< 정답표>

1.	①	**2.**	④	**3.**	③	**4.**	①	**5.**	③
6.	①	**7.**	③	**8.**	④	**9.**	②	**10.**	②
11.	②	**12.**	⑤	**13.**	④	**14.**	②	**15.**	⑤
16.	②	**17.**	④	**18.**	⑤	**19.**	③	**20.**	①
21.	①	**22.**	9	**23.**	17	**24.**	3	**25.**	24
26.	25	**27.**	50	**28.**	32	**29.**	16	**30.**	394

01

[출제의도] 다항식 계산하기

$$\begin{aligned} A-B &= (2x^2+3xy+1)-(2x^2+2xy-3) \\ &= xy+4 \end{aligned}$$

02

[출제의도] 복소수 계산하기

$$\begin{aligned} (4+2i)+(1-3i) &= (4+1)+(2-3)i \\ &= 5-i \end{aligned}$$

03

[출제의도] 나머지정리를 이용하여 나머지 계산하기

$P(x)=x^3+3x^2+a$라 하자.

$P(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는

$$P(1)=1+3+a=a+4$$

이다. $P(1)=7$이므로 $a+4=7$이고

따라서 $a=3$이다.

04

[출제의도] 이차부등식 이해하기

$$x^2-7x+12 \ge 0$$

$$(x-3)(x-4) \ge 0$$

$$x \le 3 \text{ 또는 } x \ge 4$$

이므로 $\alpha=3, \beta=4$이다.

따라서 $\beta-\alpha=1$이다.

05

[출제의도] 조립제법 이해하기

$$\begin{array}{c|cccc} a & 2 & 0 & 3 & 4 \\ & & 2a & \boxed{} & \boxed{} \\ \hline & 2 & 2a & \boxed{} & \multicolumn{1}{|c}{b} \end{array}$$

에서 $2a=2$이므로 $a=1$이다.

조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ & & 2 & 2 & 5 \\ \hline & 2 & 2 & 5 & \multicolumn{1}{|c}{9} \end{array}$$

이므로 $b=9$이다. 따라서 $a+b=1+9=10$이다.

06

[출제의도] 인수분해 이해하기

$$x(x+2)+a=x^2+2x+a$$

이고

$$(x+b)^2=x^2+2bx+b^2$$

이므로 $x^2+2x+a=x^2+2bx+b^2$에서

$2=2b$, $a=b^2$이다. 그러므로 $a=1$, $b=1$이다.

따라서 $ab=1$이다.

07

[출제의도] 절댓값을 포함한 일차부등식 이해하기

$|x-a|<5$의 해는 $a-5<x<a+5$이므로

정수 x의 최댓값이 12가 되기 위해서는

$12<a+5\le 13$ 즉, $7<a\le 8$이다.

따라서 정수 a의 값은 8이다.

08

[출제의도] 인수분해 이해하기

$x^2-x=t$라 두면

$$\begin{aligned} (x^2-x)^2+2x^2-2x-15 &= t^2+2t-15 \\ &= (t+5)(t-3) \\ &= (x^2-x+5)(x^2-x-3) \end{aligned}$$

이므로

$$a=-1,\ b=5,\ c=-3$$

또는

$$a=-1,\ b=-3,\ c=5$$

이다.

따라서 $a+b+c=1$이다.

09

[출제의도] 이차방정식과 이차함수의 관계를 이용하여 문제 해결하기

이차함수 $y=x^2-5x+k$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2-5x+k=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

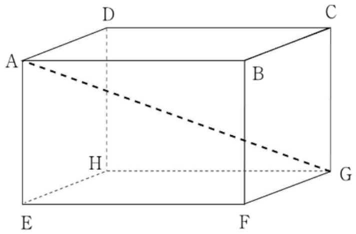
그러므로 이차방정식의 판별식 $D>0$이어야 하므로

$$D=(-5)^2-4k=25-4k>0$$

에서 $k<\frac{25}{4}=6.25$이다. 따라서 자연수 k의 최댓값은 6이다.

10

[출제의도] 곱셈공식 이용하여 도형 문제 해결하기



이웃하는 세 모서리의 길이를 각각 a, b, c라 하자

$\overline{\mathrm{AG}}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{13}$ 이므로

$$a^2+b^2+c^2=13$$

이다.

모든 모서리의 길이의 합은 $4(a+b+c)=20$ 이므로

$$a+b+c=5$$

이다.

따라서 직육면체의 겉넓이는

$$\begin{aligned}2(ab+bc+ca)&=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\\&=25-13\\&=12\end{aligned}$$

이다.

11

[출제의도] 연립이차방정식을 이용하여 문제 해결하기

두 연립방정식

$$\begin{cases}3x+y=a\\2x+2y=1\end{cases},\quad \begin{cases}x^2-y^2=-1\\x-y=b\end{cases}$$

의 일치하는 해는 연립방정식

$$\begin{cases}x^2-y^2=-1\\2x+2y=1\end{cases}$$

의 해와 같다. 연립방정식

$$\begin{cases}x^2-y^2=-1\\2x+2y=1\end{cases}$$

을 풀면

$$x=-\frac{3}{4},\ y=\frac{5}{4}$$

이다. 그러므로 $3x+y=a$ 에

$$x=-\frac{3}{4},\ y=\frac{5}{4}$$

를 대입하면

$$a=-1$$

이다. 또한 $x-y=b$ 에 $x=-\frac{3}{4}$, $y=\frac{5}{4}$ 를 대입하면

$$b=-2$$

이다. 따라서 $ab=2$ 이다.

12

[출제의도] 나머지정리를 이용하여 다항식의 나눗셈 문제 해결하기

다항식 $2x^3+x^2+x-1$ 을 일차식 $x-a$ 로 나누었을 때 몫은 $Q(x)$, 나머지는 3이므로

$$2x^3+x^2+x-1=(x-a)Q(x)+3$$

이다. 나머지정리에 의해 양변에 $x=a$ 를 대입하면

$$2a^3+a^2+a-1=3$$

이므로 $2a^3+a^2+a-4=0$ 이고 $(a-1)(2a^2+3a+4)=0$

이다. $2a^2+3a+4=0$ 이 실근을 갖지 않으므로 $a=1$ 이다. $2x^3+x^2+x-1=(x-1)Q(x)+3$ 에서

조립제법을 이용하면

1	2	1	1	−1
		2	3	4
	2	3	4	3

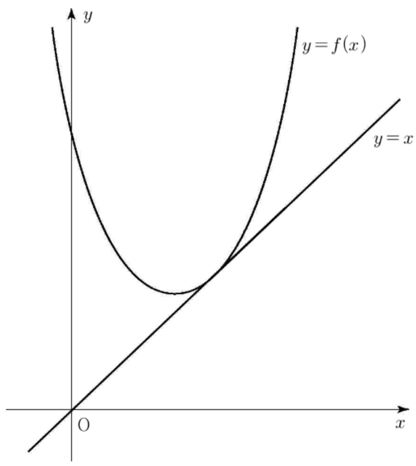
$$2x^3+x^2+x-1=(x-1)(2x^2+3x+4)+3$$

이다. 따라서 $Q(x)=2x^2+3x+4$ 이고,

$Q(a)=Q(1)=9$ 이다.

13

[출제의도] 이차함수와 직선과의 위치관계 이해하기



이차함수 $y=x^2-2ax+5a$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 그래프가 오직 한 점에서 만나므로

$x^2-2ax+5a=x$가 중근을 가져야 한다.

따라서 이차방정식 $x^2-(2a+1)x+5a=0$ 의 판별식을 D라 하면

$$\begin{aligned}D&=(2a+1)^2-20a\\&=4a^2-16a+1=0\end{aligned}$$

이다.

근과 계수의 관계에 의해 모든 실수 a 의 값의 합은 4 이다.

14

[출제의도] 복소수 연산을 통해 식의 값 문제 해결하기

$\alpha=\frac{1+i}{2i}$ 에서

$$\alpha^2=\frac{2i}{-4}=-\frac{i}{2}$$

이고, $\beta=\frac{1-i}{2i}$ 에서

$$\beta^2=\frac{-2i}{-4}=\frac{i}{2}$$

이므로 $2\alpha^2=-i$, $2\beta^2=i$이다.

따라서

$$(2\alpha^2+3)(2\beta^2+3)=(3-i)(3+i)=10$$

이다.

[다른 풀이]

$\alpha+\beta=\frac{2}{2i}=\frac{1}{i}=-i$, $\alpha\beta=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$ 이고

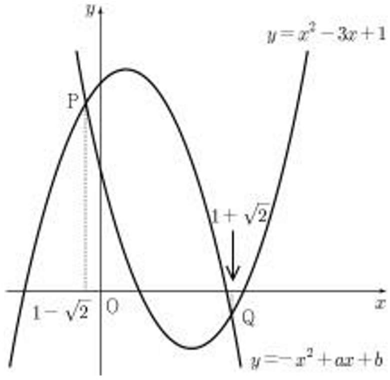
$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=0$ 이므로

$$\begin{aligned}(2\alpha^2+3)(2\beta^2+3)&=4(\alpha\beta)^2+6(\alpha^2+\beta^2)+9\\&=4\times\frac{1}{4}+6\times0+9=10\end{aligned}$$

이다.

15

[출제의도] 실수의 성질을 이용하여 이차방정식 문제 해결하기



이차함수 $y=-x^2+ax+b$의 그래프와 이차함수 $y=x^2-3x+1$의 그래프의 교점의 x좌표는 이차방정식

$$-x^2+ax+b=x^2-3x+1$$

$$2x^2-(3+a)x+1-b=0$$

의 두 실근이다. a, b는 유리수이므로 한 근이 $1-\sqrt{2}$이면 나머지 한 근은 $1+\sqrt{2}$이다.

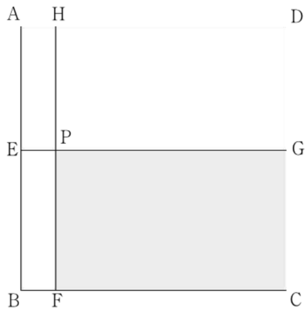
따라서 $2x^2-(3+a)x+1-b=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha+\beta=\frac{3+a}{2}=2,\ \alpha\beta=\frac{1-b}{2}=-1$$

이다. $a=1$, $b=3$이므로 $a+3b=10$이다.

16

[출제의도] 근과 계수의 관계를 이용하여 이차방정식 문제해결하기



$\overline{\mathrm{AH}}=\alpha$, $\overline{\mathrm{AE}}=\beta$라 하면
$\overline{\mathrm{PG}}=10-\alpha$, $\overline{\mathrm{PF}}=10-\beta$이다.
직사각형 PFCG 의 둘레의 길이는
$2(10-\alpha)+2(10-\beta)=28$이므로
$\alpha+\beta=6$이다.
직사각형 PFCG 의 넓이는
$(10-\alpha)(10-\beta)=46$이므로
$\alpha\beta=6$이다.
따라서 α, β를 두 근으로 하는 이차방정식은
$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$에서
$x^2-6x+6=0$이다.

17

[출제의도] 다항식을 이용하여 통합 교과적 문제해결하기

실린더 A에 담긴 액체의 높이를 h_A, 실린더 B에 담긴 액체의 높이를 h_B, 실린더 A에 담긴 액체의 밀도를 ρ_A, 실린더 B에 담긴 액체의 밀도를 ρ_B라 하면, 실린더 A에 담긴 액체의 높이가 실린더 B에 담긴 액체의 높이의 15배이므로

$$h_A=15h_B$$

이고 실린더 A에 담긴 액체의 밀도는 실린더 B에 담긴 액체의 밀도의 $\frac{3}{5}$배이므로

$$\rho_A=\frac{3}{5}\rho_B$$

이다. 따라서

$$\frac{P_A}{P_B}=\frac{\rho_A g h_A}{\rho_B g h_B}=\frac{\left(\frac{3}{5}\rho_B\right)g\left(15h_B\right)}{\rho_B g h_B}=9$$

이다.

18

[출제의도] 복소수의 성질 추론하기

$z=a+bi$에 대하여 $iz=i(a+bi)=-b+ai$, $\bar{z}=a-bi$인데 $iz=\bar{z}$이므로 $a=-b$이다. 따라서

$$z=a-ai$$

이다.

ㄱ. $z+\bar{z}=(a-ai)+(a+ai)=2a=-2b$이다. (참)

ㄴ. $iz=\bar{z}$의 양변에 i를 곱하면 $i\bar{z}=-z$이다. (참)

ㄷ. $iz=\bar{z}$이므로 $\frac{\bar{z}}{z}=i$이고 $i\bar{z}=-z$이므로 $\frac{z}{\bar{z}}=-i$이다. 따라서 $\frac{\bar{z}}{z}+\frac{z}{\bar{z}}=0$이다. (참)

그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ이 모두 옳다.

[다른 풀이 1]

ㄴ. $i\bar{z}=i(a+ai)=ai-a=-(a-ai)=-z$

ㄷ. $\frac{\bar{z}}{z}+\frac{z}{\bar{z}}=\frac{a+ai}{a-ai}+\frac{a-ai}{a+ai}=\frac{(a+ai)^2+(a-ai)^2}{(a-ai)(a+ai)}=0$

[다른 풀이 2]

ㄷ. $iz=\bar{z}$의 양변을 제곱하면 $z^2+(\bar{z})^2=0$이고 $z\bar{z}=2a^2\neq0$이므로 $\frac{\bar{z}}{z}+\frac{z}{\bar{z}}=\frac{z^2+(\bar{z})^2}{z\bar{z}}=0$이다.

19

[출제의도] 실수의 성질을 이용하여 이차방정식 문제 해결하기

$2+\sqrt{3}$ 은 방정식 $ax^2+\sqrt{3}\,bx+c=0$ 의 한 근이므로

$a(2+\sqrt{3})^2+\sqrt{3}\,b(2+\sqrt{3})+c=0$ 이다.

정리하면 $(7a+3b+c)+(4a+2b)\sqrt{3}=0$ 이고

a, b, c가 유리수이므로

$7a+3b+c=0$, $4a+2b=0$ 이다. 따라서

$b=-2a$, $c=-a$

이다.

그러므로 주어진 방정식은

$a(x^2-2\sqrt{3}\,x-1)=0$ 이고

이 이차방정식의 두 근은 $x=\sqrt{3}\pm 2$ 이다.

따라서 $\beta=-2+\sqrt{3}$ 이므로

$a+\dfrac{1}{\beta}=2+\sqrt{3}+\dfrac{1}{-2+\sqrt{3}}=0$ 이다.

[다른 풀이1]

$t=\sqrt{3}x$라 두면 주어진 방정식은

$\dfrac{a}{3}t^2+bt+c=0$ 즉, $at^2+3bt+3c=0$ 이다.

이 방정식은 한 근이 $t=\sqrt{3}(2+\sqrt{3})$

$=3+2\sqrt{3}$

이고 계수가 모두 유리수이므로 다른 한 근은

$t=3-2\sqrt{3}$ 이다.

따라서 주어진 방정식의 다른 한 근

$\beta=\dfrac{t}{\sqrt{3}}=\dfrac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=-2+\sqrt{3}$ 이므로

$a+\dfrac{1}{\beta}=2+\sqrt{3}+\dfrac{1}{-2+\sqrt{3}}=0$ 이다.

[다른 풀이2]

$\alpha=2+\sqrt{3}$ 에서 $\alpha-\sqrt{3}=2$ 이고 양변을 제곱하여 정리하면 $\alpha^2-2\sqrt{3}\alpha-1=0$ 이다.

따라서 α는 이차방정식 $a(x^2-2\sqrt{3}x-1)=0$ 의 근이다.

근과 계수의 관계에 의해 $2+\sqrt{3}+\beta=2\sqrt{3}$ 이므로 $\beta=-2+\sqrt{3}$ 이다.

따라서 $a+\dfrac{1}{\beta}=2+\sqrt{3}+\dfrac{1}{-2+\sqrt{3}}=0$ 이다.

<참고> 아래와 같은 방법으로 풀 수도 있다.

두 유리수 p, q에 대하여

$\overline{p+q\sqrt{3}}=p-q\sqrt{3}$ 이라 하자.

$f(x)=ax^2+\sqrt{3}bx+c$ 이라 하고

$\alpha=2+\sqrt{3}$ 이라 하면 $f(\alpha)=0$ 이다.

즉, $a\alpha^2+\sqrt{3}\,b\alpha+c=0$ 이다.

$\overline{a\alpha^2+\sqrt{3}\,b\,\alpha+c}=\bar{0}$

$\overline{a\alpha^2}+\overline{\sqrt{3}\,b\alpha}+\bar{c}=\bar{0}$

$\bar{a}\,\bar{\alpha}^2+\overline{\sqrt{3}}\,\bar{b}\,\bar{\alpha}+\bar{c}=\bar{0}$

$a\bar{\alpha}^2-\sqrt{3}\,b\bar{\alpha}+c=0$

$a(-\bar{\alpha})^2+\sqrt{3}\,b(-\bar{\alpha})+c=0$

이므로 $f(-\bar{\alpha})=0$ 이다.

따라서 $-\bar{\alpha}=-(2-\sqrt{3})$

$=-2+\sqrt{3}$

은 이 방정식의 다른 한 근이다.

따라서 $\beta=\sqrt{3}-2$ 이므로

$a+\dfrac{1}{\beta}=2+\sqrt{3}+\dfrac{1}{-2+\sqrt{3}}=0$ 이다.

20

[출제의도] 삼차방정식과 도형과의 관계 추론하기

삼차방정식 $2x^3-5x^2+(k+3)x-k=0$ 에서

$$(x-1)\left(\boxed{2x^2-3x}+k\right)=0$$

이므로 삼차방정식 $2x^3-5x^2+(k+3)x-k=0$ 의 서로 다른 세 실근은 1과 이차방정식 $\boxed{2x^2-3x}+k=0$ 의 두 근이다. 이차방정식 $\boxed{2x^2-3x}+k=0$ 의 두 근을 α, β $(\alpha>\beta)$ 라 하자. 1, α, β 가 직각삼각형의 세 변의 길이가 되는 경우는 다음과 같이 2가지로 나눌 수 있다.

(ⅰ) 빗변의 길이가 1인 경우

$\alpha^2+\beta^2=1$ 이므로 $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1$ 이다.

이차방정식 $2x^2-3x+k=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에서 $\alpha+\beta=\frac{3}{2}$, $\alpha\beta=\frac{k}{2}$ 이다.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\times\frac{k}{2}=1$$

이므로 $k=\boxed{\frac{5}{4}}$ 이다.

그런데 $\boxed{2x^2-3x}+\frac{5}{4}=0$ 에서 판별식 $D<0$ 이므로 α, β 는 실수가 아니다. 따라서 1, α, β 가 직각삼각형의 세 변의 길이가 될 수 없다.

(ⅱ) 빗변의 길이가 α 인 경우

$1+\beta^2=\alpha^2$ 이므로 $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=1$ 이다.

$\alpha+\beta=\frac{3}{2}$, $\alpha\beta=\frac{k}{2}$ 에서 $\alpha-\beta=\frac{2}{3}$ 이고,

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2-4\times\frac{k}{2}$$

이므로 $k=\boxed{\frac{65}{72}}$ 이다. 이때 $\alpha=\frac{13}{12}$, $\beta=\frac{5}{12}$ 이므로 1, α, β 는 직각삼각형의 세 변의 길이가 될 수 있다.

따라서 (ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여 $k=\boxed{\frac{65}{72}}$ 이다.

그러므로 $f(x)=2x^2-3x$, $p=\frac{5}{4}$, $q=\frac{65}{72}$ 이다.

따라서 $f(3)\times\frac{q}{p}=9\times\frac{\frac{65}{72}}{\frac{5}{4}}=\frac{13}{2}$ 이다.

21

[출제의도] 연립부등식의 해 추론하기

$$x^2-a^2x=x(x-a^2)\ge 0$$

에서 $x\le 0$ 또는 $x\ge a^2$ 이고

$$x^2-4ax+4a^2-1=(x-(2a-1))(x-(2a+1))<0$$

에서 $2a-1<x<2a+1$ 이다.

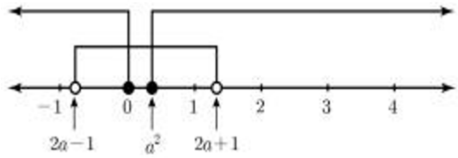
ⅰ) $0<a<\frac{1}{2}$ 일 때

연립부등식의 해는

$$-1<2a-1<x\le 0 \text{ 또는 } a^2\le x<2a+1<2$$

인데 $0<a^2<\frac{1}{4}$ 이고 $1<2a+1<2$ 이므로

$x=0,1$ 의 2개 정수해가 존재한다.



ⅱ) $a=\frac{1}{2}$ 일 때

연립부등식의 해는

$$\frac{1}{4}=a^2\le x<2a+1=2$$

이므로 $x=1$ 의 1개 정수해가 존재한다.

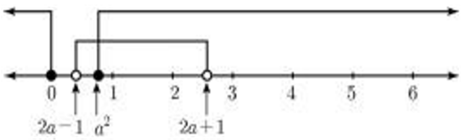
ⅲ) $\frac{1}{2}<a<1$ 일 때

연립부등식의 해는

$$a^2\le x<2a+1$$

인데 $\frac{1}{4}<a^2<1$ 이고 $2<2a+1<3$ 이므로

$x=1,2$ 의 2개 정수해가 존재한다.



ⅳ) $a=1$ 일 때

연립부등식의 해는

$$1=a^2=2a-1<x<2a+1=3$$

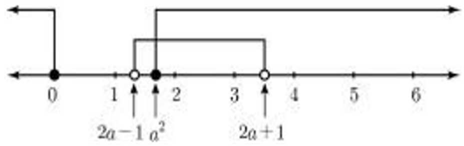
이므로 $x=2$ 의 1개 정수해가 존재한다.

ⅴ) $1<a<\sqrt{2}$ 일 때

연립부등식의 해는

$$a^2 \le x < 2a+1$$

인데 $1 < a^2 < 2$이고 $3 < 2a+1 < 1+2\sqrt{2} < 4$이므로 $x=2, 3$의 2개 정수해가 존재한다.



그러므로 ⅰ) ~ ⅴ)에 의해

$a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=1$일 때, 1개 정수해가 존재한다.

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 $\frac{3}{2}$이다.

22

[출제의도] 복소수 계산하기

두 복소수가 서로 같을 조건에 의해

$$(a+1)+3i=7+bi$$

$$a+1=7,\ 3=b$$

이다. 따라서 $a=6$, $b=3$이고 $a+b=9$이다.

23

[출제의도] 다항식 계산하기

$$\begin{aligned}(x-y)^2 &= (x+y)^2-4xy\\ &= 5^2-4\times 2\end{aligned}$$

따라서 $(x-y)^2=17$이다.

24

[출제의도] 연립부등식 이해하기

부등식 $2x+1 < x-3$의 해는 $x < -4$이고

$x^2+6x-7=(x-1)(x+7) < 0$의 해는

$$-7 < x < 1$$

이므로 연립부등식의 해는

$$-7 < x < -4$$

이다. 따라서 $\alpha=-7, \beta=-4$이므로

$$\beta-\alpha=-4-(-7)=3$$

이다.

25

[출제의도] 이차방정식의 해를 이용하여 문제 해결하기

이차방정식 $x^2+4x-3=0$의 두 근이 α, β이므로

$$\alpha^2+4\alpha-3=0$$

$$\beta^2+4\beta-3=0$$

이 성립한다. 따라서

$$\alpha^2+4\alpha-4=-1$$

$$\beta^2+4\beta-4=-1$$

이므로

$$\frac{6\beta}{\alpha^2+4\alpha-4}+\frac{6\alpha}{\beta^2+4\beta-4}=-6(\beta+\alpha)$$

이다. 근과 계수의 관계에 따라 $\alpha+\beta=-4$이므로

$$\frac{6\beta}{\alpha^2+4\alpha-4}+\frac{6\alpha}{\beta^2+4\beta-4}=-6(\alpha+\beta)=24$$

이다.

26

[출제의도] 나머지정리를 이용하여 다항식의 나눗셈 문제 해결하기

다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 몫은 $Q(x)$, 나머지는 5이므로

$$f(x)=(x-1)Q(x)+5$$

이다.

$Q(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는 10이므로

$$Q(x)=(x-2)Q'(x)+10$$

이다.

따라서 $\begin{aligned}f(x)&=(x-1)\{(x-2)Q'(x)+10\}+5\\ &=(x-1)(x-2)Q'(x)+10(x-1)+5\\ &=(x-1)(x-2)Q'(x)+10x-5\end{aligned}$

이므로 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나눈 나머지는 $10x-5$이다. 따라서 $a=10$, $b=-5$이므로

$$3a+b=25$$

이다.

27

[출제의도] 이차함수의 성질 추론하기

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=4ax-10$의 교점의 x좌표가 1, 5이므로

이차방정식 $f(x)=4ax-10$의 두 실근은 1, 5이다.

$f(x)$의 이차항의 계수가 a이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$$f(x)-4ax+10=a(x^2-6x+5)$$

로 둘 수 있다. 따라서

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2-6ax+5a+4ax-10 \\ &= ax^2-2ax+5a-10 \\ &= a(x-1)^2+4a-10 \end{aligned}$$

이다. 한편, $a>0$이고 $1\le x\le 5$에서 $f(x)$의 최솟값이 -8이므로 $f(1)=-8$이다.

$f(1)=4a-10=-8$에서 $a=\frac{1}{2}$이다.

따라서 $100a=50$이다.

28

[출제의도] 미지수가 3개인 연립일차방정식을 이용하여 실생활 문제 해결하기

$a<b<c$이므로 두 변의 길이의 차의 최댓값은

$$c-a$$

이다. 그러므로 (가)에 의해

$$c-a=16$$

이다. 또한 (나)에 의해

$$b-a=2 \text{ 또는 } c-b=2$$

이다.

ⅰ) $b-a=2$ 인 경우

$b-a=2$이고 $c-a=16$이므로 두 식을 더하면

$$-2a+b+c=18 \cdots\cdots ①$$

철사의 총 길이가 60㎝이므로

$$a+b+c=60 \cdots\cdots ②$$

이다. ②−①을 하면 $3a=42$이다.

따라서

$$a=14,\ b=16,\ c=30$$

이다. 그러나 $c=a+b$이므로 삼각형의 결정조건에 위배된다.

ⅱ) $c-b=2$인 경우

$c-b=2$이고 $c-a=16$이므로 두 식을 더하면

$$-a-b+2c=18 \cdots\cdots ③$$

철사의 총 길이가 60㎝이므로

$$a+b+c=60 \cdots\cdots ④$$

이다. ③+④를 하면 $3c=78$이다.

따라서

$$a=10,\ b=24,\ c=26$$

이고

$$c^2=a^2+b^2$$

이므로 이 삼각형은 직각삼각형이다.

그러므로

$$3a-b+c=30-24+26=32$$

이다.

29

[출제의도] 곱셈공식을 이용하여 문제 해결하기

$P(x)+x$ 가 이차다항식이므로

$$(x-a)(x+a)(x^2+5)+9$$

도 이차다항식의 완전제곱식이어야 한다.

$(x-a)(x+a)(x^2+5)+9$

$=(x^2-a^2)(x^2+5)+9$

$=x^4+(5-a^2)x^2-5a^2+9$

$=x^4+(5-a^2)x^2+\dfrac{(5-a^2)^2}{4}-\dfrac{(5-a^2)^2}{4}-5a^2+9$

$=\left\{x^4+(5-a^2)x^2+\dfrac{(5-a^2)^2}{4}\right\}-\dfrac{(5-a^2)^2-4(-5a^2+9)}{4}$

$=\left(x^2+\dfrac{5-a^2}{2}\right)^2-\dfrac{(5-a^2)^2-4(-5a^2+9)}{4}$

에서

$$(5-a^2)^2-4(-5a^2+9)=0$$

$$a^4+10a^2-11=0$$

$$(a^2+11)(a^2-1)=0$$

이고 $a=1$ ($\because$ $a>0$)이다.

$\{P(x)+x\}^2=(x^2+2)^2$ 에서

$$P(x)=x^2-x+2 \text{ 또는 } P(x)=-x^2-x-2$$

이고 이차항의 계수가 음수이므로

$$P(x)=-x^2-x-2$$

이다. 따라서 $\{P(a)\}^2=\{P(1)\}^2=16$ 이다.

[다른 풀이]

$$\begin{aligned}\{P(x)+x\}^2&=(x^2-a^2)(x^2+5)+9\\&=x^4+(5-a^2)x^2-5a^2+9\end{aligned}$$

이고 $P(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수이므로

$$P(x)+x=-x^2+px+q$$

라 하자.

$$\begin{aligned}(-x^2+px+q)^2&=x^4-2px^3+(p^2-2q)x^2+2pqx+q^2\\&=x^4+(5-a^2)x^2-5a^2+9\end{aligned}$$

에서

$$-2p=0$$

$$p^2-2q=5-a^2$$

$$2pq=0$$

$$q^2=-5a^2+9$$

이므로 $p=0$ 이고 $a^2=2q+5$ 이다.

$$q^2+10q+16=0$$

$$(q+8)(q+2)=0$$

$$q=-8 \text{ 또는 } q=-2$$

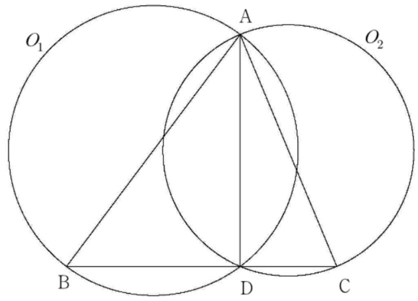
$q=-8$ 이면 $a^2=-11<0$ 이므로 모순이다.

그러므로 $q=-2$ 이다. $a^2=2q+5$ 에 $q=-2$ 를 대입하면 a 가 양수이므로 $a=1$ 이다.

그러므로 $P(x)+x=-x^2-2$ 즉, $P(x)=-x^2-x-2$ 이다. 따라서 $\{P(a)\}^2=\{P(1)\}^2=16$ 이다.

30

[출제의도] 연립방정식을 이용하여 도형 문제 해결하기



$\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ 는 이 순서대로 네 개의 연속된 짝수이므로 $\overline{AD}=2n$, $\overline{AC}=2n+2$, $\overline{BC}=2n+4$, $\overline{AB}=2n+6$ (단, n 은 자연수)이라 두자.

$\overline{BD}=x$, $\overline{CD}=y$ 라 두면

$$x+y=2n+4 \cdots\cdots ①$$

두 삼각형 ABD 와 ACD 는 직각삼각형이므로

$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2-\overline{BD}^2$, $\overline{AD}^2=\overline{AC}^2-\overline{CD}^2$ 이다.

$$(2n+6)^2-x^2=(2n+2)^2-y^2 \cdots\cdots ②$$

②에서 $8(2n+4)=(2n+4)(x-y)$ 이므로

$$x-y=8 \cdots\cdots ③$$

이다.

①과 ③을 연립하여 풀면

$$x=n+6,\ y=n-2$$

이고 직각삼각형 ACD 에서 $(2n+2)^2=4n^2+(n-2)^2$ 이다.

이 식을 정리하면 $n^2-12n=0$ 에서

$$n=12$$

이다. 따라서 $\overline{AB}=30$, $\overline{AC}=26$ 이므로

두 원의 넓이의 합 S는

$$S=15^2\pi+13^2\pi=394\pi$$

이다. 그러므로 $\dfrac{S}{\pi}=394$ 이다.