< 정답표>

1.	③	**2.**	①	**3.**	④	**4.**	⑤	**5.**	③
6.	①	**7.**	③	**8.**	③	**9.**	④	**10.**	③
11.	④	**12.**	①	**13.**	③	**14.**	①	**15.**	④
16.	④	**17.**	⑤	**18.**	④	**19.**	④	**20.**	①
21.	②	**22.**	5	**23.**	2	**24.**	36	**25.**	15
26.	432	**27.**	225	**28.**	60	**29.**	12	**30.**	208

01

[출제의도] 지수 계산하기

$\sqrt[3]{27}\times 16^{\frac{1}{2}}=\sqrt[3]{3^3}\times(4^2)^{\frac{1}{2}}=3\times 4=12$

02

[출제의도] 집합의 연산을 이용하여 집합의 원소들의 합 계산하기

$A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{4,5,6\}$ 이므로
$A-B=\{1,2,3\}$ 이다.
따라서 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은 6이다.

03

[출제의도] 수열의 극한 계산하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2}{(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2}{n^2+3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}=6$$

04

[출제의도] 여러 가지 수열의 합 이해하기

$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+b_k)=2\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}b_k=2\times 7+\sum_{k=1}^{10}b_k=38$
이므로 $\sum_{k=1}^{10}b_k=38-14=24$ 이다.

05

[출제의도] 무리함수의 그래프 이해하기

함수 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 y축의 방향으로 9만큼 평행이동시킨 그래프가 함수 $y=\sqrt{x+2}+9$의 그래프와 일치하므로 $a=-2$, $b=9$ 이다. $a+b=-2+9=7$

06

[출제의도] 수열의 극한의 성질 이해하기

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\{(3a_n)-(3a_n-b_n)\}=3\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}(3a_n-b_n)=6-4=2$$

07

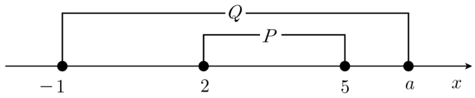
[출제의도] 유리함수의 그래프 이해하기

함수 $y=\frac{ax}{2x-1}=\frac{\frac{a}{2}}{2x-1}+\frac{a}{2}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{a}{2}$ 이다.
그러므로 두 점근선이 만나는 점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\frac{a}{2}\right)$이므로 $\left(\frac{1}{2},\frac{a}{2}\right)=\left(b,\frac{1}{2}\right)$이다. $\therefore a=1$, $b=\frac{1}{2}$
따라서 $a+b=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ 이다.

08

[출제의도] 명제의 충분조건 이해하기

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
p가 q이기 위한 충분조건이 되려면 $P\subset Q$이어야 한다.
p : $x^2-7x+10=(x-2)(x-5)\le 0$
$P=\{x\,|\,2\le x\le 5\}$
q : $(x+1)(x-a)\le 0$
$Q=\{x\,|\,-1\le x\le a\}$
이때 $P\subset Q$이므로 아래 그림과 같이 $a\ge 5$이다. 따라서 자연수 a의 최솟값은 5이다.



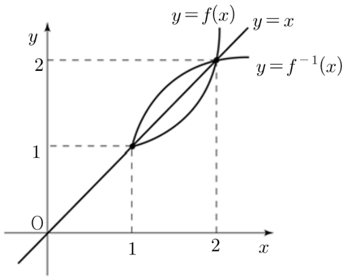
09

[출제의도] 집합의 포함 관계 이해하기

전체집합 $U=\{1,2,3,4\}$ 의 모든 부분집합은
ϕ, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$, $\{1,2,3,4\}$ 이다.
$\{1,2\}\cap A\ne\varnothing$ 이므로 집합 A는 $1,2$ 중 적어도 하나를 원소로 가져야 한다.
$1,2$를 원소로 갖지 않는 전체집합 U의 부분집합을 모두 구하면 ϕ, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{3,4\}$이므로 집합 A의 개수는 $16-4=12$ 이다.

10

[출제의도] 역함수의 성질을 이용하여 방정식 문제 해결하기



그림과 같이 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 근은 방정식 $f(x)=x$의 근과 같다. $x \geq 1$일 때

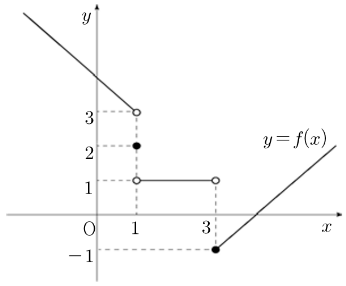
$x^2-2x+2=x$

$\therefore x=1, 2$

따라서 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 근은 $x=1, 2$이고 그 합은 3이다.

11

[출제의도] 함수의 극한 이해하기



$\lim_{x\to 1-} f(x)=3$이고, $x\to 2+$일 때, $5-x\to 3-$이므로 $\lim_{x\to 2+} f(5-x)=1$ 이다.

따라서 $\lim_{x\to 1-} f(x)+\lim_{x\to 2+} f(5-x)=3+1=4$이다.

12

[출제의도] 함수의 극한 이해하기

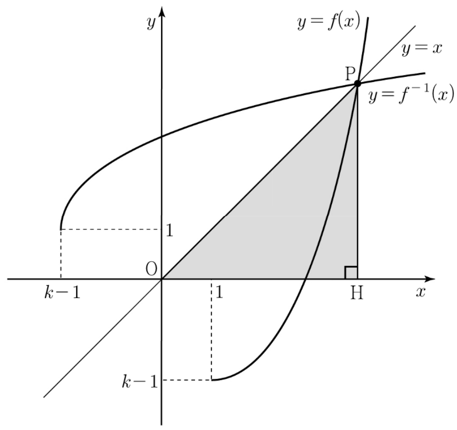
$$\lim_{x\to 2}\frac{2xf(x-2)}{(x+3)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x}{x+3}\times\lim_{x\to 2}\frac{f(x-2)}{x-2}$$
$$=\frac{4}{5}\times 15=12$$

13

[출제의도] 역함수의 그래프 이해하기

$f(x)=x^2-2x+k=(x-1)^2+k-1\ (x \geq 1)$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 만나는 점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 만나는 점과 같다.



따라서 점 P는 직선 $y=x$ 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(t,\ t)$라 하면 삼각형 POH의 넓이가 8이므로

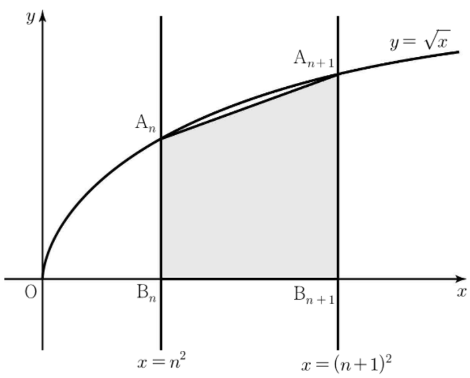
$\frac{1}{2}\times t\times t=8,\ t^2=16$이다. $\therefore t=4\ (\because t \geq 1)$

한편, 점 $\mathrm{P}(4,\ 4)$는 함수 $f(x)=x^2-2x+k$의 그래프 위의 점이므로 $f(4)=4^2-2\times 4+k=4$이다.

$\therefore\ k=-4$

14

[출제의도] 수열의 합을 이용하여 도형 문제 해결하기



사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}$은 사다리꼴이므로

$S_n=\frac{1}{2}\times(n+n+1)\times\{(n+1)^2-n^2\}=\frac{1}{2}(2n+1)^2$

이다. 따라서

$\sum_{n=1}^{10} S_n=\sum_{n=1}^{10}\left(2n^2+2n+\frac{1}{2}\right)=885$이다.

15

[출제의도] 수열의 합 이해하기

$\sum_{k=1}^{n}\left(ka_k-6k^2+2\right)=3n^2+5n$에서

(ⅰ) $n=1$일 때, $a_1-6+2=8$ $\therefore a_1=12$

(ⅱ) $n\ge 2$일 때,

$$\begin{aligned}na_n-6n^2+2&=\sum_{k=1}^{n}\left(ka_k-6k^2+2\right)-\sum_{k=1}^{n-1}\left(ka_k-6k^2+2\right)\\&=3n^2+5n-\{3(n-1)^2+5(n-1)\}\\&=6n+2\end{aligned}$$

$na_n=6n+2+6n^2-2$

$na_n=6n^2+6n$

$a_n=6n+6$

따라서 $a_n=6n+6\,(n\ge 1)$이다. 그러므로

$\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}(6n+6)=6\sum_{n=1}^{10}(n+1)$

$=6\left(\frac{10\times 11}{2}+10\right)=390$

16

[출제의도] 절대부등식을 이용하여 도형 문제 해결하기

$a>1$이고 두 점 P, Q의 좌표가 각각 $\left(a,\frac{1}{a-1}\right)$, $(a,-4a)$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{a-1}+4a$이다.

이때 $a-1>0$이므로

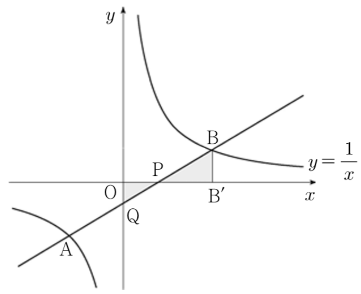
$$\begin{aligned}4a+\frac{1}{a-1}&=4(a-1)+\frac{1}{a-1}+4\\&\ge 2\sqrt{4(a-1)\times\frac{1}{a-1}}+4=4+4=8\end{aligned}$$

(단, 등호는 $a=\frac{3}{2}$일 때 성립)

이다. 따라서 선분 PQ의 길이의 최솟값은 8이다.

17

[출제의도] 유리함수를 이용하여 절대부등식 문제 해결하기



두 점 $\mathrm{A}(-1,-1)$, $\mathrm{B}\left(a,\frac{1}{a}\right)$ $(a>1)$를 지나는 직선의 기울기가

$$\frac{\frac{1}{a}-(-1)}{a-(-1)}=\frac{\frac{1}{a}+1}{a+1}=\frac{\frac{a+1}{a}}{a+1}=\frac{1}{a}$$

이므로 직선의 방정식은

$$y=\frac{1}{a}(x+1)-1=\frac{1}{a}x+\frac{1}{a}-1$$

이다. 따라서 점 P, Q의 좌표는

$\mathrm{P}(a-1,0)$, $\mathrm{Q}\left(0,\frac{1}{a}-1\right)$

이고

$\overline{\mathrm{OP}}=a-1$, $\overline{\mathrm{OQ}}=1-\frac{1}{a}$, $\overline{\mathrm{PB'}}=a-(a-1)=1$, $\overline{\mathrm{BB'}}=\frac{1}{a}$

이므로

$$S_1=\frac{1}{2}\times(a-1)\times\left(1-\frac{1}{a}\right)=\frac{a^2-2a+1}{2a}=\frac{a}{2}-1+\frac{1}{2a}$$

$$S_2=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{a}=\frac{1}{2a}$$

이다. 그러므로

$$\begin{aligned}S_1+S_2&=\frac{a}{2}-1+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}=\frac{1}{a}+\frac{a}{2}-1\\&\ge 2\sqrt{\frac{1}{a}\times\frac{a}{2}}-1\\&=\sqrt{2}-1\end{aligned}$$

이므로 최솟값은 $\sqrt{2}-1$이다.

18

[출제의도] 수열의 성질 추론하기

(1) $n=1$일 때,

(좌변)$=1$, (우변)$=1$이므로 $(*)$이 성립한다.

(2) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} k(m+1-k)2^{k-1}=(m-2)2^{m+1}+m+4$$

이다. $n=m+1$일 때, $(*)$이 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{m+1} k(m+2-k)2^{k-1}\\&=\sum_{k=1}^{m+1} k(m+1-k+1)2^{k-1}\\&=\sum_{k=1}^{m+1} k(m+1-k)2^{k-1}+\sum_{k=1}^{m+1} k2^{k-1}\\&=\sum_{k=1}^{m} k(m+1-k)2^{k-1}+\sum_{k=1}^{m+1} k2^{k-1}\\&=\boxed{(m-2)2^{m+1}}+m+4+\sum_{k=1}^{m+1} k2^{k-1}\end{aligned}$$

이다. 한편 $S=\sum_{k=1}^{m+1} k2^{k-1}$이라고 하면

$S=1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+\cdots+(m+1)2^m$

이다.

$$\begin{aligned}S-2S&=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^m-(m+1)2^{m+1}\\&=\frac{2^{m+1}-1}{2-1}-(m+1)2^{m+1}\\&=\boxed{(2^{m+1}-1)}-(m+1)2^{m+1}\end{aligned}$$

이다. 그러므로

$$S=(m+1)2^{m+1}-\boxed{(2^{m+1}-1)}$$

이다. 따라서

$$\sum_{k=1}^{m+1} k(m+2-k)2^{k-1}=(m-1)2^{m+2}+m+5$$

그러므로 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

$f(m)=(m-2)2^{m+1}$, $g(m)=2^{m+1}-1$이므로

$\dfrac{f(15)}{g(15)+1}=\dfrac{(15-2)2^{16}}{(2^{16}-1)+1}=13$이다.

19

[출제의도] 등비수열의 극한을 이용하여 수열의 합 문제 해결하기

$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{k}{10}\right)^{2n+1}+\left(\frac{k}{10}\right)^n}{\left(\frac{k}{10}\right)^{2n}+\left(\frac{k}{10}\right)^n+1}$$ 에서

(ⅰ) $0<\dfrac{k}{10}<1$일 때, 즉 $0<k<10$일 때

$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{k}{10}\right)^{2n+1}+\left(\frac{k}{10}\right)^n}{\left(\frac{k}{10}\right)^{2n}+\left(\frac{k}{10}\right)^n+1}=\frac{2\times 0+0}{0+0+1}=0$$

이다.

(ⅱ) $\dfrac{k}{10}=1$일 때, 즉 $k=10$일 때

$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times 1^{2n+1}+1^n}{1^{2n}+1^n+1}=\frac{3}{3}=1$$

(ⅲ) $\dfrac{k}{10}>1$, 즉 $k>10$일 때

$$\begin{aligned}a_k&=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{k}{10}\right)^{2n+1}+\left(\frac{k}{10}\right)^n}{\left(\frac{k}{10}\right)^{2n}+\left(\frac{k}{10}\right)^n+1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{k}{10}\right)+\frac{1}{\left(\frac{k}{10}\right)^n}}{1+\frac{1}{\left(\frac{k}{10}\right)^n}+\frac{1}{\left(\frac{k}{10}\right)^{2n}}}=\frac{\frac{k}{5}+0}{1+0+0}=\frac{k}{5}\end{aligned}$$

이다.

따라서 $a_k=\begin{cases}0 & (k<10)\\ 1 & (k=10)\\ \frac{k}{5} & (k>10)\end{cases}$ 이다.

그러므로

$$\sum_{k=1}^{20}a_k=\sum_{k=1}^{9}a_k+a_{10}+\sum_{k=11}^{20}a_k=\sum_{k=1}^{9}0+1+\sum_{k=11}^{20}\frac{k}{5}$$

$$=1+\sum_{k=1}^{10}\left(2+\frac{k}{5}\right)=1+20+\frac{1}{5}\times\frac{10\times 11}{2}=32$$

이다.

20

[출제의도] 등비급수를 이용하여 도형 문제 추론하기

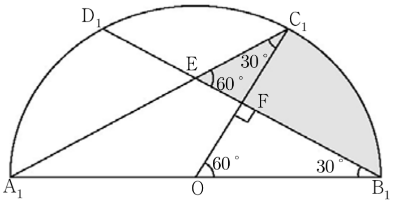


그림 R_1에서 두 선분 A_1C_1과 B_1D_1의 교점을 E, 두 선분 OC_1과 B_1D_1의 교점을 F라 하자. 삼각형 OB_1F와 삼각형 C_1EF는 세 내각의 크기가 30°, 60°, 90°인 직각삼각형이므로 삼각비에 의해

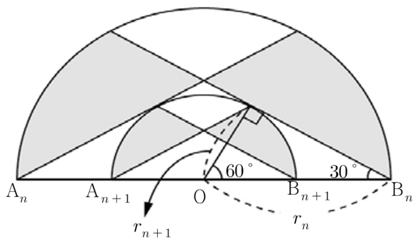
$\overline{B_1F}=\sqrt{3}$, $\overline{OF}=\overline{C_1F}=1$, $\overline{EF}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

이다. S_1은 부채꼴 OB_1C_1의 넓이와 삼각형 C_1EF의 넓이를 더한 값에서 삼각형 OB_1F의 넓이를 뺀 값의 2배와 같으므로

$$S_1=\left\{\pi\times 2^2\times\frac{60^{\circ}}{360^{\circ}}+\frac{1}{2}\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 1\right\}\times 2$$

$$=\frac{4\pi}{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

이다. 그림 R_n에서 가장 작은 반원의 반지름의 길이를 r_n이라 하고, 그림 R_n을 얻는 과정에서 새로 얻은  모양의 넓이를 a_n이라 하자.



$r_{n+1}:r_n=1:2$이므로

$a_{n+1}:a_n=(r_{n+1})^2:(r_n)^2$

$a_{n+1}:a_n=1^2:2^2$

$a_{n+1}=\dfrac{1}{4}a_n$

이다. 따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{4\pi}{3}-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$이고

공비가 $\dfrac{1}{4}$인 등비수열이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{4\pi}{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{16\pi-8\sqrt{3}}{9}$$

이다. 그러므로 $a+b=16-8=8$이다.

21

[출제의도] 등비수열의 극한을 이용하여 수열의 합 문제 해결하기

함수 $f(x)=\dfrac{x-1}{2x-6}$에 대하여

$$|f(3-a)|=\left|\frac{(3-a)-1}{2(3-a)-6}\right|=\left|\frac{2-a}{-2a}\right|=\left|\frac{a-2}{2a}\right|$$

$$|1-f(3+a)|=\left|1-\frac{(3+a)-1}{2(3+a)-6}\right|=\left|\frac{a-2}{2a}\right|$$

이다. $h(a)=\dfrac{a-2}{2a}\ (a\neq 0)$라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|f(3-a)|^{n+1}}{2^n+|1-f(3+a)|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|h(a)|^{n+1}}{2^n+|h(a)|^n}$$

이다.

(i) $|h(a)|<2$일 때,

$\left|\dfrac{h(a)}{2}\right|<1$이고 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{h(a)}{2}\right|^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|h(a)|^{n+1}}{2^n+|h(a)|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left|\frac{h(a)}{2}\right|^{n+1}}{1+\left|\frac{h(a)}{2}\right|^n}=0$$

이 되어 $k=0$이다.

(ii) $|h(a)|=2$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|h(a)|^{n+1}}{2^n+|h(a)|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n+2^n}=1$$

이 되어 $k=1$이다.

(iii) $|h(a)|>2$일 때,

$\left|\dfrac{2}{h(a)}\right|<1$이고 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2}{h(a)}\right|^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|h(a)|^{n+1}}{2^n+|h(a)|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|h(a)|}{\left|\frac{2}{h(a)}\right|^n+1}=|h(a)|$$

이다.

$|h(a)|=\left|\dfrac{a-2}{2a}\right|=\left|\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{2}\right|=k$ ($k\geq 3$인 자연수)를

만족시키는 a를 구하면

$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{2}=k$일 때, $a=\dfrac{2}{2k+1}$

$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{2}=-k$일 때, $a=-\dfrac{2}{2k-1}$

이다. 따라서 $g(k)=-2\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right)$이다.

$$\sum_{k=3}^{17}g(k)=-2\sum_{k=3}^{17}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=-2\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{33}-\frac{1}{35}\right)$$

$$=-2\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{35}\right)=-\frac{12}{35}$$

22

[출제의도] 함수의 극한 계산하기

$\lim_{x \to 1}(x^2+3x+1) = 1^2+3+1=5$

23

[출제의도] 로그 계산하기

$\log_2(3+\sqrt{5})+\log_2(3-\sqrt{5}) = \log_2\{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})\}$

$= \log_2 4 = 2$

24

[출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim_{x \to \infty}\frac{f(x)}{x^2+2x+3}=1$에 의해서 함수 $f(x)$의 이차항의 계수는 1이다.

$\lim_{x \to 3}\frac{f(x)}{x-3}=5$에서 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

따라서 $f(3)=0$이다. $f(x)=(x-3)(x+a)$라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 3}\frac{f(x)}{x-3} &= \lim_{x \to 3}\frac{(x-3)(x+a)}{x-3}\\ &= \lim_{x \to 3}(x+a)\\ &= 3+a=5\end{aligned}$$

$\therefore a=2$

따라서 $f(x)=(x-3)(x+2)$이므로 $f(7)=36$이다.

25

[출제의도] 절대부등식의 성질 이해하기

$a>1$이므로 $a-1>0$이다.

절대부등식의 성질에 의해

$$\begin{aligned}9a+\frac{1}{a-1} &= 9(a-1)+\frac{1}{a-1}+9\\ &\geq 2\sqrt{9(a-1)\times\frac{1}{a-1}}+9=2\times 3+9=15\end{aligned}$$

(단, 등호는 $a=\frac{4}{3}$일 때 성립한다.)

이므로 $9a+\frac{1}{a-1}$의 최솟값은 15이다.

26

[출제의도] 집합의 성질 이해하기

$A \cap B = \{4, 6\}$이므로 $A=\{a, b, 4, 6\}$라 하자.

$B=\{x+k \mid x \in A\}$이므로 $B=\{a+k,\ b+k,\ 4+k,\ 6+k\}$이다.

(A의 원소의 합)$=a+b+4+6=21$이므로 $a+b=11$

($A \cup B$의 원소의 합)

= (A의 원소의 합)+(B의 원소의 합)

−($A \cap B$의 원소의 합)

$40=21+(21+4k)-10$

$\therefore k=2$

집합 $B=\{6, 8, a+2, b+2\}$에서 $A \cap B=\{4, 6\}$이므로 $a+2, b+2$ 중의 어느 하나는 4가 되어야 한다.

$a+2=4$이면 $a=2$, $b=9$이고

$b+2=4$이면 $b=2$, $a=9$이다.

따라서 집합 A의 모든 원소의 곱은 $2\times 4\times 6\times 9=432$이다.

27

[출제의도] 지수법칙 이해하기

$3^a=4^b=5^c$이므로 $4^{ab}=5^{ac}$이고 $3^{ac}=4^{bc}$이다.

$ac=2$이므로 $4^{ab}=5^2$이고 $4^{bc}=3^2$이다.

따라서 $4^{ab+bc}=4^{ab}\times 4^{bc}=5^2\times 3^2=225$이다.

[다른 풀이]

$4^{ab+bc}=(4^b)^a\times(4^b)^c=(5^c)^a\times(3^a)^c=15^{ac}=15^2=225$

28

[출제의도] 함수의 극한 이해하기

(가)에서 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x \to a}\frac{f(x)-5x}{x^2-4}$의 값이 존재하므로 (분모)$\to 0$이면 (분자)$\to 0$이다.

$\lim_{x \to a}\frac{f(x)-5x}{x^2-4}$에서 $\lim_{x \to 2}(x^2-4)=0$이고 $\lim_{x \to -2}(x^2-4)=0$

이므로 $\lim_{x \to 2}(f(x)-5x)=0$이고 $\lim_{x \to -2}(f(x)-5x)=0$이다.

즉, $f(2)-10=0$, $f(-2)+10=0$이다.

$f(x)$가 다항함수이므로 $f(x)-5x=(x+2)(x-2)g(x)$라 하자. (단, $g(x)$는 다항식)

(나)에서 $\lim_{x \to \infty}(\sqrt{f(x)}-3x+1) = \lim_{x \to \infty}(\sqrt{f(x)}-(3x-1))$

$$= \lim_{x \to \infty}\frac{f(x)-(3x-1)^2}{\sqrt{f(x)}+3x-1}$$

의 값이 존재하기 위해서는 분모의 차수가 분자의 차수보다 크거나 같아야 하므로 $f(x)$는 최고차항의 계수가 9인 이차함수가 되어야 한다.

따라서 $f(x)-5x=9(x+2)(x-2)$이므로 $f(3)=60$이다.

29

[출제의도] 로그의 정의를 이용하여 집합의 원소의 개수 추론하기

$\log_a b = \dfrac{k}{2} \Leftrightarrow b = a^{\frac{k}{2}} \Leftrightarrow b^2 = a^k$ 이므로

$A_k = \left\{ \dfrac{b}{a} \,\middle|\, b^2 = a^k,\ a \text{와 } b \text{는 } 2 \text{ 이상 } 100 \text{ 이하의 자연수} \right\}$

이다.

(i) $k=3$ 일 때

$b^2 = a^3$ 을 만족하는 자연수 a, b 의 순서쌍은

$(2^2, 2^3)$, $(3^2, 3^3)$, $(4^2, 4^3)$ 이므로 $A_3 = \{2, 3, 4\}$ 이다.

따라서 $n(A_3) = 3$ 이다.

(ii) $k=4$ 일 때

$b^2 = a^4$ 을 만족하는 자연수 a, b 의 순서쌍은

$(2, 2^2)$, $(3, 3^2)$, $(4, 4^2)$, $\cdots$, $(9, 9^2)$, $(10, 10^2)$

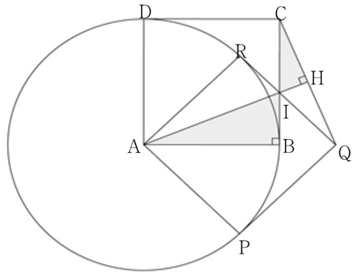
이므로 $A_4 = \{2, 3, 4, \cdots, 10\}$ 이다.

따라서 $n(A_4) = 9$ 이다.

(i), (ii)에 의하여 $n(A_3) + n(A_4) = 3 + 9 = 12$ 이다.

30

[출제의도] 삼각형의 닮음을 이용하여 함수의 극한 문제 해결하기



$\overline{\mathrm{CI}} = t$ 라 하자.

점 P가 점 B에 한없이 가까워지면 $t \to 0$이다.

점 I에서 선분 QC에 내린 수선의 발을 H라 하면

삼각형 ABI와 CHI는 닮음이다.

$\overline{\mathrm{BI}} = 1 - t$, $\overline{\mathrm{AI}} = \sqrt{t^2 - 2t + 2}$

이고 $\overline{\mathrm{AI}} : \overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{CI}} : \overline{\mathrm{CH}}$ 이므로 $\sqrt{t^2-2t+2} : 1 = t : \overline{\mathrm{CH}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{CH}} = \dfrac{t}{\sqrt{t^2-2t+2}}$

이다. $\overline{\mathrm{AI}} : \overline{\mathrm{BI}} = \overline{\mathrm{CI}} : \overline{\mathrm{HI}}$ 이므로 $\sqrt{t^2-2t+2} : 1 - t = t : \overline{\mathrm{HI}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{HI}} = \dfrac{t(1-t)}{\sqrt{t^2-2t+2}}$

이다. 삼각형 IQC에 대하여 S, L을 구해보면

$S = \dfrac{t^2(1-t)}{t^2-2t+2}$, $\quad L = 2t\dfrac{\sqrt{t^2-2t+2}+1}{\sqrt{t^2-2t+2}}$

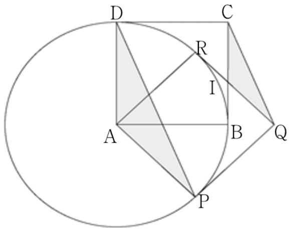
이다. 따라서

$$\lim_{t\to 0}\frac{L^2}{S} = \lim_{t\to 0}\frac{4t^2 \times \dfrac{t^2-2t+3+2\sqrt{t^2-2t+2}}{t^2-2t+2}}{\dfrac{t^2(1-t)}{t^2-2t+2}}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{4\left(t^2-2t+3+2\sqrt{t^2-2t+2}\right)}{1-t} = 12 + 8\sqrt{2}$$

따라서 $a = 12$, $b = 8$이므로 $a^2 + b^2 = 144 + 64 = 208$이다.

[다른풀이]

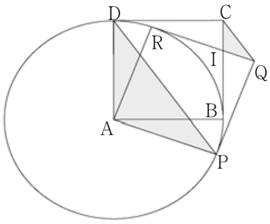


[그림 1]

[그림 1]에서 $\angle \mathrm{CIQ} = \angle \mathrm{DAP}$, $\overline{\mathrm{IC}} = \overline{\mathrm{IQ}}$, $\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{AP}}$이므로 두 삼각형 IQC, APD는 서로 닮음인 도형이다. 따라서

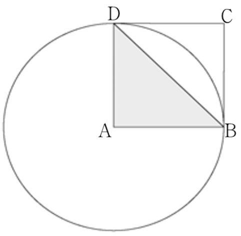
$$\frac{(\triangle \mathrm{IQC}\text{의 둘레의 길이})^2}{(\triangle \mathrm{IQC}\text{의 넓이})} = \frac{(\triangle \mathrm{APD}\text{의 둘레의 길이})^2}{(\triangle \mathrm{APD}\text{의 넓이})}$$

이다.



[그림 2]

[그림 2]에서 볼 수 있듯이 점 P가 점 B에 한없이 가까워지면 삼각형 APD는 삼각형 ABD에 한없이 가까워진다.



[그림 3]

[그림 3]에서 삼각형 ABD는 직각이등변삼각형이므로

$$\frac{(\triangle \mathrm{ABD}\text{의 둘레의 길이})^2}{(\triangle \mathrm{ABD}\text{의 넓이})} = \frac{(1+1+\sqrt{2})^2}{\frac{1}{2}\times 1\times 1} = 12+8\sqrt{2}$$

이다. 그러므로 점 P가 점 B에 한없이 가까워지면 $\frac{L^2}{S}$의 값은 $12+8\sqrt{2}$에 한없이 가까워진다.

따라서 $a=12$, $b=8$이므로 $a^2+b^2=144+64=208$이다.