_{10}C_0 \times {}_{10}C_{10} + {}_{10}C_1 \times {}_{10}C_9 + \cdots + {}_{10}C_{10} \times {}_{10}C_0 = ({}_{10}C_0)^2 + ({}_{10}C_1)^2 + \cdots + ({}_{10}C_{10})^2$$ <조합의 성질>

$$= \sum_{r=0}^{10} ({}_{10}C_r)^2$$ <시그마로의 표현> ⇨ ${}_{20}C_{10} = \sum_{r=0}^{10} ({}_{10}C_r)^2$

2) ${}_{20}C_{10} = \sum_{r=0}^{7} {}_7C_r \times {}_{13}C_{10-r}$을 이항 전개식을 이용하여 설명한다.

- $(1+x)^{20} = (1+x)^{7}(1+x)^{13}$에서 x^{10}의 계수를 생각해본다.

1단계 : $(1+x)^{20}$의 전개식에 x^{10}의 계수의 표현 ⇨ ${}_{20}C_{10}$

2단계 : $(1+x)^{7}(1+x)^{13}$에서 x^{10}의 계수의 표현

나열된 식의 구조를 관찰한다.

$$(1+x)^{7}(1+x)^{13} = (\cdots + {}_7C_p x^p + \cdots)(\cdots + {}_{13}C_q x^q + \cdots) = \cdots + {}_7C_p x^p\, {}_{13}C_q x^q + \cdots$$

$(0 \le p \le 7,\ 0 \le q \le 13$인 정수$)$

${}_7C_p x^p\, {}_{13}C_q x^q = {}_7C_p \times {}_{13}C_q\, x^{p+q}$에서 $p+q=10$인 순서쌍 (p,q) 로 나타내면 $(0,10), (1,9), \cdots, (7,3)$이다.

즉, x^{10}의 계수는 ${}_7C_0 \times {}_{13}C_{10} + {}_7C_1 \times {}_{13}C_9 + \cdots + {}_7C_7 \times {}_{13}C_3$

$${}_7C_0 \times {}_{13}C_{10} + {}_7C_1 \times {}_{13}C_9 + \cdots + {}_7C_7 \times {}_{13}C_3 = \sum_{r=0}^{7} {}_7C_r \times {}_{13}C_{10-r}$$ ⇨ ${}_{20}C_{10} = \sum_{r=0}^{7} {}_7C_r \times {}_{13}C_{10-r}$

2. 다른 방식의 설명 : 식이 나타내는 본질적인 의미를 이해

- 아래 예제를 통해서 이해한다. 이 방식이 계산은 훨씬 쉬울 수 있으나 <이항정리>를 활용한 설명도 반드시 이해해야 한다. 계산할 수 있는지는 다음 문제의 핵심이 아니다. 계산하지 않고 같다는 사실을 안다. 라는 말을 이해하는 것이 핵심이다.

120 이해를 위한 예제

다음 물음에 답하여라.

(1) ${}_{20}C_{10} = \sum_{r=0}^{10} \left({}_{10}C_r\right)^2$을 이항정리가 아닌 다른 방식으로 설명해 보아라.

(2) ${}_{20}C_{10} = \sum_{r=0}^{7} {}_7C_r \times {}_{13}C_{7-r}$을 이항정리가 아닌 다른 방식으로 설명해 보아라.

(1) 남자 10명과 여자 10명이 있다고 가정한다. 총 20명 중 10명을 뽑는 경우의 수를 <개수로 분류>하여 다시 센다.

전체상황 ${}_{20}C_{10}$: (개수로 분류) 뽑히는 남자의 사람 수를 기준으로 분류

상황 1	남	남	남	남	남	남	남	남	남	남
상황 2	남	남	남	남	남	남	남	남	남	여
상황 3	남	남	남	남	남	남	남	남	여	여
⋮	⋮									
상황 11	여	여	여	여	여	여	여	여	여	여

분할된 11가지 상황의 경우의 수가 다르다고 판단 ⇨ 각각 세서 더한다.

$n(\text{전체}) = n(\text{상황}\,1) + n(\text{상황}\,2) + \cdots + n(\text{상황}\,11)$

$${}_{20}C_{10} = {}_{10}C_0 \times {}_{10}C_{10} + {}_{10}C_1 \times {}_{10}C_9 + \cdots + {}_{10}C_{10} \times {}_{10}C_0 = \left({}_{10}C_0\right)^2 + \left({}_{10}C_1\right)^2 + \cdots + \left({}_{10}C_{10}\right)^2$$ 〈조합의 성질〉

$$= \sum_{r=0}^{10} \left({}_{10}C_r\right)^2$$ 〈시그마로의 표현〉

(2) 남자 7명과 여자 13명이 있다고 가정한다. 총 20명 중 10명을 뽑는 경우의 수를 <개수로 분류>하여 다시 센다.

전체상황 ${}_{20}C_{10}$: (개수로 분류) 뽑히는 남자의 사람 수를 기준으로 분류

상황 1	남	남	남	남	남	남	남	여	여	여
상황 2	남	남	남	남	남	남	여	여	여	여
상황 3	남	남	남	남	남	여	여	여	여	여
⋮										
상황 8	여	여	여	여	여	여	여	여	여	여

분할된 8가지 상황의 경우의 수가 다르다고 판단 ⇨ 각각 세서 더한다.

즉, $n(\text{전체}) = n(\text{상황}\,1) + n(\text{상황}\,2) + \cdots + n(\text{상황}\,8)$

$${}_{20}C_{10} = {}_7C_0 \times {}_{13}C_{10} + {}_7C_1 \times {}_{13}C_9 + \cdots + {}_7C_7 \times {}_{13}C_3 = \sum_{r=0}^{7} {}_7C_r \times {}_{13}C_{7-r}$$

티칭 <관점 합>문제가 공식처럼 나온다면 상황을 남자와 여자로 설정해서 계산하는 것이 가장 간단하지만, 출제자는 이 부분을 공식처럼 외우고 있는 지를 물어보고 싶은 것이 아니다. <이항정리>를 통해서 확인할 수 있는지를 가장 많이 물어본다. (일석이조다. 이항정리 자체가 대학가서도 중요한 개념인데다가 경우의 수의 논리까지 물어볼 수 있으니)

예제를 통해 개념의 외연을 넓혀라

개념의 외연	#1. 삼항정리
	#2. 정수론 3탄 : 나머지와 주기성

<개념의 외연>이라는 부분은 현재 배우고 있는 경우의 수의 국한된 내용만 다루는 것이 아니다.
현재 단원에 해당하는 문제를 풀기 위해서 필요한 수학적 개념이나 유형에 필요한 사고방식을 두루 다룬다.
수학에는 순서가 없다. 하지만 배움에는 순서가 있다.
그래서 순서가 없는 수학에 순서를 정한 것이 교육과정이다.
어떤 내용은 너무 어렵거나 복합적인 생각들을 담고 있어서 여러 학년에 걸쳐 배운다.
이런 경우 보통은 문제를 통해서 익힌다는 느낌이 강한데, 이런 개념들을 집약적으로 정리해주는 부분이 될 것이다.

#1 삼항정리

이항정리를 두 번 적용하는 것과 같은 것을 포함한 순열의 관점

1. 이항정리 두 번 적용

- $(a+b+c)^5$에서 abc^3의 계수를 찾는다면

1 단계 : 먼저 a의 지수를 맞춘다. $(a+(b+c))^5$의 전개식 $(a+(b+c))^5 = \cdots + {}_5C_1a(b+c)^4 + \cdots$ 에서

a의 지수가 1인 항은 위의 식과 같이 ${}_5C_1a(b+c)^4$ 뿐이다.

2 단계 : 위에서 ${}_5C_1\cdot a$는 $(b+c)^4$의 전개식의 모든 항과 곱해진다.

$({}_5C_1\,a)(b+c)^4 = ({}_5C_1\times a)\{\ \cdots + {}_4C_1bc^3 + \cdots\ \}$을 관찰하면 $(b+c)^4$의 전개식 중에서

${}_4C_1bc^3$과 곱해졌을 때, 비로소 abc^3이 나온다.

$$(a+(b+c))^5 = \cdots + {}_5C_1a(b+c)^4 + \cdots$$
$$= \cdots + ({}_5C_1\times a)\{\ \cdots + {}_4C_1bc^3 + \cdots\ \} + \cdots$$
$$= \cdots + ({}_5C_1\times a)\,{}_4C_1bc^3 + \cdots \quad = \cdots + {}_5C_1\cdot{}_4C_1\cdot abc^3 + \cdots$$

abc^3의 계수는 ${}_5C_1\times{}_4C_1$이다.

2. 같은 것을 포함한 순열의 상황

- $(a+b+c)^5$에서 abc^3의 계수는 5개의 집단에서 a, b, c, c, c를 뽑는 경우의 수와 같다.

	집단 1	집단 2	집단 3	집단 4	집단 5
세 개의 집단	$(a+b+c)$	$(a+b+c)$	$(a+b+c)$	$(a+b+c)$	$(a+b+c)$
abc^3가 나오는 상황 1	a	b	c	c	c
⋮	⋮				
abc^3가 나오는 상황 1	c	c	c	b	a

- 각 집단에서 a, b, c, c, c를 뽑는 경우의 수는 마치 위의 표에서 $abccc$를 배열하는 경우의 수와 같다.

즉, 같은 것을 포함한 순열의 공식에 의하여 $\frac{5!}{1!1!3!}$

위에서 ${}_5C_1\times{}_4C_1 = \frac{5!}{1!4!}\times\frac{4!}{1!3!} = \frac{5!}{1!1!3!}$이므로 같음을 확인할 수 있다.

티칭 $(a+b+c)^n$의 전개식에서 $a^p b^q c^r$의 계수는 $\frac{n!}{p!q!r!}$이다. (단, $p+q+r=n$)

121 이해를 위한 예제 2007. 4. 가형(40%). 22번. 3점

x, y에 대한 식 $\left(x^2-\frac{3}{x}+2y\right)^6$을 전개할 때, x^6의 계수를 구하시오.

풀이 1) 이항정리 두 번 이용

$\left(x^2-\frac{3}{x}+2y\right)^6$을 $\left(\left(x^2-\frac{3}{x}\right)+2y\right)^6$라고 할 때, x^6이 나오려면 일단 y는 한 번도 선택 받아서는 안 된다.

$\left(\left(x^2-\frac{3}{x}\right)+2y\right)^6 = \cdots + {}_6C_0\left(x^2-\frac{3}{x}\right)^6(2y)^0 + \cdots = \cdots + \left(x^2-\frac{3}{x}\right)^6 + \cdots$ 과 같이

전개식 중 오직 특정 항 $\left(x^2-\frac{3}{x}\right)^6$에서만 x^6이 나올 수 있다.

그러므로 $\left(x^2-\frac{3}{x}\right)^6 = \cdots + {}_6C_r(x^2)^r\left(-\frac{3}{x}\right)^{6-r} + \cdots = \cdots + {}_6C_r(-3)^{6-r}\times x^{3r-6} + \cdots$

결국, $r=4$인 경우에만 x^6의 계수가 발생한다. ${}_6C_4\times 9\times x^6$이므로 x^6의 계수는

$$ {}_6C_4\times 9 = 135 $$

풀이 2) $(a+b+c)^n$의 전개식에서 $a^pb^qc^r$ (단, $p+q+r=n$)의 계수가 $\frac{n!}{p!q!r!}$라는 사실 이용

$$\left(x^2-\frac{3}{x}+2y\right)^6 = \cdots + \frac{n!}{p!q!r!}(x^2)^p\left(-\frac{3}{x}\right)^q(2y)^r + \cdots = \cdots + \frac{n!}{p!q!r!}(-3)^q\times x^{2p-q}\times(2y)^r + \cdots$$

(단, $p+q+r=6$)

우리가 찾는 x^6이 들어있는 항은 $r=0$, $2p-q=6$, $p+q+r=6$을 모두 만족하는 항이다.
이 식을 만족하는 순서쌍을 (p,q,r)라고 할 때, 결국 $2p-q=6$과 $p+q=6$을 동시에 만족하는
순서쌍 $(p,q,0)$을 찾으면 되고, $(4,2,0)$밖에 없다.

$$\frac{6!}{4!2!0!}(-3)^2\times x^{8-2}\times(2y)^0 = \frac{6!}{4!2!}\times 9x^6 = 135x^6$$

코칭 이 풀이 과정을 굳이 소개한 것은 공식이라는 것이 효율적이지 않은 경우도 많다는 것을 말하기 위함이다.
모든 문제를 푸는데 있어서, 공식이 항상 핵심이 되는 것은 아니다.
문제를 읽고, 판단하고, 이해하여 어떻게 풀지 직관적으로 선택하는 과정이 필요하다.

1. 몫과 나머지 : 수에서는 정수에서만, 식에서는 다항식에서만 나머지의 논리를 말한다.

1) 정수의 몫과 나머지

- 나머지를 배우는 이유 : 정수를 분류하기 위해서
- 몫을 배우는 이유 : 분류된 정수의 개수를 세기 위해서

2) 다항식의 몫과 나머지

- 다항식에서 몫과 나머지의 논리는 식 표현의 논리이다. 즉, 항등식 논리의 일환으로 배우는 것이다.

  이때 사용되는 논리는 ① 나머지는 유일하다.
  ② 나머지는 묶이고 남는 것들
- 위의 논리들은 다항함수를 활용한 부분(예를 들면 미적분)에서 어려운 문제를 풀 때 사용되는 핵심논리이다.

  수1의 다항식, 방 · 부등식의 함수적 해석, 미적분 내용에서 자세히 다루기로 한다.

2. 나머지와 주기성

- 앞서 나머지를 이용하여 정수를 분류한다고 했는데, 이렇게 분류된 정수들은 주기성을 가지고 있다.

  예를 들어 3으로 나눈 나머지가 1인 자연수들은 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ⋯ 와 같이 3칸 지날 때 마다 반복되므로 주기가 3이라고 할 수 있다.

  (사실, 홀수와 짝수도 2로 나눈 나머지를 기준으로 정수를 분류한 것이므로 주기가 2이다.)

- 3으로 나눈 나머지를 기준으로 정수를 분류하면 $3n$, $3n+1$, $3n+2$ (n은 정수)라고 할 수 있는데, n앞의 3은 주기를 나타낸다. 수직선에 $3n+2$에 해당하는 자연수를 아무거나 하나 표시하면 좌 · 우로 3칸을 이동할 때마다 동일한 분류의 자연수가 등장하게 된다는 사실을 알 수 있다.

티칭 음수에 대한 나머지 개념은 고등 과정이 아니어서 직접적으로 사용하지는 않지만

용어만 사용하지 않을 뿐, 개념 자체는 사용된다. (물론 동일한 성질이 있는 정수끼리 분류하는 개념으로 사용된다.)

예를 들어 3으로 나눈 나머지가 1인 수들은 $3n-2$ 또는 $3n+1$이라고 표현되는데

이 때, n은 정수라고 한다면 -2, -5, -8과 같은 수들도 이 분류에 포함된다. (거의 자연수에서 다루기는 한다.)

티칭 표현의 문제

예를 들어 3으로 나눈 나머지가 1인 자연수들을 $3n-2$라고 표현하는 것과
$3n+1$라고 표현하는 것은 별반 차이가 없다.

단지, $3n-2$라고 표현할 경우 n의 범위는 $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$가 되고
$3n+1$라고 표현할 경우 n의 범위는 $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$가 될 뿐이다.

나머지는 항상 양수이므로 필자는 나머지를 확인할 때, 더 직관적인 $3n+1(n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$의 표현을 선호한다.

3. 주기에 대한 논리 : 공통 주기 찾기

예를 들어 $3n+1$에 해당하는 자연수와 (주기가 3이라는 뜻이다.)
$2n+1$에 해당하는 자연수 (주기가 2이라는 뜻이다.)에 대하여
두 자연수 분류를 동시에 만족하는 자연수들은 <주기가 2이면서 동시에 3>이 되어야 한다.
이런 경우, 두 주기의 최소공배수를 통해서 우리는 주기를 찾을 수 있다.
(2를 기준으로 같은 성질이 반복된다는 것은 4를 기준으로도, 6을 기준으로도 같은 성질이 반복되는 것이다.)

- 즉, 3으로 나눈 나머지가 1이면서 동시에 2로 나눈 나머지가 1인 수들은 <6을 기준>으로 반복되므로 주기가 6이고, 조건을 만족하는 최초의 자연수인 1을 기준으로 오른쪽으로 6칸 지날 때마다 조건을 만족하는 자연수가 등장하게 된다.

1, 7, 13, 19, ⋯

- 위의 숫자들을 관찰해 보면 2로 나눈 나머지가 1 (즉, 홀수)임과 동시에 3으로 나눈 나머지도 1임을 알 수 있다.

4. 복소수를 활용한 이항계수의 성질

- 우리는 이미 허수단위 i의 성질에 대해서 알고 있다.

$$i^1 = i,\quad i^2 = -1,\quad i^3 = -i,\quad i^4 = 1,\quad i^5 = i,\ \cdots$$

- $i^5 = i$에서 지수가 1인 순간과 지수가 5인 순간에 결과가 같아짐을 알 수 있다. 1에서 4칸을 이동했을 때 같은 성질을 만족하는 자연수가 나오므로 우리는 주기가 4라고 느껴야 하고 i에 대한 성질을 분석할 때는 항상 지수가 $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$인 순간으로 나누어 생각하는 사고가 필요하다.

 예를 들어 i^{2016}은 2016이 4의 배수이므로 i^4과 동일한 결과인 1이 나옴을 예측할 수 있다.

- 허수단위 i의 성질에 의하여 지수가 $4n$과 $4n+2$의 경우에는 항상 실수가 나오고 $4n+1$, $4n+3$은 항상 허수가 나옴을 알 수 있다.

- $(1+i)^{16}$의 전개식을 통해 이항계수의 마지막 성질을 이해해보자.

① $(1+i)^{16}$을 그냥 계산하면 ⇨ $((1+i)^2)^8 = (2i)^8 = 2^8$

② $(1+i)^{16}$을 그냥 이항정리로 전개하면 ⇨ ${}_{16}C_0 + {}_{16}C_1 i + {}_{16}C_2 i^2 + \cdots + {}_{16}C_{16} i^{16}$

$+\ {}_{16}C_0 i^0$	$+\ {}_{16}C_1 i^1$	$+\ {}_{16}C_2 i^2$	$+\ {}_{16}C_3 i^3$
$+\ {}_{16}C_4 i^4$	$+\ {}_{16}C_5 i^5$	$+\ {}_{16}C_6 i^6$	$+\ {}_{16}C_7 i^7$
$+\ {}_{16}C_8 i^8$	$+\ {}_{16}C_9 i^9$	$+\ {}_{16}C_{10} i^{10}$	$+\ {}_{16}C_{11} i^{11}$
$+\ {}_{16}C_{12} i^{12}$	$+\ {}_{16}C_{13} i^{13}$	$+\ {}_{16}C_{14} i^{14}$	$+\ {}_{16}C_{15} i^{15}$
$+\ {}_{16}C_{16} i^{16}$			

${}_{16}C_0 + {}_{16}C_1 i + {}_{16}C_2 i^2 + \cdots + {}_{16}C_{16} i^{16}$을 정리하여 실수부와 허수부로 나누면

$$\underbrace{({}_{16}C_0 - {}_{16}C_2 + {}_{16}C_4 - {}_{16}C_6 + \cdots + {}_{16}C_{16})}_{\text{실수부}} + \underbrace{({}_{16}C_1 - {}_{16}C_3 + {}_{16}C_5 - {}_{16}C_7 + \cdots - {}_{16}C_{15})\,i}_{\text{허수부}}$$

i의 지수를 4로 나눈 나머지를 기준으로 볼 경우 규칙을 명확하게 확인 할 수 있다.

결국, ①=② 이므로 $2^8 = ({}_{16}C_0 - {}_{16}C_2 + {}_{16}C_4 - {}_{16}C_6 + \cdots + {}_{16}C_{16}) + ({}_{16}C_1 - {}_{16}C_3 + {}_{16}C_5 - {}_{16}C_7 + \cdots - {}_{16}C_{15})i$이다.
실수부는 2^8이고 허수부는 0이다.

$${}_{16}C_0 - {}_{16}C_2 + {}_{16}C_4 - {}_{16}C_6 + \cdots + {}_{16}C_{16} = 2^8$$

$${}_{16}C_1 - {}_{16}C_3 + {}_{16}C_5 - {}_{16}C_7 + \cdots - {}_{16}C_{15} = 0$$

- 짝수 교대 합 : ${}_{n}C_{0}-{}_{n}C_{2}+{}_{n}C_{4}-{}_{n}C_{6}+\cdots\pm{}_{n}C_{\text{마지막짝수}}$ = 정리된 식의 실수부분

  마지막 짝수가 $4n$의 분류에 해당할 경우 마지막 부호는 $+$

  마지막 짝수가 $4n+2$의 분류에 해당할 경우 마지막 부호는 $-$

- 홀수 교대 합 : ${}_{n}C_{1}-{}_{n}C_{3}+{}_{n}C_{5}-{}_{n}C_{7}+\cdots\pm{}_{n}C_{\text{마지막홀수}}$ = 정리된 식의 허수부분

  마지막 홀수가 $4n+1$의 분류에 해당할 경우 마지막 부호는 $+$

  마지막 홀수가 $4n+3$의 분류에 해당할 경우 마지막 부호는 $-$

122 이해를 위한 예제

$(1+i)^{n}$의 전개식을 활용하여 다음을 간단히 하시오.

(1) ${}_{18}C_{1}-{}_{18}C_{3}+{}_{18}C_{5}-{}_{18}C_{7}+\cdots+{}_{18}C_{17}$

(2) ${}_{19}C_{0}-{}_{19}C_{2}+{}_{19}C_{4}-{}_{19}C_{6}+\cdots-{}_{19}C_{18}$

(1) ${}_{18}C_{1}-{}_{18}C_{3}+{}_{18}C_{5}-{}_{18}C_{7}+\cdots+{}_{18}C_{17}$은 $(1+i)^{18}$의 허수부분이다.

$$(1+i)^{18}=\{(1+i)^{2}\}^{9}=(2i)^{9}=2^{9}i^{9}=2^{9}i$$

(2) ${}_{19}C_{0}-{}_{19}C_{2}+{}_{19}C_{4}-{}_{19}C_{6}+\cdots-{}_{19}C_{18}$은 $(1+i)^{19}$의 실수부분이다.

$$(1+i)^{19}=\{(1+i)^{2}\}^{9}(1+i)=(2i)^{9}\times(1+i)=2^{9}i\times(1+i)=2^{9}i-2^{9}$$

(1) 2^{9} , (2) -2^{9}

일단 풀고 맞았다고 하더라도 뒤의 해설을 정독하여 읽는다. 왜냐하면 풀이과정이 암기되어서 문제가 그냥 풀리거나 그냥 직관적으로 판단이 되어서 문제가 풀리는 경우도 많기 때문이다. 우리가 문제를 푸는 이유는 앞에서 배운 개념을 확인하기 위해서다. 이 문제를 푸는 것이 중요한 게 아니라 다른 어려운 문제에 까지 적용할 수 있는 개념을 익히는 게 중요한 것이다.

예제 082

$(1+x)^n$의 전개식에서 x^8, x^9, x^{10}의 계수가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, 나올 수 있는 모든 n의 값의 합을 구하여라.

예제 083

2005. 9. 나형(70%). 6번. 3점

다항식 $(1+2x)^6(1-x)$의 전개식에서 x^4의 계수는?

① 40 ② 50 ③ 60 ④ 70 ⑤ 80

예제 084

2008. 9. 나형(50%). 21번. 3점

다항식 $(1-x)^4(2-x)^3$의 전개식에서 x^2의 계수를 구하시오.

예제 085

$(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^{10}$의 전개식에서 x의 계수를 구하여라.

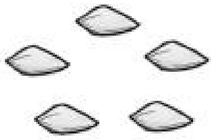
예제 086

원주 위에 $2n$개의 점이 있다. 이들을 전부 또는 몇 개를 선택하여 만들 수 있는 볼록다각형의 개수를 구하여라.

예제 087

2007. 3. 가형(56%). 21번. 4점

동주는 5개의 서로 다른 알사탕과 5개의 똑같은 박하사탕을 가지고 있다. 이 중에서 5개를 택하여 진서에게 주는 방법의 수를 구하시오.



예제 088

${}_{2}C_{2}+{}_{3}C_{2}+{}_{4}C_{2}+{}_{5}C_{2}+\cdots+{}_{10}C_{2}$의 값과 같은 것은?

① ${}_{11}C_{6}$　② ${}_{11}C_{7}$　③ ${}_{11}C_{8}$　④ ${}_{11}C_{9}$　⑤ ${}_{11}C_{10}$

예제 089

2005. 6. 나형(76%). 9번. 3점

A지역에는 세 곳, B지역에는 네 곳, C지역에는 다섯 곳, D지역에는 여섯 곳의 관광지가 있다. 이 중에서 세 곳을 선택하여 관광하려고 할 때, 선택한 세 곳이 모두 같은 지역이 되는 경우의 수는?

① 20　② 25　③ 30　④ 35　⑤ 40

예제 090

$f(k)={}_nC_k3^{k-1}4^k$일 때, $\sum_{k=1}^{n}2^kf(k)$의 값은?

① 7^n　② 11^n　③ 11^n-3^n　④ $\frac{1}{3}\times25^n$　⑤ $\frac{1}{3}(25^n-1)$

예제 091

$(1+x+x^2)^n$의 전개식에서 x^r의 계수를 a_r이라 할 때, $a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{2n}$의 값은?

□ 0　□ 1　□ 2　□ 3　□ 4

예제 092

11^{11}의 일의 자리, 십의 자리, 백의 자리의 숫자를 각각 a,b,c라 할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

예제 093

$(1+i)^{16}$의 전개식을 이용하여 ${}_{16}C_0 - {}_{16}C_2 + {}_{16}C_4 - {}_{16}C_6 + \cdots - {}_{16}C_{14} + {}_{16}C_{16}$의 값을 구하여라.
(단 $i=\sqrt{-1}$)

예제 094

2005. 4. 가형(60%). 25번. 4점

집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$ 에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족시키는 U의 부분집합 A의 개수를 구하시오.

(가) $\{1,\ 2,\ 3\} \cap A = \{1,\ 2\}$
(나) 집합 A의 원소의 개수는 6개 이상이다.

예제 095

2005. 6. 가형(58%), 나형(46%). 16번. 4점

1부터 100까지의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 수를 선택할 때, 4개의 수 중에서 두 번째로 작은 수가 k인 경우의 수를 a_k라 하자. 예를 들어, a_{98}은 선택된 4개의 수 중에서 98보다 작은 수가 한 개이고 98보다 큰 수가 2개인 경우의 수이므로 $a_{98}=97$이다. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $a_3 = {}_2C_1 \times {}_{97}C_2$

ㄴ. $a_{10} = a_{90}$

ㄷ. $\sum_{k=2}^{98} a_k = {}_{100}\mathrm{C}_4$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답과 해설

예제 082

REVIEW 특정항의 계수 + 순열과 조합으로 표현된 방정식

$(1+x)^n$의 전개식에서 x^8, x^9, x^{10}의 계수가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, 나올 수 있는 모든 n의 값의 합을 구하여라.

x^8, x^9, x^{10}의 계수가 각각 ${}_nC_8$, ${}_nC_9$, ${}_nC_{10}$이다. 이들이 각각 등차수열을 이루므로 $2\cdot{}_nC_9 = {}_nC_8+{}_nC_{10}$이다.

즉, $2\cdot{}_nC_9 = {}_nC_8+{}_nC_{10}$

$\Leftrightarrow \quad 20\cdot{}_nP_9 = 90\cdot{}_nP_8 + {}_nP_{10}$ (단, $n\geq 10$)

$\Leftrightarrow \quad 20\cdot n\cdot\ \cdots\ \cdot(n-7)\cdot(n-8) = 90\cdot n\cdot\ \cdots\ \cdot(n-7) + n\cdot\ \cdots\ \cdot(n-7)\cdot(n-8)\cdot(n-9)$

$\Leftrightarrow \quad 20(n-8) = 90 + (n-8)(n-9) \quad \Leftrightarrow \quad n^2-37n+322 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (n-14)(n-23) = 0$

모든 n의 값의 합은 37이다.

예제 083

REVIEW 특정항의 계수 : 나열된 식의 구조 상상

2005. 9. 나형(70%). 6번. 3점

다항식 $(1+2x)^6(1-x)$의 전개식에서 x^4의 계수는?

① 40 ② 50 ③ 60 ④ 70 ⑤ 80

$(1+2x)^6(1-x) = \left(a_0+a_1x+\cdots+a_6x^6\right)(1-x)$와 같이 $(1+2x)^6$만 전개했다고 가정한다.

편의상 각 항의 계수는 계산하지 않고 의미만 표현하였다.

	$\left(a_0+a_1x+\cdots+a_6x^6\right)$	$(1-x)$
x^4이 나오는 상황 1 :	a_3x^3	$-x$
x^4이 나오는 상황 2 :	a_4x^4	1

$$\begin{aligned}(1+2x)^6(1-x) = \left(a_0+a_1x+\cdots+a_6x^6\right)(1-x) &= \cdots + a_3x^3\times(-x) + a_4x^4\times(1) + \cdots \\ &= \cdots + {}_6C_3\,(2x)^3(-x) + {}_6C_4\,(2x)^4\times(1) + \cdots \\ &= \cdots + \left\{-{}_6C_3\times(2)^3 + {}_6C_4\times(2)^4\right\}x^4 + \cdots \\ &= \cdots + (-160 + 240)\,x^4 + \cdots\end{aligned}$$

$-160+240 = 80$, 정답은 ⑤

예제 084

REVIEW 특정항의 계수 : 나열된 식의 구조 상상

2008. 9. 나형(50%). 21번. 3점

다항식 $(1-x)^4(2-x)^3$의 전개식에서 x^2의 계수를 구하시오.

$(1-x)^4(2-x)^3$을 전개했다고 생각하면

$(\cdots\ +\ {}_4C_m(-x)^m\ +\ \cdots)(\cdots\ +\ {}_3C_n2^{3-n}(-x)^n\ +\ \cdots)\ =\ \cdots\ +\ {}_4C_m(-x)^m\times{}_3C_n2^{3-n}(-x)^n\ +\cdots$

(단, $m=0,\ 1,\ \cdots,4,\quad n=0,\ 1,\ \cdots,3$)

전체 전개식의 모든 항은 ${}_4C_m(-x)^m\times{}_3C_n2^{3-n}(-x)^n$에 $m=0,\ 1,\ \cdots,4$와 $n=0,\ 1,\ \cdots,3$을 각각 대입하면 표현된다.

이 식을 정리하면 ${}_4C_m(-x)^m\times{}_3C_n2^{3-n}(-x)^n\ =\ {}_4C_m\times{}_3C_n2^{3-n}\times(-x)^{m+n}$이다.

$(m=2, n=0)$인 경우 ⇨ ${}_4C_2\times{}_3C_02^3\times x^2\ =\ 48x^2$

$(m=1, n=1)$인 경우 ⇨ ${}_4C_1\times{}_3C_12^2\times x^2\ =\ 48x^2$

$(m=0, n=2)$인 경우 ⇨ ${}_4C_0\times{}_3C_22\times x^2\ =\ 6x^2$

결국, $(1-x)^4(2-x)^3\ =\ \cdots\ +\ 48x^2+48x^2+6x^2+\ \cdots\ =\ \cdots\ +\ 102x^2\ +\cdots$ 이다.

정답은 102

예제 085

REVIEW 특정항의 계수 : 나열된 식의 구조 상상

$(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\ \cdots\ +(1+x)^{10}$의 전개식에서 x의 계수를 구하여라.

항등식의 마법 : 등비수열의 합 공식을 이용한 식 변형

$$(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\ \cdots\ +(1+x)^{10}\ =\ \frac{(1+x)\{(1+x)^{10}-1\}}{(1+x)-1}\ =\ \frac{(1+x)^{11}-(1+x)}{x}$$

$\dfrac{(1+x)^{11}-(1+x)}{x}$ 전개했을 때, x인 항은 분자에서 x^2이 포함된 항이다.

$(1+x)^{11}$의 전개식 중에서 ${}_{11}C_2x^2$가 분모의 x와 약분되어 ${}_{11}C_2x$가 나온다.

${}_{11}C_2\ =\ 55$

있는 식 그대로 : 파스칼 삼각형

$(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\ \cdots\ +(1+x)^{10}$의 전개식 중 x이 나오는 항끼리 묶으면

$(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\ \cdots\ +(1+x)^{10}\ =\ \cdots\ +\ ({}_1C_1+{}_2C_1+{}_3C_1+\ \cdots\ +{}_{10}C_1)x\ +\cdots$

$${}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}\ =\ {}_nC_r\ \text{(파스칼 삼각형 공식)}$$

${}_1C_1\ +\ {}_2C_1\ +\ {}_3C_1\ +\ \cdots\ +\ {}_{10}C_1\ =\ \underline{{}_2C_2\ +\ {}_2C_1}\ +\ {}_3C_1\ +\ \cdots\ +\ {}_{10}C_1\ =\ {}_{11}C_2$이다.

$\underline{{}_3C_2\qquad\qquad}$

${}_4C_2\qquad\cdots$

${}_{11}C_2\ =\ 55$

예제 086

REVIEW 이항계수의 성질 : 연속 합

원주 위에 $2n$개의 점이 있다. 이들을 전부 또는 몇 개를 선택하여 만들 수 있는 볼록다각형의 개수를 구하여라.

연속 합 공식

원주 위에 2n개의 점은 세 점 이상이 일직선 위에 있는 상황이 생기지 않는다.

$$
\begin{aligned}
n(\text{볼록다각형}) &= n(\text{삼각형}) + n(\text{사각형}) + \cdots + n(2n\text{각형}) \\
&= {}_{2n}C_3 + {}_{2n}C_4 + \cdots + {}_{2n}C_{2n} \\
&= \boxed{{}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_1 + {}_{2n}C_2 + {}_{2n}C_3 + {}_{2n}C_4 + \cdots + {}_{2n}C_{2n}} - {}_{2n}C_0 - {}_{2n}C_1 - {}_{2n}C_2 \\
&= \boxed{2^{2n}} - {}_{2n}C_0 - {}_{2n}C_1 - {}_{2n}C_2 \\
&= 2^{2n} - 2n^2 - n - 1
\end{aligned}
$$

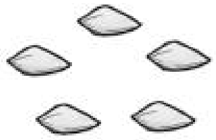
정답은 $2^{2n} - 2n^2 - n - 1$

예제 087

REVIEW 이항계수의 성질 : 연속 합

2007. 3. 가형(56%). 21번. 4점

동주는 5개의 서로 다른 알사탕과 5개의 똑같은 박하사탕을 가지고 있다. 이 중에서 5개를 택하여 진서에게 주는 방법의 수를 구하시오.



박하사탕은 모두 똑같기 때문에 뽑는 경우의 수를 고려할 필요가 없다.
알사탕을 선택하는 경우의 수만 고려하면, 박하사탕은 자동으로 비는 만큼 포함되게 된다.

$$
\begin{aligned}
n(\text{전체}) &= n(\text{알 0개}) + n(\text{알 1개}) + n(\text{알 2개}) + n(\text{알 3개}) + n(\text{알 4개}) + n(\text{알 5개}) \\
&= {}_5C_0 + {}_5C_1 + {}_5C_2 + {}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5 = 2^5 = 32
\end{aligned}
$$

예제 088

REVIEW 파스칼 삼각형

${}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + {}_5C_2 + \cdots + {}_{10}C_2$의 값과 같은 것은?

① ${}_{11}C_6$ ② ${}_{11}C_7$ ③ ${}_{11}C_8$ ④ ${}_{11}C_9$ ⑤ ${}_{11}C_{10}$

조합의 합의 형태에서 C 앞의 숫자가 바뀌는 경우에는 <파스칼 삼각형>을 생각한다.

$${}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + {}_5C_2 + \cdots + {}_{10}C_2 = \underline{{}_3C_3 + {}_3C_2} + {}_4C_2 + {}_5C_2 + \cdots + {}_{10}C_2 = {}_{11}C_3 = {}_{11}C_8$$

$$\underline{{}_4C_3 \qquad\qquad}$$

$${}_5C_3 \qquad \cdots$$

정답은 ③

예제 089

REVIEW 파스칼 삼각형

2005. 6. 나형(76%). 9번. 3점

A지역에는 세 곳, B지역에는 네 곳, C지역에는 다섯 곳, D지역에는 여섯 곳의 관광지가 있다. 이 중에서 세 곳을 선택하여 관광하려고 할 때, 선택한 세 곳이 모두 같은 지역이 되는 경우의 수는?

① 20 ② 25 ③ 30 ④ 35 ⑤ 40

n(전체) $=$ n(A에서 3곳) $+$ n(B에서 3곳) $+$ n(C에서 3곳) $+$ n(D에서 3곳)

$$= {}_3C_3 + {}_4C_3 + {}_5C_3 + {}_6C_3 = \underline{{}_4C_4 + {}_4C_3} + {}_5C_3 + {}_6C_3 = {}_7C_4 = 35$$

$$\underline{{}_5C_4\qquad\quad}$$

$$\underline{{}_6C_4\qquad\quad}$$

$${}_7C_4$$

정답은 ④

예제 090

REVIEW 간단히 하기 : 두 번째 전개식

$f(k)={}_nC_k3^{k-1}4^k$일 때, $\sum_{k=1}^{n}2^kf(k)$의 값은?

① 7^n ② 11^n ③ 11^n-3^n ④ $\frac{1}{3}\times25^n$ ⑤ $\frac{1}{3}(25^n-1)$

$f(k) = {}_nC_k3^{k-1}4^k$이므로 $\sum_{k=1}^{n}2^kf(k) = \sum_{k=1}^{n}2^k{}_nC_k3^{k-1}4^k = \sum_{k=1}^{n}{}_nC_k3^{k-1}4^k\times2^k = \sum_{k=1}^{n}{}_nC_k3^{k-1}8^k$

$\sum_{k=1}^{n}{}_nC_k3^{k-1}8^k$ ⇨ 🟩 1부터 끝까지 (0인 경우를 채운다) 🟥 변동수와 같은 지수 🟨 지수의 합이 $2k-1$

지수 합이 상수가 아닌 변수가 나왔다. 이런 경우는 억지로 <첫 번째 전개식>의 모양을 맞추기 보다는 <두 번째 전개식>이 효율적이다. (물론 억지로 첫 번째 식으로 맞출 수도 있다.)

$$\sum_{k=1}^{n}{}_nC_k3^{k-1}8^k = \frac{1}{3}\cdot\sum_{k=1}^{n}{}_nC_k3^k8^k = \frac{1}{3}\cdot\sum_{k=1}^{n}{}_nC_k24^k = \frac{1}{3}\cdot\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k24^k(1)^{10-k} - \frac{1}{3}$$

⇨ 🟩 0부터 끝까지 🟥 변동수와 같은 지수 🟨 보이지 않는 1의 존재

$$= \frac{1}{3}\cdot(1+24)^n - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\cdot25^n - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(25^n-1)$$

정답은 ⑤

예제 091

REVIEW 이항계수의 성질 : 교대 합의 원리

$(1+x+x^2)^n$의 전개식에서 x^r의 계수를 a_r이라 할 때, $a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{2n}$의 값은?

□ 0 □ 1 □ 2 □ 3 □ 4

$(1+x+x^2)^n$의 전개식에서 x^r의 계수를 a_r이라 할 때 $(1+x+x^2)^n$을 전개했다고 생각해보면

$(1+x+x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{2n}x^{2n}$이다. 이 식의 양변에 $x = -1$을 대입하면

$(1+(-1)+(-1)^2)^n = a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{2n}$이다.

$a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{2n} = 1$, 정답은 ②

예제 092

REVIEW 이항 전개식의 활용

11^{11}의 일의 자리, 십의 자리, 백의 자리의 숫자를 각각 a,b,c라 할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

$11^{11} = (1+10)^{11} = {}_{11}C_0 + {}_{11}C_1 10 + {}_{11}C_2 10^2 + \underline{{}_{11}C_3 10^3 + \cdots + {}_{11}C_{11} 10^{11}}$

전개식의 일부는 ${}_{11}C_3 10^3 + \cdots + {}_{11}C_{11}10^{11} = 1000(\sim\sim\sim)$과 같이 1000으로 묶여서 1000의 배수가 되기 때문에 백의 자리 이하에는 영향을 주지 못한다. 결국 우리는 ${}_{11}C_0 + {}_{11}C_1 10 + {}_{11}C_2 10^2$만 계산하면 된다.

${}_{11}C_0 + {}_{11}C_1 10 + {}_{11}C_2 10^2 = 1+110+5500 = 5611$이므로 $a=1$, $b=1$, $c=6$이다.

$a+b+c = 8$

예제 093

REVIEW 이항계수의 성질 + 복소수의 활용

$(1+i)^{16}$의 전개식을 이용하여 ${}_{16}C_0 - {}_{16}C_2 + {}_{16}C_4 - {}_{16}C_6 + \cdots - {}_{16}C_{14} + {}_{16}C_{16}$의 값을 구하여라.
(단 $i=\sqrt{-1}$)

짝수 교대 합은 복소수의 실수부분을 뜻한다.

$(1+i)^{16} = ((1+i)^2)^8 = (2i)^8 = 2^8$이고,

$(1+i)^{16} = {}_{16}C_0 + {}_{16}C_1 i + {}_{16}C_2 i^2 + {}_{16}C_3 i^3 + {}_{16}C_4 i^4 + \cdots + {}_{16}C_{16} i^{16}$을 실수부와 허수부로 나누면

$= ({}_{16}C_0 - {}_{16}C_2 + {}_{16}C_4 - {}_{16}C_6 + \cdots + {}_{16}C_{16}) + ({}_{16}C_1 - {}_{16}C_3 + {}_{16}C_5 - {}_{16}C_7 + \cdots - {}_{16}C_{15})i$이다.

${}_{16}C_0 - {}_{16}C_2 + {}_{16}C_4 - {}_{16}C_6 + \cdots - {}_{16}C_{14} + {}_{16}C_{16}$은 실수부분이므로 2^8이다.

$2^8 = 256$

예제 094

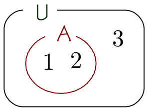
REVIEW 집합의 개수 + 이항계수의 성질 : 절반 합

2005. 4. 가형(60%). 25번. 4점

집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,10\}$ 에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족시키는 U의 부분집합 A의 개수를 구하시오.

(가) $\{1,\ 2,\ 3\} \cap A = \{1,\ 2\}$
(나) 집합 A의 원소의 개수는 6개 이상이다.

$\{1,\ 2,\ 3\} \cap A = \{1,\ 2\}$을 벤 다이어그램으로 표현하면 ⇨



결국, 남은 원소인 4,5,6,7,8,9,10 중 일부를 A의 영역에 넣는다.

n(원소가 6개 이상인 A) $= n$(4개 추가) $+ n$(5개 추가) $+ n$(6개 추가) $+ n$(7개 추가)

$= {}_7C_4 + {}_7C_5 + {}_7C_6 + {}_7C_7 = 2^6$

정답은 64

예제
095

REVIEW 관점 합 : 계산하지 않고 같다는 사실을 안다.

2005. 6. 가형(58%), 나형(46%). 16번. 4점

1부터 100까지의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 수를 선택할 때, 4개의 수 중에서 두 번째로 작은 수가 k인 경우의 수를 a_k라 하자. 예를 들어, a_{98}은 선택된 4개의 수 중에서 98보다 작은 수가 한 개이고 98보다 큰 수가 2개인 경우의 수이므로 $a_{98}=97$이다. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $a_3 = {}_2C_1 \times {}_{97}C_2$　　ㄴ. $a_{10} = a_{90}$　　ㄷ. $\sum_{k=2}^{98} a_k = {}_{100}\mathrm{C}_4$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

두 번째로 작은 수	실제상황
2	1, 2, 3, 4, ⋯, 100
3	1, 2, 3, 4, ⋯, 100
4	1, 2, 3, 4, ⋯, 100
⋮	⋮
10	1, 2, ⋯, 9, 10, 11 ⋯, 100
⋮	⋮
90	1, 2, ⋯, 89, 90, 91, ⋯, 100
⋮	⋮
98	1, 2, ⋯, 97, 98, 99, 100

위와 같이 나열을 해보면 ㄱ, ㄴ은 가볍게 풀린다.

ㄱ. a_3은 두 번째로 작은 수가 3인 경우의 수이므로 3이 뽑힌 상태에서 1과 2 두 수 중에서 하나를 뽑고, 4 ~ 100까지 97개의 수에서 두 수를 뽑아서 곱한다. 즉, $a_3 = {}_2C_1 \times {}_{97}C_2$ (참)

ㄴ. $a_{10} = {}_9C_1 \times {}_{90}C_2 = 9 \times 45 \times 89$

$a_{90} = {}_{89}C_1 \times {}_{10}C_2 = 89 \times 5 \times 9$ 이므로 (거짓)

실제 계산하는 것이 아니라 곱의 형태로 표현해서 같을 수 있는지만 확인하는 것이다.

ㄷ. $\sum_{k=2}^{98} a_k = {}_{100}\mathrm{C}_4$ ⟹ $a_2 + a_3 + \cdots + a_{98} = {}_1C_1 \cdot {}_{98}C_2 + {}_2C_1 \cdot {}_{97}C_2 + \cdots + {}_{97}C_1 \cdot {}_2C_2$이다.

이처럼 <규칙적인 조합의 곱의 합>은 계산이 아니라 관점을 통해 푸는 것이다.

(관점1) ${}_{100}C_4$는 1부터 100까지의 자연수 중에서 임의로 4개의 숫자를 뽑은 모든 경우의 수이다.

(관점2) 1부터 100까지의 자연수 중에서 임의로 4개의 숫자를 뽑은 모든 상황 (즉, ${}_{100}C_4$의 상황)을 <뽑힌 숫자 중 두 번째로 작은 자연수를 기준>으로 분할하면 2 or 3 or ⋯ or 98이다.
이것은 문제의 조건에서 $a_2 + a_3 + \cdots + a_{98}$로 표현될 수 있다.

${}_{100}C_4$와 $a_2 + a_3 + \cdots + a_{98}$은 같은 상황을 다른 기준으로 분할하여 계산한 것이다.

그러므로 $\sum_{k=2}^{98} a_k = {}_{100}C_4$ (참)

정답은 ③

MAP

한눈에 보기 + 찾아가기

#1	#2	#3	#1	#2	#3	#1	#2	#1	#2	#3	#4
중복순열은 곱의 법칙	같포순은 조합	원순열은 고정	자연수 분할	분할의 상황	집합의 분할	중복조합의 상황	중복조합과 일대일 대응	이항정리	조합의 변형 이항정리	파스칼 삼각형	분할적 사고와 관점 합
Part 3. 이해하면 공식은 없다.			Part 4. 분할의 상황			Part 5. 중복조합		Part 6. 이항정리와 조합의 연속 합			

#1. 계승, 순열, 조합의 공식	#2. 순열과 조합의 상황	#2. 순열과 조합의 상황
Part 2. 근본에 가까운 공식		

#1. 일대일 대응	#2. 분할적 사고	#3. 합의 법칙과 곱의 법칙	#4. 여사건의 아이디어
Part 1. 근본 사고방식			

경우의 수는 이처럼 〈Part 1〉과 〈Part 2〉의 기반 위에 나머지 지엽적인 상황과 공식들을 쌓아 올리는 것이다,

PART 01 근본 사고방식

#1 일대일 대응 11
1. 경우의 수적인 본질이 같은 상황
2. 일대일 대응의 아이디어 : 미지의 상황과 현실의 상황을 연결해 주는 다리

#2 분할적 사고 12
1. 전체 상황의 논리적 나열능력
2. 분할적 사고란?
3. 분할적 사고의 핵심 4가지
    1) 자리를 기준 2) 대상을 기준 3) 개수로 분류 4) 배열 전 모든 상황
4. 분할을 통한 상황의 구체적 고정

#3 합의 법칙과 곱의 법칙 15
1. 합의 법칙
2. 곱의 법칙
3. 센다의 법칙
4. 수형도 (참고)

#4 여사건의 아이디어 19
전체에서 일부를 빼서 경우의 수를 세는 사고방식

PART 01 근본 사고방식

#1 정수론 1탄 21
약수와 배수
1. 약수와 배수에 대한 기본 이론들
    1) 소인수분해
    2) 산술의 기본 정리
    3) 약수의 개수에 따른 분류 1
    4) 약수의 개수에 따른 분류 2
    5) 공약수와 최대공약수
    6) 공배수와 최소공배수
    7) 0은 모든 정수의 배수, 1은 모든 정수의 약수
    8) 약수와 배수는 서로 상대적 관계이므로 함께 생각한다.
2. 양의 약수의 개수, 합, 곱
    1) 모든 양의 약수의 개수 : 수형도와 곱의 법칙
    2) 모든 양의 약수의 합 : 나열과 공통인수
    3) 모든 양의 약수의 곱 : 대칭성

#2 센다의 법칙 25
일일이 세야하는 3大(대) 상황
1. 완전순열
2. 돈 문제 : 지불할 수 있는 방법과 금액
    1) (거스름돈 없이) 지불할 수 있는 방법의 수
    2) (거스름돈 없이) 지불할 수 있는 금액의 가짓수
3. 계수가 다른 부정방정식과 부등식

#3 경우의 수를 세는 방법은 무한가지 30
상황을 분할하는 방식에 따라 세는 방법도 여러 가지

PART 02 근본에 가까운 공식

#1 계승, 순열, 조합의 공식 49

1. 계승의 뜻과 공식
    1) 계승(Factorial)의 뜻 2) 계승의 공식 3) 계승의 변형
2. 순열과 조합의 뜻과 공식
    1) 순열의 뜻 2) 조합의 뜻 3) 순열의 공식 4) 조합의 공식
3. 조합의 기본 성질 : ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$
4. 논리의 확신 : 계산하지 않고 같다는 사실을 안다.

#2 순열과 조합의 상황 56

전체적- 분할적 사고, 부분적- 공식

1. 서로 다른 대상, 서로 다른 자리 2. 조합과 자동배열
3. 뽑기의 오류 : <동동연>이면 <배고려>

#3 순열과 조합의 수식적 활용 60

1. 순열의 정의식과 계산식
    1) 정의식 : ${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \left(\frac{(\text{왼 쪽})!}{(\text{왼 쪽} - \text{오른 쪽})!}\right)$ 2) 계산식 : ${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$
2. 조합의 정의식과 계산식
    1) 정의식 : ${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \left(\frac{(\text{왼 쪽})!}{(\text{오른쪽})!(\text{왼 쪽} - \text{오른 쪽})!}\right)$ 2) 계산식 : ${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$
3. 정의되는 기호들 : $0! = 1$, ${}_nP_0 = 1$, ${}_nC_0 = 1$
4. 순열과 조합으로 표현 1) 순열로 표현 : $\frac{n!}{(n-r)!} = {}_nP_r$ 2) 조합으로 표현 : $\frac{n!}{r!(n-r)!} = {}_nC_r = {}_nC_{n-r}$

PART 02 근본에 가까운 공식

#1 순열과 조합으로 표현된 방정식 63

1. 약분의 확신 : 0이 아니라는 확신이 약분을 가능하게 하다.
2. 소인수 분해와 추론
3. 조합의 성질 : 조합방정식에서 고려할 상황

#2 여러 가지 상황의 배열 66

1. 사전식 배열 2. 교대 배열 3. 양 끝 배열
4. 덩어리 배열 5. 이웃하지 않게 배열

#3 여사건의 아이디어 72

<적어도> + 특정인 개념

1. <적어도>는 본질이 아니다. 2. <적어도>에서 빠지기 쉬운 오류 : 뽑기의 오류
3. 특정인 개념

#4 정수론 2탄 79

정수 분류법과 배수 판정법
그리고 진법 전개식

1. 정수 분류법 1) 나머지 기준 2) 소인수 기준
2. 배수 판정법 1) 끝자리 기준 2) 자리 수 합 기준 3) 활용 4) 소수 판정법 (참고)
3. 숫자 0의 활용 1) 세 자리 자연수 2) 세 자리 이하의 자연수
4. 진법 전개식 : 규칙적으로 배열된 자연수들의 합

#5 도형과 경우의 수 84

1. 점을 기준으로 하는 도형
2. 일대일 대응의 아이디어 1 : 볼록 n각형 대각선의 교점의 최대 개수
3. 일대일 대응의 아이디어 2 : 평행사변형과 직선
4. 수열의 규칙성 : 마름모, 정사각형

#6 집합과 경우의 수 89

1. 벤다이어그램과 일대일 대응
2. 유한집합의 원소의 수 : 집합의 관점 VS 경우의 수 관점

PART 03 이해하면 공식은 없다

#1 중복순열과 곱의 법칙 119

1. 중복순열의 뜻과 공식
    - 1) 중복순열의 뜻
    - 2) 중복순열의 공식

#2 같은 것을 포함한 순열과 조합 121

1. 같은 것을 포함한 순열의 뜻과 공식
    - 1) 같은 것을 포함한 순열의 뜻
    - 2) 같은 것을 포함한 순열은 조합이다.
    - 3) 같은 것을 포함한 순열 <같·포·순>공식
2. 배열 취소의 관점
3. 자동배열의 상황
4. 같은 것들 중에서 일부를 뽑는 것은 공식이 없다.

#3 원순열과 고정 126

1. 원순열의 상황 : 구분할 수 없는 상황과 구분할 수 있는 상황
    - 1) 회전했을 때 같은 경우
    - 2) 자리를 구분할 수 있는 기준이 생기는 순간 원순열이 아니다.
2. 원순열의 경우의 수
3. 다각형 순열
4. 목걸이 순열

PART 03 이해하면 공식은 없다

#1 경로의 수 133

1. 경로의 수 VS 최단 경로의 수
2. 최단 경로 : 대각선 방법과 합의 법칙 반복적용
    - 1) 대각선 방법 : A에서 B로 가는 최단 경로- 기준에 의한 분할
    - 2) 합의 법칙 반복적용 : A에서 B로 가는 최단 경로 = only ↑ → (두 가지 방향)
    - 3) 대칭과 일대일 대응

#2 입체순열 138

분할적 사고와 고정

PART 04 분할의 상황

#1 자연수 분할 161

빠짐없이 세는 연습

1. 자연수 분할의 기본 정의
   - 1) 자연수 분할이란? 2) 자연수 분할의 수 : 낙수 효과
2. 페러스 다이어그램 : 자연수 분할의 상황과 상자 배치를 일대일 대응
   - 1) 상황의 이해 : 자연수 n을 $k(k \leq n)$개의 자연수로 분할하는 방법의 수 $P(n,\ k)$
   - 2) 성질 1 : $P(n,\ k) = P(n-k,\ 1)+P(n-k,\ 2)+\ \cdots\ +P(n-k,\ k)$
   - 3) 성질 2 : $P(n,\ k) = 0\ (n<k),\ P(n,\ 1) = 1,\ P(n,\ 2) = \left[\frac{n}{2}\right],\ P(n,\ n) = 1,$

     $P(n,\ n-1) = 1\ (n \geqq 2),\ P(n,\ n-2) = 2\ (n \geqq 4)$

     $P(n,\ n-3) = 3\ (n \geqq 6),\ P(n,\ n-4) = 5\ (n \geqq 8)$
   - 4) 성질 2의 증명
   - 5) 성질 3 : $P(n,\ k) = P(n-1,\ k-1) + P(n-k,\ k)$
   - 6) 결레분할 : n을 k개 이하의 자연수로 분할하는 경우의 수

     = n을 k 이하의 자연수로 분할하는 경우의 수
3. 자연수 분할의 상황
   - 1) 서로 같은 대상, 서로 같은 자리 2) 자연수 분할에서 적어도의 상황
   - 3) 조건이 추가된 자연수 분할의 상황

#2 분할의 상황 : 뽑기의 오류 173

뽑기의 오류

1. 분할의 상황 1 : 뽑기와 분할의 경우의 수가 다른 경우
   - 1) 4명 중 2명을 뽑는 경우 VS (2명/2명)으로 팀을 나누는 경우
   - 2) 6명을 (2명/2명/2명)으로 팀을 나누는 경우
   - 3) a, b, c, d, e, f 여섯 명에서 ${}_6C_2 \times {}_4C_2$의 의미
2. 분할의 상황 2 : 뽑기와 분할의 경우의 수가 같은 경우
   - 1) 4명 중 3명을 뽑는 경우 VS (3명/1명)으로 팀을 나누는 경우
   - 2) 분할의 상황이 생기는 이유 : 팀을 구분할 수 있는 기준이 없기 때문에
3. 선분할 개념 : 기준이 생기면 <뽑기의 오류> 발생하지 않는다.
4. 분할의 공식화
5. 분할 후 분배와 선분할 개념
   - 1) 분할 후 분배 2) 선분할 개념

#3 집합의 분할 182

1. 집합의 분할의 상황
   - 1) 집합의 분할의 뜻
   - 2) 집합의 분할의 수
   - 3) 부분집합의 개수와 분할의 수의 근본적 차이 : 기준의 차이
   - 4) 조합을 이용한 집합의 분할의 수 세기
2. 집합의 분할의 성질
   - 1) 집합의 분할의 성질 : $S(n,\ 1) = 1,\ S(n,\ n) = 1,\ S(n,\ 2) = 2^{n-1}-1,$

     $S(n,\ n-1) = {}_nC_2,\ S(n,\ k) = S(n-1,\ k-1) + k\,S(n-1,\ k)$
   - 2) 성질을 이용한 집합 분할의 수 세기 3) 성질의 증명
3. 서로 다른 대상, 서로 같은 자리

PART 04 분할의 상황

#1 리그와 토너먼트 189

1. 리그의 상황 : 조합의 상황
2. 토너먼트의 상황 : 분할의 상황

PART 05 중복조합

#1 중복조합의 상황 217

1. 중복조합의 뜻과 공식
    1) 중복조합의 뜻
    2) 중복조합의 공식
2. 구분막대기를 이용한 일대일 대응
3. 중복조합의 공식 : 암기가 아닌 Reading ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_{n-1}$

#2 중복조합과 일대일 대응 220

1. 중복조합과 일대일 대응 : 결국 일대일 대응과 공식으로 푼다.
2. 서로 같은 대상, 서로 다른 자리
3. 중복조합의 적어도의 상황 : 미리 뽑아놓고 생각한다.
    1) 기존의 <적어도> 상황 : 미리 뽑아놓고 생각 X
    2) 중복조합의 <적어도> 상황 : 미리 뽑아놓고 생각 O

PART 05 중복조합

#1 <서로 같은>과 <서로 다른> 총 정리 227

경우의 수 관점에서 본질이 같은 상황

1. 서로 다른 대상, 서로 다른 자리 : 순열과 조합의 상황
2. 서로 같은 대상, 서로 같은 자리 : 자연수 분할의 상황
3. 서로 다른 대상, 서로 같은 자리 : 집합 분할의 상황
4. 서로 같은 대상, 서로 다른 자리 : 중복조합의 상황

#2 중복조합과 곱의 법칙 228

두 종류 이상의 같은 것을 다른 것에 분배

1. 곱의 법칙의 상황
2. 변칙상황 (곱의 법칙 + 적어도)

#3 전개식과 경우의 수 231

1. 다항식의 전개 : 집단에서 대상을 뽑아 나열
2. 특정항의 계수 : 동류항이 생기는 경우
3. 전개식에서 항의 종류 : 동류항이 생기는 경우

#4 부정방정식과 일대일 대응 233

1. 계수가 같은 부정방정식에서 해의 개수 1
2. 계수가 같은 부정방정식에서 해의 개수 2 : 치환과 일대일 대응
3. 문자가 여러 개인 계수가 같은 부등식 : 방정식으로 일대일 대응

#5 함수의 개수 총정리 236

1. 함수의 정의와 함수의 개수 : 중복순열과 곱의 법칙
2. 일대일 함수와 일대일 대응 : 순열
3. 증가함수와 감소함수 : 조합
4. 단조증가함수와 단조감소함수 : 중복조합
5. 공역과 치역이 같은 함수의 개수 : 분할 후 분배 / 여사건의 아이디어

PART 06 이항정리와 조합의 연속 합

#1 이항정리와 이항계수의 성질 265

다항식의 계수에서 찾은 경우의 수

1. 이항계수의 의미와 이항전개식
   1) 첫 번째 전개식 :

      $(a+b)^n = {}_nC_0\, a^n b^0 + {}_nC_1\, a^{n-1} b^1 + \cdots + {}_nC_r\, a^{n-r} b^r + \cdots + {}_nC_n a^0 b^n$

   2) 두 번째 전개식 :

      $(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1\, x + \cdots + {}_nC_r\, x^r + \cdots + {}_nC_n x^n$
2. 특정항의 계수 찾기 : 나열된 식의 구조와 추론
   1) 이항 전개를 통해 <나열된 식의 구조>로 표현한 후 일일이 경우를 따진다.
   2) <항등식의 마법>을 이용해서 식을 변형한 후 계수를 찾는 아이디어
   3) 식 변형을 하면 오히려 안 풀리는 경우도 많다.
3. 이항전개식 간단히 하기
   1) 첫 번째 전개식 : <조합 × 등비수열>이 규칙적으로 더해진 모양
   2) 두 번째 전개식 : <조합 × 등비수열>이 규칙적으로 더해진 모양
4. 이항계수의 성질 : 이항정리 + 항등식의 성질

   1) 연속 합 2) 교대 합 3) 짝수 합 4) 홀수 합 5) 절반 합

#2 조합의 식 변형과 이항계수의 성질 278

1. 조합의 식 변형 연습 1 : <일차식 × 조합>이 규칙적으로 더해진 모양
2. 조합의 식 변형 연습 2 : <$\dfrac{1}{\text{일차식}}$ × 조합>이 규칙적으로 더해진 모양
3. 조합의 식 변형 연습 3 : <이차식 × 조합>이 규칙적으로 더해진 모양

#3 파스칼 삼각형 281

1. 이항계수의 또 다른 성질
2. 파스칼 삼각형 공식 : ${}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r = {}_nC_r$
3. 이항계수의 성질과 파스칼 삼각형 공식의 구분법

#4 분할적 사고와 관점 합 284

식이 나타내는 본질적인 의미를 이해

1. 이항전개식을 이용한 설명
   1) 이항전개식을 이용한 ${}_{20}C_{10} = \sum\limits_{r=0}^{10} \left({}_{10}C_r\right)^2$의 설명
   2) 이항전개식을 이용한 ${}_{20}C_{10} = \sum\limits_{r=0}^{7} {}_7C_r \times {}_{13}C_{7-r}$의 설명
2. 다른 방식을 이용한 설명 : 식이 나타내는 본질적인 의미를 이해

PART 06 이항정리와 조합의 연속 합

#1 삼항정리 287

삼항전개식에서 특정항의 계수

1. 이항정리를 두 번 적용
2. 같은 것을 포함한 순열의 상황

#2 정수론 3탄 290

나머지와 주기성

1. 몫과 나머지
   1) 정수의 몫과 나머지
   2) 다항식의 몫과 나머지
2. 나머지와 주기성
3. 주기에 대한 논리 : 공통 주기 찾기
4. 복소수를 활용한 이항계수의 성질
   1) 짝수 교대 합 : ${}_nC_0 - {}_nC_2 + {}_nC_4 - {}_nC_6 + \cdots \pm {}_nC_{\text{마지막짝수}}$ = 전개식의 실수부분
   2) 홀수 교대 합 : ${}_nC_1 - {}_nC_3 + {}_nC_5 - {}_nC_7 + \cdots \pm {}_nC_{\text{마지막홀수}}$ = 전개식의 허수부분