

수학 영역(나형)

5지선다형

1. $\left(\frac{1}{3^2}\right)^2$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

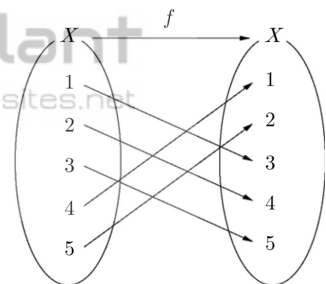
2. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 5\}$ 에 대하여 집합 $A \cap B$ 의 모든 원소의 합은? [2점]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-3}{2n+1}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

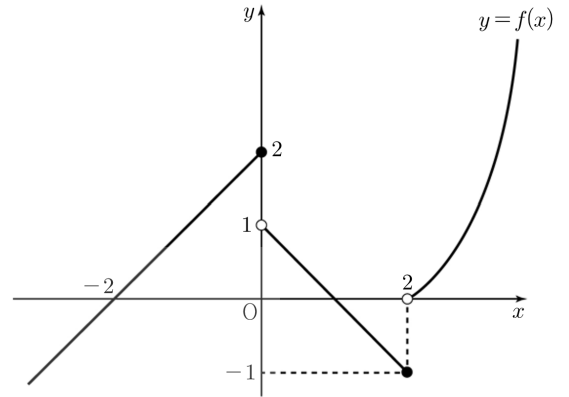
4. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 X 로의 함수 f 가 그림과 같이 정의될 때, $f(2) + f^{-1}(1)$ 의 값은? [3점]



- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

5. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 24$, $a_2 = 12$ 일 때, a_4 의 값은? [3점]
- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

7. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ 의 값은? [3점]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

6. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 부등식

$$2n^3 + 2n \leq a_n \leq 2n^3 + 5n + 1$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{5n^3}$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

8. 실수 x 에 대하여 두 조건 p, q 가 다음과 같다.

$$p : -3 \leq x \leq 8$$

$$q : a-3 \leq x \leq a$$

p 는 q 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 모든 정수 a 의 개수는? [3점]

- ① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

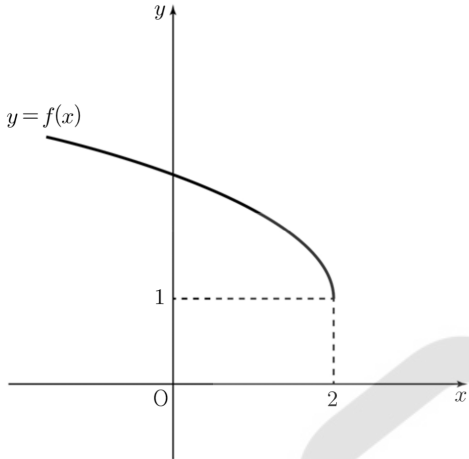
10. $\log_2 5 = a, \log_3 7 = b$ 일 때, $(2^a)^b$ 의 값은? [3점]

- ① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

9. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^n a_k = 2^{n+1} - 2$ 일 때, a_5 의 값은? [3점]

- ① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

11. 함수 $f(x) = \sqrt{-x+a} + b$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 두 상수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값은? [3점]

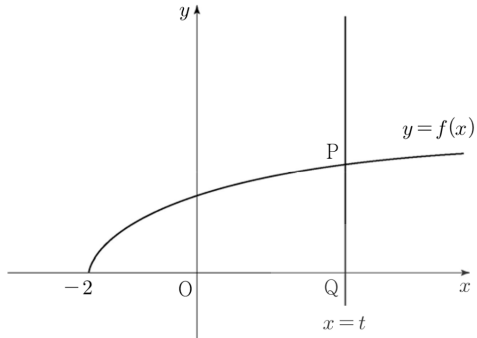


- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

12. $\frac{1}{4}\log 2^{2n} + \frac{1}{2}\log 5^n$ 이 정수가 되도록 하는 50 이하의 자연수 n 의 개수는? [3점]

- ① 28 ② 25 ③ 22 ④ 19 ⑤ 16

13. 함수 $f(x) = \sqrt{x+2}$ 와 직선 $x=t$ ($t > 0$) 에 대하여 물음에 답하시오. (단, 0는 원점이다.)



양수 a 에 대하여 세 수 $f\left(\frac{5}{2}\right)$, a , $f(16)$ 은 이 순서대로 등비수열을 이룬다. a 의 값은? [3점]

- ① $\frac{5}{3}$ ② 2 ③ $\frac{7}{3}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 3

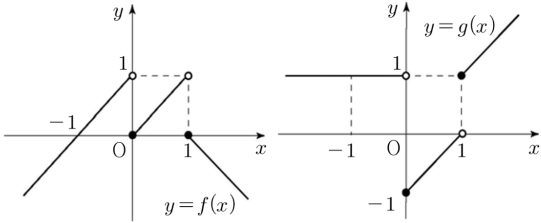
14. 두 정수 a, b 에 대하여 함수

$$f(x) = \begin{cases} a(x-2)^2 + b & (x < 2) \\ -2x + 10 & (x \geq 2) \end{cases}$$

는 실수 전체의 집합에서 정의된 역함수를 갖는다. $a+b$ 의 최솟값은? [4점]

- ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

15. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)g(x) = 0$

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 수강생이 35명인 어느 학원에서 모든 수강생을 대상으로 세 종류의 자격증 A, B, C의 취득 여부를 조사하였다. 자격증 A, B, C를 취득한 수강생이 각각 21명, 18명, 15명이고, 어느 자격증도 취득하지 못한 수강생이 3명이다. 이 학원의 수강생 중에서 세 자격증 A, B, C를 모두 취득한 수강생이 없을 때, 자격증 A, B, C 중에서 두 종류의 자격증만 취득한 수강생의 수는? [4점]

- ① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

17. 다음은 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)(1+2+3+\dots+n) > n^2 \dots\dots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하는 과정이다.

주어진 식 (*)의 양변을 $\frac{n(n+1)}{2}$ 로 나누면

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \frac{2n}{n+1} \dots\dots \textcircled{1}$$

이다. $n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여

(i) $n=2$ 일 때,
 (좌변) = $\textcircled{\text{가}}$, (우변) = $\frac{4}{3}$ 이므로 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때, $\textcircled{1}$ 이 성립한다고 가정하면

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} > \frac{2k}{k+1} \dots\dots \textcircled{2}$$

이다. $\textcircled{2}$ 의 양변에 $\frac{1}{k+1}$ 을 더하면

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} > \frac{2k+1}{k+1}$$

이 성립한다. 한편,

$$\frac{2k+1}{k+1} - \textcircled{\text{나}} = \frac{k}{(k+1)(k+2)} > 0$$

이므로

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} > \textcircled{\text{나}}$$

이다. 따라서 $n=k+1$ 일 때도 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $\textcircled{1}$ 이 성립하므로 (*)도 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p , (나)에 알맞은 식을 $f(k)$ 라 할 때, $8p \times f(10)$ 의 값은? [4점]

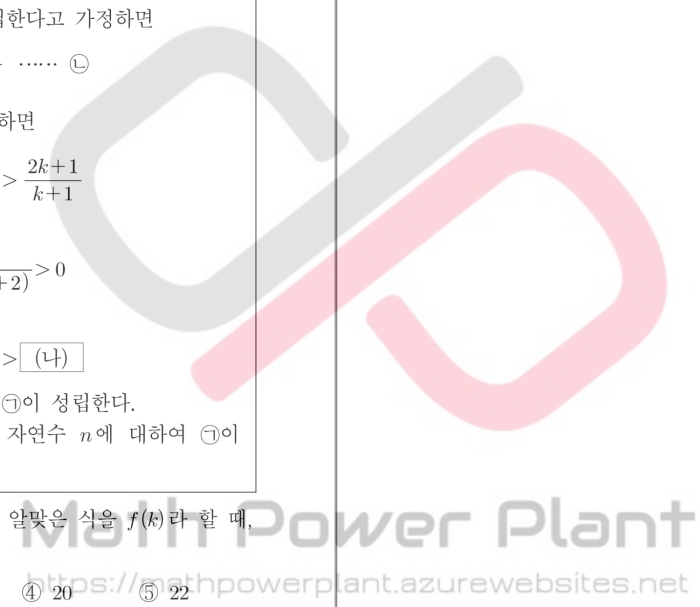
- ① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

18. a, b 는 1이 아닌 양수이고

$$\log_a 2 + \log_b 2 = 2, \log_2 a + \log_2 b = -1$$

일 때, $(\log_a 2)^2 + (\log_b 2)^2$ 의 값은? [4점]

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12





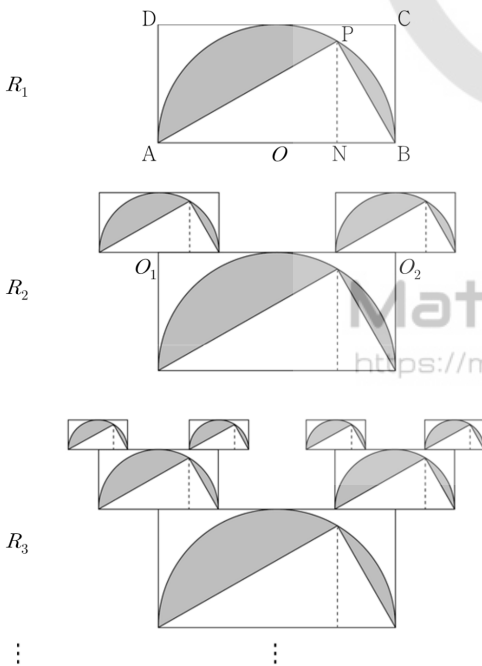
19. 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 O 가 있다. 그림과 같이 선분 AB를 한 변으로 하고 반원 O 에 외접하는 직사각형 ABCD를 그린다. 선분 AB를 3:1로 내분하는 점을 N이라 하고, 점 N을 지나고 선분 AB와 수직인 직선이 반원 O 와 만나는 점을 P라 하자. 반원 O 의 내부와 삼각형 ABP의 외부의 공통부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 점 D를 중심으로 하고 지름의 길이가 $\frac{1}{2}AB$ 인 반원 O_1 , 점 C를 중심으로 하고 지름의 길이가 $\frac{1}{2}AB$ 인 반원 O_2 를 지름이 직선 DC 위에 있도록 그린다.

두 반원 O_1, O_2 에 각각 그림 R_1 을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는  모양의 2개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $3(\pi - \sqrt{3})$ ② $3(\pi - \sqrt{2})$ ③ $3(\pi - 1)$
- ④ $4(\pi - \sqrt{3})$ ⑤ $4(\pi - \sqrt{2})$

20. 첫째항이 -36 이고 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 있다. 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 d 의 값의 합은? [4점]

(가) 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \neq 0$ 이다.

(나) $\sum_{k=1}^m a_k = 0$ 인 m 이 존재한다.

- ① 100 ② 104 ③ 108 ④ 112 ⑤ 116

단답형



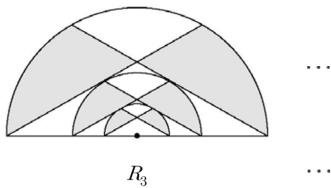
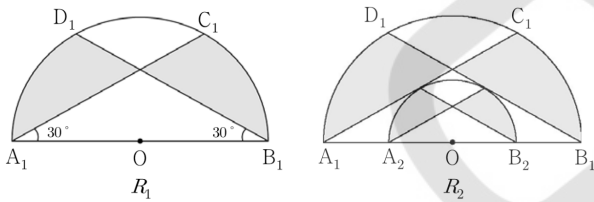
21. 중심이 O 이고 길이가 4인 선분 A_1B_1 을 지름으로 하는 반원이 있다. 그림과 같이 반원 위에 $\angle C_1A_1B_1 = 30^\circ$, $\angle D_1B_1A_1 = 30^\circ$ 가 되도록 두 점 C_1, D_1 을 각각 정하고, 두 선분 A_1C_1, B_1D_1 과 두 호 B_1C_1, A_1D_1 로 둘러싸인  모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 중심이 O 이고 두 선분 A_1C_1, B_1D_1 에 접하는 원이 선분 A_1B_1 과 만나는 점을 각각 A_2, B_2 라 하자. 선분 A_2B_2 를 지름으로 하는 반원에 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는  모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는

부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a\pi + b\sqrt{3}}{9}$ 이다.

$a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 정수이다.) [4점]



- ① 8 ② 9 ③ 10

22. $\lim_{x \rightarrow 5} (x^2 + 1)$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 네 수 3, $a, b, 12$ 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 함수

$$f(x) = \begin{cases} 2x+a & (x < 1) \\ x+13 & (x \geq 1) \end{cases}$$

이 $x=1$ 에서 연속이 되도록 하는 상수 a 의 값을 구하시오. [3점]

26. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n = 2n^2 + 3n$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10} \frac{2}{a_n - 4}$ 의 값을 구하시오. [4점]

25. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 5)$ 가 수렴할 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n + 1)$ 의 값을 구하시오. [3점]

27. 폭약에 의한 수중 폭발이 일어나면 폭발 지점에서 가스버블이 생긴다. 수면으로부터 폭발 지점까지의 깊이가 $D(\text{m})$ 인 지점에서 무게가 $W(\text{kg})$ 인 폭약이 폭발했을 때의 가스버블의 최대반경을 $R(\text{m})$ 라고 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$R = k \left(\frac{W}{D+10} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{단, } k \text{는 양의 상수이다.})$$

수면으로부터 깊이가 $d(\text{m})$ 인 지점에서 무게가 160kg 인 폭약이 폭발했을 때의 가스버블의 최대반경을 $R_1(\text{m})$ 이라 하고, 같은 폭발 지점에서 무게가 $p(\text{kg})$ 인 폭약이 폭발했을 때의 가스버블의 최대반경을 $R_2(\text{m})$ 라 하자.

$\frac{R_1}{R_2} = 2$ 일 때, p 의 값을 구하시오. (단, 폭약의 종류는 같다.)

[4점]

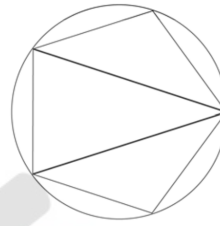
28. 자연수 $n (n \geq 4)$ 에 대하여 집합

$$D_n = \{x \mid x \text{는 반지름의 길이가 } 1 \text{인 원에 내접하는}$$

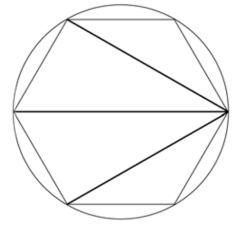
정 n 각형의 대각선의 길이}\}

라 하고, 집합 D_n 의 원소의 개수를 a_n 이라 하자.

예를 들어, 그림과 같이 $a_5 = 1, a_6 = 2$ 이다. $a_{22} + a_{25}$ 의 값을 구하시오. [4점]

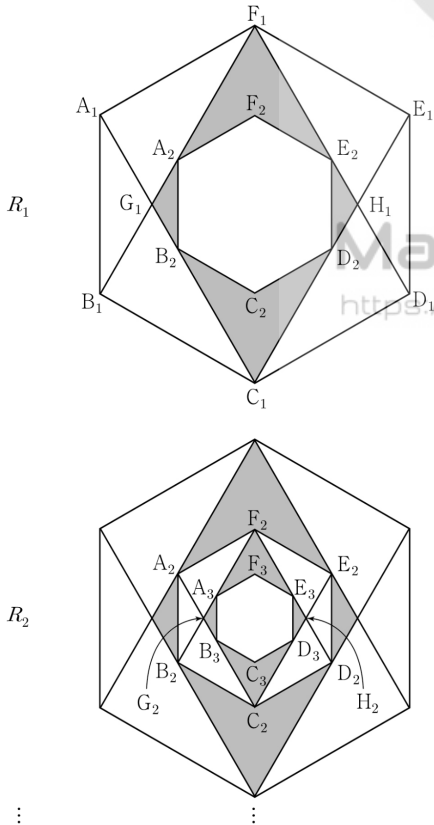


$a_5 = 1$



$a_6 = 2$

29. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정육각형 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 이 있다. 선분 A_1C_1 과 선분 B_1F_1 의 교점을 G_1 , 선분 C_1E_1 과 선분 D_1F_1 의 교점을 H_1 이라 하고, 선분 B_1F_1 과 선분 A_1C_1 의 중점을 각각 A_2, B_2 라 하자. 사각형 $F_1G_1C_1H_1$ 의 내부에 선분 A_2B_2 를 한 변으로 하는 정육각형을 그리고, 이 정육각형의 나머지 네 꼭짓점을 C_2, D_2, E_2, F_2 라 하자. 사각형 $F_1G_1C_1H_1$ 의 내부와 정육각형 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ 의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 그림 R_1 에서 선분 A_2C_2 와 선분 B_2F_2 의 교점을 G_2 , 선분 C_2E_2 와 선분 D_2F_2 의 교점을 H_2 라 하고, 선분 B_2F_2 와 선분 A_2C_2 의 중점을 각각 A_3, B_3 이라 하자. 사각형 $F_2G_2C_2H_2$ 의 내부에 선분 A_3B_3 을 한 변으로 하는 정육각형을 그리고, 이 정육각형의 나머지 네 꼭짓점을 C_3, D_3, E_3, F_3 이라 하자. 사각형 $F_2G_2C_2H_2$ 의 내부와 정육각형 $A_3B_3C_3D_3E_3F_3$ 의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{q}{p} \sqrt{3}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



30. 두 실수 a, b 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 a 의 값의 합을 k 라 하자. $48k$ 의 값을 구하시오. [4점]

- (가) $ab < 0$
 (나) 세 수 a, b, ab 를 적절히 배열하여 등비수열을 만들 수 있다.
 (다) 세 수 a, b, ab 를 적절히 배열하여 등차수열을 만들 수 있다.

