[문제 2번] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

<가> 전체집합 $U=\{x|x$는 9 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 $A=\{1,2,3,4,5RIGHT,$ $B=\{2,4,6,8RIGHT$에 대하여 U의 부분집합 C는 $C\cap(A^c\cup B)=\{2,4,7\}$를 만족한다.

<나> 이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i$ $(i=1,\cdots,n)$ 일 때, 평균 $\mathrm{E}(X)$, 분산 $\mathrm{V}(X)$, 표준편차 $\sigma(X)$는 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i,\qquad \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}((X-m)^2)\ (\text{단, } m=\mathrm{E}(X)),\qquad \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$$

<다> 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,p)$를 따를 때, $np\ge 5$, $nq\ge 5$이면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np,npq)$를 따른다. (단, $q=1-p$)

<라> 표준정규분포표

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.25	0.0987
0.5	0.1915
1	0.3413
2	0.4772

1. 집합 C는 제시문 <가>를 만족하는 U의 모든 부분집합에서 고르게 선택된다. C의 원소의 개수를 확률변수 X라 할 때, X의 기댓값과 분산을 구하여라.

2. 주사위를 던져 나온 눈이 k일 때, 이를 대입하여 정적분 $\int_0^6\left[x^3-(12-k)x^2+6(6-k)x\right]dx$를 구한다. 이러한 시행을 4050번 반복하였을 때, 정적분의 값이 양수인 횟수가 1365회 이상, 1410회 이하일 확률을 제시문 <라>의 표준정규분포표를 이용하여 구하여라.

3. 다음 극한값을 구하여라.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(2-\frac{2}{3}+\frac{2}{9}-\frac{2}{27}+\cdots+\frac{2}{(-3)^{n-1}}\right)+\left(\frac{1}{n^5}+\frac{16}{n^5}+\frac{81}{n^5}+\cdots+\frac{n^4}{n^5}\right)\right]$$

한양대학교 2020학년도 신입학전형 수시

상 경 계	모 의 논 술 예 시 답 안	2 번

1. 드모르간의 법칙에 의해 $C\cap(A^c\cup B)=C\cap(A\cap B^c)^c=C-(A-B)=\{2,4,7RIGHT$이고, $A-B=\{1,3,5RIGHT$이다. 따라서 집합 C는 $C\subset\{1,2,3,4,5,7RIGHT$, $\{2,4,7RIGHT\subset C$를 동시에 만족한다. 따라서 집합 C는 다음과 같은 경우를 만족한다.

C	$n(C)$
$\{2,4,7RIGHT$	3
$\{1,2,4,7RIGHT$	4
$\{2,3,4,7RIGHT$	4
$\{2,4,5,7RIGHT$	4
$\{1,2,3,4,7RIGHT$	5
$\{1,2,4,5,7RIGHT$	5
$\{2,3,4,5,7RIGHT$	5
$\{1,2,3,4,5,7RIGHT$	6

따라서 확률변수 X는 다음과 같은 확률분포를 갖는다.

X	3	4	5	6	합계
$p(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

기댓값은 $\mathrm{E}(X)=3\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{3}{8}+5\cdot\frac{3}{8}+6\cdot\frac{1}{8}=\frac{9}{2}$ 이다.

분산은 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)RIGHT=3^2\cdot\frac{1}{8}+4^2\cdot\frac{3}{8}+5^2\cdot\frac{3}{8}+6^2\cdot\frac{1}{8}-(\frac{9}{2})^2=\frac{3}{4}$ 이다.

2. 주어진 정적분을 구하면

$$\int_0^6(x^3-(12-k)x^2+6(6-k)x)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{12-k}{3}x^3+3(6-k)x^2RIGHT\right]_0^6=108-36k$$이다.

따라서 $k=1,2$일 때, 정적분의 값이 양수가 되므로 확률은 $\frac{1}{3}$이다. 정적분이 양수가 되는 확률변수를 X라고 하면, 확률변수 X는 이항분포 $B\left(4050,\frac{1}{3}\right)$를 따른다. 시행횟수 $n=4050$이 충분히 크므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(1350,30^2)$를 따른다. 이를 이용하면

$$\mathrm{P}(1365\le X\le 1410)=\mathrm{P}\left(\frac{1365-1350}{30}\le\frac{X-1350}{30}\le\frac{1410-1350}{30}\right)$$
$$=\mathrm{P}(0.5\le Z\le 2)=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)=0.4772-0.1915=0.2857$$

을 얻는다.

3. 두 항을 나누어 생각하자. 첫 번째 급수는 첫째항이 2, 공비가 $-\dfrac{1}{3}$인 등비급수이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left[2-\frac{2}{3}+\frac{2}{9}-\frac{2}{27}+\cdots+\frac{2}{(-3)^{n-1}}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}=\frac{2}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{3}{2}$$ 이다.

두 번째 극한은 정적분을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^5}+\frac{16}{n^5}+\frac{81}{n^5}+\cdots+\frac{n^4}{n^5}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4}{n^5}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\frac{1}{n}=\int_0^1(x^4)\,dx=\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1=\frac{1}{5}$$

급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴할 때 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 이므로 주어진 극한은 $\dfrac{17}{10}$이다.

한양대학교 2020학년도 신입학전형 수시

자 연 계

모 의 논 술

수험번호 (   ) 성명 (   )

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

<가> 함수 $y=f(x)$는 $y^3+3y^2+4y+1=x$를 만족시킨다.

<나> 실수 k에 대하여 함수 $y=g(x)$는 $\{x\,|\,x\geq -k\}$에서 정의되고 $g(x)=f(x+k)$를 만족시킨다.

<다> 곡선 $y=f(x)$가 y축과 만나는 점을 P, 곡선 $y=f(x)$ 위의 x좌표가 -1인 점을 Q, 곡선 $y=f(x)$의 점 Q에서의 접선이 y축과 만나는 점을 R이라 하자.

1. 함수 $y=f(x)$는 일대일 함수임을 설명하시오.

2. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 역함수의 그래프가 만날 때, 실수 k의 최솟값의 소수점 아래 첫째자리 수를 구하시오.

3. 제시문 <다>의 점 P의 좌표를 $(0,a)$라 할 때, 선분 PR 및 선분 QR, 그리고 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 a에 대한 이차식으로 나타내시오.

뒷면에 계속 ☞

[문제 2번] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

삼각형 ABC의 변 AB의 중점을 G, 변 AC의 중점을 F라 하자. 변 BC를 삼등분하는 BC위의 두 점 중 점 B에 가까운 것을 D, 점 C에 가까운 것을 E라 하고, 두 선분 EG와 DF의 교점을 H라 하자.

1. 다음 두 등식을 만족하는 실수 a, b, c, d의 값을 구하시오.

$$\overrightarrow{\mathrm{GE}} = a\overrightarrow{\mathrm{AB}} + b\overrightarrow{\mathrm{AC}}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{FD}} = c\overrightarrow{\mathrm{AB}} + d\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

2. 문항 1의 두 등식을 이용하여 선분의 길이의 비 $\overline{\mathrm{GH}} : \overline{\mathrm{HE}}$를 구하시오.

3. 변 BC를 n등분하는 $n-1$개의 점들을 점 B로부터 점 C로의 방향으로 차례대로 각각 I_1, I_2, … , I_{n-1}이라 하자. 두 선분 $\overline{\mathrm{FI}_k}$와 $\overline{\mathrm{GI}_{k+l}}$의 교점을 J라 할 때, 선분의 길이의 비 $\overline{\mathrm{FJ}} : \overline{\mathrm{JI}_k}$를 구하시오. (단, $1 \le k < k+l \le n-1$)

한양대학교 2020학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	**모 의 논 술 예 시 답 안**	1 번

1. 음함수의 미분법에 의해 $(3y^2+6y+4)y'=1$, 즉 $y'=\dfrac{1}{3y^2+6y+4}=\dfrac{1}{3(y+1)^2+1}>0$이다.

   따라서 함수 $f(x)$는 증가함수이고 일대일 함수이다.

2. 함수 $g(x)$와 $h(x)$가 한 점에서 만날 조건은 함수 $g(x)$가 함수 $y=x$와 만날 조건과 동치이다.
$g(x)$의 정의에 의해

$$g(x)^3+3g(x)^2+4g(x)+1=f(x+k)^3+3f(x+k)^2+4f(x+k)+1=x+k$$

이므로, $g(x)=x$가 $g(x)$의 정의역 $\{x|x\ge -k\}$에서 해를 가질 조건은 삼차 방정식 $x^3+3x^2+4x+1=x+k$, 즉, $x^3+3x^2+3x+(1-k)=0$이 $\{x|x\ge -k\}$에서 해를 가질 조건과 같다.
$p(x)=x^3+3x^2+3x+(1-k)$ $(x\ge -k)$라 두자. $p'(x)=3x^2+6x+3=3(x+1)^2\ge 0$이므로 $p(x)$는 증가함수이다.
따라서 $p(x)=0$이고 $x\ge -k$인 x가 한 개 이상 존재하기 위해서는 $p(-k)=-k^3+3k^2-4k+1\le 0$ 이어야만 한다. $q(k)=-k^3+3k^2-4k+1$이라 두면, $q'(k)=-3k^2+6k-4=-3(k-1)^2-1\le 0$이므로 감소함수이다.
그런데 $q(0.3)=0.043>0$이고 $q(0.4)=-0.184<0$이므로 $q(k)\le 0$인 k의 최솟값은 0.3...이다.
따라서 구하는 답은 3이다.

3. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $Q(-1,-1)$에서 그은 접선의 방정식은 $y=f'(-1)(x+1)-1=-x$이다.
따라서 R의 좌표는 (0,0)이다.
한편, $f(x)$의 역함수를 $r(x)$라 하면 $r(x)=x^3+3x^2+4x+1$이다. 또한 $r(x)\ge x$가 $(x+1)^3\ge 0$과 동치이므로 구간 $[-1,0]$에서 $r(x)\ge x$, 즉, $x\ge f(x)$가 성립한다. 이로부터 S를 좌표가 $(0,-1)$인 점이라 하면

(선분 PR, 선분 QR와 곡선 $y=f(x)$에 의해 둘러싸인 영역의 넓이)

$$=\text{(삼각형 QRS의 넓이)}-\int_{-1}^{a}|r(x)|dx=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1+\int_{-1}^{a}(x^3+3x^2+4x+1)dx$$

$$=\frac{a^4}{4}+a^3+2a^2+a+\frac{1}{4}.$$

그런데 a의 정의에 의해 $a^3+3a^2+4a+1=0$가 성립하므로,

$$\frac{a^4}{4}+a^3+2a^2+a+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(a^3+4a^2+3a+1)=\frac{1}{4}(a^2-a)$$

이다. 정리하면

$$\text{(선분 PR, 선분 QR와 곡선 } y=f(x)\text{에 의해 둘러싸인 영역의 넓이)}=\frac{1}{4}(a^2-a)$$

를 얻는다.

한양대학교 2020학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	**모 의 논 술 예 시 답 안**	2 번

1. $\overrightarrow{\mathrm{GE}} = \overrightarrow{\mathrm{GB}} + \overrightarrow{\mathrm{BE}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}) = -\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{FD}} = \overrightarrow{\mathrm{FC}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

따라서 $a = -\frac{1}{6}$, $b = \frac{2}{3}$, $c = \frac{2}{3}$, $d = -\frac{1}{6}$ 이다.

2. $\overrightarrow{\mathrm{GH}} = r\overrightarrow{\mathrm{GE}}$, $\overrightarrow{\mathrm{FH}} = s\overrightarrow{\mathrm{FD}}$ 로 두면, $\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \overrightarrow{\mathrm{AG}} + r\overrightarrow{\mathrm{GE}} = \overrightarrow{\mathrm{AF}} + s\overrightarrow{\mathrm{FD}}$ 가 성립한다.

이 등식에 문항 1의 두 등식을 대입하여 r, s 를 구하면, $r = s = \frac{3}{5}$ 이다.

따라서 $\overline{\mathrm{GH}} : \overline{\mathrm{HE}} = \frac{3}{5} : 1 - \frac{3}{5} = 3:2$ 이다.

3. $\overrightarrow{\mathrm{GI}_{k+l}} = \overrightarrow{\mathrm{GB}} + \overrightarrow{\mathrm{BI}_{k+l}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{k+l}{n}\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{k+l}{n}(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}})$
$= \frac{n-2(k+l)}{2n}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{k+l}{n}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{FI}_k} = \overrightarrow{\mathrm{FC}} + \overrightarrow{\mathrm{CI}_k} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \frac{n-k}{n}\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \frac{n-k}{n}(\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}})$
$= \frac{n-k}{n}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{-n+2k}{2n}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{GJ}} = r\overrightarrow{\mathrm{GI}_{k+l}}$, $\overrightarrow{\mathrm{FJ}} = s\overrightarrow{\mathrm{FI}_k}$ 로 두면, $\overrightarrow{\mathrm{AJ}} = \overrightarrow{\mathrm{AG}} + r\overrightarrow{\mathrm{GI}_{k+l}} = \overrightarrow{\mathrm{AF}} + s\overrightarrow{\mathrm{FI}_k}$ 이다.

위 두 등식을 이것에 대입하여 r 과 s 를 구한다.

FG 와 BC 는 평행이므로, $r = s$ 임을 이용하여 구하자.

$\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\left(\frac{n-2(k+l)}{2n}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{k+l}{n}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} + s\left(\frac{n-k}{n}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{-n+2k}{2n}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$ 이므로, $s = \frac{n}{n+2l}$ 이다.

따라서 $\overline{\mathrm{FJ}} : \overline{\mathrm{JI}_k} = \frac{n}{n+2l} : 1 - \frac{n}{n+2l} = n : 2l$ 이다.