

2019년 수학 모의고사 mixed by MPP

수학 영역

1

17년 07월 29번 가형

1. 평면 위에 반지름의 길이가 13인 원 C 가 있다. 원 C 위의 두 점 A, B 에 대하여 $\overline{AB} = 24$ 이고, 이 평면 위의 점 P 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|\overrightarrow{AP}| = 5$
 (나) \overrightarrow{AB} 와 \overrightarrow{AP} 가 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, $5\cos\theta$ 는 자연수이다.

원 C 위의 점 Q 에 대하여 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ 의 최댓값을 구하시오. [4점]

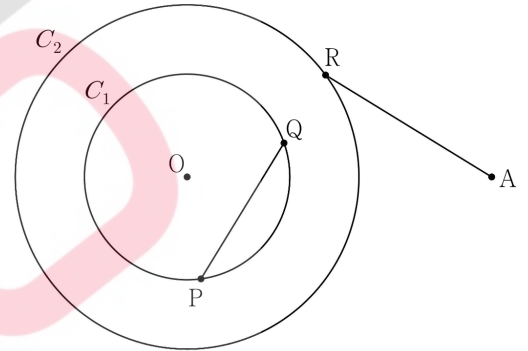
18년 07월 29번 가형

2. 그림과 같이 평면 위에 $\overline{OA} = 2\sqrt{11}$ 을 만족하는 두 점 O, A 와 점 O 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 각각 $\sqrt{5}, \sqrt{14}$ 인 두 원 C_1, C_2 가 있다. 원 C_1 위의 서로 다른 두 점 P, Q 와 원 C_2 위의 점 R 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 양수 k 에 대하여 $\overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{QR}$
 (나) $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AR} = 0$ 이고 $\overline{PQ} : \overline{AR} = 2 : \sqrt{6}$

원 C_1 위의 점 S 에 대하여 $\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AS}$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, Mm 의 값을 구하시오.

(단, $\frac{\pi}{2} < \angle ORA < \pi$) [4점]



Math Power Plant
<https://mathpowerplant.azurewebsites.net>

수학 영역

2

19년 06월 29번 가형

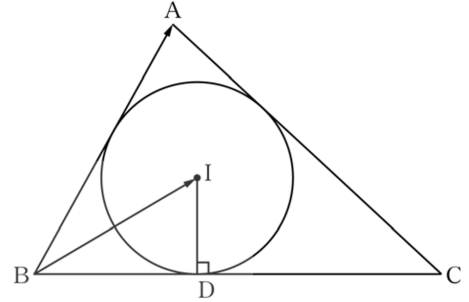
3. 좌표평면에서 곡선 $C: y = \sqrt{8-x^2} (2 \leq x \leq 2\sqrt{2})$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{OQ} = 2$, $\angle POQ = \frac{\pi}{4}$ 를 만족시키고 직선 OP의 아랫부분에 있는 점을 Q라 하자.
 점 P가 곡선 C 위를 움직일 때, 선분 OP 위를 움직이는 점 X와 선분 OQ 위를 움직이는 점 Y에 대하여

$$\overline{OZ} = \overline{OP} + \overline{OX} + \overline{OY}$$

를 만족시키는 점 Z가 나타내는 영역을 D라 하자.
 영역 D에 속하는 점 중에서 y축과의 거리가 최소인 점을 R라 할 때, 영역 D에 속하는 점 Z에 대하여 $\overline{OR} \cdot \overline{OZ}$ 의 최댓값과 최솟값의 합이 $a+b\sqrt{2}$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, a와 b는 유리수이다.) [4점]

16년 10월 25번 가형

4. 그림과 같이 $\overline{AB} = 15$ 인 삼각형 ABC에 내접하는 원의 중심을 I라 하고, 점 I에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라 하자. $\overline{BD} = 8$ 일 때, $\overline{BA} \cdot \overline{BI}$ 의 값을 구하시오. [3점]



16년 09월 03번 가형

5. 좌표공간에서 두 점 $A(1, 3, -6)$, $B(7, 0, 3)$ 에 대하여 선분 AB를 2:1로 내분하는 점의 좌표가 $(a, b, 0)$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하시오. [2점]

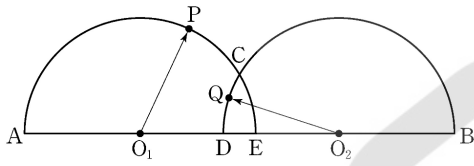
- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

수학 영역

3

16년 06월 28번 가형

6. 그림과 같이 선분 AB 위에 $\overline{AE} = \overline{DB} = 2$ 인 두 점 D, E가 있다. 두 선분 AE, DB를 각각 지름으로 하는 두 반원의 호 AE, DB가 만나는 점을 C라 하고, 선분 AB 위에 $\overline{O_1A} = \overline{O_2B} = 1$ 인 두 점을 O_1, O_2 라 하자.
호 AC 위를 움직이는 점 P와 호 DC 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{O_2Q}|$ 의 최솟값이 $\frac{1}{2}$ 일 때, 선분 AB의 길이는 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, $1 < \overline{O_1O_2} < 2$ 이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



18년 09월 16번 가형

7. 좌표평면 위의 두 점 $A(6, 0), B(8, 6)$ 에 대하여 점 P가

$$|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}| = \sqrt{10}$$

을 만족시킨다.

$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP}$ 의 값이 최대가 되도록 하는 점 P를 Q라 하고, 선분 AB의 중점을 M이라 할 때, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{MQ}$ 의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

- ① $\frac{6\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{9\sqrt{10}}{5}$ ③ $\frac{12\sqrt{10}}{5}$
④ $3\sqrt{10}$ ⑤ $\frac{18\sqrt{10}}{5}$

Math Power Plant
<https://mathpowerplant.azurewebsites.net>

수학 영역

4

18년 07월 24번 가형

8. 두 벡터 $\vec{a} = (4t - 2, -1)$, $\vec{b} = \left(2, 1 + \frac{3}{t}\right)$ 에 대하여 $|\vec{a} + \vec{b}|^2$ 의 최솟값을 구하시오. (단, $t > 0$) [3점]

16년 11월 29번 가형

10. 한 모서리의 길이가 4인 정사면체 ABCD에서 삼각형 ABC의 무게중심을 O, 선분 AD의 중점을 P라 하자. 정사면체 ABCD의 한 면 BCD 위의 점 Q에 대하여 두 벡터 \vec{OQ} 와 \vec{OP} 가 서로 수직일 때, $|\vec{PQ}|$ 의 최댓값은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

17년 07월 03번 가형

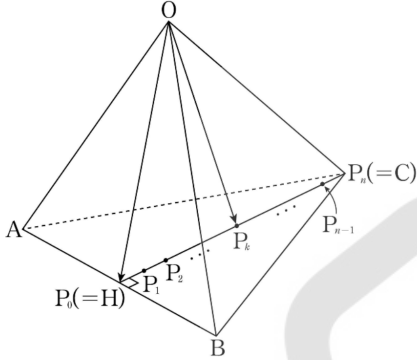
9. 좌표공간의 두 점 $A(-1, 0, 1)$, $B(2, 1, -2)$ 에 대하여 선분 AB의 길이는? [2점]

- ① $3\sqrt{2}$ ② $\sqrt{19}$ ③ $2\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{21}$ ⑤ $\sqrt{22}$

수학 영역

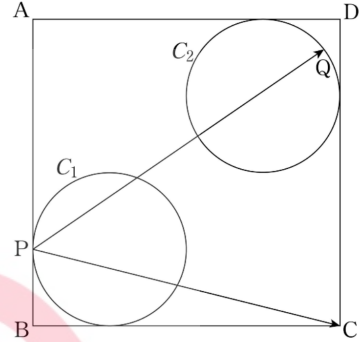
11. **17년 10월 18번 가형**
 그림과 같이 한 모서리의 길이가 6인 정사면체 OABC가 있다. 점 C에서 모서리 AB에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 HC를 n 등분하여 각 분점을 차례로 $P_0(=H), P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n(=C)$ 라 하자.

$S_n = \sum_{k=1}^n \vec{OH} \cdot \vec{OP}_k$ 라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}$ 의 값은?
 (단, n 은 2 이상의 자연수이다.) [4점]



- ① $\frac{9}{2}$ ② 9 ③ $\frac{27}{2}$ ④ 18 ⑤ $\frac{45}{2}$

12. **17년 10월 28번 가형**
 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD의 내부에 선분 AB와 선분 BC에 접하고 반지름의 길이가 1인 원 C_1 과 선분 AD와 선분 CD에 접하고 반지름의 길이가 1인 원 C_2 가 있다. 원 C_1 과 선분 AB의 접점을 P라 하고, 원 C_2 위의 한 점을 Q라 하자.
 $\vec{PC} \cdot \vec{PQ}$ 의 최댓값을 $a + \sqrt{b}$ 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.
 (단, a 와 b 는 유리수이다.) [4점]



Math Power Plant
<https://mathpowerplant.azurewebsites.net>

수학 영역

18년 09월 29번 가형

13. 좌표공간에서 점 $A\left(3, \frac{1}{2}, 2\right)$ 와 평면 $z=1$ 위의 세 점 P_1, P_2, P_3 이

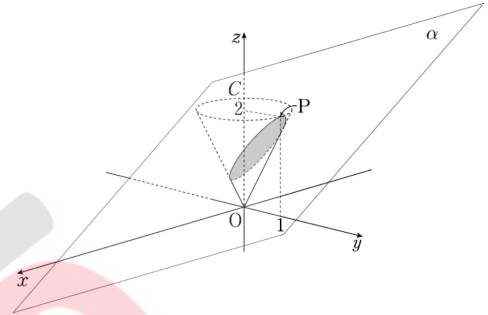
$$\vec{OA} \cdot \vec{OP}_1 = \frac{11}{3}, \vec{OA} \cdot \vec{OP}_2 = 1, \vec{OA} \cdot \vec{OP}_3 = -\frac{7}{4}$$

을 만족시킨다. 점 $(0, k, 0)$ 을 지나고 방향벡터가 $(1, -6, 0)$ 인 직선을 l 이라 하고, 직선 l 에 의해 나누어지는 xy 평면의 두 영역을 각각 α, β 라 하자.

세 점 P_1, P_2, P_3 에서 xy 평면에 내린 수선의 발이 모두 α 에만 포함되거나 모두 β 에만 포함되도록 하는 양의 정수 k 의 최솟값을 m , 음의 정수 k 의 최댓값을 M 이라 할 때, $m-M$ 의 값을 구하시오. (단, O 는 원점이다.) [4점]

17년 10월 29번 가형

14. 좌표공간에 평면 $z=2$ 위의 원 $C: x^2+y^2=1$ 을 밑면으로 하고 꼭짓점이 원점인 원뿔이 있다. 원 C 와 한 점 $P(0, 1, 2)$ 에서만 만나는 평면 α 가 이 원뿔과 만나서 생길 수 있는 도형 중 한 타원을 S 라 하자. 타원 S 의 xy 평면 위로의 정사영은 장축의 길이가 $\frac{5}{4}$ 인 타원이다. 평면 α 와 z 축이 만나서 생기는 좌표가 $(0, 0, k)$ 일 때, $50k$ 의 값을 구하시오. [4점]



Math Power Plant
<https://mathpowerplant.azurewebsites.net>

수학 영역

15. 17년 09월 19번 가형
 좌표평면에서 원점 O 가 중심이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 세 점 A_1, A_2, A_3 에 대하여

$$|\overrightarrow{OX}| \leq 1 \text{ 이고 } \overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OA_k} \geq 0 \quad (k=1, 2, 3)$$

을 만족시키는 모든 점 X 의 집합이 나타내는 도형을 D 라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

- ㄱ. $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA_3}$ 이면 D 의 넓이는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.
- ㄴ. $\overrightarrow{OA_2} = -\overrightarrow{OA_1}$ 이고 $\overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OA_1}$ 이면 D 는 길이가 2인 선분이다.
- ㄷ. $\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_2} = 0$ 인 경우에, D 의 넓이가 $\frac{\pi}{4}$ 이면 점 A_3 은 D 에 포함되어 있다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 17년 11월 29번 가형
 좌표공간에 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ 이 평면 $x + 2z - 5 = 0$ 과 만나서 생기는 원 C 가 있다. 원 C 위의 점 중 y 좌표가 최소인 점을 P 라 하고, 점 P 에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 Q 라 하자. 원 C 위를 움직이는 점 X 에 대하여 $|\overrightarrow{PX} + \overrightarrow{QX}|^2$ 의 최댓값은 $a + b\sqrt{30}$ 이다. $10(a+b)$ 의 값을 구하시오. (단, a 와 b 는 유리수이다.) [4점]

수학 영역

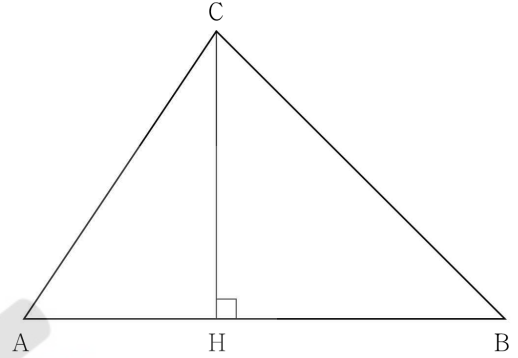
8

16년 06월 23번 가형

17. 두 벡터 $\vec{a} = (4, 1)$, $\vec{b} = (-2, k)$ 에 대하여 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 을 만족시키는 실수 k 의 값을 구하시오. [3점]

16년 07월 19번 가형

19. 그림과 같이 삼각형 ABC에 대하여 꼭짓점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킬 때, $\vec{CA} \cdot \vec{CH}$ 의 값은? [4점]



- (가) 점 H가 선분 AB를 2 : 3으로 내분한다.
 (나) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 40$
 (다) 삼각형 ABC의 넓이는 30이다.

- ① 36 ② 37 ③ 38 ④ 39 ⑤ 40

18년 10월 11번 가형

18. 평면 위에 길이가 1인 선분 AB와 점 C가 있다. $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$ 이고 $|\vec{AB} + \vec{AC}| = 4$ 일 때, $|\vec{BC}|$ 의 값은? [3점]
- ① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ 3 ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ 4

수학 영역

9

16년 10월 29번 가형

20. 좌표공간에서 두 점 $A(0, 0, 2)$, $B(2, 4, -2)$ 에 대하여 두 점 P , Q 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = 0, |\overrightarrow{OP}| = 3$$

$$(나) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BQ} = 0, |\overrightarrow{BQ}| = 2$$

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ 의 최댓값이 $a+b\sqrt{5}$ 일 때, 두 유리수 a , b 에 대하여 ab 의 값을 구하시오. (단, O 는 원점이다.) [4점]

18년 11월 29번 가형

21. 좌표평면에서 넓이가 9인 삼각형 ABC 의 세 변 AB , BC , CA 위를 움직이는 점을 각각 P , Q , R 라 할 때,

$$\overrightarrow{AX} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AR}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$$

를 만족시키는 점 X 가 나타내는 영역의 넓이가 $\frac{q}{p}$ 이다.

$p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[4점]

수학 영역

10

17년 09월 29번 가형

22. 좌표공간에 세 점 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 0, 2)$ 가 있다.
점 P 가 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$, $|\overrightarrow{OP}| \leq 4$ 를 만족시키며 움직일 때,

$$|\overrightarrow{PQ}| = 1, \quad \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{OA} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

을 만족시키는 점 Q 에 대하여 $|\overrightarrow{BQ}|$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M , m 이라 하자. $M+m = a+b\sqrt{5}$ 일 때, $6(a+b)$ 의 값을 구하시오. (단, a , b 는 유리수이다.) [4점]

16년 09월 08번 가형

23. 두 벡터 \vec{a} , \vec{b} 에 대하여 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 3$ 이고, 두 벡터 $6\vec{a} + \vec{b}$ 와 $\vec{a} - \vec{b}$ 가 서로 수직일 때, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{3}{10}$ ② $-\frac{3}{5}$ ③ $-\frac{9}{10}$
④ $-\frac{6}{5}$ ⑤ $-\frac{3}{2}$

17년 09월 13번 가형

24. 좌표공간에서 직선 $\frac{x-1}{2} = y+1 = z$ 와 직선 l 이
점 $(1, a, 0)$ 에서 수직으로 만난다. 직선 l 이 점 $(b, -3, -2)$ 를
지날 때, $a+b$ 의 값은? [3점]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

수학 영역

18년 10월 20번 가형

25. 공간에서 서로 다른 5개의 점 A, B, C, D, E가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = 1$
 (나) $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\overline{CD} \perp \overline{DE}$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

- ㄱ. $|\overrightarrow{AE}|$ 의 최댓값은 $2\sqrt{2}$ 이다.
 ㄴ. $\overline{AB} \perp \overline{DE}$ 이면 $\overline{BC} \perp \overline{CD}$ 이다.
 ㄷ. $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ 이고 $\overline{BC} \perp \overline{CD}$ 이면 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE}$ 의 최댓값은 $1+2\sqrt{2}$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

18년 06월 29번 가형

26. 좌표평면 위에 $\overline{AB} = 5$ 인 두 점 A, B를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 두 원을 각각 O_1, O_2 라 하자. 원 O_1 위의 점 C와 원 O_2 위의 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $\cos(\angle CAB) = \frac{3}{5}$
 (나) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 30$ 이고 $|\overrightarrow{CD}| < 9$ 이다.

선분 CD를 지름으로 하는 원 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최댓값이 $a+b\sqrt{74}$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 유리수이다.) [4점]

수학 영역

12

27. 16년 11월 16번 가형
 좌표공간에서 원점에 대한 세 점 A, B, C의 위치벡터를 차례로 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 라 할 때, 이들 벡터 사이의 내적을 표로 나타내면 다음과 같다.

\cdot	\vec{a}	\vec{b}	\vec{c}
\vec{a}	2	1	$-\sqrt{2}$
\vec{b}	1	2	0
\vec{c}	$-\sqrt{2}$	0	2

예를 들어, $\vec{a} \cdot \vec{c} = -\sqrt{2}$ 이다. 세 점 A, B, C에 대하여 두 점 사이의 거리의 대소 관계로 옳은 것은? [4점]

- ① $\overline{AB} < \overline{AC} < \overline{BC}$
- ② $\overline{AB} < \overline{BC} < \overline{AC}$
- ③ $\overline{AC} < \overline{AB} < \overline{BC}$
- ④ $\overline{BC} < \overline{AB} < \overline{AC}$
- ⑤ $\overline{BC} < \overline{AC} < \overline{AB}$

28. 17년 11월 03번 가형
 좌표공간의 두 점 A(1, 6, 4), B(a, 2, -4)에 대하여 선분 AB를 1:3으로 내분하는 점의 좌표가 (2, 5, 2)이다. a의 값은? [2점]

- ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

29. 16년 07월 09번 가형
 두 평면벡터 \vec{a}, \vec{b} 가

Math Power Plant

<https://mathpowerplant.azurewebsites.net/> $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=3, |2\vec{a}+\vec{b}|=4$

를 만족시킬 때, 두 평면벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 이루는 각을 θ 라 하자 $\cos\theta$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{3}{16}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{5}{16}$ ⑤ $\frac{3}{8}$

수학 영역

13

17년 06월 29번 가형

30. 좌표평면에서 중심이 O 이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 한 점을 A , 중심이 O 이고 반지름의 길이가 3인 원 위의 한 점을 B 라 할 때, 점 P 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} = 3\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}$$

$$(나) |\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 = 20$$

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최솟값은 m 이고 이때 $|\overrightarrow{OP}| = k$ 이다. $m+k^2$ 의 값을 구하시오. [4점]

Math Power Plant
<https://mathpowerplant.azurewebsites.net>