(수학 공식은 있지만, 물리 공식은 없습니다. 왜 그런 것인지는 불명)

문제: 수리 가형 30번; 2020학년도 수능 6월 모의평가

상수 a, b에 대하여 함수 $f(x) = a\sin^3 x + b\sin x$가

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}, f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 5\sqrt{3}$$

을 만족시킨다. 실수 t $(1 < t < 14)$에 대하여 함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = t$와 만나는 점의 x좌표 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순대로 모두 나열할 때, n번째 수를 x_n이라 하고

$$c_n = \int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{2}} \frac{t}{f'(x^n)} dt$$

라 하자. $\Sigma_{n=1}^{101} c_n = p + q\sqrt{2}$일 때, $q - p$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 유리수이다.) [4점]

정답: 3분 추측

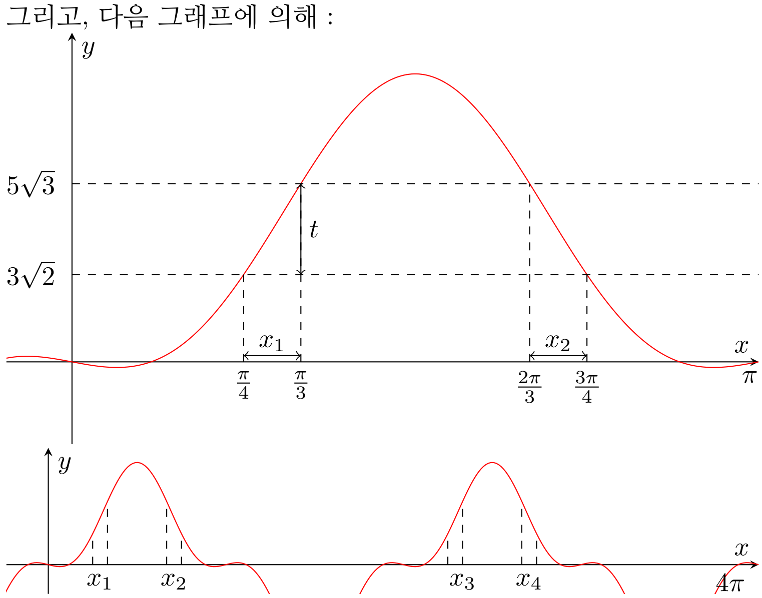
모든 양의 정수 n에 대해,

$$t = f\left(x_n\right)$$

임에 주목하라.

$$\int \frac{t}{f'\left(x_n\right)} dt = \int \frac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)} df\left(x_n\right) = \int f\left(x_n\right) dx_n = \frac{4}{3} \cos\left(3x_n\right) - 10 \cos x_n$$

그리고, 다음 그래프에 의해 :



따라서, 모든 음이 아닌 정수 n에 대하여

$$c_{2n+1} = \int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}} \frac{t}{f'\left(x_{2n+1}\right)} dt = \frac{17\sqrt{2}}{3} - \frac{19}{3}$$

$$c_{2n+2} = \int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}} \frac{t}{f'\left(x_{2n+2}\right)} dt = -\frac{17\sqrt{2}}{3} + \frac{19}{3}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{101} c_n = \frac{17\sqrt{2}}{3} - \frac{19}{3}\sqrt{2}; \quad q - p = 12$$