제 2 교시

수학 영역(나 형)

5지선다형

1. $5^0 \times 25^{\frac{1}{2}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$5^0 \times (5^2)^{\frac{1}{2}} = 5^0 \times 5^1 = 5^1 = 5$

※지수

수열의 극한, 극한.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{9n^2+4n+1}}{2n+5}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{9n^2+4n+1}}{2n+5} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{9+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}}{2+\frac{5}{n}}$

$= \dfrac{\sqrt{9}}{2} = \dfrac{3}{2}$

3. 두 집합

집합

$$A=\{2,\ a\},\ \ B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7\}$$

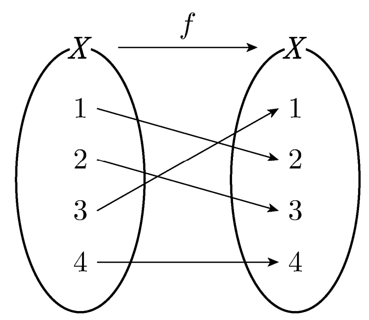
에 대하여 $A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ 일 때, 실수 a의 값은? [2점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

$A\cup B = \{\underbrace{\cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{5}, \cancel{7}}_{B}, \underset{a}{\underset{\updownarrow}{9}}\}$

4. 그림은 함수 $f : X \to X$를 나타낸 것이다.

함수, 역함수



$f(1)+f^{-1}(3)$ 의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$f(1) = 2,\quad f^{-1}(3) = a$

$f(a) = 3$

$a = 2.$

$f(1) + f^{-1}(3) = f(1) + a = 2+2 = 4$

5. 실수 x에 대한 두 조건 p, q가 다음과 같다.

명제

$p: |x-4| = 2,$

$q: x \geq a$

p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 실수 a의 최댓값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

p: $x-4=\pm 2$

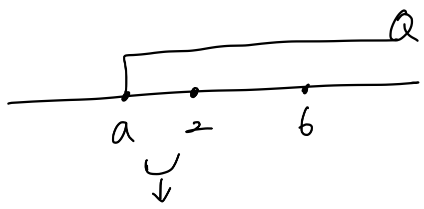
$x = \pm 2 + 4$

$x = 6, 2$

q: $x \geq a$.

$p \rightarrow q$

$P \subset Q$



$a \leq 2$.

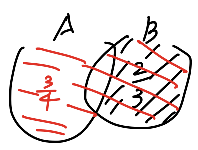
6. 두 사건 A, B에 대하여

확률. 덧셈정리.

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \frac{3}{4},\ \mathrm{P}(A^C \cap B) = \frac{2}{3}$$

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{5}{24}$ ⑤ $\frac{1}{4}$



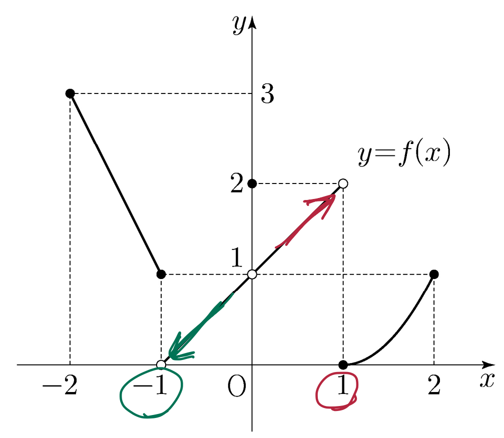
$P(B \cap A^c) = P(B-A) = \frac{2}{3}$

$P(A) = P(A \cup B) - P(B-A)$

$= \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{12}$

7. 닫힌 구간 $[-2, 2]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

함수, 극한.



$\lim\limits_{x \to -1+} f(x) + \lim\limits_{x \to 1-} f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim\limits_{x \to -1+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = 2$

$\therefore 0 + 2 = 2$

8. $\log_2 5 = a$, $\log_5 3 = b$일 때, $\log_5 12$를 a, b로 옳게 나타낸 것은? [3점]

① $\frac{1}{a}+b$ ② $\frac{2}{a}+b$ ③ $\frac{1}{a}+2b$ ④ $a+\frac{1}{b}$ ⑤ $2a+\frac{1}{b}$

$\log_2 5 = a$. $\log_5 3 = b$. $\log_5 12$

$\Rightarrow \log_5 2 = \frac{1}{\log_2 5} = \frac{1}{a}$.

$= \log_5 2^2 \times 3$

$= \log_5 2^2 + \log_5 3$

$= 2\log_5 2 + \log_5 3$

$= 2 \cdot \frac{1}{a} + b = \frac{2}{a} + b$

수열.

9. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} + (-1)^n \times a_n = 2^n$$

을 만족시킨다. a_5의 값은? [3점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

$a_1 = 1$.

$n=1 \Rightarrow a_2 + (-1) \times a_1 = 2^1$

$a_2 = 2 + a_1 = 3$.

$n=2 \Rightarrow a_3 + (-1)^2 \times a_2 = 2^2$

$a_3 + 3 = 4$

$a_3 = 1$

$n=3 \Rightarrow a_4 + (-1)^3 \times a_3 = 2^3$

$a_4 - 1 = 8$.

$a_4 = 9$.

$n=4 \Rightarrow a_5 + (-1)^4 \times a_4 = 2^4$

$a_5 + 9 = 16$

$a_5 = 7$

10. 검은 공 3개, 흰 공 4개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 3개의 공 중에서 적어도 한 개가 검은 공일 확률은? [3점]

확률. 조합., 여사건

여사건

① $\frac{19}{35}$ ② $\frac{22}{35}$ ③ $\frac{5}{7}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{31}{35}$

$1 - P(\text{모두 흰공}) = 1 - \frac{{}_4C_3}{{}_7C_3} = 1 - \frac{\frac{4 \times \cancel{3 \times 2}}{\cancel{3 \times 2 \times 1}}}{\frac{7 \times \cancel{6} \times 5}{\cancel{3 \times 2 \times 1}}} = 1 - \frac{4}{35}$

$= \frac{31}{35}$

유리함수, 무리함수, 점근선

11. 수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-3)=2$를 만족시킨다. 수열, 수열의 합, 무한급수, 극한.

$\lim_{n\to\infty} a_n = r$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+2}-1}{r^n+1}$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{4}$ ② 2 ③ $\frac{9}{4}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-3)=2$ ← 수렴.

⇒ $\lim_{n\to\infty}(2a_n-3)=0$.

$2\lim_{n\to\infty}a_n-3=0$.

$2\lim_{n\to\infty}a_n=3$

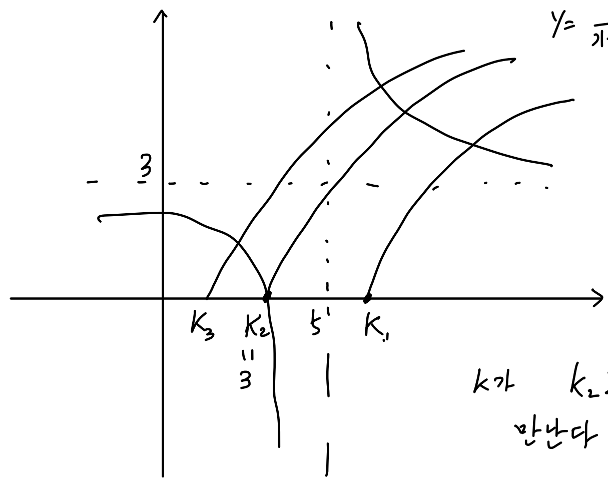
$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{3}{2}=r$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+2}-1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2-\cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^n}}{1+\cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^n}}=\frac{\frac{9}{4}}{1}=\frac{9}{4}$$

12. 두 곡선 $y=\frac{6}{x-5}+3$, $y=\sqrt{x-k}$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 최댓값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7



$y=\frac{6}{x-5}+3$ (점근선: $x=5$, $y=3$)

$y=\sqrt{x-k}$ (정의역: $x\geq k$)

k가 k_2보다 작을때 두점에서 만난다.

⇒ $y=\frac{6}{x-5}+3$

$0=\frac{6}{x-5}+3$ $\quad \frac{6}{x-5}=-3$

$x-5=-2$

$x=3$.

∴ $k\leq 3$.

13. 자연수 n에 대하여 x에 대한 이차방정식

등차수열.

$$x^2 - nx + 4(n-4) = 0$$

이 서로 다른 두 실근 α, $\beta\,(\alpha < \beta)$를 갖고, 세 수 $1, \alpha, \beta$가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, n의 값은? [3점]

① 5 ② 8 ③ 11 ④ 14 ⑤ 17

$\alpha+\beta = n \cdots ①$ $\alpha\beta = 4(n-4) \cdots ②$

$1, \alpha, \beta \Rightarrow$ 등차수열.

$2\alpha = 1+\beta$ ← 등차중항.

$\Rightarrow \beta = 2\alpha - 1$

①, ② 대입.

$3\alpha - 1 = n$, $\alpha(2\alpha-1) = 4(n-4)$

$3\alpha = n+1$

$\alpha = \frac{n+1}{3}$ 대입

$\frac{n+1}{3}\left(\frac{2n+2}{3} - \frac{3}{3}\right) = 4(n-4)$

$(n+1)(2n-1) = 36(n-4)$

$2n^2+2n-n-1 = 36n-144$

$2n^2+n-36n+143=0.$

$2n^2-35n+143=0.$

$2n \quad -13$

$n \quad -11$

$(2n-13)(n-11)=0.$

$n=\frac{13}{2}$ or $n=11$ ← 자연수

14. $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{a}{x^2}\right)^4$의 전개식에서 x^3의 계수가 7일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)\underbrace{\left(x + \frac{a}{x^2}\right)^4}$

① x의 계수 ② x^4의 계수 필요

$\left(x + \frac{a}{x^2}\right)^4$의 일반항: ${}_4C_r\,(x)^r \cdot \left(\frac{a}{x^2}\right)^{4-r}$

$= {}_4C_r \cdot x^r \cdot a^{4-r} \cdot x^{2r-8}$

$= {}_4C_r \cdot a^{4-r} \cdot x^{3r-8}$

① $3r-8=1$

$3r=9$

$r=3$

${}_4C_3 \cdot a^1 = 4a \Rightarrow x^1$의 계수.

② $3r-8=4$

$3r=12$

$r=4$

${}_4C_4\, a^0 = 1 \Rightarrow x^4$의 계수

$x^2 \times 4a\cdot x + \left(-\frac{1}{x}\right) \times x^4$

$= 4ax^3 - x^3 = (4a-1)x^3 = 7x^3$

$\therefore 4a-1=7$

$4a=8$

$a=2.$

확률. 같은것이 있는 순열

15. 두 함수

함수, 연속.

$$f(x)=\begin{cases}-2x+3 & (x<0)\\ -2x+2 & (x\geq 0)\end{cases},$$

$$g(x)=\begin{cases}2x & (x<a)\\ 2x-1 & (x\geq a)\end{cases}$$

가 있다. 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 값은? [4점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$f(x) \Rightarrow x=0$에서 불연속

$g(x) \Rightarrow x=a$에서 불연속

$f(x)\cdot g(x) \Rightarrow x=0,\ x=a$에서 연속성 체크.

i) $a<0$

$\lim_{x\to 0-} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to 0+} f(x)\cdot g(x) = f(0)\cdot g(0)$

$3\times(-1) \neq 2\times(-1) = 2\times(-1)$ (불연속)

ii) $a=0$.

$\lim_{x\to 0-} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to 0+} f(x)\cdot g(x) = f(0)\cdot g(0)$

$3\times 0 \neq 2\times(-1) = 2\times(-1)$ (불연속)

iii) $a>0$

$\lim_{x\to 0-} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to 0+} f(x)\cdot g(x) = f(0)\cdot g(0)$

$3\cdot 0 = 2\cdot 0 = 2\cdot 0$ (연속)

$\lim_{x\to a-} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a+} f(x)\cdot g(x) = f(a)\cdot g(a)$

$\underline{(-2a+2)\times 2a = (-2a+2)\times(2a-1)} = (-2a+2)(2a-1)$

$\Rightarrow$ 연속

성립해야 연속.

$\Rightarrow -2a+2=0$

$-2a=-2$

$a=1$.

16. 한 개의 주사위를 네 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c, d라 하자. 네 수 a, b, c, d의 곱 $a\times b\times c\times d$가 12일 확률은? [4점]

① $\frac{1}{36}$ ② $\frac{5}{72}$ ③ $\frac{1}{9}$ ④ $\frac{11}{72}$ ⑤ $\frac{7}{36}$

$a\times b\times c\times d=12.$

$(1, 1, 2, 6) \xRightarrow{\text{배열방법}} \frac{4!}{2!}=12$

$(1, 1, 3, 4) \Longrightarrow \frac{4!}{2!}=12$

$(1, 2, 2, 3) \Longrightarrow \frac{4!}{2!}=12$

$\left(\frac{1}{6}\right)^4\times(12+12+12) = \left(\frac{1}{6}\right)^4\times 36 = \frac{1}{6^2}=\frac{1}{36}$

등비급수 .

17. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 C_1D_1의 중점을 E_1이라 하고, 직선 A_1B_1 위에 두 점 F_1, G_1을 $\overline{E_1F_1}=\overline{E_1G_1}$, $\overline{E_1F_1}:\overline{F_1G_1}=5:6$이 되도록 잡고 이등변삼각형 $E_1F_1G_1$을 그린다. 선분 D_1A_1과 선분 E_1F_1의 교점을 P_1, 선분 B_1C_1과 선분 G_1E_1의 교점을 Q_1이라 할 때, 네 삼각형 $E_1D_1P_1$, $P_1F_1A_1$, $Q_1B_1G_1$, $E_1Q_1C_1$로 만들어진 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 선분 F_1G_1 위의 두 점 A_2, B_2와 선분 G_1E_1 위의 점 C_2, 선분 E_1F_1 위의 점 D_2를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [4점]

$EF_1 : F_1G_1 = 5:6$

$\sqrt{a^2+4a+20} : 2a+4 = 5:6$

$10a+20 = 6\sqrt{a^2+4a+20}$

$5a+10 = 3\sqrt{a^2+4a+20}$

$25a^2+100a+100 = 9a^2+36a+180$

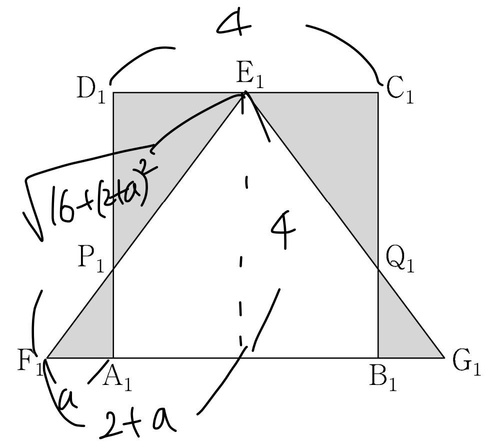
$16a^2+64a-80=0$

$a^2+4a-5=0$

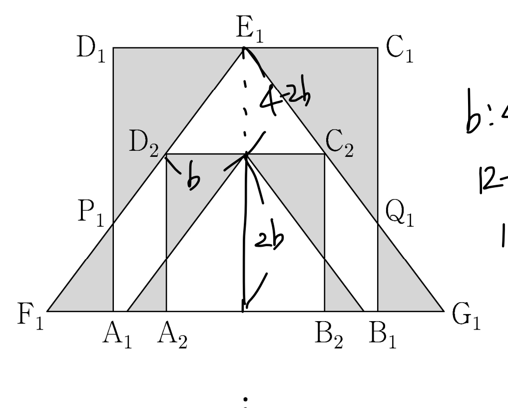
$(a+5)(a-1)=0$

$a=1$

R_1



R_2



$b : 4-2b = 3:4$

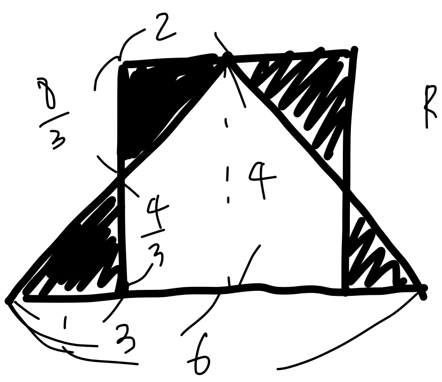
$12-6b=4b$

$10b=12$

$b=\frac{6}{5}$

⋮ ⋮

① $\frac{61}{6}$ ② $\frac{125}{12}$ ③ $\frac{32}{3}$ ④ $\frac{131}{12}$ ⑤ $\frac{67}{6}$



R_1넓이 $=2\times\left(\frac{1}{2}\times1\times\frac{4}{3}\right)+2\times\left(\frac{1}{2}\times2\times\frac{8}{3}\right)$

$=\frac{4}{3}+\frac{16}{3}=\frac{20}{3}$

$R_1 : R_2 = 2 : \frac{6}{5}$ ⇒ 길이 비

$4 : \frac{36}{25}$ 넓이 비

$=1 : \frac{36}{100}$ ⇒ 공비 $r=\frac{36}{100}$

$\dfrac{\frac{20}{3}}{1-\frac{36}{100}}=\dfrac{\frac{20}{3}}{\frac{64}{100}}$

$=\dfrac{5\,\cancel{20}\times\cancel{100}\,25}{3\times\cancel{64}\,16\,4}=\frac{125}{12}$

18. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & (x<0)\\ f(x) & (x\ge 0)\end{cases}$$

이다. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $g(x)$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$보다 작을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

연속가능 해야함.

<보 기>

ㄱ. $g(0)+g'(0)=\frac{1}{2}$

ㄴ. $g(1)<\frac{3}{2}$

ㄷ. 함수 $g(x)$의 최솟값이 0일 때, $g(2)=\frac{5}{2}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & (x<0)\\ x^3+ax^2+bx+c & (x\ge0)\end{cases}$ ⇒ 실수전체에서 연속

⇒ $(c=\frac{1}{2})$

$g'(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ 3x^2+2ax+b & (x\ge0)\end{cases}$ ⇒ 실수전체에서 미분가능

⇒ $(b=0)$

ㄱ. $g(0)=\frac{1}{2}$, $g'(0)=0$. (참)

ㄴ. $g(1)=1+a+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}+a<\frac{3}{2}$ ⇒ $a<0$

$g'(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ 3x^2+2ax & (x\ge0)\end{cases}$ ⇒ 최솟값이 $\frac{1}{2}$이 아니어서 양수 부분에서 극값을 가져야함

$3x^2+2ax=x(3x+2a)$

$x=-\frac{2a}{3}>0$.

$2a<0$ ⇒ $a<0$.

$a<0$ (참)

ㄷ. $g(x)$는 $x=-\frac{2a}{3}$일때 극값, 최솟값 가짐.

$g\left(-\frac{2a}{3}\right)=-\frac{8a^3}{27}+a\cdot\left(-\frac{2a}{3}\right)^2+\frac{1}{2}$

$-\frac{8a^3}{27}+\frac{4a^3}{9}+\frac{1}{2}=0$

$-8a^3+12a^3+\frac{27}{2}=0$.

$4a^3=-\frac{27}{2}$

$a^3=-\frac{27}{8}$ $a=-\frac{3}{2}$.

$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & (x<0)\\ x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2} & (x\ge0)\end{cases}$

$g(2)=8-\frac{3}{2}\times4+\frac{1}{2}$

$=8-6+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

(참)

19. 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8장의 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 그림과 같은 8개의 자리에 각각 한 장씩 임의로 놓을 때, 8 이하의 자연수 k에 대하여 k번째 자리에 놓인 카드에 적힌 수가 k 이하인 사건을 A_k라 하자.

□	□	□	□	□	□	□	□
1번째 자리	2번째 자리	3번째 자리	4번째 자리	5번째 자리	6번째 자리	7번째 자리	8번째 자리

다음은 두 자연수 $m, n\,(1 \le m < n \le 8)$에 대하여 두 사건 A_m과 A_n이 서로 독립이 되도록 하는 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하는 과정이다.

> A_k는 k번째 자리에 k 이하의 자연수 중 하나가 적힌 카드가 놓여 있고, k번째 자리를 제외한 7개의 자리에 나머지 7장의 카드가 놓여 있는 사건이므로
>
> $\mathrm{P}(A_k)=$ (가) $\quad \frac{k}{8}$
>
> 이다.
>
> $A_m \cap A_n\,(m<n)$은 m번째 자리에 m 이하의 자연수 중 하나가 적힌 카드가 놓여 있고, n번째 자리에 n 이하의 자연수 중 m번째 자리에 놓인 카드에 적힌 수가 아닌 자연수가 적힌 카드가 놓여 있고, m번째와 n번째 자리를 제외한 6개의 자리에 나머지 6장의 카드가 놓여 있는 사건이므로
>
> $\mathrm{P}(A_m \cap A_n)=$ (나) $\quad \frac{m}{8}\times\frac{n-1}{7}$
>
> 이다.
>
> 한편, 두 사건 A_m과 A_n이 서로 독립이기 위해서는
>
> $\mathrm{P}(A_m \cap A_n)=\mathrm{P}(A_m)\mathrm{P}(A_n)$ $\quad \frac{m}{8}\times\frac{n-1}{7}=\frac{m}{8}\times\frac{n}{8}$
>
> 을 만족시켜야 한다.
>
> 따라서 두 사건 A_m과 A_n이 서로 독립이 되도록 하는 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는 (다) 이다.
>
> 7개

위의 (가)에 알맞은 식에 $k=4$를 대입한 값을 p, (나)에 알맞은 식에 $m=3, n=5$를 대입한 값을 q, (다)에 알맞은 수를 r라 할 때, $p\times q\times r$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

$\frac{n-1}{7}=\frac{n}{8}$

$8n-8=7n$

$n=8$.

(m, n)
$(1, 8)$
$\vdots$
7

(가) $=\frac{k}{8} \Rightarrow p=\frac{1}{2}$

(나) $=\frac{m}{8}\times\frac{n-1}{7} \Rightarrow q=\frac{3}{8}\times\frac{4}{7}$

(다) $=7=r$

$p\times q\times r=\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}\times\frac{4}{7}\times 7$

$=\frac{3}{4}$

20. 다음 조건을 만족시키는 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은? [4점]

> $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1}=6$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=4$인 자연수 n이 존재한다.

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}}}{1+\frac{1}{x^{n+1}}}=6.$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}}=6.$

i) $f(x)=6x^{n+1}+\cdots$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{6x^{n+1}+\cdots}{x^n}=\frac{x^n(6x+4)}{x^n}=4$

$f(x)=6x^{n+1}+4x^n$

ii) $n=2$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^3}=6.$

$f(x)=10x^3+ax^2+\cdots$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2(10x+a)}{x^2}=4$

$a=4$

$\Rightarrow f(x)=10x^3+4x^2$

iii) $n=1$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^2}=6.$

$f(x)=4x^3+3x^2$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2(4x+3)}{x}=0\ne 4.$ (X)

$f(x)=\begin{cases}10x^3+4x^2\\6x^{n+1}+4x^n\end{cases}$ $\quad f(1)=\begin{cases}14\\10\end{cases}$

21. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x)=\begin{cases} 2 & (0 \le x < 2) \\ -2x+6 & (2 \le x < 3) \\ 0 & (3 \le x \le 4) \end{cases}$
>
> (나) 모든 실수 x에 대하여
> $f(-x)=f(x)$이고 $f(x)=f(x-8)$이다.

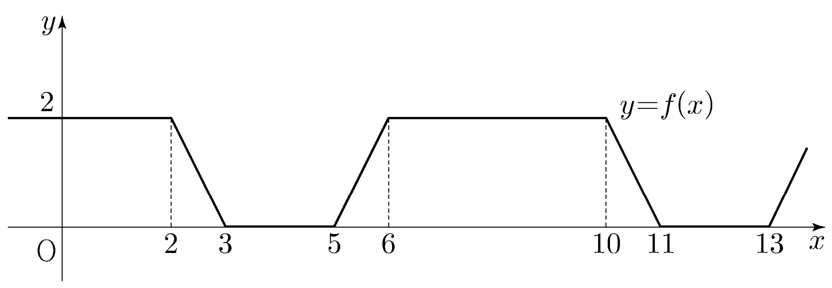
→ y축 대칭, → 주기함수.

실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x}+n & (x \ne 0) \\ n & (x=0) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $(f \circ g)(x)$가 상수함수가 되도록 하는 60 이하의 자연수 n의 개수는? [4점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38



$g(x)=\begin{cases} 1+n & (x>0) \\ -1+n & (x<0) \\ n & (x=0) \end{cases}$

i) $x>0$.
$f(g(x)) = f(n+1)$

ii) $x=0$
$f(g(x))=f(n)$

iii) $x<0$
$f(g(x))=f(n-1)$

① $n=1$
$f(0)=f(1)=f(2)=2$ (O)

② $n=2$
$f(1)=f(2)\ne f(3)$ (X)

③ $n=3$
$f(2)\ne f(3)=f(4)$ (X)

④ $n=4$
$f(3)=f(4)=f(5)$ (O)

⑤ $n=5$ (X)

⑥ $n=6$ (X)

⑦ $n=7$ (O)

⑧ $n=8$ (O)

$n=$ 1, 9, 17, …, 57 (8) / 4, 12, …, 60 (8) / 7, 15, …, 55 (7) / 8, …, 56 (7)

주기함수 (주기: 8)

$\Rightarrow 8+8+7+7=30$개

단답형 2점

22. ${}_9\mathrm{C}_7$의 값을 구하시오. [3점]

${}_9C_7 = {}_9C_2 = \dfrac{9\times\cancel{8}4}{\cancel{2}\times1} = 36.$

∴ 36

유리함수, 평행이동

23. 함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 4만큼 평행이동시킨 그래프가 점 $(2, a)$를 지난다. a의 값을 구하시오. [3점]

$y=\frac{2}{x}$
↓ y축, 4평이
$y=\frac{2}{x}+4.$
↓ (2, a) 대입

$a=1+4$
$=5$

5

24. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 등비수열, 수열의 합

$$a_1 = 2,\ \frac{a_5}{a_3} = 9$$

일 때, $\sum_{k=1}^{4} a_k$의 값을 구하시오. [3점]

$a_1 = 2.\quad a_n = 2 \cdot r^{n-1}$

$\frac{a_5}{a_3} = \frac{2 \cdot r^4}{2 \cdot r^2} = r^2 = 9.$

$r = \pm 3$ (공비 양수)

$\Rightarrow r = 3$

$\sum_{k=1}^{4} 2\,3^{n-1} = 2 + 6 + 18 + 54$

$= 80$

$\therefore 80$

위치, 속도, 가속도.

25. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 위치 x가

$$x = t^3 - 5t^2 + 6t$$

이다. $t=3$에서 점 P의 가속도를 구하시오. [3점]

$v = 3t^2 - 10t + 6.$

$a = 6t - 10.$

$t=3$ 대입

$a = 18 - 10$
$= 8$

8

26. 자연수 전체의 집합 U의 두 부분집합 집합, 부분집합, 조합.

$$A = \{1, 2, 4, 8, 16\},\ B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 = 0\}$$

$= \{1, 3\}.$

에 대하여

$$n(X) = 2,\ X - (A - B) = \varnothing$$

을 만족시키는 U의 모든 부분집합 X의 개수를 구하시오. [4점]

$X - (A - B) = X - \{2, 4, 8, 16\} = \varnothing$

$\Rightarrow X \subset \{2, 4, 8, 16\}.\ ,\ n(X) = 2.$

X의 개수 $\Rightarrow {}_4C_2 = \frac{\cancel{4}^{2} \times 3}{\cancel{2} \times 1} = 6.$

6

27. 두 함수 삼차함수, 미분, 극값.

$$f(x)=x^3+3x^2-k,\ g(x)=2x^2+3x-10$$

에 대하여 부등식

$$f(x)\ge 3g(x)$$

가 닫힌 구간 $[-1,4]$에서 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하시오. [4점]

$x^3+3x^2-k \ge 6x^2+9x-30$.

$x^3-3x^2-9x+30 \ge k$.

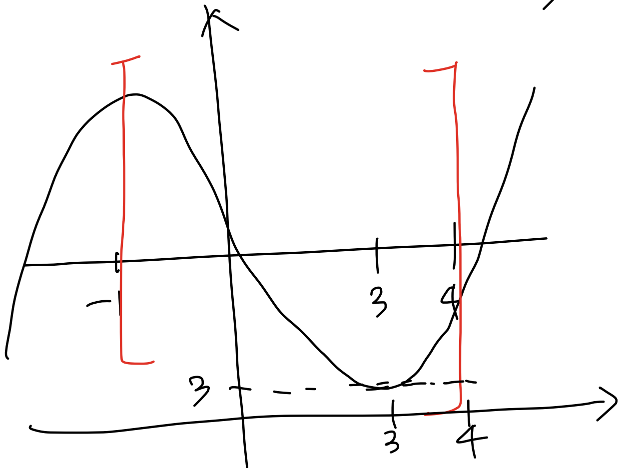
$h(x)=x^3-3x^2-9x+30$.

$h'(x)=3x^2-6x-9$

$=3(x^2-2x-3)$

$=3(x-3)(x+1)$

x		-1		3	
h'	$+$	0	$-$	0	$+$
h	↗	극대	↘	극소	↗



$[-1,4]$에서 $h(3)$이 최솟값

$h(3)=27-27-27+30=3$.

$h(x)\ge k \Rightarrow$ 최솟값 $\ge k$

$3\ge k$

$\therefore k=3$.

28. 첫째항이 2이고 공비가 정수인 등비수열 $\{a_n\}$과 자연수 m이 다음 조건을 만족시킬 때, a_m의 값을 구하시오. [4점]

> (가) $4<a_2+a_3\le 12$
>
> (나) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k=122$

$a_n=2\cdot r^{n-1}$

(가) $4< a_2+a_3=2\cdot r+2r^2\le 12$.

$4<2r^2+2r\le 12$

$\underbrace{2<r^2}_{①}\underbrace{+r\le 6}_{②}$.

① $r^2+r>2$

$r^2+r-2>0$

$(r+2)(r-1)>0$

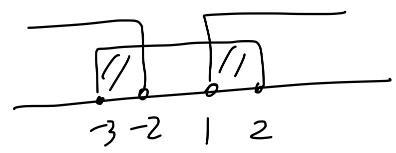
$r<-2,\ r>1$

② $r^2+r\le 6$

$r^2+r-6\le 0$

$(r+3)(r-2)\le 0$

$-3\le r\le 2$



$r=-3$ or $r=2$

(나) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k=122$

i) $r=2$.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k=\frac{a(r^m-1)}{r-1}=\frac{2(2^m-1)}{2-1}=122$

$2^{m+1}-2=122$

$2^{m+1}=124$ ($m\ne$ 자연수)

ii) $r=-3$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k=\frac{a(r^m-1)}{r-1}=\frac{2((-3)^m-1)}{-3-1}=122$

$-\dfrac{((-3)^m-1)}{2}=122$

$(-3)^m-1=-244$.

$(-3)^m=-243$

$(-3)^m=(-3)^5 \Rightarrow m=5$

$a_5=2\cdot(-3)^4=2\cdot 81=162$

중복조합 (수능특강)

#킬27, 삼차함수, 미분, 극값, 유리함수

29. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2, x_3의 모든 순서쌍 (x_1, x_2, x_3)의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $n=1, 2$일 때, $x_{n+1}-x_n \geq 2$이다.
>
> (나) $x_3 \leq 10$

(가) $n=1$

$x_2 - x_1 \geq 2$, $x_2 \geq x_1 + 2$

$n=2$

$x_3 - x_2 \geq 2$, $x_3 \geq x_2 + 2$.

(나) $x_3 \leq 10$

$\Rightarrow$ $\underbrace{x_1+4}_{X} \leq \underbrace{x_2+2}_{Y} \leq \underbrace{x_3}_{Z} \leq 10$

$\Rightarrow$ $4 \leq X \leq Y \leq Z \leq 10$ (x_1, x_2, x_3는 음이 아닌 정수)

$\Rightarrow$ 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 → 7개 수 중에서 중복 포함 3가지수 뽑기

$\Rightarrow$ 중복조합 $_7H_3$

$\therefore$ $_7H_3 = {}_9C_3 = \dfrac{\cancel{9}^{3} \times \cancel{8}^{4} \times 7}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 84$.

84

30. 최고차항의 계수가 1이고 $f(2)=3$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

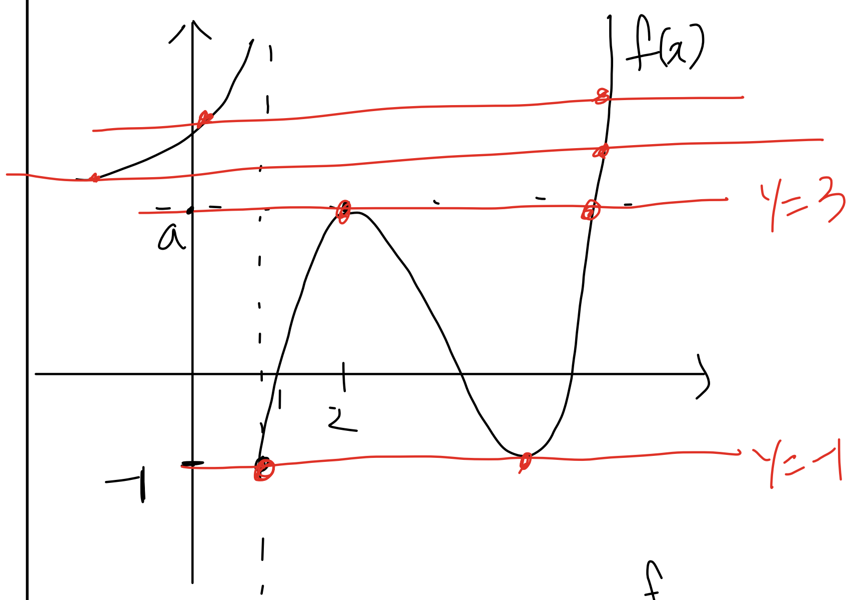
$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{ax-9}{x-1} & (x<1) \\ f(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

$g(x) = \begin{cases} \dfrac{a(x-1)+a-9}{x-1} = a - \dfrac{a-9}{x-1} & (x<1) \\ x^3 + a'x^2 + bx + c & (x \geq 1) \end{cases}$

이 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 서로 다른 두 점에서만 만나도록 하는 모든 실수 t의 값의 집합은 $\{t \mid t=-1$ 또는 $t \geq 3\}$이다.

$(g \circ g)(-1)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [4점]



$a=3$, $f(1)=-1$, $f(2)=3$, (극솟값 : -1, 극댓값 : 3) → $x=2$일 때

$f(x) = x^3 + a'x^2 + bx + c$

$f(1) = 1 + a' + b + c = -1$

$f(2) = 8 + 4a' + 2b + c = 3$.

$\Rightarrow$ $3a' + b + 7 = 4$, $3a' + b = -3$

$f'(x) = 3x^2 + 2a'x + b$

$f'(2) = 12 + 4a' + b = 0$.

$4a' + b = -12$

$-)\ 3a' + b = -3$

$a' = -9$, $b = 24$

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$.

$= 3(x^2 - 6x + 8)$

$= 3(x-2)(x-4)$

$f(4) = 64 - 144 + 96 + c = -1$

$16 + c = -1$

$c = -17$.

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 17$

$g(x) = \begin{cases} \dfrac{3x-9}{x-1} & (x<1) \\ x^3 - 9x^2 + 24x - 17 & (x \geq 1) \end{cases}$

$g(g(-1))$

$= g\left(\dfrac{-12}{-2}\right) = g(6)$

$= 216 - 324 + 144 - 17$

$= 19$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.