논술시험 (자연계)

[수학 1]

다음 <제시문1> ~ <제시문3>을 읽고 [수학 1 - ⅰ] ~ [수학 1 - ⅱ]를 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문1>

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

<제시문2>

두 초점 $\mathrm{F}(0,c), \mathrm{F}'(0,-c)$로부터 거리의 합이 $2b$인 타원의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (단, } b>a>0,\ a^2=b^2-c^2)$$

<제시문3>

ⅰ) 좌표평면 위에서 $|x|+|y|=1$을 만족하는 점 (x, y)의 집합을 P라고 하자.

ⅱ) 부등식 $0<u^2+v^2\le 1$을 만족하는 u, v에 대하여 매개변수 $\theta(0\le\theta<2\pi)$로 표현되는 점 $(x, y)=(u\cos\theta, v\sin\theta)$의 집합을 C라고 하자.

ⅲ) 집합 P와 집합 C가 공집합이 아닌 교집합을 가지게 되는 점 (u, v)로 이루어진 집합을 S라고 하자.

[수학 1 - ⅰ] <제시문3>의 집합 S가 좌표평면 위에서 이루는 곡선의 길이를 구하고, 그 이유를 논하시오.

[수학 1 - ⅱ] <제시문3>의 곡선 C위의 어떠한 점 Q에 대해서도 $\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{QF}'}$의 값이 일정한 좌표평면 위의 두 점 F, F'이 존재한다. 집합 S에 속한 점 (u,v)에 대하여 $\overline{\mathrm{FF}'}$의 값이 $\sqrt{2}$이하가 되는 점 (u,v)의 집합이 이루는 곡선의 길이의 합을 구하고, 그 이유를 논하시오. 예를 들어, $u=v$일 때 점 F와 점 F'은 원점으로 일치하고 $\overline{\mathrm{FF}'}=0$이다.

논술시험 (자연계)

[수학 2]

다음 <제시문1> ~ <제시문3>을 읽고 [수학 2 - i] ~ [수학 2 - iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문1>

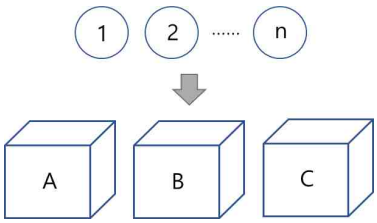
두 사건 X, Y가 일어나는 경우의 수가 각각 x, y이고 두 사건 X, Y가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 X 또는 사건 Y가 일어나는 경우의 수는 $x+y$이며, 이를 합의 법칙이라고 한다. 합의 법칙은 세 개 이상의 사건에 대하여도 성립한다.

<제시문2>

사건 X가 일어나는 경우의 수가 x이고, 그 각각의 경우에 대하여 사건 Y가 일어나는 경우의 수가 y일 때, 두 사건 X, Y가 잇달아 일어나는 경우의 수는 $x \times y$이며, 이를 곱의 법칙이라고 한다. 곱의 법칙은 세 개 이상의 사건에 대하여도 성립한다.

<제시문3>

양의 정수 n에 대하여, 오른쪽 그림과 같이 1부터 n까지의 숫자가 각각 적힌 n개의 공을 A, B, C 라고 각각 적힌 세 개의 상자에 담으려고 할 때, 가능한 모든 경우의 수를 $S(n)$이라고 한다.



[수학 2 - i] <제시문3>에서 $n=7$일 때, $S(7)$의 값을 십진법 표기로 구하고, 그 이유를 논하시오. 예를 들어, 2^7-2^4는 112로 표기한다.

[수학 2 - ii] <제시문3>에서 $n=7$일 때, A, B, C 세 개의 상자 모두 적어도 한 개의 공을 가지고 있을 경우의 수를 십진법 표기로 구하고, 그 이유를 논하시오.

[수학 2 - iii] <제시문3>에서 $n=7$일 때, A, B, C 세 개의 상자 모두 적어도 두 개의 공을 가지고 있을 경우의 수를 십진법 표기로 구하고, 그 이유를 논하시오.

논술문제 해설지 (자연계)

■ 예시답안 및 채점기준

[수학 1 − i]

○ 예시답안

$uv=0$일 때 곡선 C는 선분이 되며, 이 선분이 P와 만나게 될 필요충분조건은 $u^2=1$ 또는 $v^2=1$이다. 즉, $(u,v)\in\{(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)\}$이다.

$uv\neq 0$을 가정하고, 이 때 곡선 C가 P에 접하기 위한 조건을 살펴보자. 곡선 C위의 점 (x_0,y_0)에서의 접선의 방정식은 $\dfrac{x_0x}{u^2}+\dfrac{y_0y}{v^2}=1$이므로, 곡선 C가 P에 제 1사분면에서 접하기 위한 조건은 이 접선이 P를 이루는 네 개의 선분 중 하나여야 한다는 것이다.

이로부터 $\left|\dfrac{x_0}{u^2}\right|=\left|\dfrac{y_0}{v^2}\right|=1$을 얻게 되고, 이를 식 $\dfrac{x^2}{u^2}+\dfrac{y^2}{v^2}=1$에 대입하면 $u^2+v^2=1$을 얻게 된다. 다시 말해, $u^2+v^2<1$인 경우 곡선 C는 P와 만나지 않게 된다.

따라서 집합 S는 좌표평면 위에서 반지름이 1이고 중심이 원점인 원이 되어, 곡선의 길이는 2π이다.

○ 채점기준

(5점) $uv=0$인 S에 속한 점을 올바르게 유도할 수 있다.

(5점) $uv\neq 0$인 S에 속한 점을 올바르게 유도할 수 있다.

(5점) 곡선의 길이를 올바르게 유도할 수 있다.

논술문제 해설지 (자연계)

[수학1-ii]

○ 예시답안

$uv=0$일 때 곡선 C는 선분이 되며, 이 때 두 점 F,F′은 선분의 양 끝점이 된다. 이 두 점 사이의 거리는 $2>\sqrt{2}$이다.

$uv\neq 0$을 가정하고, $u\geq v>0$을 가정하자. 이 때, $\overline{\mathrm{FF'}}$의 값은 <제시문2>에 의해 $2\sqrt{u^2-v^2}$가 된다. 조건 $\overline{\mathrm{FF'}}=\sqrt{2}$ 로부터 $2\sqrt{u^2-v^2}=\sqrt{2}$을 얻게 되고, [수학1-i]의 결과에 의해 $u^2+v^2=1$을 만족하므로 $(u,v)=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$를 의미한다. 그리고 $\overline{\mathrm{FF'}}=0$인 경우는 $u=v$인 경우이므로 $(u,v)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$가 된다. 따라서, 점 (u,v) 자취의 길이는 $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$이고, $v\geq u>0$인 경우 $u\geq v>0$에서와 같은 방법으로 $(u,v)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$에서부터 $(u,v)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$까지 해서 자취의 길이는 $\frac{\pi}{12}$가 되고 위와 같은 형태로 각 사분면 마다 한 번씩 나타나게 되므로 전체 곡선의 길이의 합은 $8\times\frac{\pi}{12}=\frac{2\pi}{3}$이다.

○ 채점기준

(10점) $\overline{\mathrm{FF'}}$의 값이 $\sqrt{2}$이하인 점 (u,v)의 조건을 올바르게 유도할 수 있다.

(5점) 곡선의 길이의 합을 올바르게 유도할 수 있다.

논술문제 해설지 (자연계)

■ 예시답안 및 채점기준

[수학 2 – i]

○ 예시답안

각각의 공이 A, B, C 세 개의 상자에 들어갈 수 있으므로, <제시문2>에 의해 총 경우의 수는 $3 \times \cdots \times 3 = 3^7 = 2187$이다.

○ 채점기준

(5점) 경우의 수를 올바르게 유도할 수 있다.

[수학 2 – ii]

○ 예시답안

상자 A에 공이 하나도 들어있지 않고, 상자 B, C에 각각 적어도 한 개의 공이 들어있을 경우의 수는 $2^7 - 2 = 126$이다.

상자 A, B에 공이 하나도 들어있지 않을 경우의 수는 1이다.

따라서 <제시문1>에 의해, 상자 A, B, C에 각각 적어도 한 개의 공이 들어있을 경우의 수는 $3^7 - 3(2^7 - 2 + 1) = 1806$이다.

○ 채점기준

(5점) 한 개의 상자에 공이 하나도 들어있지 않고, 다른 두 상자에 각각 적어도 한 개의 공이 들어있을 경우의 수를 올바르게 유도할 수 있다.

(5점) 한 개의 상자에만 공이 들어있는 경우의 수를 유도한 뒤, 문제의 경우의 수를 올바르게 유도할 수 있다.

논술문제 해설지 (자연계)

[수학 2 – iii]

○ 예시답안

상자 A에 공이 한 개 들어있고, 상자 B, C에 각각 적어도 두 개의 공이 들어있을 경우의 수는 $7(2^6-2\times6-2)=350$이다.

상자 A, B에 각각 한 개의 공이 들어있고, 상자 C에 나머지 공이 모두 들어있을 경우의 수는 $7\times6=42$이다.

상자 A에 공이 하나도 들어있지 않고, 상자 B, C에 각각 적어도 한 개의 공이 들어있을 경우의 수는 $2^7-2=126$이다.

상자 A, B에 공이 하나도 들어있지 않을 경우의 수는 1이다.

따라서 <제시문1>에 의해, 상자 A, B, C에 각각 적어도 두 개의 공이 들어있을 경우의 수는 $2187-3(350+42+126+1)=630$이다.

○ 채점기준

(5점) 한 개의 상자에 공이 한 개 들어있고, 나머지 두 상자에 각각 적어도 두 개의 공이 들어있을 경우의 수를 올바르게 유도할 수 있다.

(5점) 두 개의 상자에 각각 정확히 한 개의 공이 들어있을 경우의 수를 올바르게 유도할 수 있다.

(5점) 문제의 경우의 수를 올바르게 유도할 수 있다.