2020학년도 중앙대학교 논술가이드북(자연계열)

CHUNG-ANG UNIVERSITY

IV. 2020학년도 모의논술 문제해설

2020학년도 모의논술 자연계열 문제

수학

[문제 1] **영희는 두 단계로 구성된 게임에 다음과 같은 규칙에 따라 참여한다.**

단계 I

동전 두 개를 동시에 던져서 둘 다 앞면이 나오면 1, 둘 다 뒷면이 나오면 2, 그렇지 않으면 3의 값을 얻고 단계 II 로 넘어간다.

단계 II

동전 네 개를 동시에 던져서 앞면과 뒷면의 개수가 다르면 단계 I에서 나온 값의 제곱을 최종 점수로 얻고 게임은 종료되며, 그렇지 않으면 단계 II를 반복한다.

위의 규칙에 따라 영희가 게임에 참여할 때 얻을 수 있는 최종 점수의 기댓값을 구하시오. (단, 기댓값은 분수로 제시하거나 소수점 아래 둘째 자리에서 반올림하여 제시한다.) [20점]

[문제 2] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

- 두 함수 $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ 에 대하여 X의 각 원소 x에 Z의 원소 $g(f(x))$를 대응시켜 X를 정의역, Z를 공역으로 하는 새로운 함수를 정의할 수 있다. 이 새로운 함수를 f와 g의 합성함수라 하고, 기호로 $g \circ f : X \to Z$와 같이 나타낸다.

- $a > 0,\ a \neq 1,\ N > 0$ 일 때 다음이 성립한다.

$$a^x = N \Leftrightarrow x = \log_a N$$

- 미분 가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

[문제 2-1] 함수 $f(x) = \dfrac{cx+1}{dx+1}$에 대하여 $(f \circ f \circ f)(x) = x$을 만족하는 실수 x가 무한히 많이 있다. 이때 d의 최댓값을 구하시오. (단, c, d는 실수이다.) [10점]

[문제 2-2] $0 < x < 1$에서 정의된 함수 $g(x) = \displaystyle\int_1^x \sin(\ln t)\,dt$에 대하여, $g(x)$가 극값을 가지는 점들의 집합을 A라고 하자. A의 원소들을 큰 순서대로 모두 나열한 수열을 $\{a_n\}$이라고 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(g(a_n) - \frac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오. [15점]

[문제 3] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

- 직선 $y = mx + n\ (m \neq 0)$이 양의 방향의 x축과 이루는 각의 크기를 θ라고 하면 $\tan\theta = m$이다.

- 두 직선 $y = m_1x + n_1$, $y = m_2x + n_2$가 서로 수직이면 $m_1m_2 = -1$이다.

- 0과 π 사이의 각 α와 β에 대하여 다음 식이 성립한다.

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

(단, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2},\ \beta \neq \dfrac{\pi}{2},\ \tan\alpha\tan\beta \neq -1$)

- 함수 $f(x)$가 $x = c$에서 미분가능할 때, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(c, f(c))$에서의 접선의 방정식은 $y - f(c) = f'(c)(x - c)$이다.

- 함수 $g(x)$가 구간 $[u, v]$에서 연속이고 $g(x) \geq 0$이면 정적분 $\displaystyle\int_u^v g(x)\,dx$는 곡선 $y = g(x)$와 두 직선 $x = u$, $x = v$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 나타낸다.

[문제 3-1] 포물선 $y = b - ax^2\ (b > 2)$가 원 $x^2 + y^2 - 2y = 0$에 외접하도록 두 실수 a, b를 정할 때, 이 포물선과 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 a로 표현하고 그 넓이의 최솟값을 구하시오. [10점]

[문제 3-2] 포물선 $y = 3 - x^2$위의 점 A는, 점 A에서 그은 접선 위의 한 점 B와 점 $C(-\sqrt{3}, 0)$과 함께 정삼각형 ABC를 이룬다. 두 점 A, B의 쌍을 모두 찾아 좌표를 제시하시오. [15점]

2. 예시 답안 및 채점 기준

[문제 1] **예시 답안**

- 동전의 앞면이 나오는 경우를 H, 뒷면이 나오는 경우를 T라고 하면 1단계에서 발생하는 사건의 확률은 다음과 같다.

  둘 다 앞면이 나오는 경우: $P(HH)=\frac{1}{4}$

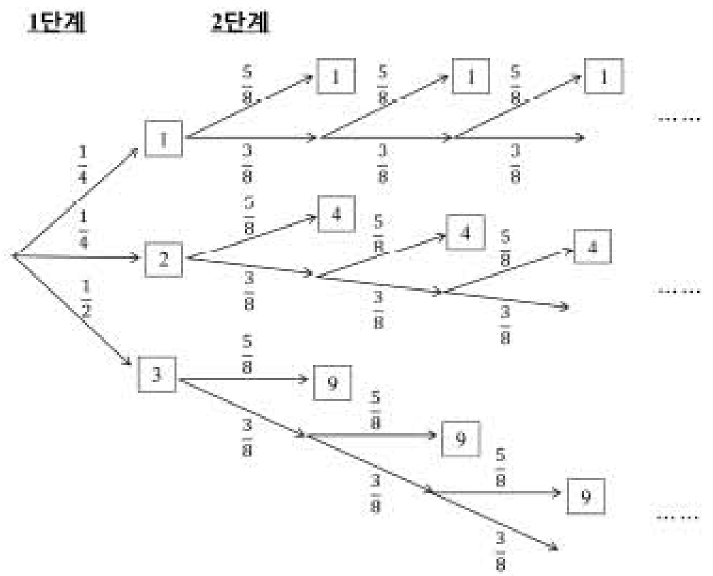
  둘 다 뒷면이 나오는 경우: $P(TT)=\frac{1}{4}$

  그렇지 않은 경우: $1-P(HH)-P(TT)=\frac{1}{2}$

- 동전 네 개를 동시에 던져서 앞면과 뒷면의 개수가 같을 확률은 ${}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{8}$ 이고,

  개수가 다를 확률은 $1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$ 이다.

- 1, 2단계를 바탕으로 최종 점수를 얻을 수 있는 경우와 그에 따르는 확률은 다음의 그림과 같이 나타낼 수 있다.



- 위의 그림을 바탕으로 영희가 얻을 수 있는 최종 점수의 기댓값은 다음과 같이 계산된다.

$$1^2\left(\frac{1}{4}\frac{5}{8}+\frac{1}{4}\frac{5}{8}\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\frac{5}{8}\left(\frac{3}{8}\right)^2+\frac{1}{4}\frac{5}{8}\left(\frac{3}{8}\right)^3+\cdots\right)+2^2\left(\frac{1}{4}\frac{5}{8}+\frac{1}{4}\frac{5}{8}\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\frac{5}{8}\left(\frac{3}{8}\right)^2+\frac{1}{4}\frac{5}{8}\left(\frac{3}{8}\right)^3+\cdots\right)$$

$$+3^2\left(\frac{1}{2}\frac{5}{8}+\frac{1}{2}\frac{5}{8}\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\frac{5}{8}\left(\frac{3}{8}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{5}{8}\left(\frac{3}{8}\right)^3+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{4}+1+\frac{9}{2}=\frac{23}{4}\quad \text{또는 } 5.8$$

[문제 1] **채점 기준**

1. 1단계에서 사건의 발생 확률을 올바르게 계산한 경우: **+2점**
2. 2단계에서 사건의 발생 확률을 올바르게 계산한 경우: **+2점**
3. 2단계 게임의 규칙을 제대로 이해하고 최종 점수를 얻을 수 있는 경우와 그에 따르는 확률을 올바르게 계산한 경우: **+8점**
4. 최종 점수의 기댓값을 올바르게 계산한 경우: **+8점**

[문제 2-1] **예시답안**

합성함수의 정의를 적용하여

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{c\left(\frac{cx+1}{dx+1}\right)+1}{d\left(\frac{cx+1}{dx+1}\right)+1}=\frac{(c^2+d)x+(c+1)}{d(c+1)x+(d+1)}$$ 이 됨을 알 수 있고

이로부터

$$(f\circ f\circ f)(x)=(f\circ f)(f(x))=\frac{(c^3+2cd+d)x+(c^2+c+d+1)}{d(c^2+c+d+1)x+(cd+2d+1)}$$ 를 얻는다.

$(f\circ f\circ f)(x)=x$가 무한히 많은 실수 x에 대하여 성립하므로

$d(c^2+c+d+1)x^2+(cd+2d+1)x=(c^3+2cd+d)x+(c^2+c+d+1)$가

항등식이라는 것을 알 수 있고, 따라서 $d(c^2+c+d+1)=0,\ \ cd+2d+1=c^3+2cd+d,$

$c^2+c+d+1=0$를 얻는다. 이를 정리하면 $d=-c^2-c-1$의 조건을 얻고,

이를 대입하면 다른 조건들도 만족됨을 알 수 있다. 따라서 $d=-c^2-c-1=-\left(c+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$로부터,

가능한 d의 최댓값은 $c=-\frac{1}{2}$일 때 $-\frac{3}{4}$이다.

[문제 2-1] **채점기준**

- 합성함수의 정의를 이용하여,

  $$(f\circ f\circ f)(x)=(f\circ f)(f(x))=\frac{(c^3+2cd+d)x+(c^2+c+d+1)}{d(c^2+c+d+1)x+(cd+2d+1)}$$

  를 얻으면 **+4점**

- 항등식의 성질을 이용하고 연립방정식을 풀어 조건 $d=-c^2-c-1$를 얻으면 **+4점**

- d의 최댓값 $-\frac{3}{4}$을 얻으면 **+2점**

[문제 2-2] **예시답안**

$s=\ln t$로 치환하면 $g(x)=\int_1^x \sin(\ln t)dt=\int_0^{\ln x}\sin s\cdot e^s ds$가 되고, 부분적분법을 이용하면

$$\int_0^{\ln x}e^s\sin s\,ds=[-e^s\cos s]_0^{\ln x}-\int_0^{\ln x}(-e^s\cos s)ds=[-e^s\cos s]_0^{\ln x}+\int_0^{\ln x}e^s\cos s\,ds$$

가 되며, 부분적분법을 한 번 더 이용하면

$$\int_0^{\ln x}e^s\sin s\,ds=[-e^s\cos s]_0^{\ln x}+[e^s\sin s]_0^{\ln x}-\int_0^{\ln x}e^s\sin s\,ds$$가 되어

$$\int_0^{\ln x}e^s\sin s\,ds=\frac{1}{2}[e^s\sin s-e^s\cos s]_0^{\ln x}=\frac{x}{2}(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))+\frac{1}{2}$$ 임을 알 수 있다.

한편, $g(x)$가 극값을 가지는 점들은 $g'(x)=\sin(\ln x)=0$인 점들이므로 $\ln x = n\pi$(단, n는 정수)이고,

문제의 조건 $0<x<1$으로부터 $g(x)$는 $x=e^{-n\pi}$(단, n는 자연수)에서 극값을 가짐을 알 수 있다.

이때, $g(e^{-n\pi})=\dfrac{e^{-n\pi}}{2}(\sin(-n\pi)-\cos(-n\pi))+\dfrac{1}{2}=-e^{-n\pi}\cdot(-1)^n+\dfrac{1}{2}$이므로,

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(g(a_n)-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-e^{-\pi})^n=-\frac{1}{2}\frac{-e^{-\pi}}{1+e^{-\pi}}=\frac{1}{2(e^{\pi}+1)}$ 이다.

[문제 2-2]　채점기준

- 부분적분법을 두 번 이용하여,

  $\displaystyle\int_1^x \sin(\ln t)dt=\frac{x}{2}(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))+\frac{1}{2}$을 얻으면 **+6점**
- $g(x)$가 $x=e^{-n\pi}$(단, n는 자연수)에서 극값을 가짐을 보이면 **+4점**
- 등비급수의 합을 이용해 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(g(a_n)-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2(e^{\pi}+1)}$ 을 얻으면 **+5점**

[문제 3-1]　예시답안

두 식 $y=b-ax^2$와 $x^2+y^2-2y=0$을 연립하여 y에 관한 이차방정식 $y^2-\left(a+\dfrac{1}{2}\right)y+\dfrac{b}{a}=0$을

얻는다. 포물선이 원에 외접하므로 이 이차방정식은 중근을 갖는다. 따라서 $D=\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2-4\cdot\dfrac{b}{a}=0$에서

$$b=\frac{a}{4}\left(2+\frac{1}{a}\right)^2=a+\frac{1}{4a}+1\text{을 얻는다.}$$

$b=a+\dfrac{1}{4a}+1>2$이므로 $a>0$이다. 포물선과 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 $h(a)$라 하면,

$$h(a)=\int_{-\sqrt{\frac{b}{a}}}^{\sqrt{\frac{b}{a}}}(b-ax^2)\,dx=2\int_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}}(b-ax^2)\,dx=\frac{4b}{3}\sqrt{\frac{b}{a}}=\frac{a}{6}\left(2+\frac{1}{a}\right)^3$$

이다. $a>0$이어서 $h'(a)=\dfrac{1}{3}\left(2+\dfrac{1}{a}\right)^2\left(1-\dfrac{1}{a}\right)=0$에서 $a=1$을 얻는다. $h(1)=\dfrac{9}{2}$이므로

넓이의 최솟값은 $\dfrac{9}{2}$이다.

[문제 3-1]　채점기준

- 포물선과 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 a로 표현하면 **+5점**
- 포물선과 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이의 최솟값을 구하면 **+5점**

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 1~2점의 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 -0.5~+0.5점을 부여할 수 있습니다.

[문제 3-2]　예시답안

두 직선 AC, AB가 x축의 양의 방향과 이루는 각을 각각 α, β라 하자. 이 두 직선의 교점을 지나고 x축과 평행한 직선이, 두 직선 AC, AB가 이루는 둔각 또는 예각을 통과함에 따라 $|\alpha-\beta|=60^\circ$ 또는 $|\alpha-\beta|=120^\circ$이다. 점 A를 $(a, 3-a^2)$으로 놓으면 두 직선 AC, AB의 기울기는 각각 $\tan\alpha=\dfrac{(3-a^2)-0}{a-(-\sqrt{3})}=\sqrt{3}-a$, $\tan\beta=-2a$이므로

$\pm\sqrt{3}=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{(\sqrt{3}-a)-(-2a)}{1+(\sqrt{3}-a)(-2a)}$에서 $a=0$ 또는 $a=\dfrac{7\sqrt{3}}{6}$을 얻는다.

$a=0$이면 $\mathrm{A}=(0,3)$, $\mathrm{B}=(-2\sqrt{3},3)$이다. $a=\dfrac{7\sqrt{3}}{6}$이면 $\mathrm{A}=\left(\dfrac{7\sqrt{3}}{6}, -\dfrac{13}{12}\right)$이고

직선 AB의 방정식은 $y=-2a(x-a)+3-a^2=-\dfrac{7\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{85}{12}$이다.

선분 AC의 중점을 D라 하면

$\mathrm{D}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{12}, -\dfrac{13}{24}\right)$이다. 점 B를 $\left(b, -\dfrac{7\sqrt{3}}{3}b+\dfrac{85}{12}\right)$라 하면 직선 AC의 기울기는 $-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$이고

직선 BD는 직선 AC와 수직이므로

$$\frac{\left(-\frac{7\sqrt{3}}{3}b+\frac{85}{12}\right)-\left(-\frac{13}{24}\right)}{b-\frac{\sqrt{3}}{12}}=\frac{6}{\sqrt{3}}$$

에서 $b=\dfrac{5\sqrt{3}}{8}$을 얻는다. 따라서 점 B는 $\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{8}, \dfrac{65}{24}\right)$이다.

[문제 3-2]　채점기준

- 점 A가 포물선의 꼭짓점일 때, $\mathrm{A}=(0,3)$, $\mathrm{B}=(-2\sqrt{3},3)$임을 제시하면 **+5점**
- 점 A가 포물선의 꼭짓점이 아닐 때, $\mathrm{A}=\left(\dfrac{7\sqrt{3}}{6}, -\dfrac{13}{12}\right)$임을 제시하면 **+5점**
- 점 A가 포물선의 꼭짓점이 아닐 때, $\mathrm{B}=\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{8}, \dfrac{65}{24}\right)$임을 제시하면 **+5점**

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 1~2점의 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 -0.5~+0.5점을 부여할 수 있습니다.