

< 정답표 >

1.	②	2.	②	3.	①	4.	④	5.	③
6.	①	7.	⑤	8.	④	9.	②	10.	①
11.	③	12.	②	13.	⑤	14.	④	15.	⑤
16.	②	17.	⑤	18.	③	19.	④	20.	②
21.	①	22.	26	23.	15	24.	12	25.	16
26.	110	27.	20	28.	21	29.	65	30.	84

01

[출제의도] 지수 계산하기

$$\left(\frac{1}{3^2}\right)^2 = 3^{\frac{1}{2} \times 2} = 3^1 = 3$$

02

[출제의도] 집합의 연산 이해하기

두 집합  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{2, 4, 5\}$ 에 대하여  
집합  $A \cap B = \{2, 4\}$ 이므로 집합  $A \cap B$ 의 원소의 합은  
6이다.

03

[출제의도] 수열의 극한 계산하기

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-3}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \text{ 이다.}$$

04

[출제의도] 함수의 역함수 이해하기

$f(2) = 4$ ,  $f^{-1}(1) = 4$ 이므로  
 $f(2) + f^{-1}(1) = 4 + 4 = 8$ 이다.

05

[출제의도] 등비수열의 일반항 계산하기

등비수열  $\{a_n\}$ 의 공비를  $r$ 라 하자.

$$a_1 = 24, a_2 = a_1 r = 12$$

$$24r = 12, r = \frac{1}{2}$$

따라서  $a_4 = a_1 r^3 = 24 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 24 \times \frac{1}{8} = 3$ 이다.

06

[출제의도] 수렴하는 수열의 극한의 대소관계 이해하기

부등식

$$2n^3 + 2n \leq a_n \leq 2n^3 + 5n + 1$$

에서 각 변을  $5n^3$ 으로 나누면

$$\frac{2n^3 + 2n}{5n^3} \leq \frac{a_n}{5n^3} \leq \frac{2n^3 + 5n + 1}{5n^3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 2n}{5n^3} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{5n^3} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 5n + 1}{5n^3}$$

$$\frac{2}{5} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{5n^3} \leq \frac{2}{5}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{5n^3} = \frac{2}{5}$$

이다.

07

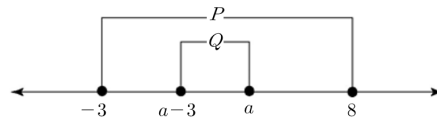
[출제의도] 함수의 극한 이해하기

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 + 2 = 2 \text{ 이다.}$$

08

[출제의도] 명제의 필요조건 이해하기

$p$ 는  $q$ 이기 위한 필요조건이면



$-3 \leq a-3$ 이고  $a \leq 8$ 이므로  $0 \leq a \leq 8$ 이다.

정수  $a$ 는 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8이므로 모든 정수  $a$ 의  
개수는 9이다.

09

[출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계 이해하기

$$n = 5 \text{ 일 때, } \sum_{k=1}^5 a_k = 2^6 - 2$$

$$n = 4 \text{ 일 때, } \sum_{k=1}^4 a_k = 2^5 - 2$$

$$a_5 = \sum_{k=1}^5 a_k - \sum_{k=1}^4 a_k = (2^6 - 2) - (2^5 - 2) = 32$$



10

[출제의도] 로그의 정의 이해하기

$2^a = 5$ 이고  $5^b = 7$ 이므로  $(2^a)^b = (5^b)^b = 7$ 이다.

[다른 풀이]

$$\begin{aligned} ab &= \log_2 5 \times \log_5 7 \\ &= \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2} \times \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 5} \\ &= \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 2} = \log_2 7 \end{aligned}$$

그러므로  $(2^a)^b = 2^{ab} = 2^{\log_2 7} = 7$ 이다.

11

[출제의도] 무리함수의 그래프 이해하기

함수  $f(x)$ 는 함수  $y = \sqrt{-x}$ 를  $x$ 축 방향으로 2만큼,  $y$ 축 방향으로 1만큼 평행이동한 함수이다.

따라서  $f(x) = \sqrt{-(x-2)} + 1 = \sqrt{-x+2} + 1$ 이다.

$$\sqrt{-x+a} + b = \sqrt{-x+2} + 1 \text{ 이므로}$$

$a=2, b=1$ 이고  $a+b=3$ 이다.

12

[출제의도] 상용로그 이해하기

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \log 2^{2n} + \frac{1}{2} \log 5^n &= \frac{n}{2} \log 2 + \frac{n}{2} \log 5 \\ &= \frac{n}{2} \log 10 = \frac{n}{2} \end{aligned}$$

이다.  $\frac{n}{2}$ 이 정수이므로  $n$ 은 2의 배수이다.

따라서 50 이하의 자연수  $n$ 의 개수는 25이다.

13

[출제의도] 무리함수의 그래프 이해하기

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}, f(16) = 3\sqrt{2} \text{ 이고 } f\left(\frac{5}{2}\right), a, f(16) \text{ 은}$$

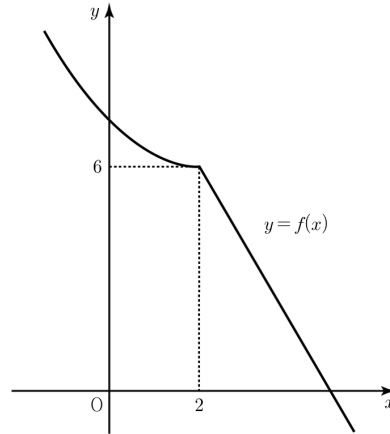
등비수열이다.  $a$ 가 등비중항이므로  $a^2 = 9$ 이다.

$a$ 가 양수이므로  $a=3$ 이다.

14

[출제의도] 역함수 문제 해결하기

함수  $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 함수  $f(x)$ 가 일대 일대응이 되어야 하므로 함수  $y=f(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같은 형태가 되어야 한다.

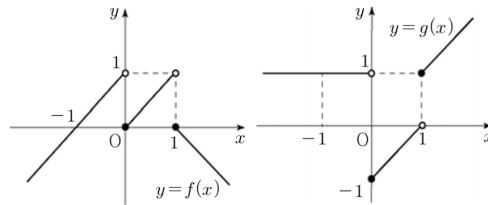


즉, 곡선  $y=a(x-2)^2+b$ 가 점  $(2, 6)$ 을 지나야 하므로  $b=6$ 이다.

또,  $x \geq 2$ 일 때, 함수  $f(x)$ 의 그래프가 기울기가 음수인 직선이므로  $x < 2$ 일 때, 곡선  $y=a(x-2)^2+b$ 의 모양은 아래로 볼록해야 한다. 즉,  $a > 0$ 이다. 따라서 정수  $a$ 의 최솟값은 1이므로  $a+b$ 의 최솟값은 7이다.

15

[출제의도] 함수의 연속 증명하기



ㄱ.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$  (참)

ㄴ.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 0$ 이므로  
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)g(x) = 0$ 이다. (참)

ㄷ.  $h(x) = f(x)g(x)$ 라 하자.

i)  $h(1) = f(1) \times g(1) = 0 \times 1 = 0$

ii)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)g(x) = 0$

iii)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 1$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)g(x) = 0$ 이다.

i), ii), iii)에 의하여 함수  $f(x)g(x)$ 는  $x=1$ 에서 연속이다. (참)

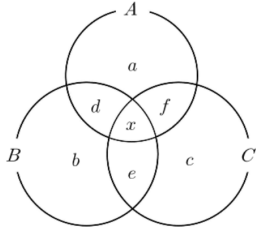
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.



[출제의도] 집합의 연산을 이용하여 외적 문제 해결하기

자격증 A를 취득한 수강생의 집합을 A, 자격증 B를 취득한 수강생의 집합을 B, 자격증 C를 취득한 수강생의 집합을 C라 하자.

각 영역에 속하는 원소의 개수를 벤 다이어그램에 나타내면 아래 그림과 같다.



수강생 수는 총 35명이고 세 자격증 A, B, C 중에서 어느 것도 취득하지 못한 수강생이 3명이므로  $n(A \cup B \cup C) = 35 - 3 = 32$ 이다.

이 학원의 수강생 중에서 세 자격증 A, B, C를 모두 취득한 수강생이 없으므로  $x = 0$ 이다.

자격증 A, B, C를 취득한 수강생이

각각 21명, 18명, 15명이므로

$$a + d + f = 21 \dots ①$$

$$b + d + e = 18 \dots ②$$

$$c + e + f = 15 \dots ③$$

①+②+③을 하면

$$a + b + c + 2(d + e + f) = 54 \dots ④ \text{ 이고}$$

$$n(A \cup B \cup C) = a + b + c + d + e + f = 32 \dots ⑤ \text{ 이다.}$$

④-⑤를 하면  $d + e + f = 22$ 이다.

따라서 세 자격증 A, B, C 중에서 두 종류의 자격증만 취득한 수강생 수는 22이다.

[출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 추론하기

주어진 식 (\*)의 양변을  $\frac{n(n+1)}{2}$ 로 나누면

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \frac{2n}{n+1} \dots \textcircled{1}$$

이므로  $n \geq 2$ 인 자연수  $n$ 에 대하여

(i)  $n = 2$ 일 때,

$$\left(\text{좌변}\right) = \left[\frac{3}{2}\right], \left(\text{우변}\right) = \frac{4}{3} \text{ 이므로 } \textcircled{1} \text{이 성립한다.}$$

(ii)  $n = k (k \geq 2)$ 일 때,  $\textcircled{1}$ 이 성립한다고 가정하면

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} > \frac{2k}{k+1} \dots \textcircled{2}$$

이다.  $\textcircled{2}$ 의 양변에  $\frac{1}{k+1}$ 을 더하면

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} > \frac{2k+1}{k+1}$$

이 성립한다. 한편,

$$\frac{2k+1}{k+1} - \left[\frac{2(k+1)}{k+2}\right] = \frac{k}{(k+1)(k+2)} > 0$$

이므로

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} > \left[\frac{2(k+1)}{k+2}\right]$$

이다. 따라서  $n = k+1$ 일 때도  $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여  $n \geq 2$ 인 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$\textcircled{1}$ 이 성립하므로 (\*)도 성립한다.

위 과정에서  $p = \frac{3}{2}, f(k) = \frac{2(k+1)}{k+2}$ 이므로

$$8p \times f(10) = 8 \times \frac{3}{2} \times \frac{22}{12} = 22 \text{ 이다.}$$

[출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\log_a 2 = X, \log_b 2 = Y$ 라고 하자.

$X + Y = 2, \frac{1}{X} + \frac{1}{Y} = \frac{X+Y}{XY} = -1$ 이므로  $XY = -2$ 이다.

$$\begin{aligned} (\log_a 2)^2 + (\log_b 2)^2 &= X^2 + Y^2 \\ &= (X+Y)^2 - 2XY \\ &= 2^2 - 2(-2) = 8 \end{aligned}$$



[출제의도] 등비급수를 이용하여 도형 문제 추론하기

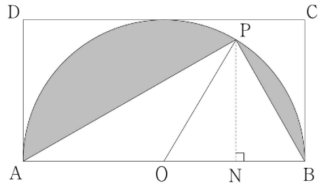


그림  $R_1$ 에서 반원의 중심을  $O$ 라 하면  $\overline{OP}=2$ ,  $\overline{ON}=1$  이므로  $\overline{NP}=\sqrt{3}$  이다. 따라서  $R_1$ 에서 색칠되어 있는 부분의 넓이  $S_1$ 은 다음과 같다.

$$S_1 = (\text{반원 } O \text{의 넓이}) - (\text{삼각형 } ABP \text{의 넓이})$$

$$= \frac{1}{2}\pi(2^2) - \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{3}$$

$$= 2(\pi - \sqrt{3})$$

이다. 한편, 그림  $R_n$ 에서 그림  $R_{n+1}$ 을 얻을 때 새로 그려지는 사각형들은 그림  $R_n$ 에서 새로 그린 사각형보다 넓이는  $\left(\frac{1}{2}\right)^2$  배로 줄어들고, 개수는 2배가 되므로 수열  $\{S_n\}$ 의 공비  $r = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 2 = \frac{1}{2}$  이다.

그러므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{S_1}{1-r} = \frac{2(\pi - \sqrt{3})}{1 - \frac{1}{2}} = 4(\pi - \sqrt{3})$$

이다.

[출제의도] 수열 문제 해결하기

조건 (가)에 의해  $a_n = -36 + (n-1)d \neq 0$  이므로  $(n-1)d \neq 36$  이다.  $d$ 는 자연수이므로,  $d$ 는 36의 양의 약수가 아니다. 또한 조건 (나)에 의해

$$\sum_{k=1}^m a_k = \frac{m\{-72 + (m-1)d\}}{2} = 0 \text{ 에서 } -72 + (m-1)d = 0$$

이므로  $(m-1)d = 72$  이다. 따라서  $\sum_{k=1}^m a_k = 0$  인  $m$ 이 존재하기 위해서  $d$ 가 72의 양의 약수이어야 한다. 그러므로  $d$ 는 36의 양의 약수가 아닌 72의 양의 약수이므로 모든  $d$ 의 값의 합은  $8 + 24 + 72 = 104$  이다.

[출제의도] 등비급수를 이용하여 도형 문제 추론하기

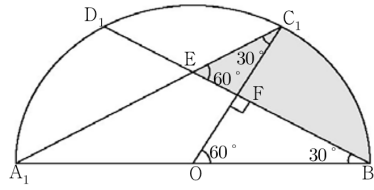


그림  $R_1$ 에서 두 선분  $A_1C_1$ 과  $B_1D_1$ 의 교점을  $E$ , 두 선분  $OC_1$ 과  $B_1D_1$ 의 교점을  $F$ 라 하자. 삼각형  $OB_1F$ 와 삼각형  $C_1EF$ 는 세 내각의 크기가  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ 인 직각삼각형이므로 삼각비에 의해

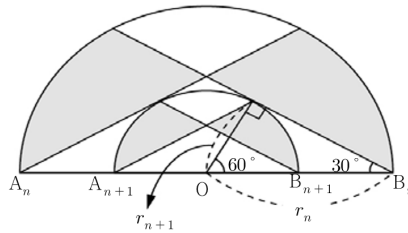
$$\overline{B_1F} = \sqrt{3}, \overline{OF} = \overline{C_1F} = 1, \overline{EF} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

이다.  $S_1$ 은 부채꼴  $OB_1C_1$ 의 넓이와 삼각형  $C_1EF$ 의 넓이를 더한 값에서 삼각형  $OB_1F$ 의 넓이를 뺀 값의 2배와 같으므로

$$S_1 = \left\{ \pi \times 2^2 \times \frac{60^\circ}{360^\circ} + \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1 \right\} \times 2$$

$$= \frac{4\pi}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

이다. 그림  $R_n$ 에서 가장 작은 반원의 반지름의 길이를  $r_n$ 이라 하고, 그림  $R_n$ 을 얻는 과정에서 새로 얻은 모양의 넓이를  $a_n$ 이라 하자.



$r_{n+1} : r_n = 1 : 2$  이므로

$$a_{n+1} : a_n = (r_{n+1})^2 : (r_n)^2$$

$$a_{n+1} : a_n = 1^2 : 2^2$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n$$

이다. 따라서 수열  $\{a_n\}$ 은 첫째항이  $\frac{4\pi}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}$  이고

공비가  $\frac{1}{4}$ 인 등비수열이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{4\pi}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{16\pi - 8\sqrt{3}}{9}$$

이다. 그러므로  $a+b = 16-8 = 8$  이다.



22

[출제의도] 함수의 극한 계산하기

$$\lim_{x \rightarrow 5} (x^2 + 1) = 5^2 + 1 = 26$$

23

[출제의도] 등차수열 이해하기

네 수 3, a, b, 12가 이 순서대로 등차수열을 이루므로  $a - 3 = 12 - b$ 이고  $a + b = 12 + 3 = 15$ 이다.

24

[출제의도] 함수의 연속 이해하기

함수  $f(x)$ 가  $x = 1$ 에서 연속이기 위해서는  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ 을 만족시켜야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + a) = 2 + a, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 13) = 14,$$

$f(1) = 14$ 이다. 함수  $f(x)$ 가  $x = 1$ 에서 연속이 되려면  $2 + a = 14$ 가 되어야 하므로  $a = 12$ 이다.

25

[출제의도] 수열의 극한 이해하기

급수  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 5)$ 가 수렴하므로  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 5) = 0$ 이다.

따라서  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5$ 이므로  $\lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n + 1) = 16$ 이다.

26

[출제의도] 수열의 합의 성질 이해하기

$$a_1 + 2a_2 + \dots + na_n = 2n^2 + 3n$$

에서  $b_n = na_n$ 이라 하고  $\sum_{k=1}^n b_k = S_n$ 이라 하면

$$\begin{aligned} b_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^2 + 3n - \{2(n-1)^2 + 3(n-1)\} \\ &= 4n + 1 \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

이다.  $b_1 = 5$ 이므로  $b_n = 4n + 1$  ( $n \geq 1$ )이다. 따라서

$$a_n = \frac{b_n}{n} = 4 + \frac{1}{n} \quad (n \geq 1)$$

이다.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{10} \frac{2}{a_n - 4} &= \sum_{n=1}^{10} \frac{2}{\left(4 + \frac{1}{n}\right) - 4} \\ &= \sum_{n=1}^{10} 2n = 2 \sum_{n=1}^{10} n = 2 \times 55 = 110 \end{aligned}$$

27

[출제의도] 지수법칙을 이용하여 외적 문제 해결하기

$$R = k \left( \frac{W}{D+10} \right)^{\frac{1}{3}} \text{에서}$$

$$R_1 = k \left( \frac{160}{d+10} \right)^{\frac{1}{3}} \text{이고, } R_2 = k \left( \frac{p}{d+10} \right)^{\frac{1}{3}}$$

이다.

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{k \left( \frac{160}{d+10} \right)^{\frac{1}{3}}}{k \left( \frac{p}{d+10} \right)^{\frac{1}{3}}} = \left( \frac{160}{p} \right)^{\frac{1}{3}} = 2 \text{이고}$$

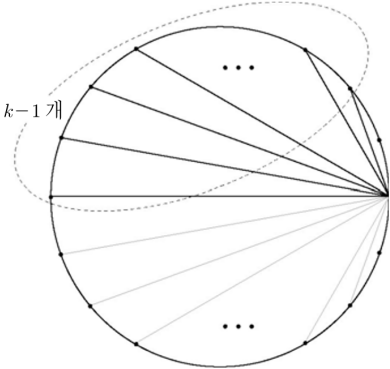
$$\sqrt[3]{\frac{160}{p}} = 2 \text{에서 } \frac{160}{p} = 8 \text{이고 } p = 20 \text{이다.}$$



[출제의도] 정  $n$ 각형의 대각선의 성질을 이용하여 수열의 규칙성 추론하기

정  $n$ 각형의 한 꼭짓점에서 그을 수 있는 대각선의 개수는  $n-3$ 개다.

i)  $n=2k$  ( $k \geq 2$ ) 일 때



한 꼭짓점에서 그을 수 있는 대각선의 개수는  $2k-3$  이고 지름을 제외하면  $2k-4$ 이다. 그런데 지름을 기준으로 상하 대칭이므로 서로 다른 길이의 대각선의 개수는

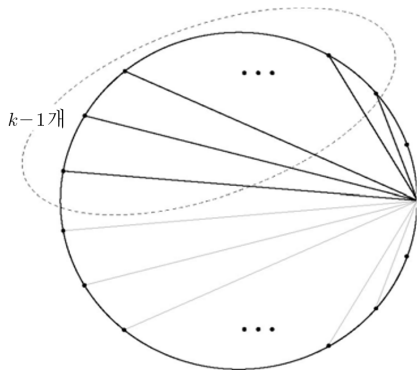
$$\frac{2k-4}{2} = k-2$$

이다. 따라서 한 꼭짓점에서 그을 수 있는 서로 다른 길이의 대각선의 개수는 지름을 포함하여

$$(k-2)+1 = k-1$$

이다.

ii)  $n=2k+1$  ( $k \geq 2$ ) 일 때



한 꼭짓점에서 그을 수 있는 대각선의 개수는

$$(2k+1)-3 = 2k-2$$

이다. 그런데 지름을 기준으로 상하 대칭이므로 서로 다른 길이의 대각선의 개수는

$$\frac{2k-2}{2} = k-1$$

이다.

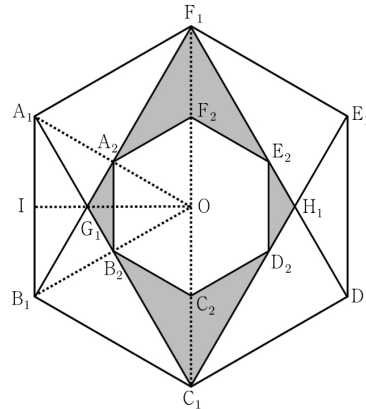
i)과 ii)에 의해

$$a_{22} = 10, a_{25} = 11$$

이다. 따라서  $a_{22} + a_{25} = 21$  이다.

29

[출제의도] 등비급수를 이용하여 도형 문제 추론하기



점  $G_1$ 에서 선분  $A_1B_1, C_1F_1$ 에 내린 수선의 발을 각각  $I, O$ 라 하자.  $\overline{A_1B_1} : \overline{C_1F_1} = \overline{G_1I} : \overline{G_1O}$ 이고  $\overline{A_1B_1} = 4, \overline{C_1F_1} = 8$ 이므로  $\overline{G_1O} = 2\overline{G_1I}$ 이다. 삼각형  $OA_1B_1$ 이 한 변의 길이가 4인 정삼각형이므로  $\overline{IO} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$  이고,  $\overline{G_1O} = 2\sqrt{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$  이다. 따라서 마름모  $F_1G_1C_1H_1$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{G_1H_1} \times \overline{C_1F_1} = \frac{1}{2} \times \left( \frac{4\sqrt{3}}{3} \times 2 \right) \times 8 = \frac{32}{3} \sqrt{3}$$

이다. 한편,

사각형  $A_1B_1OF_1$ 은 마름모이고 점  $A_2$ 는 선분  $B_1F_1$ 의 중점이므로 점  $A_2$ 는 선분  $OA_1$ 의 중점이다. 마찬가지로 점  $B_2$ 는 선분  $OB_1$ 의 중점이다. 따라서  $\overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2} = 2 : 1$ 이므로  $\overline{A_2B_2} = 2$ 이다.

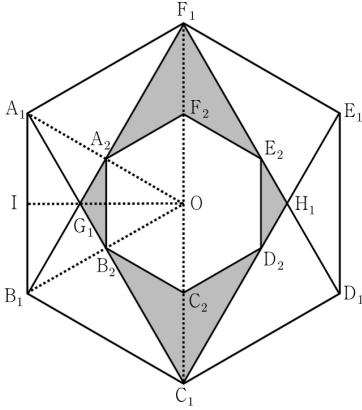
그러므로 정육각형  $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ 는 한 변의 길이가 2이므로 넓이는  $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 \times 6 = 6\sqrt{3}$  이다.

따라서  $R_1$ 에서 색칠되어 있는 부분의 넓이  $S_1$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S_1 &= (\text{마름모 } F_1G_1C_1H_1 \text{의 넓이}) \\ &\quad - (\text{정육각형 } A_2B_2C_2D_2E_2F_2 \text{의 넓이}) \\ &= \frac{14}{3} \sqrt{3} \end{aligned}$$



[출제의도] 등비급수를 이용하여 도형 문제 추론하기



점  $G_1$ 에서 선분  $A_1B_1$ ,  $C_1F_1$ 에 내린 수선의 발을 각각  $I$ ,  $O$ 라 하자.  $\overline{A_1B_1} : \overline{C_1F_1} = \overline{G_1I} : \overline{G_1O}$ 이고  $\overline{A_1B_1} = 4$ ,  $\overline{C_1F_1} = 8$ 이므로  $\overline{G_1O} = 2\overline{G_1I}$ 이다. 삼각형  $OA_1B_1$ 의 한 변의 길이가 4인 정삼각형이므로  $\overline{IO} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$  이고,  $\overline{G_1O} = 2\sqrt{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$  이다. 따라서 마름모  $F_1G_1C_1H_1$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{G_1H_1} \times \overline{C_1F_1} = \frac{1}{2} \times \left( \frac{4\sqrt{3}}{3} \times 2 \right) \times 8 = \frac{32}{3} \sqrt{3}$$

이다. 한편,

사각형  $A_1B_1OF_1$ 은 마름모이고 점  $A_2$ 는 선분  $B_1F_1$ 의 중점이므로 점  $A_2$ 는 선분  $OA_1$ 의 중점이다. 마찬가지로 점  $B_2$ 는 선분  $OB_1$ 의 중점이다. 따라서  $\overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2} = 2 : 1$  이므로  $\overline{A_2B_2} = 2$ 이다.

그러므로 정육각형  $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ 는 한 변의 길이가 2이므로 넓이는  $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 \times 6 = 6\sqrt{3}$ 이다.

따라서  $R_1$ 에서 색칠되어 있는 부분의 넓이  $S_1$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S_1 &= (\text{마름모 } F_1G_1C_1H_1 \text{의 넓이}) \\ &\quad - (\text{정육각형 } A_2B_2C_2D_2E_2F_2 \text{의 넓이}) \\ &= \frac{14}{3} \sqrt{3} \end{aligned}$$

[출제의도] 실수의 성질을 이용하여 수열 문제 해결하기

$ab < 0$ 이므로  $a$ 와  $b$ 의 부호가 다르다.

1)  $a < 0, b > 0$ 일 때

세 수  $a, b, ab$ 에서  $a$ 와  $ab$ 는 음수,  $b$ 는 양수이다. 음수 두 개와 양수 한 개가 등비수열이 되는 배열은 (음수, 양수, 음수)이므로 세 수의 배열은

$$a, b, ab \text{ 또는 } ab, b, a$$

뿐이다. 그러므로  $b$ 가 등비중항이므로

$$b^2 = a \times ab$$

$$b = a^2$$

이다. 따라서 세 수  $a, b, ab$ 는  $a, a^2, a^3$ 이다.

$a < 0, a^2 > 0, a^3 < 0$ 이므로 세 수를 배열하여 등차수열로 되는 경우의 등차중항은 음수인  $a$  또는  $a^3$ 이다.

i)  $a$ 가 등차중항인 경우

$$2a = a^3 + a^2$$

$$a(a+2)(a-1) = 0$$

$a < 0$ 이므로  $a = -2$ 이고  $b = 4$ 이다.

ii)  $a^3$ 이 등차중항인 경우

$$2a^3 = a + a^2$$

$$a(a-1)(2a+1) = 0$$

$a < 0$ 이므로  $a = -\frac{1}{2}$ 이고  $b = \frac{1}{4}$ 이다.

따라서  $a$ 의 값은  $-2, -\frac{1}{2}$ 이다.

2)  $a > 0, b < 0$ 일 때

1)과 같은 방법에 의해  $a$ 의 값은  $4, \frac{1}{4}$ 이다.

1)과 2)에 의해  $a$ 의 값은  $-2, -\frac{1}{2}, 4, \frac{1}{4}$ 이다. 따라서

서  $k = -2 - \frac{1}{2} + 4 + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$  이고  $48k = 84$ 이다.

