< 정답표>

1.	16	**2.**	78	**3.**	③	**4.**	31	**5.**	7
6.	65	**7.**	①	**8.**	13	**9.**	①	**10.**	16
11.	20	**12.**	83	**13.**	186	**14.**	⑤	**15.**	④
16.	243								

1

출제의도 : 함수의 성질과 부분적분법을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답 풀이 :
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$
$$y=f'(t)x-tf'(t)+f(t)$$

따라서 접선의 y절편은

$$g(t)=f(t)-tf'(t)$$

이므로 $f(t)=g(t)+tf'(t)$에서

$$\int_{-4}^{4} f(t)dt=\int_{-4}^{4} g(t)dt+\int_{-4}^{4} tf'(t)dt \quad \cdots ㉠$$

이때

$$\int_{-4}^{4} tf'(t)dt=[tf(t)]_{-4}^{4}-\int_{-4}^{4} f(t)dt$$
$$=\{4f(4)-(-4)f(-4)\}-\int_{-4}^{4} f(t)dt$$
$$=4\{f(4)+f(-4)\}-\int_{-4}^{4} f(t)dt$$

이므로

$$2\int_{-4}^{4} f(t)dt=\int_{-4}^{4} g(t)dt+4\{f(4)+f(-4)\}$$

따라서

$$2\{f(4)+f(-4)\}-\int_{-4}^{4} f(t)dt=-\frac{1}{2}\int_{-4}^{4} g(t)dt \quad \cdots ㉡$$

한편, $g(t)=f(t)-tf'(t)$에서

$$\int_{0}^{1} g(t)dt=\int_{0}^{1} f(t)dt-\int_{0}^{1} tf'(t)dt$$

이고

$$\int_{0}^{1} tf'(t)dt=[tf(t)]_{0}^{1}-\int_{0}^{1} f(t)dt$$
$$=f(1)-0-\frac{\ln 10}{4}=4+\frac{\ln 17}{8}-\frac{\ln 10}{4}$$

이므로

$$\int_{0}^{1} g(t)dt=-\frac{\ln 10}{4}-\left(4+\frac{\ln 17}{8}-\frac{\ln 10}{4}\right)$$
$$=-4-\frac{\ln 10}{2}-\frac{\ln 17}{8}$$

한편, $(1+t^2)\{g(t+1)-g(t)\}=2t$에서

$$g(t+1)-g(t)=\frac{2t}{t^2+1}$$

이므로

$$g(t+1)=g(t)+\frac{2t}{t^2+1} \quad \cdots ㉢$$

한편, 실수 전체의 집합에서 연속인 임의의 함수 $h(x)$는 임의의 실수 n에 대하여

$$\int_{n}^{n+1} h(x)dx=\int_{n-1}^{n} h(x+1)dx$$

를 만족시키므로 ㉢에서

$$\int_{n}^{n+1} g(t)dt=\int_{n-1}^{n} g(t+1)dt$$
$$=\int_{n-1}^{n}\left\{g(t)+\frac{2t}{t^2+1}\right\}dt$$
$$=\int_{n-1}^{n} g(t)dt+\int_{n-1}^{n}\frac{2t}{t^2+1}dt$$

이때

$$\int_{n-1}^{n} \frac{2t}{t^2+1} dt = \left[\ln(t^2+1)\right]_{n-1}^{n}$$

$$= \ln(n^2+1) - \ln\{(n-1)^2+1\}$$

이므로

$\int_0^1 g(t)dt = -4 - \frac{\ln 10}{2} - \frac{\ln 17}{8} = A$라 하면

$$\int_1^2 g(t)dt = A + (\ln 2 - \ln 1) = A + \ln 2$$

$$\int_2^3 g(t)dt = \int_1^2 g(t)dt + (\ln 5 - \ln 2)$$

$$= (A + \ln 2) + (\ln 5 - \ln 2) = A + \ln 5$$

$$\int_3^4 g(t)dt = \int_2^3 g(t)dt + (\ln 10 - \ln 5)$$

$$= (A + \ln 5) + (\ln 10 - \ln 5) = A + \ln 10$$

한편, $\int_0^1 g(t)dt = \int_{-1}^{0} g(t)dt + (\ln 1 - \ln 2)$

이므로

$$\int_{-1}^{0} g(t)dt = A + \ln 2$$

마찬가지로,

$$\int_{-2}^{-1} g(t)dt = \int_{-1}^{0} g(t)dt - (\ln 2 - \ln 5)$$

$$= (A + \ln 2) - (\ln 2 - \ln 5) = A + \ln 5$$

$$\int_{-3}^{-2} g(t)dt = \int_{-2}^{-1} g(t)dt - (\ln 5 - \ln 10)$$

$$= (A + \ln 5) - (\ln 5 - \ln 10) = A + \ln 10$$

$$\int_{-4}^{-3} g(t)dt = \int_{-3}^{-2} g(t)dt - (\ln 10 - \ln 17)$$

$$= (A + \ln 10) - (\ln 10 - \ln 17) = A + \ln 17$$

이상에서

$$\int_{-4}^{4} g(t)dt = (A + \ln 17) + (A + \ln 10) + (A + \ln 5) + (A + \ln 2)$$

$$+ A + (A + \ln 2) + (A + \ln 5) + (A + \ln 10)$$

$$= 8A + \ln(17 \times 10 \times 5 \times 2 \times 2 \times 5 \times 10)$$

$$= 8A + \ln(17 \times 10^4)$$

이때 $A = -4 - \frac{\ln 10}{2} - \frac{\ln 17}{8}$이므로

$$\int_{-4}^{4} g(t)dt = 8 \times \left(-4 - \frac{\ln 10}{2} - \frac{\ln 17}{8}\right) + \ln 17 + \ln 10^4$$

$$= -32$$

따라서 ㉡에서

$$2\{f(4) + f(-4)\} - \int_{-4}^{4} f(t)dt = -\frac{1}{2}\int_{-4}^{4} g(t)dt$$

$$= -\frac{1}{2} \times (-32) = 16$$

정답 16

2

출제의도 : 로그의 성질과 함수의 그래프를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 n의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

진수의 조건에서

$na-a^2>0$, $nb-b^2>0$이므로

$0<a<n$, $0<b<n$

또 $\log_2(na-a^2)=\log_2(nb-b^2)$에서

$na-a^2=nb-b^2$

$(b-a)(b+a-n)=0$

$b-a>0$이므로 $b+a=n$

$na-a^2=(b+a)a-a^2=ab$이므로

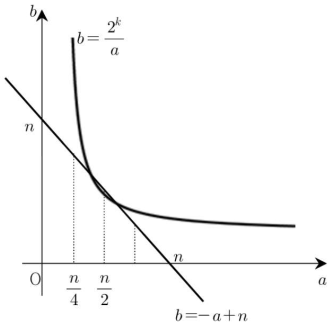
$ab=2^k$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$꼴이어야 한다.

한편, $0<b-a\le \dfrac{n}{2}$에서

$0<(n-a)-a\le \dfrac{n}{2}$, $0<b-(n-b)\le \dfrac{n}{2}$

$\dfrac{n}{4}\le a<\dfrac{n}{2}$, $\dfrac{n}{2}<b\le \dfrac{3n}{4}$

즉 그림과 같이 좌표평면에서 직선 $b+a=n$과 곡선 $ab=2^k$가 $\dfrac{n}{4}\le a<\dfrac{n}{2}$인 범위에서 만나는 점이 존재해야 한다.



$\dfrac{2^k}{\frac{n}{4}}\ge \dfrac{3n}{4}$, $\dfrac{2^k}{\frac{n}{2}}<\dfrac{n}{2}$이 성립해야 하므로

$\dfrac{3n^2}{16}\le 2^k<\dfrac{n^2}{4}$

$3n^2\le 2^{k+4}<4n^2$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$k=1$일 때, $3n^2\le 32<4n^2$

 을 만족시키는 n의 값은 3

$k=3$일 때, $3n^2\le 128<4n^2$

 을 만족시키는 n의 값은 6

$k=4$일 때, $3n^2\le 256<4n^2$

 을 만족시키는 n의 값은 9

$k=5$일 때, $3n^2\le 512<4n^2$

 을 만족시키는 n의 값은 12, 13

$k=6$일 때, $3n^2\le 1024<4n^2$

 을 만족시키는 n의 값은 17, 18

따라서 조건을 만족시키는 20 이하의 자연수 n의 값은 3, 6, 9, 12, 13, 17, 18이고, 그 합은

$3+6+9+12+13+17+18=78$

이다.

정답 78

3

출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 삼차함수에 대하여 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

$-1+a-b>-1$이므로 $a>b$

조건 (나)에서

$(1+a+b)-(-1+a-b)>8$

$2+2b>8$이므로 $b>3$

조건 (가), (나)에서 $a>b>3$

ㄱ. $f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

이차방정식 $3x^2+2ax+b=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-3b$

이때, $a^2-3b>b^2-3b=b(b-3)>0$

이므로 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. $f'(-1)=3-2a+b$

$=3-(2a-b)$

$=3-\{(a-b)+a\}$

$a-b>0$이고, $a>3$이므로

$f'(-1)<0$이다.

즉 $-1<x<1$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이 성립하지 않는다. (거짓)

ㄷ. $x^3+ax^2+bx-(3k^2+2ak+b)x=0$

$x(x^2+ax-3k^2-2ak)=0$

$x=0$ 또는 $x^2+ax-3k^2-2ak=0$

(ⅰ) 이차방정식

$x^2+ax-3k^2-2ak=0$이 $x=0$을 근으로 갖는 경우

$-3k^2-2ak=0$에서

$k=0$ 또는 $k=-\frac{2a}{3}$

이때, 방정식 $f(x)-f'(k)x=0$은 두 실근 $x=0,\ x=-a$를 갖는다.

(ⅱ) 이차방정식

$x^2+ax-3k^2-2ak=0$이 0이 아닌 중근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+ax-3k^2-2ak=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=a^2+12k^2+8ak=0$에서

k에 대한 이차방정식

$12k^2+8ak+a^2=0$

을 풀면

$$k=\frac{-4a\pm\sqrt{16a^2-12a^2}}{12}$$
$$=\frac{-4a\pm 2|a|}{12}$$

이때 $a>3$이므로

$k=-\frac{a}{2}$ 또는 $k=-\frac{a}{6}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 실수 k의 개수는 4이다.

(참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

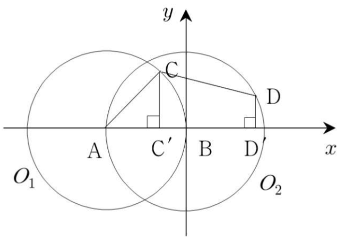
정답 ③

4

출제의도 : 평면벡터의 내적의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

좌표평면에서 두 점 A, B의 좌표를 각각
$(-5, 0)$, $(0, 0)$이라 하자.



점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 C′이라 하자. 점 C는 원 O_1 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{AC}}=5$이고, (가)에서 $\cos(\angle \mathrm{CAB})=\frac{3}{5}$이므로

$\overline{\mathrm{AC'}}=3$이다. 이때 $\overline{\mathrm{C'B}}=2$이므로 $\mathrm{C'}(-2, 0)$이고 $\mathrm{C}(-2, 4)$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=30$에서 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$가 이루는 각을 θ라 하면

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{CD}}|\cos\theta=30$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=5$이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|\cos\theta=6$

점 D에서 x축에 내린 수선의 발을 D′이라 하면 $|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|\cos\theta=|\overrightarrow{C'D'}|=6$이다.

따라서 $\mathrm{D'}(4, 0)$이다. $\overline{\mathrm{BD}}=5$이고, $|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|<9$이므로 $\mathrm{D}(4, 3)$이다.

선분 CD를 지름으로 하는 원의 중심을 E, 반지름의 길이를 r라 하면 $\mathrm{E}\left(1, \frac{7}{2}\right)$이고

$r=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{CD}}=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+(-1)^2}=\frac{\sqrt{37}}{2}$

선분 AB의 중점을 M이라 하면 $\mathrm{M}\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$이고

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$

$=\left(\overrightarrow{\mathrm{PM}}+\overrightarrow{\mathrm{MA}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{PM}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right)$

$=|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{PM}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right)+\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}$

$=|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{PM}}\cdot\vec{0}-|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2$

$=|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2-\frac{25}{4}$

$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|$의 최댓값은

$|\overrightarrow{\mathrm{EM}}|+r=\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{2}\right)^2}+\frac{\sqrt{37}}{2}$

$=\frac{7\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{37}}{2}$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최댓값은

$\left(\frac{7\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{37}}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$

$=\left(\frac{49}{2}+\frac{7\sqrt{74}}{2}+\frac{37}{4}\right)-\frac{25}{4}$

$=\frac{55}{2}+\frac{7}{2}\sqrt{74}$

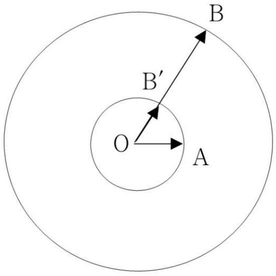
$a=\frac{55}{2}$, $b=\frac{7}{2}$이므로

$a+b=\frac{55}{2}+\frac{7}{2}=31$ **정답** 31

5

출제의도 : 벡터의 내적의 정의와 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :
그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원과 선분 OB가 만나는 점을 B′이라 하고 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ 라 하자.



조건 (가)에서 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3\vec{b}$이므로

$(3\vec{b})\cdot\vec{p}=3\vec{a}\cdot\vec{p}$

$\vec{a}\cdot\vec{p}=\vec{b}\cdot\vec{p}$ ---㉠

또, 조건 (나)에서 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2=20$ 이므로

$|\vec{a}-\vec{p}|^2+|3\vec{b}-\vec{p}|^2=20$

$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2+9|\vec{b}|^2-6\vec{b}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2=20$

이때, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$이므로

$-\vec{a}\cdot\vec{p}-3\vec{b}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2=5$

㉠에서 $\vec{b}\cdot\vec{p}=\vec{a}\cdot\vec{p}$이므로 대입하면

$|\vec{p}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{p}=5$

$|\vec{p}|^2=4\vec{a}\cdot\vec{p}+5$ ----㉡

한편,

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(\vec{a}-\vec{p})\cdot(3\vec{b}-\vec{p})$

$=3\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{p}-3\vec{b}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2$

$=3\vec{a}\cdot\vec{b}-4\vec{a}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2$--㉢

㉡을 대입하면

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=3\vec{a}\cdot\vec{b}+5$

이때 위의 내적의 값이 최소가 되는 경우는 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$가 이루는 각의 크기가 π일 때이고 최솟값은 2이다.

한편, ㉠에서 두 벡터 $\vec{a}, \vec{p}$가 이루는 각의 크기를 $\theta(0\le\theta\le\pi)$, 두 벡터 $\vec{b}, \vec{p}$가 이루는 각의 크기를 $\theta'(0\le\theta'\le\pi)$이라 하면

$|\vec{a}||\vec{p}|\cos\theta=|\vec{b}||\vec{p}|\cos\theta'$

$\cos\theta=\cos\theta'$

$\theta=\theta'$

그러므로 ㉢의 내적의 값이 최소일 때는 두 벡터 $\vec{a}, \vec{p}$가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 일 때이므로 ㉡에서

$|\vec{p}|^2=5$

$|\vec{p}|=\sqrt{5}$

따라서,

$m+k^2=2+(\sqrt{5})^2=7$

정답 7

6

출제의도 : 조건을 만족시키는 사차 함수를 사잇값의 정리 등을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

$f(1)=f(1)f(2)$

$f(1)+f(2)=f(2)f(3)$

$f(1)+f(2)+f(3)=f(3)f(4)$

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=f(4)f(5)$

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=f(5)f(6)$

이므로

$f(1)=f(1)f(2)$ …… ㉠

$f(2)=f(2)\{f(3)-f(1)\}$ …… ㉡

$f(3)=f(3)\{f(4)-f(2)\}$ …… ㉢

$f(4)=f(4)\{f(5)-f(3)\}$ …… ㉣

$f(5)=f(5)\{f(6)-f(4)\}$ …… ㉤

조건 (나)에서

$\frac{f(5)-f(3)}{5-3} \le 0, \ \frac{f(6)-f(4)}{6-4} \le 0$

이므로

$f(5)-f(3) \le 0, \ f(6)-f(4) \le 0$

그러므로 ㉣에서

$f(4)=0$ 또는 $f(3)=f(5)$

또, ㉤에서

$f(5)=0$ 또는 $f(4)=f(6)$

그러므로 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(i) $f(4)=0$이고 $f(5)=0$인 경우

㉢에서

$f(3)=-f(3)f(2)$

이므로

$f(3)=0$ 또는 $f(2)=-1$ …… ㉥

㉥에서 $f(3)=0$이면 ㉠과 ㉡은

$f(1)=f(1)f(2)$

$f(2)=-f(1)f(2)$

만약 $f(1)=0$이면 $f(2)=0$이고 $f(2)=0$이면 $f(1)=0$이므로 사차방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 5개의 근을 갖게 되어 모순이다.

그러므로

$f(1) \ne 0, \ f(2) \ne 0$

이때, $f(1)=-1, \ f(2)=1$

사잇값의 정리에 의해 방정식 $f(x)=0$은 1과 2 사이에 한 실근 k를 갖는다.

이때,

$f(x)=a(x-k)(x-3)(x-4)(x-5)$

$(a \ne 0, \ 1<k<2)$

라 하면 $f(1)=-1, \ f(2)=1$에서

$a(1-k)\times(-24)=-1$

$a(2-k)\times(-6)=1$

즉, $a(1-k)=\frac{1}{24}, \ a(2-k)=-\frac{1}{6}$

두 식을 변변 빼면

$a=-\frac{5}{24}$

이 값을 대입하면

$-\frac{5}{24}(1-k)=\frac{1}{24}$

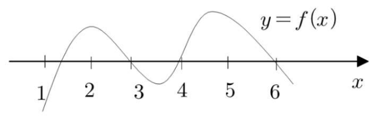
$k=\frac{6}{5}$

그러므로

$f(x)=-\frac{5}{24}\left(x-\frac{6}{5}\right)(x-3)(x-4)(x-5)$

이다.

㉥에서 $f(2)=-1$인 경우 ㉠에서
$f(1)=0$
또, ㉡에서
$-1=-f(3)$
$f(3)=1$
이때, $f(2)=-1$, $f(3)=1$이므로 사잇값의 정리에 의해 방정식 $f(x)=0$은 2와 3 사이에 적어도 한 실근을 갖는다.
이때, $f(x)=a(x-k)(x-1)(x-4)(x-5)$
$(a\neq 0,\ 2<k<3)$라 하면
$f(2)=-1$, $f(3)=1$에서 $a=\dfrac{5}{12}$, $k=\dfrac{12}{5}$
그러나 $f(6)-f(4)\leq 0$을 만족하지 않으므로 모순이다.
(ⅱ) $f(4)=0$ 이고 $f(4)=f(6)$인 경우
이때, $f(6)=0$
㉢에서
$f(3)=-f(3)f(2)$
이므로
$f(3)=0$ 또는 $f(2)=-1$ ---㉦
$f(3)=0$이면 ㉠, ㉡에서
$f(1)=f(1)f(2)$
$f(2)=-f(2)f(1)$
이때, $f(1)=0$이면 $f(2)=0$이고
$f(2)=0$이면 $f(1)=0$이므로
사차방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 5개의 근을 갖게 되어 모순이다.
그러므로
$f(1)\neq 0$, $f(2)\neq 0$
이때,
$f(1)=-1$, $f(2)=1$
사잇값의 정리에 의해 방정식 $f(x)=0$은 1과 2 사이에 적어도 한 실근을 갖는다.
이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때, 조건 (나)의 $\dfrac{f(5)-f(3)}{5-3}\leq 0$을 만족시키지 않으므로 함수 $f(x)$는 없다.
㉦에서 $f(2)=-1$인 경우 ㉠에서
$f(1)=0$
또, ㉡에서
$-1=-f(3)$
$f(3)=1$
이때, $f(2)=-1$, $f(3)=1$이므로 사잇값의 정리에 의해 방정식 $f(x)=0$은 2와 3 사이에 적어도 한 실근을 갖는다.
$f(4)=0$, $f(6)=0$, $f(1)=0$이고
㉤에서 $f(5)=0$이므로 사차방정식은 서로 다른 5개의 근을 갖게 되어 모순이다.
(ⅲ) $f(3)=f(5)$이고 $f(5)=0$인 경우
이때, $f(3)=0$
㉣에서
$f(4)=0$
한편, ㉠과 ㉡에서
$f(1)=f(1)f(2)$
$f(2)=-f(2)f(1)$
만약 $f(1)=0$이면 $f(2)=0$이고
$f(2)=0$이면 $f(1)=0$이므로
사차방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 5개의 근을 갖게 되어 모순이다.

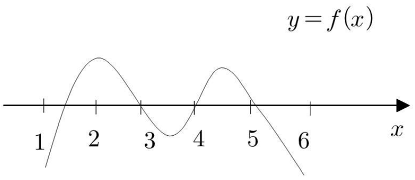
그러므로

$f(1) \neq 0$, $f(2) \neq 0$

이때, $f(1)=-1$, $f(2)=1$

사잇값의 정리에 의해 방정식 $f(x)=0$은 1과 2 사이에 적어도 한 실근을 갖는다.

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때, (ⅰ)에서

$$f(x)=-\frac{5}{24}\left(x-\frac{6}{5}\right)(x-3)(x-4)(x-5)$$

(ⅳ) $f(3)=f(5)$이고 $f(4)=f(6)$인 경우

㉣과 ㉤에서

$f(4)=0$, $f(5)=0$

그러므로

$f(3)=0$, $f(6)=0$

한편, 한편, ㉠과 ㉡에서

$f(1)=f(1)f(2)$

$f(2)=-f(2)f(1)$

만약 $f(1)=0$이면 $f(2)=0$이고

$f(2)=0$이면 $f(1)=0$이므로

사차방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 6개의 근을 갖게 되어 모순이다.

그러므로

$f(1) \neq 0$, $f(2) \neq 0$

이때, $f(1)=-1$, $f(2)=1$

사잇값의 정리에 의해 방정식 $f(x)=0$은 1과 2 사이에 적어도 한 실근을 갖는다.

이는 사차방정식 $f(x)=0$이 5개 이상의 근을 갖게 되어 모순이다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)로부터

$$128\times f\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$=2^7\times\left(-\frac{5}{24}\right)\times\frac{13}{10}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$=2^7\times\frac{13\times5}{2^7}$$

$$=65$$

정답 65

7

출제의도 : 주어진 조건을 이용하여 함수 $f(x)$에 대한 명제의 참, 거짓을 판단할 수 있는가?

정답풀이 :
ㄱ. 조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고 조건 (가)에서 $f(x) \neq 1$ 이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \neq -1$ 이다. (참)
ㄴ. 조건 (다)에서
$$f'(x)=\{1+f(x)\}\{1+f(-x)\}$$
$$=\{1+f(x)\}\{1-f(x)\}$$
이고 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 그 그래프는 원점에 대하여 대칭이며 $f(x) \neq 1$, $f(x) \neq -1$ 이므로 $-1<f(x)<1$ 이다.
즉, $1+f(x)>0$, $1-f(x)>0$ 이므로
$f'(x)>0$
따라서 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 증가한다. (거짓)
ㄷ. $f'(x)=\{1+f(x)\}\{1+f(-x)\}$
$$=\{1+f(x)\}\{1-f(x)\}$$
$$=1-\{f(x)\}^2$$
이므로 양변을 x에 대하여 미분하면
$f''(x)=-2f(x)f'(x)$
이때 $f''(x)=0$ 이면 $f(x)=0$ (왜냐하면 ㄴ에서 $f'(x)>0$이므로)
그런데, $f(x)$는 원점에 대하여 대칭이고 $f(0)=0$이고 증가하므로 변곡점은 $(0,0)$ 뿐이 존재하지 않는다. (거짓)

정답 ①

8

출제의도 : 귀납적으로 주어진 수열의 특정한 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d(d \neq 0)$라 하자.
$b_2=b_1+a_2=a_1+(a_1+d)=2a_1+d$
$b_3=b_2-a_3=(2a_1+d)-(a_1+2d)=a_1-d$
$b_4=b_3+a_4=(a_1-d)+(a_1+3d)=2a_1+2d$
$b_5=b_4+a_5=(2a_1+2d)+(a_1+4d)=3a_1+6d$
$b_6=b_5-a_6=(3a_1+6d)-(a_1+5d)=2a_1+d$
$b_7=b_6+a_7=(2a_1+d)+(a_1+6d)=3a_1+7d$
$b_8=b_7+a_8=(3a_1+7d)+(a_1+7d)=4a_1+14d$
$b_9=b_8-a_9=(4a_1+14d)-(a_1+8d)=3a_1+6d$
$b_{10}=b_9+a_{10}=(3a_1+6d)+(a_1+9d)=4a_1+15d$
이때, $b_{10}=a_{10}$이므로
$4a_1+15d=a_1+9d$
$a_1=-2d$
이다.
따라서
$$\frac{b_8}{b_{10}}=\frac{4a_1+14d}{4a_1+15d}$$
$$=\frac{4\times(-2d)+14d}{4\times(-2d)+15d}$$
$$=\frac{6}{7}$$
이므로
$p=7$, $q=6$
이다.
따라서
$p+q=7+6=13$

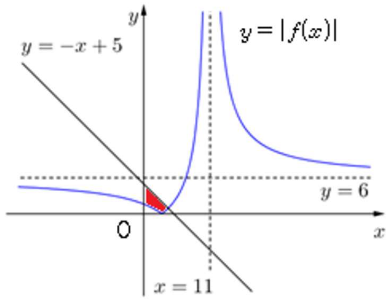
정답 13

9

출제의도 : 함수의 그래프를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 자연수 k의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y=\dfrac{k}{x-11}+6(k \ge 36)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=11$, $y=6$이고, $k>0$이므로 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같고, 주어진 조건을 만족시키는 영역 중 $x>0$, $y>0$인 부분은 다음 그림의 색칠한 부분과 같다.



함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 x축이 만나는 점을 $\mathrm{A}(a,\ 0)$이라 하자.

$k=36$일 때,

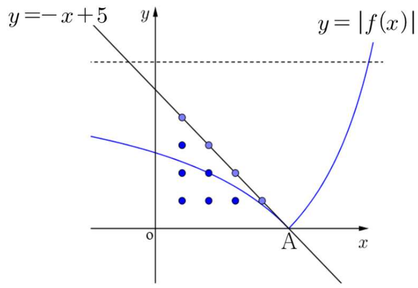
$\dfrac{36}{x-11}+6=0$에서

$a=5$

이다.

한편, k의 값이 커질수록 점 A의 x좌표는 작아진다.

$k=36$일 때, 주어진 조건을 만족시키는 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는 6이다.



함수 $y=|f(x)|$의 그래프 중 $y=-f(x)$의 그래프와 일치하는 그래프가 점 $(2,\ 2)$를 지날 때, 즉

$-\left(\dfrac{k}{2-11}+6\right)=2$

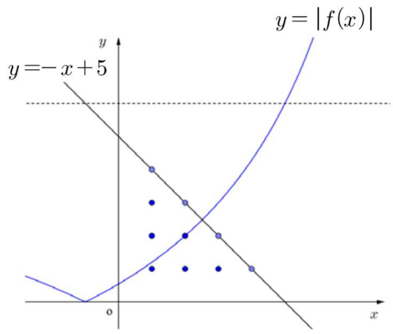
에서

$k=72$

이때 주어진 조건을 만족시키는 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는 5이다.

따라서

$k>72$ ⋯⋯ ㉠



함수 $y=|f(x)|$의 그래프 중 $y=-f(x)$의 그래프와 일치하는 그래프가 점 $(1,\ 3)$를 지날 때, 즉

$$-\left(\frac{k}{1-11}+6\right)=3$$

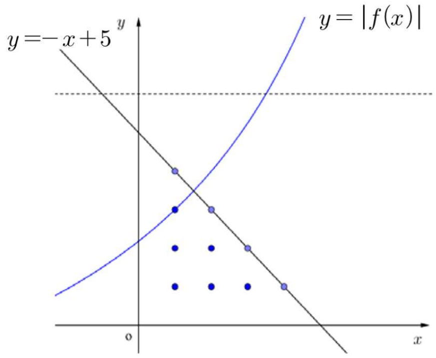
에서

$k=90$

이때 주어진 조건을 만족시키는 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는 2이다.

따라서

$k \le 90$ ⋯⋯ ㉡



㉠, ㉡에서

$72 < k \le 90$

따라서 구하는 자연수 k의 개수는

18

정답 ①

10

출제의도 : 함수의 성질과 함수의 그래프를 이용하여 조건을 만족시키는 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)$

조건 (가)에서 $g'(1)=0$이므로

$f(1)=\ln 2-c=0$에서 $c=\ln 2$

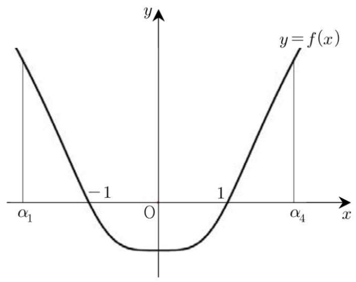
$f(x)=\ln(x^4+1)-\ln 2$

$$f'(x)=\frac{4x^3}{x^4+1}$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 $-\ln 2$를 갖고,

모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



조건 (가)에서 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓

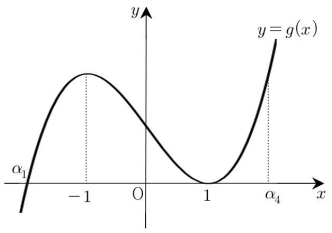
이와 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=\alpha_1$ $(\alpha_1 < -1)$로 둘러싸인 부분의 넓이가 같아지도록 α_1을 정할 수 있다.

이때, $g(x)=\int_a^x f(t)\,dt=0$을 만족시키는 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 a의 값은

α_1, $\alpha_2=-1$, $\alpha_3=1$, $\alpha_4=-\alpha_1$

이므로 $m=4$이다.

따라서 조건을 만족시키는 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



한편,

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx=\int_0^1 \{-f(x)\}\,dx$$

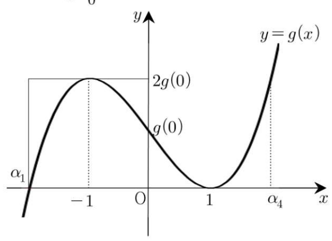
$$=\int_0^1 \{-g'(x)\}\,dx$$

$$=[-g(x)]_0^1$$

$$=-g(1)+g(0)$$

$$=g(0)$$

즉 $g(0)=\int_0^1 |f(x)|\,dx$



$\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)\,dx$의 값은 위의 그림에서 직사각형의 넓이와 같으므로

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)\,dx=(0-\alpha_1)\times 2g(0)$$

$$=-2\alpha_1\times\int_0^1 |f(x)|\,dx$$

$$=2\alpha_4\times\int_0^1 |f(x)|\,dx$$

이므로 조건 (나)에서 $k=2$

따라서 $c=\ln 2$, $m=4$, $k=2$이므로

$$mk\times e^c=4\times 2\times e^{\ln 2}$$

$$=4\times 2\times 2=16$$

정답 16

11

출제의도 : 함수의 연속과 역함수의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & (x<1) \\ cx^2+\frac{5}{2}x & (x \geq 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)=f(1)$$

이어야 한다.

이때,

$$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}(ax+b)=a+b$$

$$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}\left(cx^2+\frac{5}{2}x\right)=c+\frac{5}{2}$$

$$f(1)=c+\frac{5}{2}$$

이므로

$$a+b=c+\frac{5}{2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하므로

$a>0,\ c>0$ 또는 $a<0,\ c<0$

이어야 한다.

(i) $a>0,\ c>0$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프가 증가하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 일치한다. 이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점 중 하나의 x좌표가 1이므로

$f(1)=f^{-1}(1)=1$

이어야 한다.

즉, $f(1)=c+\frac{5}{2}=1$에서

$$c=-\frac{3}{2}$$

이것은 조건에 만족하지 않는다.

즉, $a>0,\ c>0$이 아니다.

(ii) $a<0,\ c<0$일 때,

함수

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & (x<1) \\ cx^2+\frac{5}{2}x & (x \geq 1) \end{cases}$$

에서

$g(x)=ax+b(x<1)$

$h(x)=cx^2+\frac{5}{2}x(x \geq 1)$

라 하자.

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하므로

두 함수 $g(x)$, $h(x)$도 역함수가 존재한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점 중 하나의 x좌표가 -1이므로

$g(-1)=h^{-1}(-1)$

이다.

즉, $h^{-1}(-1)=-a+b$이므로

$h(-a+b)=-1$에서

$$c(-a+b)^2+\frac{5}{2}(-a+b)=-1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점 중 하나의 x좌표가 2이므로

$h(2)=g^{-1}(2)$

이다.

즉, $g^{-1}(2)=4c+5$이므로
$g(4c+5)=2$에서
$a(4c+5)+b=2$ …… ㉢
한편, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점 중 하나의 x좌표가 1이므로
$h(1)=1$이어야 한다.
즉, $h(1)=c+\frac{5}{2}=1$에서

$c=-\frac{3}{2}$

$c=-\frac{3}{2}$을 ㉠, ㉡, ㉢에 대입한 후 연립하면

$a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$

(i), (ii)에서

$a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$, $c=-\frac{3}{2}$

따라서

$$2a+4b-10c$$
$$=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+4\times\frac{3}{2}-10\times\left(-\frac{3}{2}\right)$$
$$=20$$

정답 20

12

출제의도 : 정적분의 성질을 이용하여 함수식을 만족시키는 상수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
조건 (나)

$$\int_x^{x+a} f(t)dt=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x+a)-f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \cdots ㉠$$

이 식의 양변에 $x=-\frac{a}{2}$를 대입하면

$$f\left(\frac{a}{2}\right)-f\left(-\frac{a}{2}\right)=\cos\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

조건 (가)에서 의해

$f\left(\frac{a}{2}\right)=f\left(-\frac{a}{2}\right)$이므로

$$\cos\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=0$$

$0<a<2\pi$에서

$$-\frac{2}{3}\pi\le-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{3}$$

이므로

$$-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}$$

따라서 $a=\frac{5\pi}{3}$

㉠에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x+a)-f'(x)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

이 식에 $x=-\frac{a}{2}$를 대입하면

$$f'\left(\frac{a}{2}\right)-f'\left(-\frac{a}{2}\right)=-\sin\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

이때, 조건 (가) $f(x)=f(-x)$에서
$f'(x)=-f'(-x)$이므로

$$2f'\left(\frac{a}{2}\right)=-\sin\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$a=\dfrac{5}{3}\pi$이므로

$$2f'\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\sin\left(-\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1$$

$$f'\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\quad\cdots ㉡$$

$f(x)=b\cos(3x)+c\cos(5x)$에서
$f'(x)=-3b\sin(3x)-5c\sin(5x)$

$$f'\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-3b\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)-5c\sin\left(\frac{25\pi}{6}\right)$$

$$=-3b-\frac{5c}{2}=\frac{1}{2}$$

$-6b-5c=1\ \cdots ㉢$
한편,

$$\int_x^{x+a}f(t)dt=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

의 양변에 $x=-\dfrac{a}{2}$를 대입하면

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}f(t)dt=\sin\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

조건 (가)에서 함수 $f(x)$의 그래프는
y축에 대하여 대칭이므로

$$2\int_0^{\frac{a}{2}}f(t)dt=\sin\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$2\int_0^{\frac{a}{2}}\{b\cos(3t)+c\cos(5t)\}dt$$

$$=2\left[\frac{b}{3}\sin(3t)+\frac{c}{5}\sin(5t)\right]_0^{\frac{a}{2}}$$

$$=2\left\{\frac{b}{3}\sin\left(\frac{3a}{2}\right)+\frac{c}{5}\sin\left(\frac{5a}{2}\right)\right\}$$

$$=\sin\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

양변에 $a=\dfrac{5\pi}{3}$을 대입하면

$$2\left\{\frac{b}{3}\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)+\frac{c}{5}\sin\left(\frac{25\pi}{6}\right)\right\}$$

$$=\sin\left(-\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$2\left(\frac{b}{3}+\frac{c}{5}\times\frac{1}{2}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$$

$$\frac{2}{3}b+\frac{c}{5}=-1$$

$10b+3c=-15\cdots ㉣$
㉢, ㉣에서

$b=-\dfrac{9}{4},\ c=\dfrac{5}{2}$

따라서

$$abc=\frac{5\pi}{3}\times\left(-\frac{9}{4}\right)\times\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$=-\frac{75}{8}\pi$$

$p=8,\ q=75$이므로
$p+q=83$

정답 83

13

출제의도 : 함수를 구할 수 있고 미분가능하지 않는 x좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
함수 $y=f(x)$위의 점을 P라 하고 구간을 나누어 함수 $g(x)$를 구하면 다음과 같다.

(i) $x<1$일 때,
$\mathrm{P}(x,\ x+1)$이므로

$$\overline{\mathrm{AP}}^{\,2}=(x+1)^2+(x+2)^2 =2x^2+6x+5$$

$$\overline{\mathrm{BP}}^{\,2}=(x-1)^2+(x-1)^2 =2x^2-4x+2$$

이때, $\overline{\mathrm{AP}}^{\,2}\geq\overline{\mathrm{BP}}^{\,2}$을 풀면

$$2x^2+6x+5\geq 2x^2-4x+2$$
$$10x\geq -3$$
$$x\geq -\frac{3}{10}$$

그러므로

$$g(x)=\begin{cases} 2x^2+6x+5 & \left(x<-\dfrac{3}{10}\right) \\ 2x^2-4x+2 & \left(-\dfrac{3}{10}\leq x<1\right) \end{cases}$$

(ii) $x\geq 1$일 때,
$\mathrm{P}(x,\ -2x+4)$이므로

$$\overline{\mathrm{AP}}^{\,2}=(x+1)^2+(-2x+5)^2 =5x^2-18x+26$$

$$\overline{\mathrm{BP}}^{\,2}=(x-1)^2+(-2x+2)^2 =5x^2-10x+5$$

이때, $\overline{\mathrm{AP}}^{\,2}\geq\overline{\mathrm{BP}}^{\,2}$을 풀면

$$5x^2-18x+26\geq 5x^2-10x+5$$
$$8x\leq 21$$
$$x\leq\frac{21}{8}$$

그러므로

$$g(x)=\begin{cases} 5x^2-10x+5 & \left(1\leq x<\dfrac{21}{8}\right) \\ 5x^2-18x+26 & \left(x\geq\dfrac{21}{8}\right) \end{cases}$$

그러므로 (i), (ii)에 의하여

$$g(x)=\begin{cases} 2x^2+6x+5 & \left(x<-\dfrac{3}{10}\right) \\ 2x^2-4x+2 & \left(-\dfrac{3}{10}\leq x<1\right) \\ 5x^2-10x+5 & \left(1\leq x<\dfrac{21}{8}\right) \\ 5x^2-18x+26 & \left(x\geq\dfrac{21}{8}\right) \end{cases}$$

이때, 함수 $g(x)$는 모든 실수에서 연속이다.
한편,

$$g'(x)=\begin{cases} 4x+6 & \left(x<-\dfrac{3}{10}\right) \\ 4x-4 & \left(-\dfrac{3}{10}<x<1\right) \\ 10x-10 & \left(1<x<\dfrac{21}{8}\right) \\ 10x-18 & \left(x<\dfrac{21}{8}\right) \end{cases}$$

이므로

$$\lim_{x\to-\frac{3}{10}-}g'(x)\neq\lim_{x\to-\frac{3}{10}+}g'(x)$$

$$\lim_{x\to 1-}g'(x)=\lim_{x\to 1+}g'(x)$$

$$\lim_{x\to\frac{21}{8}-}g'(x)\neq\lim_{x\to\frac{21}{8}+}g'(x)$$

그러므로 $x=a$에서 함수 $g(x)$가 미분가능하지 않는 a의 값은

$$-\frac{3}{10},\ \frac{21}{8}$$

이다.
따라서

$$80p=80\left(-\frac{3}{10}+\frac{21}{8}\right) =-24+210 =186$$

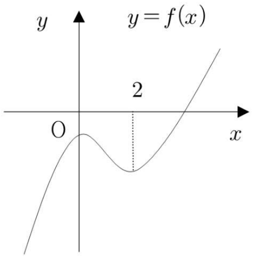
정답 186

14

출제의도 : 도함수의 그래프로부터 함수의 그래프를 그릴 수 있고 이를 활용하여 극대와 극소, 방정식에 관련된 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $f(0)<0$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때,

$f(2)<f(0)<0$

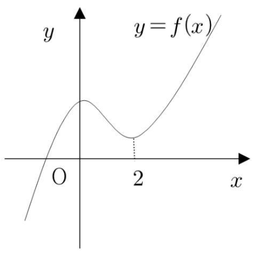
이므로

$|f(2)|>|f(0)|$ <참>

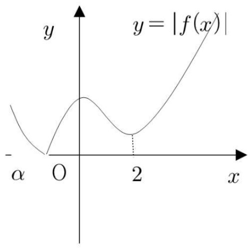
ㄴ. $f(0)f(2)\geq 0$일 때, $f(0)>f(2)$이므로 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형을 각 경우에 따라 그리면 다음과 같다.

(ⅰ) $f(0)>f(2)>0$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



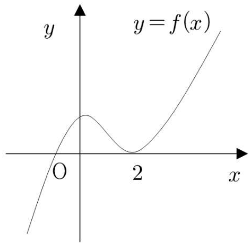
이때, 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



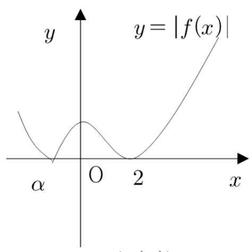
그러므로 $|f(\alpha)|=0$ $(\alpha\neq 2)$라 하면 a의 값은 α와 2로 개수는 2이다.

(ⅱ) $f(0)>f(2)$이고 $f(2)=0$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



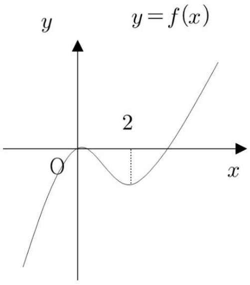
이때, 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



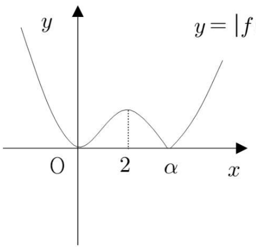
그러므로 $|f(\alpha)|=0$ $(\alpha\neq 2)$라 하면 a의 값은 α와 2로 개수는 2이다.

(ⅲ) $f(0)=0$이고 $f(2)<0$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



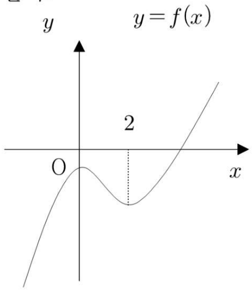
이때, 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



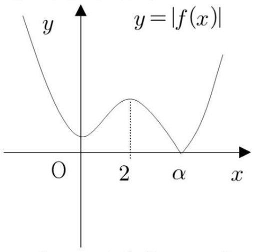
그러므로 $|f(\alpha)|=0$ $(\alpha \neq 0)$라 하면 a의 값은 0과 α로 개수는 2이다.

(ⅳ) $f(2)<f(0)<0$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때, 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



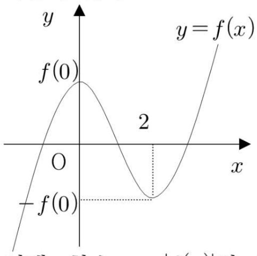
그러므로 $|f(\alpha)|=0$ 라 하면 a의 값은 0과 α로 개수는 2이다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에서 극소인 a의 값의 개수는 2이다. <참>

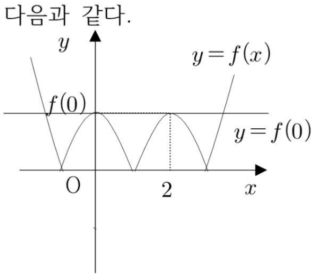
ㄷ. $f(0)+f(2)=0$이므로

$f(2)=-f(0)$

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때, 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때, 방정식 $|f(x)|=f(0)$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=f(0)$과의 서로 다른 교점의 개수와 같다.

위의 그림에서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=f(0)$의 서로 다른 교점의 개수는 4이므로 서로 다른 실근의 개수도 4이다. <참>

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

15

출제의도 : 함수의 그래프와 미분가능하지 않을 조건을 이용하여 합성함수가 연속이 될 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x)=\begin{cases} 2\sin^3 x & (-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}) \\ \cos x & (\frac{\pi}{4}\le x<\frac{3\pi}{2}) \end{cases}$$ 에서

$$f'(x)=\begin{cases} 6\sin^2 x\cos x & (-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}) \\ -\sin x & (\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{2}) \end{cases}$$

이므로

$f'(x)=0$

에서

$x=0$ 또는 $x=\pi$

이때, $f'(0)=0$ 이지만 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)>0$ 이므로 $x=0$에서 극값을 갖지 않고 $x=\pi$ 에서는 극솟값 $f(\pi)=-1$을 갖는다.

또한,

$f(\frac{\pi}{4})=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}f(x)$ 이고

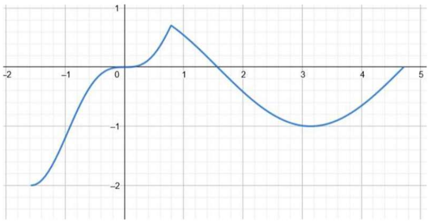
$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}-}f'(x)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}+}f'(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$에서 극댓값 $f(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$을 갖는다.

그리고, $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}+}f(x)=-2$,

$\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}-}f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



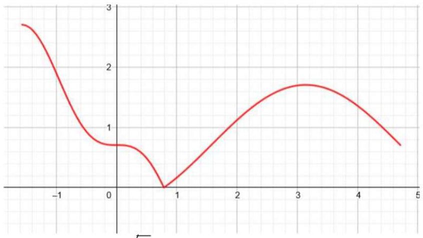
이때 $G(x)=|f(x)-t|$라 하면

$$(\sqrt{G(x)})'=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{G(x)}}\times G'(x)$$

이므로 함수 $\sqrt{G(x)}$는 $G(x)$가 미분가능하지 않는 x의 값과 $G(x)=0$인 x의 값에서 미분가능하지 않다.

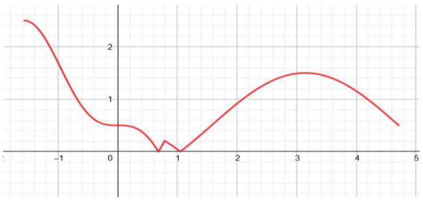
(i) $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때

함수 $G(x)=|f(x)-t|$의 그래프는 그림과 같으므로 조건을 만족시키는 k의 개수는 1이다.



(ii) $0<t<\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때

함수 $G(x)=|f(x)-t|$의 그래프는 그림과 같으므로 조건을 만족시키는 k의 개수는 3이다.



(iii) $t=0$일 때

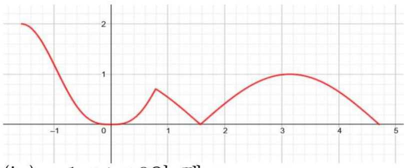
함수 $G(x)=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.

이때, $i(x)=\sqrt{|2\sin^3 x|}$라 하면

$$i'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{i(0+h)-i(0)}{h}$$

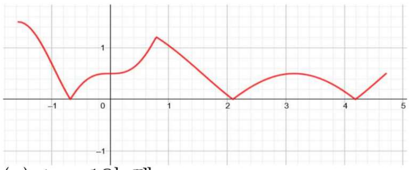
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{|2\sin^3 h|}}{h}=0$$

이므로 $x=0$에서는 미분이 가능하다. 따라서, 조건을 만족시키는 k의 개수는 2이다.



(iv) $-1<t<0$일 때

함수 $G(x)=|f(x)-t|$의 그래프는 그림과 같으므로 조건을 만족시키는 k의 개수는 4이다.



(v) $t=-1$일 때

함수 $G(x)=|f(x)-t|$의 그래프는 그림과 같다.

이때, $j(x)=\sqrt{|\cos x+1|}$라 하면

$$\lim_{h\to 0-}\frac{j(\pi+h)-j(\pi)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0-}\frac{\sqrt{|\cos(\pi+h)+1|}-\sqrt{|\cos\pi+1|}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0-}\frac{\sqrt{|-\cos h+1|}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0-}\frac{\sqrt{-\cos h+1}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0-}\left(-\sqrt{\frac{1-\cos h}{h^2}}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0-}\left\{-\sqrt{\frac{\sin^2 h}{h^2(1+\cos h)}}\right\}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{j(\pi+h)-j(\pi)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{\sqrt{|\cos(\pi+h)+1|}-\sqrt{|\cos\pi+1|}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{\sqrt{|-\cos h+1|}}{h}$$

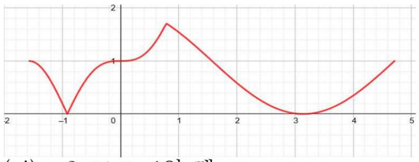
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{\sqrt{-\cos h+1}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\left(\sqrt{\frac{1-\cos h}{h^2}}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0+}\sqrt{\frac{\sin^2 h}{h^2(1+\cos h)}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

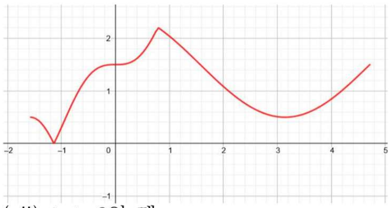
즉, $x=\pi$에서 미분가능하지 않으므로 조건을 만족시키는 k의 개수는 3이다.



(vi) $-2<t<-1$일 때

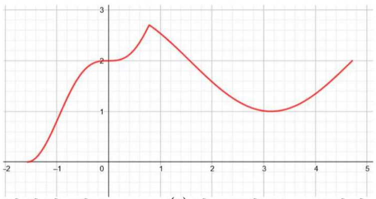
함수 $G(x)=|f(x)-t|$의 그래프는 그림과

같으므로 조건을 만족시키는 k의 개수는 2이다.

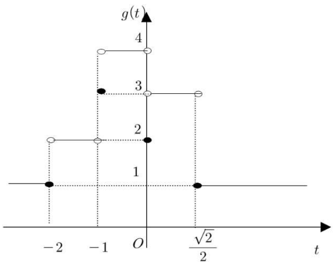


(vii) $t \le -2$일 때

함수 $G(x)=|f(x)-t|$의 그래프는 그림과 같으므로 조건을 만족시키는 k의 개수는 1이다.



따라서 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.



그런데, 합성함수 $(h \circ g)(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되어야 하므로

$$\lim_{t \to \frac{\sqrt{2}}{2}-} (h \circ g)(t) = \lim_{t \to \frac{\sqrt{2}}{2}+} (h \circ g)(t)$$

$$= (h \circ g)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

즉, $h(3)=h(1) \cdots$ ㉠

$$\lim_{t \to 0-} (h \circ g)(t) = \lim_{t \to 0+} (h \circ g)(t)$$

$$= (h \circ g)(0)$$

즉, $h(4)=h(3)=h(2) \cdots$ ㉡

$$\lim_{t \to -1-} (h \circ g)(t) = \lim_{t \to -1+} (h \circ g)(t)$$

$$= (h \circ g)(-1)$$

즉, $h(2)=h(4)=h(3) \cdots$ ㉢

$$\lim_{t \to -2-} (h \circ g)(t) = \lim_{t \to -2+} (h \circ g)(t)$$

$$= (h \circ g)(-2)$$

즉, $h(1)=h(2) \cdots$ ㉣

따라서 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣에 의하여

$h(1)=h(2)=h(3)=h(4)$

이므로

$h(1)=h(2)=h(3)=h(4)=k$

라 하면 사차함수 $h(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$h(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+k$

또한,

$$a=g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1,$$

$$b=g(0)=2,\ c=g(-1)=3$$

이므로

$h(a+5)-h(b+3)+c$

$=h(6)-h(5)+3$

$=(5\times4\times3\times2+k)-(4\times3\times2\times1+k)+3$

$=(120+k)-(24+k)+3$

$=99$

정답 ④

16

출제의도 : 미분법과 주어진 조건을 이용하여 함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
조건 (가)에 의하여 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 이차함수 $y=g(x)$의 그래프는 $x=\alpha$인 점에서 만나고 그 점에서 접선의 기울기가 같으므로
방정식 $f(x)-g(x)=0$은 $x=\alpha$를 중근으로 갖는다.
따라서 또 다른 한 근을 γ라 하면
$f(x)-g(x)=(x-\alpha)^2(x-\gamma)\cdots$㉠
㉠의 양변을 미분하면
$f'(x)-g'(x)=2(x-\alpha)(x-\gamma)+(x-\alpha)^2$
따라서 조건 (나)에 의하여
$f'(\beta)-g'(\beta)$
$=2(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)+(\beta-\alpha)^2=0$
$\alpha\neq\beta$**이므로**
$2(\beta-\gamma)+\beta-\alpha=0$
$\gamma=\dfrac{3\beta-\alpha}{2}$
즉, ㉠에 대입하면
$f(x)-g(x)=(x-\alpha)^2(x-\dfrac{3\beta-\alpha}{2})\cdots$㉡
또한, 이차함수 $y=g(x)$의 그래프의 대칭축은 $g'(\alpha)=-16$, $g'(\beta)=16$에서
$x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$
이므로
$g(x)=2\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+k$($k$는 상수)
라 놓으면
$g'(x)=4\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$
따라서
$g'(\alpha)=4\left(\alpha-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=4\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$=2(\alpha-\beta)=-16$
에서 $\alpha-\beta=-8$ 이다.
㉡에 $\beta+1$을 대입하면
$f(\beta+1)-g(\beta+1)$
$=(\beta+1-\alpha)^2\left(\beta+1-\dfrac{3\beta-\alpha}{2}\right)$
$=(\alpha-\beta-1)^2\left(\dfrac{\alpha-\beta+2}{2}\right)$
$=(-8-1)^2\left(\dfrac{-8+2}{2}\right)$
$=81\times(-3)=-243$
따라서
$g(\beta+1)-f(\beta+1)=243$
이다.

정답 243