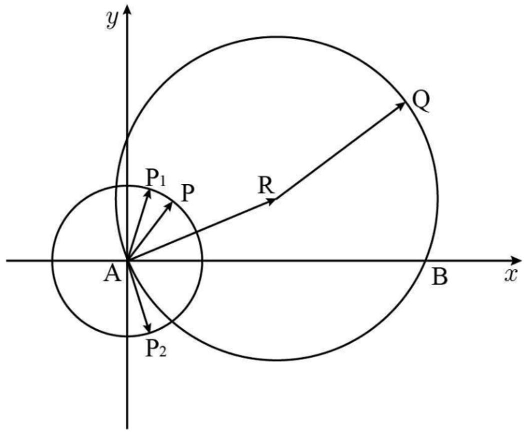
< 정답표>

1.	128	**2.**	486	**3.**	24	**4.**	120	**5.**	①
6.	19	**7.**	③	**8.**	24	**9.**	②	**10.**	19
11.	⑤	**12.**	27	**13.**	12	**14.**	40	**15.**	⑤
16.	136	**17.**	8	**18.**	④	**19.**	①	**20.**	24
21.	53	**22.**	27	**23.**	②	**24.**	①	**25.**	①
26.	31	**27.**	②	**28.**	③	**29.**	③	**30.**	7

1

[출제의도] 평면벡터의 내적을 활용하여 문제해결하기



그림과 같이 좌표평면 위의 점 A를 A$(0,\ 0)$, 점 B를 B$(24,\ 0)$, 원 C의 중심을 R$(12,\ 5)$라 하자.

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RQ})$
$= \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AR} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{RQ}$

$|\overrightarrow{AP}| = 5$, $|\overrightarrow{AR}| = 13$, $|\overrightarrow{RQ}| = 13$이다.

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AR}$가 최대인 경우를 구하면

(ⅰ) $\cos\theta = 1$일 때,
점 P가 선분 AB 위에 있으므로
$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AR} = |\overrightarrow{AP}| \times |\overrightarrow{AR}| \times \cos(\angle \mathrm{PAR})$
$= 5 \times 13 \times \dfrac{12}{13} = 60$

(ⅱ) $0 < \cos\theta < 1$일 때,
$\angle \mathrm{P_1AB} = \angle \mathrm{P_2AB} = \theta$인 제1사분면 위의 점을 $\mathrm{P_1}$, 제4사분면 위의 점을 $\mathrm{P_2}$라 하자.
$\angle \mathrm{P_1AR} < \angle \mathrm{P_2AR}$이므로
$\overrightarrow{AP_1} \cdot \overrightarrow{AR} > \overrightarrow{AP_2} \cdot \overrightarrow{AR}$
그러므로 제1사분면 위의 점 P만 고려하면 된다.
$\angle \mathrm{RAP} = \alpha$, $\angle \mathrm{RAB} = \beta$라 하면
$\cos\beta = \dfrac{12}{13}$이고, $5\cos\theta$가 자연수이므로
$\cos\beta > \cos\theta$
따라서 $\beta < \theta$이고 $\cos\theta$의 값이 $\dfrac{4}{5}$일 때,
$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AR}$가 최댓값을 갖는다.
$\alpha = \theta - \beta$이므로
$\cos\alpha = \cos(\theta - \beta) = \cos\theta\cos\beta + \sin\theta\sin\beta$
$= \dfrac{4}{5} \times \dfrac{12}{13} + \dfrac{3}{5} \times \dfrac{5}{13} = \dfrac{63}{65}$
$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AR} = |\overrightarrow{AP}| \times |\overrightarrow{AR}| \times \cos\alpha$
$= 5 \times 13 \times \dfrac{63}{65} = 63$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AR}$가 최대가 되는 $\overrightarrow{AP}$에 대하여 $\overrightarrow{AP}$와 $\overrightarrow{RQ}$가 같은 방향일 때, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{RQ}$의 값이 최대이므로 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{RQ}$의 최댓값은 65이다. 그러므로

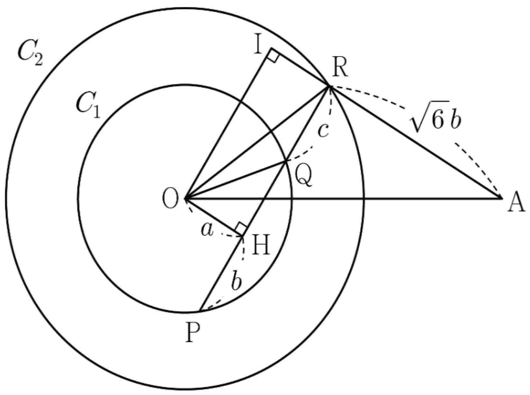
$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AR} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{RQ}$
$\le 63 + 65 = 128$

따라서 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$의 최댓값은 128

2

[출제의도] 평면벡터의 내적을 활용하여 문제 해결하기

조건 (가)에 의하여 세 점 P, Q, R는 한 직선 위에 있고, 조건 (나)에 의하여 직선 AR와 직선 PQ는 수직이므로 $\overline{\mathrm{AR}} \perp \overline{\mathrm{PR}}$ 이다. 점 O에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하자.



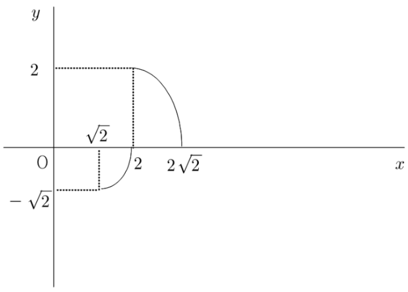
$\overline{\mathrm{OH}} = a$, $\overline{\mathrm{HP}} = \overline{\mathrm{HQ}} = b$, $\overline{\mathrm{QR}} = c$ 라 하면
$\overline{\mathrm{AR}} = \sqrt{6}\,b$
삼각형 OHQ는 직각삼각형이므로
$a^2 + b^2 = 5$ …… ㉠
삼각형 OHR는 직각삼각형이므로
$a^2 + (b+c)^2 = 14$ …… ㉡
점 O에서 선분 AR의 연장선에 내린 수선의 발을 I라 하면
$\overline{\mathrm{OI}} = \overline{\mathrm{HR}} = b + c$, $\overline{\mathrm{IA}} = a + \sqrt{6}\,b$ 이므로
삼각형 AIO에서
$(a + \sqrt{6}\,b)^2 + (b+c)^2 = 44$ …… ㉢
㉡과 ㉢에서
$2\sqrt{6}\,ab + 6b^2 = 30$ …… ㉣
㉠과 ㉣에서
$6a^2 - 2\sqrt{6}\,ab = 0$
$a = 0$ 또는 $a = \dfrac{\sqrt{6}}{3}b$
세 점 O, P, Q가 한 직선 위에 있지 않으므로
$a \neq 0$ 이고 $a = \dfrac{\sqrt{6}}{3}b$
$a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{PQ}} = 2\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{AR}} = 3\sqrt{2}$ 이고 원 C_1 위의 점 S에 대하여
$\overrightarrow{\mathrm{AR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AS}} = \overrightarrow{\mathrm{AR}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OS}})$
$= \overrightarrow{\mathrm{AR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{AR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OS}}$
$\overrightarrow{\mathrm{AR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AO}} = |\overrightarrow{\mathrm{AR}}||\overrightarrow{\mathrm{AI}}| = 3\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = 24$
$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ 와 $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하자.
$\overrightarrow{\mathrm{AR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OS}} = |\overrightarrow{\mathrm{AR}}||\overrightarrow{\mathrm{OS}}|\cos\theta$
$= 3\sqrt{2} \times \sqrt{5} \times \cos\theta$ 이므로
$\overrightarrow{\mathrm{AR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OS}}$ 는 $\cos\theta = 1$ 일 때 최댓값을 갖고 $\cos\theta = -1$ 일 때 최솟값을 가지므로
$-3\sqrt{10} \leq \overrightarrow{\mathrm{AR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OS}} \leq 3\sqrt{10}$
$24 - 3\sqrt{10} \leq \overrightarrow{\mathrm{AR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AS}} \leq 24 + 3\sqrt{10}$
$M = 24 + 3\sqrt{10}$, $m = 24 - 3\sqrt{10}$
$Mm = (24 + 3\sqrt{10}) \times (24 - 3\sqrt{10}) = 486$

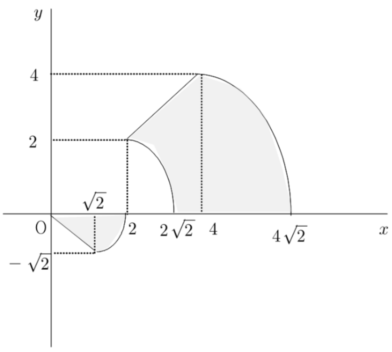
3

출제의도 : 벡터의 연산에서 종점의 위치를 이해하고 벡터의 내적의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

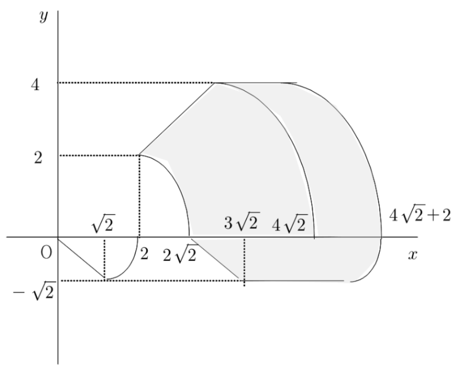
정답풀이 :
좌표평면에서 곡선 C와 점 Q가 나타내는 곡선은 그림과 같다.



이때 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}$라 하면 점 A와 $\overrightarrow{OY}$가 나타내는 점 Y는 그림의 색칠된 부분에 존재한다.



따라서
$\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OY}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OY}$
를 만족시키는 점 Z가 나타내는 영역 D는 그림의 색칠된 부분이다.

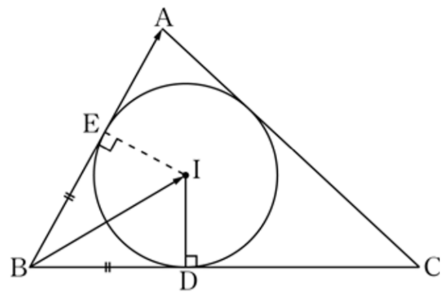


따라서 영역 D에 속하는 점 중에서 y축과의 거리가 최소인 점 R$(2,2)$ 이므로 $\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OZ}$의 최솟값 m은 점 Z가 두 점 $(2\sqrt{2},0)$, $(3\sqrt{2},-\sqrt{2})$을 잇는 선분 위의 점일 때이므로
$m=2\times 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$
$\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OZ}$의 최댓값 M은 점 Z$(6,4)$일 때이므로
$M=2\times 6+2\times 4=20$
따라서
$M+m=20+4\sqrt{2}$
이므로 $a=20$, $b=4$
즉, $a+b=24$

정답 24

4

[출제의도] 벡터의 성질을 이해하여 내적을 구한다.
점 I에서 변 AB에 내린 수선의 발을 E라 하면
$\overline{BE}=\overline{BD}=8$ 이므로
$\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BI}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BI}|\cos(\angle EBI)$
$=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BE}|=15\times 8=120$



5

출제의도 : 공간좌표에서 선분의 내분점을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 $A(1, 3, -6)$, $B(7, 0, 3)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2\times7+1\times1}{2+1}, \frac{2\times0+1\times3}{2+1}, \frac{2\times3+1\times(-6)}{2+1}\right)$$

즉, $(5, 1, 0)$

따라서,

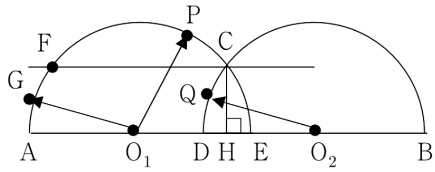
$a+b=5+1=6$

정답 ①

6

출제의도 : 벡터의 연산과 내적을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



점 C를 지나고 직선 AB에 평행인 직선이 호 AC와 만나는 점을 F라고 하면

$\overrightarrow{O_2Q}=\overrightarrow{O_1G}$

를 만족시키는 점 G는 호 AF 위에 있다.

$\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_2Q}=\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1G}$

이므로 벡터 $\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1G}$의 크기가 최소인 경우는 $\angle PO_1G$의 크기가 최대일 때이며, 이때 점 G가 점 A와 일치하고, 점 P가 점 C와 일치한다. 따라서

$$\left|\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1G}\right| \geq \left|\overrightarrow{O_1C}+\overrightarrow{O_1A}\right|=\frac{1}{2}$$

$\angle AO_1C=\theta$라 하자.

$$\left|\overrightarrow{O_1C}+\overrightarrow{O_1A}\right|=\frac{1}{2}$$

의 양변을 제곱하면

$$\left|\overrightarrow{O_1C}\right|^2+2\overrightarrow{O_1C}\cdot\overrightarrow{O_1A}+\left|\overrightarrow{O_1A}\right|^2=\frac{1}{4}$$

$$1+2\left|\overrightarrow{O_1C}\right|\left|\overrightarrow{O_1A}\right|\cos\theta+1=\frac{1}{4}$$

$$2\times1\times1\times\cos\theta=\frac{1}{4}-2$$

$$\cos\theta=-\frac{7}{8}$$

점 C에서 직선 AB 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{O_1H}=\overline{O_1C}\cos(\pi-\theta)$

$=1\times(-\cos\theta)$

$=\frac{7}{8}$

이고 $\overline{O_1H}=\overline{HO_2}$이므로

$\overline{AB}=\overline{AO_1}+\overline{O_1H}+\overline{HO_2}+\overline{O_2B}$

$=1+\frac{7}{8}+\frac{7}{8}+1$

$=\frac{15}{4}$

따라서 $p=4$, $q=15$이므로

$p+q=19$

정답 19

7

출제의도 : 위치벡터의 연산을 이해하고 벡터의 내적을 활용할 수 있는가?

정답풀이 :

$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=\sqrt{10}$에서

$2|\overrightarrow{PM}|=\sqrt{10}$

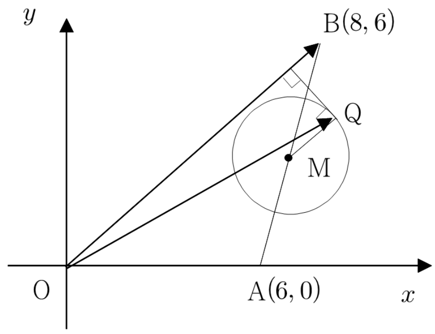
$|\overrightarrow{PM}|=\frac{\sqrt{10}}{2}$

그러므로 점 P는 중심이 M이고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{10}}{2}$인 원 위의 점이다.

이 원을 C라 하자.

한편, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}$의 값이 최대이기 위해서는 그림과 같이 직선 OB에 수직인 직선이 원 C와 접하는 점 중 선분 OP의 길이가 가장 클 때의 점이다.

그러므로 점 Q는 그림과 같다.



한편, 직선 OB에 수직이고 점 Q를 지나는 직선과 직선 MQ는 수직이므로

$\overline{OB}//\overline{MQ}$

그러므로 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MQ}$가 이루는

각의 크기는 두 벡터 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$가 이루는 각의 크기와 같다.
두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MQ}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면
$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta$
에서
$(6,0)\cdot(8,6) = \sqrt{6^2+0^2}\sqrt{8^2+6^2}\cos\theta$
$48 = 6\times10\times\cos\theta$
$\cos\theta = \dfrac{4}{5}$

따라서, $|\overrightarrow{OA}|=6$, $|\overrightarrow{MQ}| = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$이므로
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MQ} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{MQ}|\cos\theta$
$= 6\times\dfrac{\sqrt{10}}{2}\times\dfrac{4}{5}$
$= \dfrac{12\sqrt{10}}{5}$

정답 ③

8

[출제의도] 벡터의 내적 이해하기
$\vec{a}+\vec{b} = \left(4t,\ \dfrac{3}{t}\right)$
$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = 16t^2 + \dfrac{9}{t^2}$ 이고 $t^2 > 0$ 이므로
절대부등식의 성질에 의하여
$16t^2 + \dfrac{9}{t^2} \ge 2\sqrt{16t^2 \times \dfrac{9}{t^2}} = 24$
따라서 $t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 일 때, $|\vec{a}+\vec{b}|^2$ 의 최솟값은 24

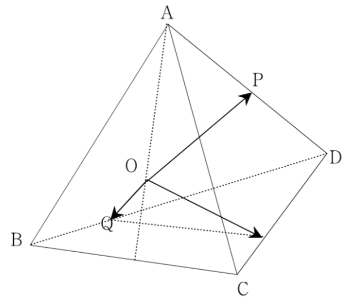
9

[출제의도] 좌표공간에서 선분의 길이 계산하기
$\overline{AB} = \sqrt{3^2+1^2+(-3)^2} = \sqrt{19}$

10

출제의도 : 벡터의 수직과 내적을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 벡터의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :



점 Q는 삼각형 BCD의 경계를 포함한 내부의 점이고, $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$을 만족시키는 점이다.
그런데 $|\overrightarrow{PQ}|$가 최대이려면 점 Q는 선분 DB 또는 선분 DC 위에 있어야 한다.
선분 DB 위의 점을 Q라 하자.
$\overrightarrow{DA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{c}$라 하면
$\overrightarrow{DP} = \dfrac{1}{2}\vec{a}$이고,
$\overrightarrow{DQ} = k\vec{b}$ $(0<k<1)$이다.
또, $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 = 16$이고,
$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 8$이다.
$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$
$= (\overrightarrow{DP}-\overrightarrow{DO})\cdot(\overrightarrow{DQ}-\overrightarrow{DO})$
$= \left(\dfrac{1}{2}\vec{a} - \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right)\cdot\left(k\vec{b} - \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right)$

$=\left(\frac{1}{6}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}\right)$

$\cdot\left\{-\frac{1}{3}\vec{a}+\left(k-\frac{1}{3}\right)\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}\right\}$

$=-\frac{5}{6}k+\frac{2}{3}$

$-\frac{5}{6}k+\frac{2}{3}=0$에서 $k=\frac{4}{5}$

따라서 $|\overrightarrow{PQ}|$의 최댓값은

$|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}|$

$=\left|\left(-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{7}{15}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}\right)\right.$

$\left.-\left(\frac{1}{6}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}\right)\right|$

$=\left|-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{4}{5}\vec{b}\right|$

이때,

$\left|-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{4}{5}\vec{b}\right|^2$

$=\left(-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{4}{5}\vec{b}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{4}{5}\vec{b}\right)$

$=\frac{1}{4}|\vec{a}|^2-\frac{4}{5}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{16}{25}|\vec{b}|^2$

$=\frac{1}{4}\times16-\frac{4}{5}\times8+\frac{16}{25}\times16$

$=\frac{4\times49}{25}$

$=\left(\frac{14}{5}\right)^2$

이므로 구하는 최댓값은 $\frac{14}{5}$

즉 $p+q=5+14=19$

정답 19

11

[출제의도] 공간벡터의 내적을 이용하여 극한값을 구하는 문제를 해결한다.

$\angle OHC=\theta$라 하고 점 O에서 밑면 ABC에 내린 수선의 발을 G라 하면 점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이므로 $\overline{HG}=\frac{1}{3}\overline{OH}$ 따라서 $\cos\theta=\frac{1}{3}$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OP_k}=\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{OH}\cdot(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HP_k})$

$=n|\overrightarrow{OH}|^2+\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{HP_k}=n|\overrightarrow{OH}|^2-\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{HO}\cdot\overrightarrow{HP_k}$

$=n|\overrightarrow{OH}|^2-\sum_{k=1}^{n}|\overrightarrow{HO}||\overrightarrow{HP_k}|\cos\theta$

$=27n-\sum_{k=1}^{n}\frac{(3\sqrt{3})^2k}{3n}=27n-\frac{9}{n}\sum_{k=1}^{n}k$

$=27n-\frac{9(n+1)}{2}=\frac{45}{2}n-\frac{9}{2}$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{45}{2}-\frac{9}{2n}\right)=\frac{45}{2}$

12

[출제의도] 벡터의 내적을 이용하여 문제를 해결한다.

원 C_2의 중심을 O_2라 하면,

$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PC}\cdot(\overrightarrow{PO_2}+\overrightarrow{O_2Q})$

$=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PO_2}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{O_2Q}$

점 P가 원점에, 선분 AB가 y축 위에 오도록 정사각형 ABCD와 두 원 C_1, C_2를 좌표평면 위에 놓으면 두 점 O_2, C의 좌표는 각각 $(3,\ 2)$, $(4,\ -1)$이다.

그러므로 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PO_2}=(4,\ -1)\cdot(3,\ 2)=12-2=10$

$\overrightarrow{PC}$와 $\overrightarrow{O_2Q}$가 이루는 각을 θ라 하면

$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{O_2Q}=|\overrightarrow{PC}||\overrightarrow{O_2Q}|\cos\theta$

$=\sqrt{17}\times1\times\cos\theta\le\sqrt{17}$에서

$\theta=0$일 때, $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{O_2Q}$의 최댓값은 $\sqrt{17}$

그러므로 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PQ}$의 최댓값은 $10+\sqrt{17}$

따라서 $a+b=10+17=27$

13

출제의도 : 공간벡터의 내적과 직선의 방향벡터를 활용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

세 점 P_1, P_2, P_3의 좌표를

$\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1,\ 1)$, $\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2,\ 1)$, $\mathrm{P}_3(x_3,\ y_3,\ 1)$

이라 하자.

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}_1} = 3x_1 + \frac{1}{2}y_1 + 2 = \frac{11}{3}$에서

$3x_1 + \frac{1}{2}y_1 = \frac{5}{3}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}_2} = 3x_2 + \frac{1}{2}y_2 + 2 = 1$에서

$3x_2 + \frac{1}{2}y_2 = -1$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}_3} = 3x_3 + \frac{1}{2}y_3 + 2 = -\frac{7}{4}$에서

$3x_3 + \frac{1}{2}y_3 = -\frac{15}{4}$

세 점 P_1, P_2, P_3에서 xy평면에 내린 수선의 발을 각각 Q_1, Q_2, Q_3이라 하면

세 점 Q_1, Q_2, Q_3은 각각 xy평면 위의

세 직선 $3x + \frac{1}{2}y = \frac{5}{3}$, $3x + \frac{1}{2}y = -1$,

$3x + \frac{1}{2}y = -\frac{15}{4}$

즉, $y = -6x + \frac{10}{3}$, $y = -6x - 2$,

$y = -6x - \frac{30}{4}$ 위에 있다.

한편 점 $(0,\ k,\ 0)$을 지나고 방향벡터가 $(1,\ -6,\ 0)$인 직선의 방정식은

$\frac{x}{1} = \frac{y-k}{-6}$, $z = 0$

이다. 즉,

xy평면 위의 직선 $y = -6x + k$이므로

주어진 조건을 만족하려면

$k < -\frac{30}{4}$ 또는 $k > \frac{10}{3}$

이어야 한다,

따라서 $m = 4$, $M = -8$이므로

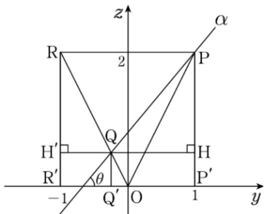
$m - M = 4 - (-8) = 12$

정답 12

14

[출제의도] 평면과 원뿔이 만나서 이루는 도형을 추측하여 좌표를 구한다.

원뿔을 yz평면으로 자른 단면은 yz평면 위의 두 점 $\mathrm{P}(0,\ 1,\ 2)$, $\mathrm{R}(0,\ -1,\ 2)$와 원점 O를 세 꼭짓점으로 하는 삼각형 OPR이다.



선분 OR와 평면 α의 교점을 Q라 하자.
두 점 P, Q를 xy평면에 내린 정사영을 각각 P', Q'이라 할 때 도형 S의 xy평면 위로의 정사영의 장축의 길이는 선분 $\mathrm{P}'\mathrm{Q}'$의 길이와 같다. 즉, $\overline{\mathrm{P}'\mathrm{Q}'}=\frac{5}{4}$

점 Q에서 선분 PP', RR'에 내린 수선의 발을 각각 H, H'이라 하고 평면 α와 xy평면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overline{\mathrm{RH}'}=\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{QH}}\tan\theta=\overline{\mathrm{Q}'\mathrm{P}'}\tan\theta=\frac{5}{4}\tan\theta$

$\overline{\mathrm{QH}'}=\overline{\mathrm{P}'\mathrm{R}'}-\overline{\mathrm{P}'\mathrm{Q}'}=2-\frac{5}{4}=\frac{3}{4}$

삼각형 $\mathrm{RR}'\mathrm{O}$와 삼각형 $\mathrm{RH}'\mathrm{Q}$는 닮음이므로

$\frac{\overline{\mathrm{RR}'}}{\overline{\mathrm{OR}'}}=\frac{\overline{\mathrm{RH}'}}{\overline{\mathrm{QH}'}}$ 에서

$\frac{\overline{\mathrm{RR}'}}{\overline{\mathrm{OR}'}}=2$이고 $\frac{\overline{\mathrm{RH}'}}{\overline{\mathrm{QH}'}}=\frac{\frac{5}{4}\tan\theta}{\frac{3}{4}}=\frac{5\tan\theta}{3}$ 이므로 $\tan\theta=\frac{6}{5}$

평면 α가 z축과 만나서 생기는 좌표가 $(0,0,k)$이므로 $\tan\theta=\frac{2-k}{1}=\frac{6}{5}$

따라서 $k=\frac{4}{5}$이므로 $50k=40$

15

출제의도 : 평면벡터의 크기와 내적의 정의를 이용하여 벡터의 종점이 이루는 도형에 관련된 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

$|\overrightarrow{\mathrm{OX}}|\le 1$이므로 점 X는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원의 내부와 경계이다.

또, $\overrightarrow{\mathrm{OX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}\ge 0$에서 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

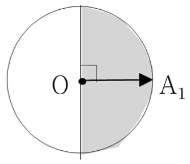
$|\overrightarrow{\mathrm{OX}}|\,|\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}|\cos\theta\ge 0$

$\cos\theta\ge 0$

그러므로

$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

ㄱ. $\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}$이므로 조건을 만족시킬 점 X를 나타내는 도형 D는 반원과 이 반원의 내부이다.

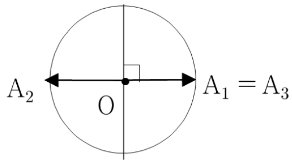


그러므로 도형 D의 넓이는 반지름의 길이가 1인 원의 넓이의 $\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times 1^2\times\pi=\frac{\pi}{2}$ <참>

ㄴ. $\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}$이고 $\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}$이면 아래 그림과 같다. 이때, 점 X를 나타내는

도형 D는 선분 A_1A_2와 수직인 원의 지름이다.

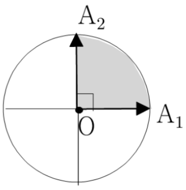


그러므로 D의 길이는 2이다. <참>

ㄷ. $\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_2} = 0$이면

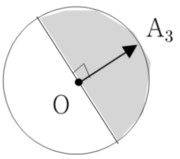
$\overrightarrow{OA_1} \perp \overrightarrow{OA_2}$

이때, 두 벡터 $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$에 대하여 조건을 만족시킬 점 X를 나타내면 다음과 같은 사분원의 경계 및 내부이다.



[그림1]

또, 벡터 $\overrightarrow{OA_3}$에 대하여 조건을 만족시킬 점 X를 나타내면 그림과 같이 반원과 이 반원의 내부이다.



[그림2]

이때, 도형 D의 넓이가 $\frac{\pi}{4}$이기 위해서는 위의 두 도형의 공통부분이 [그림1]과 같은 사분원의 경계 및 내부이어야 한다.

그러므로 점 A_3는 호 A_1A_2위에 있어야 한다. 즉, D에 포함되어야 한다. <참>

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

16

출제의도 : 벡터의 합의 크기의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

구 $x^2+y^2+z^2=6$의 중심을 $O(0,0,0)$이라 하고, 원 C의 중심을 C라 하면 원점 O에서 평면 $x+2z-5=0$에 내린 수선의 발이 점 C이다.

평면 $x+2z-5=0$의 법선벡터를 $\vec{n}$이라 하면

$\vec{n}=(1,0,2)$

이므로 원점 O를 지나고 평면 $x+2z-5=0$에 수직인 직선의 방정식은

$\frac{x}{1}=\frac{z}{2}$, $y=0$

$\frac{x}{1}=\frac{z}{2}=t$ (t는 실수)라 하면

$x=t$, $z=2t$

이므로 이를 $x+2z-5=0$에 대입하면

$t+4t-5=0$

에서 $t=1$이다.

따라서 점 C의 좌표는 $(1,0,2)$이다.

한편, 원점 O와 평면 $x+2z-5=0$ 사이의 거리를 d_1이라 하면

$$d_1 = \frac{|-5|}{\sqrt{1^2+0^2+2^2}} = \sqrt{5}$$

이므로 원 C의 반지름의 길이는

$\sqrt{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{5})^2}=1$

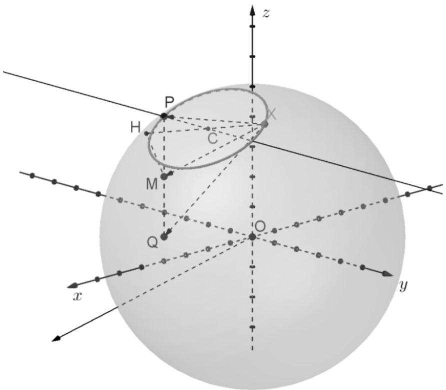
이때 평면 $x+2z-5=0$은 y축과 평행하므로 원 C도 y축과 평행하다.

따라서 점 C를 지나고 y축에 평행한 직

선과 원 C가 만나는 두 점 중 y좌표가 작은 점이 점 P이다.
따라서 점 P의 좌표는 $(1,-1,2)$이고,
점 Q의 좌표는 $(1,-1,0)$이다.
한편, $|\overrightarrow{PX}+\overrightarrow{QX}|=|\overrightarrow{XP}+\overrightarrow{XQ}|$이므로 선분 PQ의 중점을 M이라 하면

$$|\overrightarrow{XP}+\overrightarrow{XQ}|=2|\overrightarrow{XM}|$$

이다.



점 M의 좌표는 $(1,-1,1)$이다.
점 M과 평면 $x+2z-5=0$ 사이의 거리를 d_2라 하면

$$d_2=\frac{|1+2-5|}{\sqrt{1^2+0^2+2^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

이다.
따라서 점 M에서 평면 $x+2z-5=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{MH}=d_2=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

이므로

$$\overline{HC}=\sqrt{\overline{MC}^2-\overline{MH}^2}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{2})^2-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$$

이때 원 C 위의 점 X에 대하여 $\overline{HX}$의 최댓값은

$$\overline{HC}+1=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}+1$$

이므로 $\overline{MX}^2$의 최댓값은

$$\overline{MH}^2+(\overline{HC}+1)^2$$

$$=\frac{4}{5}+\frac{6}{5}+\frac{2\sqrt{30}}{5}+1$$

$$=3+\frac{2\sqrt{30}}{5}$$

이다.
따라서 $|\overrightarrow{XP}+\overrightarrow{XQ}|^2=4|\overrightarrow{XM}|^2$의 최댓값은

$$4\left(3+\frac{2\sqrt{30}}{5}\right)=12+\frac{8\sqrt{30}}{5}$$

이므로

$$a=12,\ b=\frac{8}{5}$$

따라서

$$10(a+b)=120+16=136$$

이다.

정답 136

17

출제의도 : 벡터의 내적을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(4,1)\cdot(-2,k)$

$=4\times(-2)+1\times k$

$=-8+k=0$

따라서 $k=8$

정답 8

18

[출제의도] 벡터의 내적과 벡터의 크기 사이의 관계를 이해한다.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ 이므로 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$ 이다.

선분 BC의 중점을 M이라 하면

$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|2\overrightarrow{AM}|=4$ 이므로 $|\overrightarrow{AM}|=2$

따라서 직각삼각형 ABM에서

$\overline{BM}=\sqrt{\overline{AM}^2-\overline{AB}^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$ 이므로

$|\overrightarrow{BC}|=2|\overrightarrow{BM}|=2\overline{BM}=2\sqrt{3}$

[다른 풀이]

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ 에서

$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-|\overrightarrow{AB}|^2=0$

이고 $\overline{AB}=1$ 이므로

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|^2=1$

$|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}|^2-4\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=4^2-4=12$

따라서 $|\overrightarrow{BC}|=2\sqrt{3}$

19

[출제의도] 두 평면벡터의 내적 이해하기

조건 (가)에서 $|\overrightarrow{AH}|=2k$, $|\overrightarrow{HB}|=3k\ (k>0)$

라 하면 $|\overrightarrow{AB}|=5k$

조건 (나)에서 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AH}|\times|\overrightarrow{AB}|=40$

$2k\times 5k=40$ 이므로 $k=2$ 이고 $|\overrightarrow{AB}|=10$

조건 (다)에서 삼각형 ABC 의 넓이는 30 이므로

$\frac{1}{2}\times|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{CH}|=30$ 에서 $|\overrightarrow{CH}|=6$

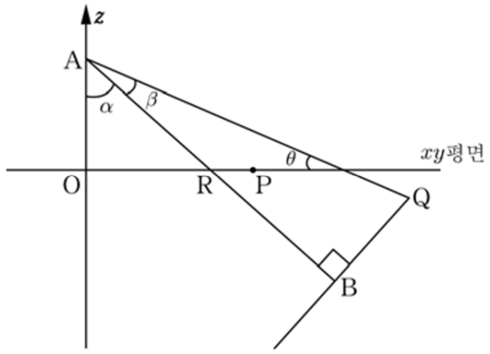
$\angle AHC=\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CH}=|\overrightarrow{CH}|^2=36$

20

[출제의도] 공간벡터의 성질을 이용하여 두 벡터의 내적의 최댓값을 구하는 문제를 해결한다.

두 벡터 $\overrightarrow{OP}$ 와 $\overrightarrow{AQ}$ 의 크기가 일정하므로

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AQ}$ 는 두 벡터가 이루는 각이 최소일 때 최댓값을 갖는다. 다섯 개의 점 O, A, B, P, Q 가 한 평면에 있도록 그림으로 나타내면 다음과 같고 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AQ}$ 는 $|\overrightarrow{OP}|$ 와 선분 AQ 의 xy 평면으로의 정사영의 길이의 곱과 같다.



그림에서 $\angle BAO=\alpha$, $\angle QAB=\beta$, xy 평면과 직선 AQ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)=\sin(\alpha+\beta)$ 이므로 선분 AQ 의 xy 평면으로의 정사영의 길이는 $|\overrightarrow{AQ}|\sin(\alpha+\beta)$ 이다.

$\overline{AB}=\sqrt{2^2+4^2+(-4)^2}=6$, $\overline{BQ}=2$ 이므로

$\overline{AQ}=2\sqrt{10}$

그러므로 $\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\beta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

방향벡터가 $(2, 4, -4)$ 이고 점 $A(0, 0, 2)$ 를 지나는 직선 AB 의 방정식은 $\frac{x}{2}=\frac{y}{4}=\frac{z-2}{-4}$ 이다.

이 직선과 xy 평면과의 교점을 R 라 하면 직선 AB 의 방정식에서 $z=0$ 일 때이므로

점 R 의 좌표는 $(1, 2, 0)$ 이다.

$\overline{AR}=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3$, $\overline{AO}=2$ 이므로 $\overline{OR}=\sqrt{5}$

그러므로 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\cos\alpha=\frac{2}{3}$

따라서

$|\overrightarrow{AQ}|\sin(\alpha+\beta)$

$=2\sqrt{10}\times\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}+\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$

$=\dfrac{6\sqrt{5}+4}{3}$

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AQ}=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{AQ}|\cos\theta$

$=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{AQ}|\sin(\alpha+\beta)$

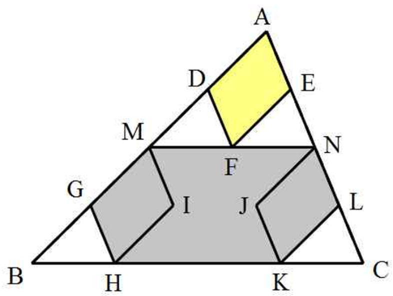
$=3\times\dfrac{6\sqrt{5}+4}{3}=6\sqrt{5}+4$

따라서 $a=4,\ b=6$ 이므로 $ab=4\times6=24$

21

출제의도 : 벡터의 위치벡터를 이용하여 점이 나타내는 영역의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



두 선분 AB, AC의 중점을 각각 M, N이라 하고, 두 선분 AM, AN, MN의 중점을 각각 D, E, F라 하자. 또, 두 선분 MB, NC의 중점을 각각 G, L이라 하자.

이때 $\overrightarrow{AS}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AP}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AR}$라 하면 점 S는 위 그림의 평행사변형 ADFE의 내부(경계선 포함)에 있다.

또, 점 Q가 점 B에 있으면

$\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AM}$이므로 점 X는 위 그림의 평행사변형 MGHI의 내부(경계선 포함)에 있다.

마찬가지로 점 Q가 점 C에 있으면

$\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AN}$이므로 점 X는 위 그림의 평행사변형 NJKL의 내부(경계선 포함)에 있다.

한편, $\overrightarrow{AT}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$라 하면 점 T는 선분 MN 위를 움직이므로 점 X가 나타내는 영역은 위 그림의 육각형 MGHKLN의 내부(경계선 포함)에 있다.

이때 삼각형 AMN의 넓이는 $\dfrac{9}{4}$이고, 두 삼각형 GBH, LKC의 넓이는 각각 $\dfrac{9}{16}$이므로 구하는 넓이는

$9-\dfrac{9}{4}-2\times\dfrac{9}{16}=\dfrac{45}{8}$

따라서 $p=8,\ q=45$ 이므로

$p+q=53$

정답 53

[다른 풀이]

세 변 AB, BC, CA의 중점을 각각 M, K, N이라 하자.

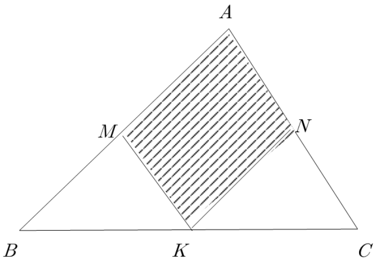
또한,

$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AR})=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AP}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AR}\cdots㉠$

라 하면 $\overrightarrow{AD}$는 선분 AM, AN 위의 두 점을 P′, R′이라 할 때,

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AP'}+\overrightarrow{AR'}$

이므로 ㉠이 나타내는 점 D는 그림과 같이 빗금친 평행사변형의 내부(경계선 포함)에 있다.



$\overrightarrow{AX}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AR})+\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$

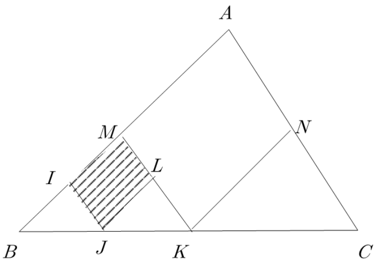
$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AR})\right\}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$

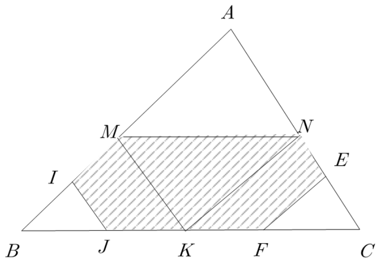
$=\frac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AQ}}{2}$

따라서 점 X는 선분 DQ의 중점이다.

이때 점 Q가 B에 있을 경우 세 선분 BM, BK, MK의 중점을 각각 I, J, L이라 하면 점 X가 존재하는 영역은 그림과 같다.



따라서 점 Q가 변 BC 위를 움직이므로 두 변 CN, CL의 중점을 각각 E, F라 하면 위의 빗금친 영역 IJLM이 움직이는 영역이 점 X가 존재하는 영역으로 다음 그림과 같다.



이때, 삼각형 MKN의 넓이는

$9\times\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$

사각형 IJLM의 넓이는

$\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{27}{16}$

사각형 LFEN의 넓이도 $\frac{27}{16}$이므로 구하고자 하는 점 X가 나타내는 영역의 넓이는

$\frac{9}{4}+2\times\frac{27}{16}=\frac{45}{8}$

즉, $p=8$, $q=45$ 이므로

$p+q=53$

22

출제의도 : 공간벡터의 크기와 내적을 이해하고 이를 활용할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P가 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\le 4$를 만족시키므로 점 P는 xy평면 위에 있으며 중심이 원점이고 반지름의 길이가 4인 원의 경계 및 내부이다.

또, 점 Q가 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=1$이고,

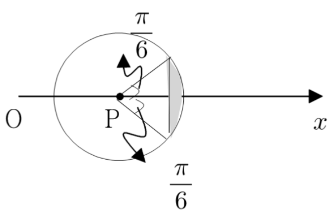
$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\ge\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|\,|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cos\theta\ge\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

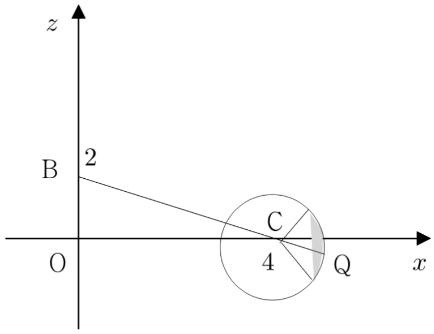
$\cos\theta\ge\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0\le\theta\le\dfrac{\pi}{6}$

그러므로 점 Q는 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 구 위에 있으며 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$가 이루는 각의 크기 θ가 $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{6}$를 만족시키는 점으로 그림과 같다.



이때, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$의 크기가 최대이려면 점 P가 $\mathrm{C}(4,0,0)$일 때이고 다음 그림과 같이 두 점 B, C를 지나는 직선이 중심이 C이고 반지름의 길이가 1인 구와 만나는 점일 때이다.



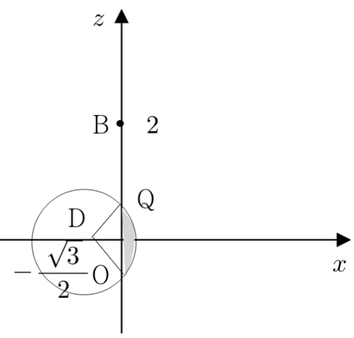
그러므로 $|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|$의 최댓값은

$M=\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CQ}}$

$=\sqrt{(4-0)^2+(0-0)^2+(0-2)^2}+1$

$=2\sqrt{5}+1$

또, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$의 크기가 최소이려면 그림과 같이 점 P가 $\mathrm{D}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},0,0\right)$일 때이고 점 Q는 중심이 D이고 반지름의 길이가 1인 구가 z축과 만나는 점일 때이다.



그러므로 $|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}$이므로

$m=\overline{\mathrm{BQ}}$

$=2-\frac{1}{2}$

$=\frac{3}{2}$

따라서

$M+m=(1+2\sqrt{5})+\frac{3}{2}$

$=\frac{5}{2}+2\sqrt{5}$

이므로

$6(a+b)=6\times\left(\frac{5}{2}+2\right)$

$=27$

정답 27

23

출제의도 : 두 벡터가 서로 수직임을 이용하여 두 벡터의 내적을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 벡터 $6\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$가 서로 수직이므로

$(6\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$

$6|\vec{a}|^2-5\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2=0$

따라서 $6\times1-5\vec{a}\cdot\vec{b}-9=0$에서

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{3}{5}$

정답 ②

24

출제의도 : 좌표공간에서 두 직선이 수직으로 만날 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직선 $\frac{x-1}{2}=y+1=z$와 직선 l이 점 $(1, a, 0)$에서 만나므로 이 점을 직선 $\frac{x-1}{2}=y+1=z$에 대입하면

$0=a+1=0$

$a=-1$

또, 주어진 두 직선이 수직이므로 두 방향벡터가 수직이다.

이때, 직선 $\frac{x-1}{2}=y+1=z$의 방향벡터는

$\overrightarrow{d_1}=(2, 1, 1)$

또, 직선 l의 방향벡터는

$\overrightarrow{d_2}=(b, -3, -2)-(1, -1, 0)$

$=(b-1, -2, -2)$

두 벡터 $\overrightarrow{d_1}$, $\overrightarrow{d_2}$가 수직이므로

$\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}=(2, 1, 1)\cdot(b-1, -2, -2)$

$=2(b-1)+(-2)+(-2)$

$2b-6=0$

$b=3$

따라서,

$a+b=(-1)+3=2$

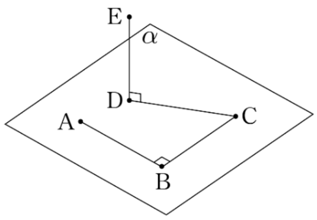
정답 ①

25

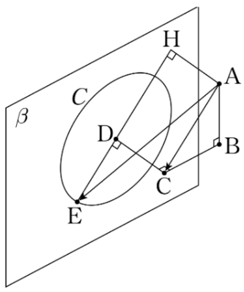
[출제의도] 공간에서 직선의 위치관계를 이해하고 벡터의 크기와 내적을 추측한다.

ㄱ. $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{CE}}=\sqrt{2}$ 이므로 두 점 A, E는 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 구 위의 점이다. 따라서 선분 AE가 구의 지름이 될 때 $|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|$ 는 최대이고 최댓값은 $2\sqrt{2}$ 이다. (참)

ㄴ. 그림과 같이 네 점 A, B, C, D가 평면 α 위에 있고 직선 DE가 평면 α와 수직이면 $\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{DE}}$ 이지만 두 선분 BC, CD가 수직이 아닐 때도 있다. (거짓)



ㄷ. $\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{CD}}$ 이고 $\overline{\mathrm{BC}}\perp\overline{\mathrm{CD}}$ 이므로 직선 CD는 평면 ABC와 수직이다. $\overline{\mathrm{CD}}\perp\overline{\mathrm{DE}}$ 이고 $\overline{\mathrm{DE}}=1$ 이므로 점 E는 직선 CD와 수직이고 점 D를 지나는 평면 β 위에서 점 D를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 C 위의 점이다.



점 A에서 평면 β에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{HD}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AH}}+\overrightarrow{\mathrm{HD}}+\overrightarrow{\mathrm{DE}})$

$=\overrightarrow{\mathrm{HD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}+\overrightarrow{\mathrm{HD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HD}}+\overrightarrow{\mathrm{HD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}}$

$=0+|\overrightarrow{\mathrm{HD}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{HD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}} \quad =2+\overrightarrow{\mathrm{HD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}}$

$\leq 2+\sqrt{2}\times1\times\cos0=2+\sqrt{2}$

(단, 등호는 $\overrightarrow{\mathrm{HD}}=k\overrightarrow{\mathrm{DE}}\,(k>0)$일 때 성립한다.) (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

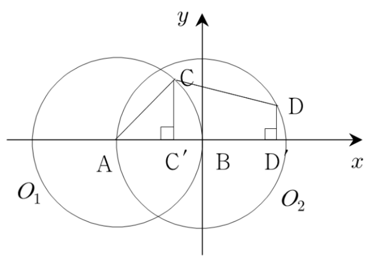
26

출제의도 : 평면벡터의 내적의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

좌표평면에서 두 점 A, B의 좌표를 각각

$(-5,0)$, $(0,0)$이라 하자.



점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 C′이라 하자. 점 C는 원 O_1 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{AC}}=5$이고, (가)에서 $\cos(\angle\mathrm{CAB})=\frac{3}{5}$이므로

$\overline{\mathrm{AC'}}=3$이다. 이때 $\overline{\mathrm{C'B}}=2$이므로 $\mathrm{C'}(-2,0)$이고 $\mathrm{C}(-2,4)$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=30$에서 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$가 이루는 각을 θ라 하면

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{CD}}|\cos\theta=30$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=5$이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|\cos\theta=6$

점 D에서 x축에 내린 수선의 발을 D′이라 하면 $|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|\cos\theta=|\overrightarrow{C'D'}|=6$이다.

따라서 $\mathrm{D'}(4,0)$이다. $\overline{\mathrm{BD}}=5$이고, $|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|<9$이므로 $\mathrm{D}(4,3)$이다.

선분 CD를 지름으로 하는 원의 중심을 E, 반지름의 길이를 r라 하면 $\mathrm{E}\left(1, \frac{7}{2}\right)$이고

$r=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{CD}}=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+(-1)^2}=\frac{\sqrt{37}}{2}$

선분 AB의 중점을 M이라 하면 $\mathrm{M}\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$이고

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$

$=(\overrightarrow{\mathrm{PM}}+\overrightarrow{\mathrm{MA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{PM}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}})$

$=|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{PM}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}})+\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}$

$=|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{PM}}\cdot\vec{0}-|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2$

$=|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2-\frac{25}{4}$

$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|$의 최댓값은

$|\overrightarrow{\mathrm{EM}}|+r=\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{2}\right)^2}+\frac{\sqrt{37}}{2}$

$=\frac{7\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{37}}{2}$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최댓값은

$\left(\frac{7\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{37}}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$

$=\left(\frac{49}{2}+\frac{7\sqrt{74}}{2}+\frac{37}{4}\right)-\frac{25}{4}$

$=\frac{55}{2}+\frac{7}{2}\sqrt{74}$

$a=\frac{55}{2}$, $b=\frac{7}{2}$이므로

$a+b=\frac{55}{2}+\frac{7}{2}=31$

정답 31

27

출제의도 : 백터의 내적을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\overline{\mathrm{AB}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$

$=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$

$=|\vec{b}-\vec{a}|$

이때,

$|\vec{b}-\vec{a}|^2=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})$

$=|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2$

$=2-2\times1+2$

$=2$

이므로

$\overline{\mathrm{AB}}^2=2$ ...... ①

$\overline{\mathrm{BC}}=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$

$=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$

$=|\vec{c}-\vec{b}|$

이때,

$|\vec{c}-\vec{b}|^2=(\vec{c}-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{b})$

$=|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=2-2\times0+2$

$=4$

이므로

$\overline{\mathrm{BC}}^2=4$ ...... ②

$\overline{\mathrm{AC}}=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$

$=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$

$=|\vec{c}-\vec{a}|$

이때,

$|\vec{c}-\vec{a}|^2=(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})$

$=|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2$

$=2-2\times(-\sqrt{2})+2$

$=4+2\sqrt{2}$

이므로

$\overline{\mathrm{AC}}^2=4+2\sqrt{2}$ ...... ③

따라서 ①, ②, ③에서

$\overline{\mathrm{AB}}^2<\overline{\mathrm{BC}}^2<\overline{\mathrm{AC}}^2$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}<\overline{\mathrm{BC}}<\overline{\mathrm{AC}}$

정답 ②

28

출제의도 : 좌표공간에서 선분의 내분점을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
두 점 $A(1,\ 6,\ 4)$, $B(a,\ 2,\ -4)$에 대하여 선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표가 $(2,\ 5,\ 2)$이므로

$\frac{1\times a+3\times 1}{1+3}=2$

이다. 즉, $a+3=8$이므로

$a=5$

정답 ③

29

[출제의도] 두 평면벡터의 내적 이해하기

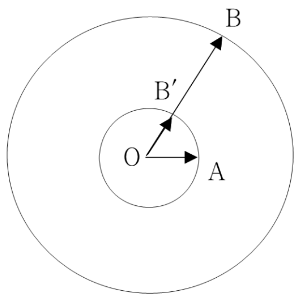
$$\begin{aligned}|2\vec{a}+\vec{b}|^2 &= (2\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})\\ &= 4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\\ &= 4|\vec{a}|^2+4|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta+|\vec{b}|^2\\ &= 13+12\cos\theta=16\end{aligned}$$

따라서 $\cos\theta=\frac{1}{4}$

30

출제의도 : 벡터의 내적의 정의와 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :
그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원과 선분 OB가 만나는 점을 B′이라 하고 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB'}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$라 하자.



조건 (가)에서 $\overrightarrow{OB}=3\vec{b}$이므로

$(3\vec{b})\cdot\vec{p}=3\vec{a}\cdot\vec{p}$

$\vec{a}\cdot\vec{p}=\vec{b}\cdot\vec{p}$ ---㉠

또, 조건 (나)에서 $|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2=20$이므로

$|\vec{a}-\vec{p}|^2+|3\vec{b}-\vec{p}|^2=20$

$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2+9|\vec{b}|^2-6\vec{b}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2=20$

이때, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$이므로

$-\vec{a}\cdot\vec{p}-3\vec{b}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2=5$

㉠에서 $\vec{b}\cdot\vec{p}=\vec{a}\cdot\vec{p}$이므로 대입하면

$|\vec{p}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{p}=5$

$|\vec{p}|^2 = 4\vec{a}\cdot\vec{p}+5$ ----㉡

한편,

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} = (\vec{a}-\vec{p})\cdot(3\vec{b}-\vec{p})$

$= 3\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{p}-3\vec{b}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2$

$= 3\vec{a}\cdot\vec{b}-4\vec{a}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2$--㉢

㉡을 대입하면

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} = 3\vec{a}\cdot\vec{b}+5$

이때 위의 내적의 값이 최소가 되는 경우는 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$가 이루는 각의 크기가 π일 때이고 최솟값은 2이다.

한편, ㉠에서 두 벡터 $\vec{a}, \vec{p}$가 이루는 각의 크기를 $\theta(0 \le \theta \le \pi)$, 두 벡터 $\vec{b}, \vec{p}$가 이루는 각의 크기를 $\theta'(0 \le \theta' \le \pi)$이라 하면

$|\vec{a}||\vec{p}|\cos\theta = |\vec{b}||\vec{p}|\cos\theta'$

$\cos\theta = \cos\theta'$

$\theta = \theta'$

그러므로 ㉢의 내적의 값이 최소일 때는 두 벡터 $\vec{a}, \vec{p}$가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$일 때이므로 ㉡에서

$|\vec{p}|^2 = 5$

$|\vec{p}| = \sqrt{5}$

따라서,

$m+k^2 = 2+(\sqrt{5})^2 = 7$

정답 7