

# 수학 영역(가형)

5지선다형

1.  $\sqrt[3]{27} \times 16^{\frac{1}{2}}$ 의 값은? [2점]
- ① 6      ② 9      ③ 12      ④ 15      ⑤ 18

2. 전체집합  $U$ 의 두 부분집합  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{4, 5, 6\}$ 에 대하여 집합  $A - B$ 의 모든 원소의 합은? [2점]
- ① 6      ② 7      ③ 8      ④ 9      ⑤ 10

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2}{(n+1)(n+2)}$ 의 값은? [2점]
- ① 3      ② 4      ③ 5      ④ 6      ⑤ 7

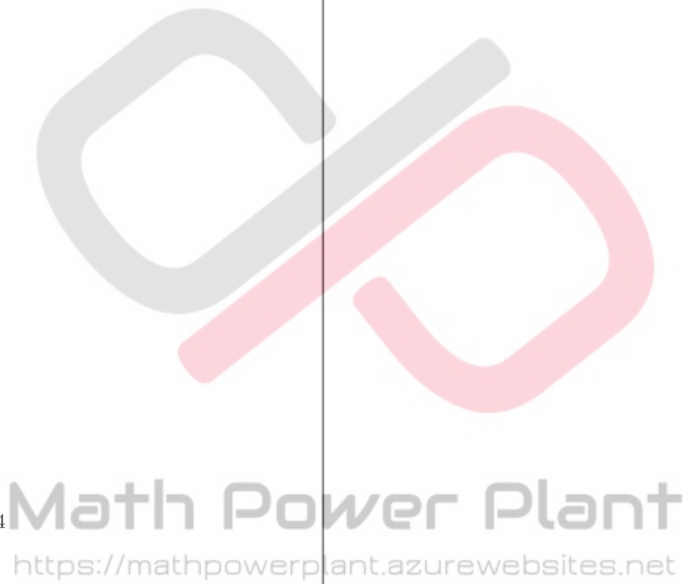
4.  $\sum_{k=1}^{10} a_k = 7$ ,  $\sum_{k=1}^{10} (2a_k + b_k) = 38$ 일 때,  $\sum_{k=1}^{10} b_k$ 의 값은? [3점]
- ① 16      ② 18      ③ 20      ④ 22      ⑤ 24



5. 무리함수  $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로  $a$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로  $b$ 만큼 평행이동하였더니 무리함수  $y = \sqrt{x+2}+9$ 의 그래프와 일치하였다. 두 상수  $a, b$ 에 대하여  $a+b$ 의 값은? [3점]
- ① 5      ② 6      ③ 7      ④ 8      ⑤ 9

6. 두 수열  $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2, \lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n - b_n) = 4$ 일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 의 값은? [3점]
- ① 2      ② 4      ③ 6      ④ 8      ⑤ 10

7. 함수  $y = \frac{ax}{2x-1}$  ( $a \neq 0$ )의 그래프의 두 점근선이 만나는 점의 좌표가  $(b, \frac{1}{2})$ 일 때,  $a+b$ 의 값은? (단,  $a, b$ 는 상수이다.) [3점]
- ①  $\frac{1}{2}$       ② 1      ③  $\frac{3}{2}$       ④ 2      ⑤  $\frac{5}{2}$





8. 실수  $x$ 에 대한 두 조건

$$p : x^2 - 7x + 10 \leq 0,$$

$$q : (x+1)(x-a) \leq 0$$

에 대하여  $p$ 가  $q$ 이기 위한 충분조건이 되도록 하는 자연수  $a$ 의 최솟값은? [3점]

- ① 3      ② 4      ③ 5      ④ 6      ⑤ 7

10. 집합  $X = \{x \mid x \geq 1\}$ 에 대하여 함수  $f: X \rightarrow X$ 가

$$f(x) = x^2 - 2x + 2$$

이다. 방정식  $f(x) = f^{-1}(x)$ 의 모든 근의 합은? [3점]

- ① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

9. 전체집합  $U = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 부분집합  $A$ 에 대하여

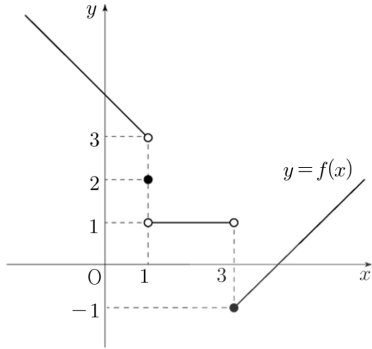
$$\{1, 2\} \cap A \neq \emptyset$$

을 만족시키는 모든 집합  $A$ 의 개수는? [3점] <https://mathpowerplant.azurewebsites.net>

- ① 6      ② 8      ③ 10      ④ 12      ⑤ 14



11. 함수  $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(5-x)$ 의 값은? [3점]

- ① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

12. 함수  $f(x)$ 가  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-2)}{x-2} = 15$ 를 만족시킬 때,

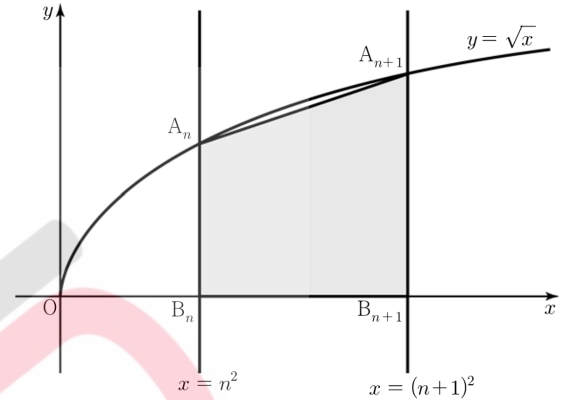
$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2xf(x-2)}{x^2+x-6}$ 의 값은? [3점]

- ① 12      ② 10      ③ 8      ④ 6      ⑤ 4



13.  $k < 0$ 인 실수  $k$ 에 대하여 함수  $f(x) = x^2 - 2x + k$  ( $x \geq 1$ )의 그래프와 그 역함수  $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 만나는 점을 P라 하고, 점 P에서  $x$ 축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 POH의 넓이가 8일 때,  $k$ 의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]
- ① -6      ② -5      ③ -4      ④ -3      ⑤ -2

14. 그림과 같이 자연수  $n$ 에 대하여 직선  $x = n^2$ 이 곡선  $y = \sqrt{x}$ 와 만나는 점을  $A_n$ ,  $x$ 축과 만나는 점을  $B_n$ 이라 하고, 직선  $x = (n+1)^2$ 이 곡선  $y = \sqrt{x}$ 와 만나는 점을  $A_{n+1}$ ,  $x$ 축과 만나는 점을  $B_{n+1}$ 이라 하자. 사각형  $A_n B_n B_{n+1} A_{n+1}$ 의 넓이를  $S_n$ 이라 할 때,  $\sum_{n=1}^{10} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① 885      ② 890      ③ 895      ④ 900      ⑤ 905



15. 수열  $\{a_n\}$ 이 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n (ka_k - 6k^2 + 2) = 3n^2 + 5n$$

을 만족시킨다.  $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값은? [4점]

- ① 375    ② 380    ③ 385    ④ 390    ⑤ 395

16. 1보다 큰 실수  $a$ 에 대하여 직선  $x=a$ 가 두 함수

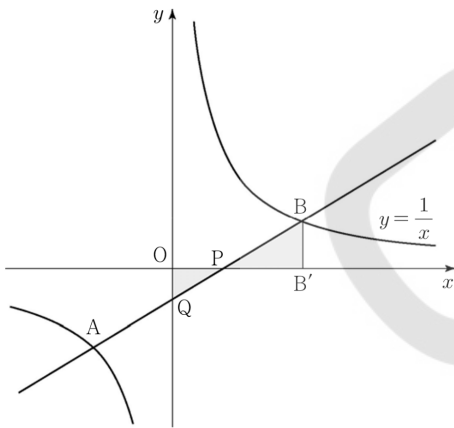
$y = \frac{1}{x-1}$ ,  $y = -4x$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 선분 PQ의 길이의 최솟값은? [4점]

- ① 2    ② 4    ③ 6    ④ 8    ⑤ 10



17. 곡선  $y = \frac{1}{x}$  위의 두 점  $A(-1, -1)$ ,  $B(a, \frac{1}{a})$  ( $a > 1$ )를 지나는 직선이  $x$ 축,  $y$ 축과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 B에서  $x$ 축에 내린 수선의 발을 B'라 할 때, 두 삼각형 POQ, PB'B의 넓이를 각각  $S_1, S_2$ 라 하자.  $S_1 + S_2$ 의 최솟값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

- ①  $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$       ②  $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$       ③  $2-\sqrt{3}$   
 ④  $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$       ⑤  $\sqrt{2}-1$



18. 다음은 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n k(n+1-k)2^{k-1} = (n-2)2^{n+1} + n + 4 \dots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(1)  $n=1$ 일 때,

(좌변) = 1, (우변) = 1 이므로 (\*)이 성립한다.

(2)  $n=m$ 일 때, (\*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m k(m+1-k)2^{k-1} = (m-2)2^{m+1} + m + 4$$

이다.  $n=m+1$ 일 때, (\*)이 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{m+1} k(m+2-k)2^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} k(m+1-k)2^{k-1} + \sum_{k=1}^{m+1} k2^{k-1} \\ &= \boxed{\text{(가)}} + (m+4) + \sum_{k=1}^{m+1} k2^{k-1} \end{aligned}$$

이다. 한편  $S = \sum_{k=1}^{m+1} k2^{k-1}$  이라고 하면

$$S = 1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \dots + (m+1)2^m$$

이다.

$$S - 2S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^m - (m+1)2^{m+1}$$

$$= \boxed{\text{(나)}} - (m+1)2^{m+1}$$

이므로

$$S = (m+1)2^{m+1} - \boxed{\text{(나)}}$$

이다. 따라서

$$\sum_{k=1}^{m+1} k(m+2-k)2^{k-1} = (m-1)2^{m+2} + m + 5$$

그러므로  $n=m+1$ 일 때 (\*)이 성립한다.

따라서 모든 자연수  $n$ 에 대하여 (\*)이 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 식을 각각  $f(m), g(m)$ 이라 할 때,  $\frac{f(15)}{g(15)+1}$ 의 값은? [4점]

- ① 10      ② 11      ③ 12      ④ 13      ⑤ 14



19. 자연수  $k$ 에 대하여

$$a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times \left(\frac{k}{10}\right)^{2n+1} + \left(\frac{k}{10}\right)^n}{\left(\frac{k}{10}\right)^{2n} + \left(\frac{k}{10}\right)^n + 1}$$

이러 할 때,  $\sum_{k=1}^{20} a_k$ 의 값은? [4점]

- ① 26      ② 28      ③ 30      ④ 32      ⑤ 34



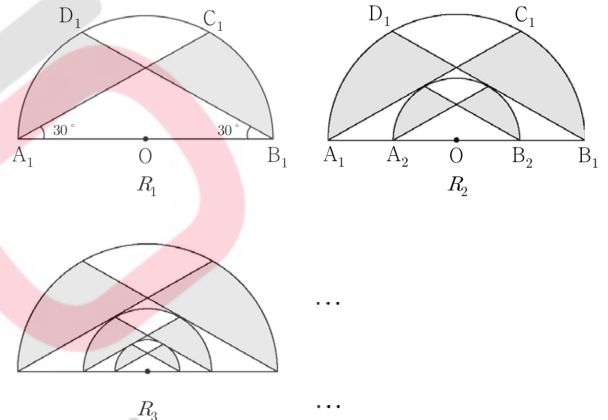
20. 중심이  $O$ 이고 길이가 4인 선분  $A_1B_1$ 을 지름으로 하는 반원이 있다. 그림과 같이 반원 위에  $\angle C_1A_1B_1 = 30^\circ$ ,  $\angle D_1B_1A_1 = 30^\circ$ 가 되도록 두 점  $C_1, D_1$ 을 각각 정하고, 두 선분  $A_1C_1, B_1D_1$ 과 두 호  $B_1C_1, A_1D_1$ 로 둘러싸인  모양에 색칠하여 얻은 그림을  $R_1$ 이라 하자.

그림  $R_1$ 에서 중심이  $O$ 이고 두 선분  $A_1C_1, B_1D_1$ 에 접하는 원이 선분  $A_1B_1$ 과 만나는 점을 각각  $A_2, B_2$ 라 하자. 선분  $A_2B_2$ 를 지름으로 하는 반원에 그림  $R_1$ 을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는  모양에 색칠하여 얻은 그림을  $R_2$ 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여  $n$ 번째 얻은 그림  $R_n$ 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를  $S_n$ 이라 할 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a\pi + b\sqrt{3}}{9}$ 이다.

$a+b$ 의 값은? (단,  $a, b$ 는 정수이다.) [4점]



- ① 8      ② 9      ③ 10      ④ 11      ⑤ 12



단답형

21. 함수  $f(x) = \frac{x-1}{2x-6}$  과 3 이상의 자연수  $k$  에 대하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f(3-a)|^{n+1}}{2^n + |1-f(3+a)|^n} = k$$

를 만족시키는 모든 실수  $a$  의 값의 합을  $g(k)$  라 하자.

$\sum_{k=3}^{17} g(k)$  의 값은? [4점]

- ①  $-\frac{2}{7}$     ②  $-\frac{12}{35}$     ③  $-\frac{2}{5}$     ④  $-\frac{16}{35}$     ⑤  $-\frac{18}{35}$

22.  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3x + 1)$  의 값을 구하시오. [3점]

23.  $\log_2(3 + \sqrt{5}) + \log_2(3 - \sqrt{5})$  의 값을 구하시오. [3점]



24. 이차함수  $f(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2 + 2x + 3} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x - 3} = 5$$

일 때,  $f(7)$ 의 값을 구하시오. [3점]

25.  $a > 1$ 일 때,  $9a + \frac{1}{a-1}$ 의 최솟값을 구하시오. [3점]

26. 전체집합  $U = \{x \mid x \text{는 자연수}\}$ 의 부분집합  $A$ 는 원소의 개수가 4이고, 모든 원소의 합이 21이다. 상수  $k$ 에 대하여 집합  $B = \{x + k \mid x \in A\}$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가)  $A \cap B = \{4, 6\}$

(나)  $A \cup B$ 의 모든 원소의 합이 40이다.

집합  $A$ 의 모든 원소의 곱을 구하시오. [4점]



27. 세 실수  $a, b, c$ 에 대하여  $3^a = 4^b = 5^c$ 이고  $ac=2$ 일 때,  $4^{ab+bc}$ 의 값을 구하시오. [4점]

28. 다항함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수  $a$ 에 대하여  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-5x}{x^2-4}$ 의 값이 존재한다.

(나)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{f(x)}-3x+1)$ 의 값이 존재한다.

$f(3)$ 의 값을 구하시오. [4점]



29. 자연수  $k$ 에 대하여 집합  $A_k$ 를

$$A_k = \left\{ \frac{b}{a} \mid \log_a b = \frac{k}{2}, a \text{와 } b \text{는 } 2 \text{ 이상 } 100 \text{ 이하의 자연수} \right\}$$

라 할 때,  $n(A_3) + n(A_4)$ 의 값을 구하시오. [4점]

30.

한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD와 점 A가 중심이고 선분 AB를 반지름으로 하는 원이 있다. 원 위를 움직이는 점 P에 대하여 사각형 APQR가 정사각형이 되도록 원 위에 점 R과 원의 외부에 점 Q를 잡는다. 그림과 같이 선분 BC와 선분 QR가 만나도록 할 때, 선분 BC와 선분 QR의 교점을 I라 하자. 삼각형 IQC의 둘레의 길이를  $L$ , 넓이를  $S$ 라 할 때, 점 P가 점 B에 한없이 가까워지면  $\frac{L^2}{S}$ 의 값이  $a + b\sqrt{2}$ 에 한없이 가까워진다.

$a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오. (단,  $a, b$ 는 유리수이다.) [4점]

