2020학년도 연세대학교 모의논술 문제(수학)

[문제 1]

자연수 1부터 n 까지의 합은 $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ 이다.

[문제 1-1]

$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ 을 위와 같이 가장 간단한 모양으로 나타내시오. [5점]

[문제 1-2]

$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)$ 의 가장 간단한 모양을 추론하고 이를 증명하시오. (단, m은 자연수이다) [10점]

[문제 2]

가로의 길이가 1 이고 세로의 길이가 a 인 직사각형 여러 개를 반지름의 길이가 1인 원 O 위에 올려놓아 원 O 의 원주 전체를 덮으려고 한다. 필요한 직사각형 개수의 최솟값을 $N(a)$라고 할 때, 극한값 $\lim_{a \to 0} N(a)a^k = 0$ 이 성립하기 위한 k 값의 범위를 구하시오. [20점]

[문제 3]

좌표평면 위에 x축과 이루는 각의 크기가 $\theta\left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$인 점 P와 원점 O에 대하여 $\overrightarrow{OP}$의 단위벡터를 $\overrightarrow{e(\theta)} = (\cos\theta, \sin\theta)$로 나타내자. 각 θ 와 자연수 N 에 대하여 좌표평면 위의 영역 $R_N(\theta)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$R_N(\theta) = \left\{(x,y) \,\middle|\, \left|(x,y) \cdot \overrightarrow{e(\theta)}\right| \le \frac{N}{2},\ \left|(x,y) \cdot \overrightarrow{e\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}\right| \le \frac{1}{2N}\right\}$$

(단, N 은 10 이상인 자연수이고, $A(R_N(\theta))$ 는 영역 $R_N(\theta)$의 넓이를 나타낸다.)

[문제 3-1]

$A\left(R_{10}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$의 값을 구하시오. [5점]

[문제 3-2]

영역 $R_N(\theta)$과 영역 $R_N(0)$의 공통부분을 $R_N(\theta) \cap R_N(0)$라 할 때, 이 공통부분의 넓이 $A(R_N(\theta) \cap R_N(0))$을 N 과 θ 로 나타내시오. (단, $\theta \ge \frac{1}{N}$) [10점]

[문제 3-3]

극한값 $\lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{A\left(R_N\left(\frac{k}{N}\right) \cap R_N(0)\right) N^3}$ 을 구하시오. [10점]

연세대학교