< 정답표>

1.	④	**2.**	⑤	**3.**	③	**4.**	①	**5.**	③
6.	①	**7.**	①	**8.**	②	**9.**	①	**10.**	⑤
11.	②	**12.**	⑤	**13.**	③	**14.**	④	**15.**	④
16.	①	**17.**	①	**18.**	②	**19.**	②	**20.**	③
21.	④	**22.**	14	**23.**	49	**24.**	4	**25.**	52
26.	34	**27.**	45	**28.**	19	**29.**	15	**30.**	16

01

출제의도 : 벡터의 덧셈을 성분을 이용하여 할 수 있는가?

정답풀이 :

$\vec{a}+\vec{b}=(2,\ 4)+(1,1)$

$=(3,5)$

따라서 모든 성분의 합은

8이다.

정답 ④

02

출제의도 : 삼각함수의 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sin\frac{7\pi}{3}=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}$

정답 ⑤

03

출제의도 : 로그함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x}$

$=3\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{3x}$

$=3$

정답 ③

04

출제의도 : 두 사건이 서로 독립임을 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 사건 A와 B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서

$\frac{1}{9}=\frac{2}{3}\times\mathrm{P}(B)$에서

$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$

정답 ①

05

출제의도 : 쌍곡선의 두 초점 사이의 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{36}=1$의 두 초점의 좌표는

$(\sqrt{a^2+36},0)$, $(-\sqrt{a^2+36},0)$

이고 두 초점 사이의 거리가 $6\sqrt{6}$이므로

$2\sqrt{a^2+36}=6\sqrt{6}$, $a^2+36=54$

따라서 $a^2=18$

정답 ③

06

출제의도 : 미분계수의 정의를 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(\pi+h)-f(\pi)\}-\{f(\pi-h)-f(\pi)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}+\frac{f(\pi-h)-f(\pi)}{-h}\right\}$$
$$=f'(\pi)+f'(\pi)$$
$$=2f'(\pi)$$

$f(x)=\tan 2x+3\sin x$에서

$f'(x)=2\sec^2 2x+3\cos x$이므로

$$2f'(\pi)=2(2\sec^2 2\pi+3\cos\pi)$$
$$=2\{2\times 1^2+3\times(-1)\}$$
$$=-2$$

정답 ①

07

출제의도 : 삼각함수의 덧셈정리를 할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=2$$

따라서,

$\tan\alpha+1=2(1-\tan\alpha)$

이므로

$3\tan\alpha=1$

에서

$\tan\alpha=\frac{1}{3}$

정답 ①

08

출제의도 : 로그부등식을 만족시키는 정수 x의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(ⅰ) $\log_2|x-1|$의 진수조건에서

$x\neq 1$

(ⅱ) $2\log_2|x-1|\le 1-\log_2\frac{1}{2}$

$2\log_2|x-1|\le 1-(-1)$

$2\log_2|x-1|\le 2$

$\log_2|x-1|\le 1$

$\log_2|x-1|\le \log_2 2$

$|x-1|\le 2$에서

$-1\le x\le 3$

즉 정수 x의 값은

$-1, 0, 1, 2, 3$

(ⅰ), (ⅱ)에서

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 값은

$-1, 0, 2, 3$

이고, 그 개수는 4이다.

정답 ②

09

출제의도 : 음함수의 미분법을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 (a,b)가 곡선 $e^x - e^y = y$ 위의 점이므로

$e^a - e^b = b$ ⋯ ㉠

$e^x - e^y = y$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$e^x - e^y \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^y + 1}$$

점 (a, b)에서의 접선의 기울기가 1이므로

$$\frac{e^a}{e^b + 1} = 1$$

$e^a = e^b + 1$

$e^a - e^b = 1$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $b = 1$이고

$e^a = e + 1$에서 $a = \ln(e+1)$

따라서

$a + b = 1 + \ln(e+1)$

정답 ①

10

출제의도 : 수학적 확률을 구할 수 있는가?

정답 풀이 :

전체 9명 중에서 3명을 선택하는 모든 경우의 수는

$${}_9C_3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$$

선택된 3명 모두 근무조 A에 속하는 경우의 수는

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

선택된 3명 모두 근무조 B에 속하는 경우의 수는

$${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

따라서 선택된 3명 중 근무조 A와 근무조 B에서 적어도 한 명씩 선택되는 경우의 수는

$$84 - (10 + 4) = 70$$

이므로 구하는 확률은

$$\frac{70}{84} = \frac{5}{6}$$

정답 ⑤

11

11. **출제의도** : 치환적분을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x^2-1=t$라 하면 $2x=\dfrac{dt}{dx}$이고

$x=1$일 때 $t=0$, $x=\sqrt{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_1^{\sqrt{2}} x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{2}(t+1)\sqrt{t}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 (t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{1}{2}})dt$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{2}{5}+\frac{2}{3})$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{16}{15}=\frac{8}{15}$$

정답 ②

12

출제의도 : 벡터의 내적을 이용하여 두 직선이 이루는 각의 크기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직선 $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-1}{3}$의 방향벡터를 $\vec{u}$라고 하면 $\vec{u}=(4,\ 3)$

직선 $\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y+1}{3}$의 방향벡터를 $\vec{v}$라고 하면 $\vec{v}=(-1,\ 3)$

따라서

$$\cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

$$=\frac{|4\times(-1)+3\times3|}{\sqrt{4^2+3^2}\sqrt{(-1)^2+3^2}}$$

$$=\frac{5}{5\sqrt{10}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

정답 ⑤

13

출제의도 : 조합과 순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
매일 두 팀 이상씩 공연을 해야 하므로 첫째날과 둘째날에 공연하는 팀수로 나누면 다음과 같다.

(ⅰ) 첫째날 2팀, 둘째날 3팀
공연하는 팀을 정하는 경우의 수는
${}_5C_2 \times {}_3C_3 = 10$
이 각각에 대하여 각 팀이 공연 순서를 정하는 경우의 수는
$2! \times 3! = 12$
그러므로 구하는 경우의 수는
$10 \times 24 = 120$

(ⅱ) 첫째날 3팀, 둘째날 2팀
공연하는 팀을 정하는 경우의 수는
${}_5C_3 \times {}_2C_2 = 10$
이 각각에 대하여 각 팀이 공연 순서를 정하는 경우의 수는
$3! \times 2! = 12$
그러므로 구하는 경우의 수는
$10 \times 24 = 120$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는
$120 + 120 = 240$

정답 ③

14

출제의도 : 수학적 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
한 개의 주사위를 두 번 던질 때 일어날 수 있는 모든 경우의 수는
$6 \times 6 = 36$
이차함수 $f(x) = x^2 - 7x + 10$에서
$f(x) = (x-2)(x-5)$
에서
$f(1) > 0,\ f(6) > 0$
$f(2) = f(5) = 0$
$f(3) < 0,\ f(4) < 0$
이므로
$f(a)f(b) < 0$
를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는
$(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (3,\ 1),\ (4,\ 1)$
$(6,\ 3),\ (6,\ 4),\ (3,\ 6),\ (4,\ 6)$
의 8개다.
따라서 구하는 확률은
$\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

정답 ④

15

출제의도 : 합성함수의 미분을 할 수 있는가?

정답풀이 :

$g(f(\frac{\pi}{4}))=g(\frac{1}{2})=\sqrt{e}$ 이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{g(f(x))-g(f(\frac{\pi}{4}))}{x-\frac{\pi}{4}}=(g\circ f)'(\frac{\pi}{4})$$

이때,

$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\times f'(x)$

이고

$f'(x)=2\sin x\cos x,\ g'(x)=e^x$

이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{g(f(x))-g(f(\frac{\pi}{4}))}{x-\frac{\pi}{4}}$$

$$=(g\circ f)'(\frac{\pi}{4})$$

$$=g'(f(\frac{\pi}{4}))\times f'(\frac{\pi}{4})$$

$$=g'(\frac{1}{2})\times f'(\frac{\pi}{4})$$

$$=\sqrt{e}\times 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}$$

$$=\sqrt{e}\times 2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\sqrt{e}$$

정답 ④

16

출제의도 : 삼각함수의 극한을 이용하여 도형에서의 극한을 구할 수 있는가?

정답 풀이 :

$\overline{\mathrm{OP}}=1$이므로

$\overline{\mathrm{OH}}=\cos\theta$

점 Q에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 R라 하면

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OH}}\times\overline{\mathrm{QR}}=\frac{\cos\theta}{2}\times\overline{\mathrm{QR}}$$

한편, 엇각의 성질에 의해 $\angle\mathrm{HQR}=\theta$이므로 $\overline{\mathrm{QR}}=a$라 하면

$\overline{\mathrm{RH}}=\overline{\mathrm{QR}}\times\tan\theta=a\tan\theta$

$\overline{\mathrm{OR}}=\overline{\mathrm{OH}}-\overline{\mathrm{RH}}=\cos\theta-a\tan\theta$

이때 $\overline{\mathrm{QR}}^2+\overline{\mathrm{OR}}^2=1$이므로

$a^2+(\cos\theta-a\tan\theta)^2=1$

$(\tan^2\theta+1)a^2-2a\cos\theta\tan\theta+\cos^2\theta-1=0$

이때 $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta,\quad \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$,

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 위 등식은

$a^2\sec^2\theta-2a\sin\theta-\sin^2\theta=0$

위 등식의 양변에 $\cos^2\theta$를 곱하면

$a^2-2a\sin\theta\cos^2\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta=0$

이때 $a>0$이므로 근의 공식에 의해

$$a=\sin\theta\cos^2\theta+\sqrt{\sin^2\theta\cos^4\theta+\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$a=\sin\theta\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta\sqrt{\cos^2\theta+1}$$

따라서

$$S(\theta)=\frac{a}{2}\cos\theta$$

$$=\frac{\sin\theta\cos^2\theta}{2}(\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+1})$$

이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\sin\theta\cos^2\theta}{2\theta}(\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+1})\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\theta}\times\lim_{\theta\to0+}\{\cos^2\theta(\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+1})$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times\{1^2\times(1+\sqrt{1^2+1})\}$$

$$=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

정답 ①

17

출제의도 : 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\overline{BC}=\overline{BF}$ 이므로

$\angle CFB=\angle BCF=\theta'$

이라 하자.

또한, $\overline{BF}=a$ 에서 $\overline{BC}=$

$C(0,a+b)$

따라서 삼각형 COF에서

$$\tan\theta'=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}=\frac{1}{16},\quad \frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)^2}=\frac{1}{16}$$

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{1}{16}$$

즉, $b=\frac{15}{17}a$

또한, 삼각형 COA에서

$$\tan(\theta+\theta')=\frac{\tan\theta+\tan\theta'}{1-\tan\theta\tan\theta'}$$

$$=\frac{\tan\theta+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}\tan\theta}$$

$$\tan(\theta+\theta')=\frac{a}{a+b}$$

$$=\frac{a}{a+\frac{15}{17}a}=\frac{17}{32}$$

이므로

$$\frac{\tan\theta+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}\tan\theta}=\frac{17}{32},$$

$$32\tan\theta+8=17-\frac{17}{4}\tan\theta$$

$$\tan\theta=\frac{36}{145}$$

정답 ①

18

출제의도 : 속도벡터를 이용하여 점의 위치를 구하고, 두 점이 만나는 횟수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\int 2t\,dt = t^2 + C_1$,

$\int 2\pi\sin 2\pi t\,dt = -\cos 2\pi t + C_2$

(단, C_1, C_2는 적분상수)

점 P의 시각 $t=0$에서의 위치가 $(0,\ -1)$이므로 $C_1 = C_2 = 0$

즉 점 P의 시각 t에서의 위치는

$\mathrm{P}(t^2,\ -\cos 2\pi t)$

두 점 P, Q가 만나는 횟수는

연립방정식 $\begin{cases} t^2 = 4\sin 2\pi t \\ -\cos 2\pi t = |\cos 2\pi t| \end{cases}$

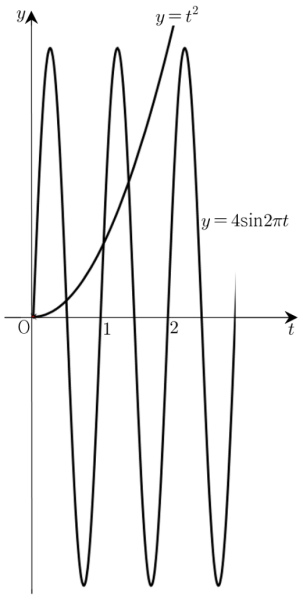
의 근의 개수와 같다.

방정식 $-\cos 2\pi t = |\cos 2\pi t|$을 만족시키는 t의 값의 범위는

$m + \frac{1}{4} \le t \le m + \frac{3}{4}$ …… ㉠

(단, m은 음이 아닌 정수)

한편, 방정식 $t^2 = 4\sin 2\pi t$의 근의 개수는 두 곡선 $y=t^2$, $y=4\sin 2\pi t$이 만나는 점의 개수이다.



그림에서 두 곡선이 ㉠의 범위에서 만나는 점의 개수는 2이다.

따라서 두 점 P, Q가 만나는 횟수는 2이다.

정답 ②

19

출제의도 : 확률의 곱셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$0 \le m \le 3$, $0 \le n \le 3$ 이고 $m+n=3$ 이므로

$|m-n| = 3$ 또는 $|m-n| = 1$

그런데 $i^{|m-n|} = -i$ 이므로

$|m-n| = 3$

즉, $m=3$, $n=0$ 또는 $n=0$, $m=3$이므로 구하고자 하는 확률은

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{1}{64} + \frac{27}{64}$$

$$= \frac{7}{16}$$

정답 ②

출제의도 : 중복조합의 수를 구하는 과정에서 빈칸에 들어가는 식 또는 수를 추론할 수 있는가?

정답풀이 :
음이 아닌 정수 a, b, c, d가 $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키려면 음이 아닌 정수 k에 대하여 $c+d=2k$이어야 한다.
$c+d=2k$인 경우는 (1) 음이 아닌 정수 k_1, k_2에 대하여 $c=2k_1$, $d=2k_2$인 경우이거나 (2) 음이 아닌 정수 k_3, k_4에 대하여 $c=2k_3+1$, $d=2k_4+1$인 경우이다.

(1) $c=2k_1$, $d=2k_2$인 경우:
$2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는
$2a+2b+2k_1+2k_2=2n$
에서 $a+b+k_1+k_2=n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, k_1, k_2의 모든 순서쌍 (a, b, k_1, k_2)의 개수와 같으므로
${}_4\mathrm{H}_n={}_{n+3}\mathrm{C}_n=\boxed{{}_{n+3}\mathrm{C}_3}$이다.

(2) $c=2k_3+1$, $d=2k_4+1$인 경우:
$2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는
$2a+2b+(2k_3+1)+(2k_4+1)=2n$
에서 $a+b+k_3+k_4=n-1$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, k_3, k_4의 모든 순서쌍 (a, b, k_3, k_4)의 개수와 같으므로
${}_4\mathrm{H}_{n-1}={}_{n+2}\mathrm{C}_{n-1}=\boxed{{}_{n+2}\mathrm{C}_3}$이다.

(1), (2)에 의하여 $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수 a_n은

$$a_n={}_{n+3}\mathrm{C}_3+{}_{n+2}\mathrm{C}_3$$

이다. 자연수 m에 대하여

$$\sum_{n=1}^{m}{}_{n+2}\mathrm{C}_3={}_{m+3}\mathrm{C}_4$$

이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{8}a_n&=\sum_{n=1}^{8}{}_{n+3}\mathrm{C}_3+\sum_{n=1}^{8}{}_{n+2}\mathrm{C}_3\\&=({}_{12}\mathrm{C}_4-1)+{}_{11}\mathrm{C}_4\\&=(495-1)+330\\&=\boxed{824}\end{aligned}$$

$f(n)={}_{n+3}\mathrm{C}_3$, $g(n)={}_{n+2}\mathrm{C}_3$, $r=824$이므로
$f(6)+g(5)+r$
$={}_9\mathrm{C}_3+{}_7\mathrm{C}_3+824$
$=84+35+824$
$=943$

정답 ③

21

출제의도 : 함수의 그래프와 미분가능하지 않을 조건을 이용하여 합성함수가 연속이 될 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x)=\begin{cases} 2\sin^3 x & (-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}) \\ \cos x & (\frac{\pi}{4}\le x<\frac{3\pi}{2}) \end{cases}$$ 에서

$$f'(x)=\begin{cases} 6\sin^2 x\cos x & (-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}) \\ -\sin x & (\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{2}) \end{cases}$$

이므로

$f'(x)=0$

에서

$x=0$ 또는 $x=\pi$

이때, $f'(0)=0$ 이지만 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)>0$ 이므로 $x=0$에서 극값을 갖지 않고 $x=\pi$ 에서는 극솟값 $f(\pi)=-1$을 갖는다.

또한,

$f(\frac{\pi}{4})=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)$ 이고

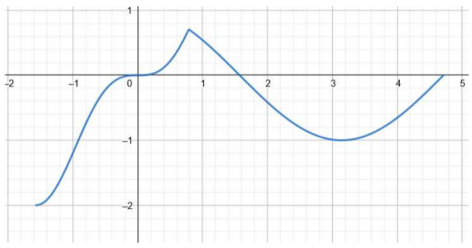
$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-} f'(x)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+} f'(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$에서 극댓값 $f(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$을 갖는다.

그리고, $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+} f(x)=-2$,

$\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}-} f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



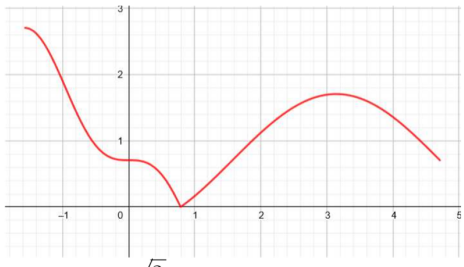
이때 $G(x)=|f(x)-t|$라 하면

$$(\sqrt{G(x)})'=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{G(x)}}\times G'(x)$$

이므로 함수 $\sqrt{G(x)}$는 $G(x)$가 미분가능하지 않는 x의 값과 $G(x)=0$인 x의 값에서 미분가능하지 않다.

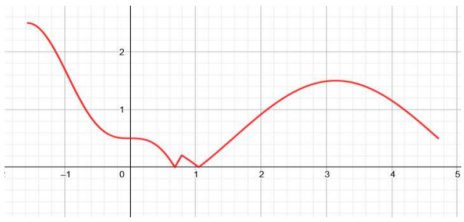
(i) $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때

함수 $G(x)=|f(x)-t|$의 그래프는 그림과 같으므로 조건을 만족시키는 k의 개수는 1이다.



(ii) $0<t<\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때

함수 $G(x)=|f(x)-t|$의 그래프는 그림과 같으므로 조건을 만족시키는 k의 개수는 3이다.



(iii) $t=0$일 때

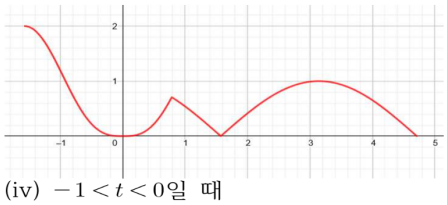
함수 $G(x)=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.

이때, $i(x)=\sqrt{|2\sin^3 x|}$라 하면

$$i'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{i(0+h)-i(0)}{h}$$

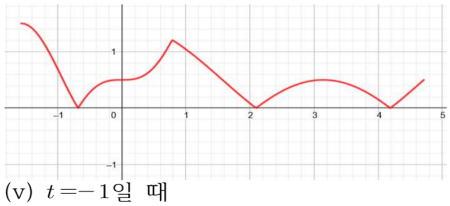
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{|2\sin^3 h|}}{h}=0$$

이므로 $x=0$에서는 미분이 가능하다. 따라서, 조건을 만족시키는 k의 개수는 2이다.



(iv) $-1<t<0$일 때

함수 $G(x)=|f(x)-t|$의 그래프는 그림과 같으므로 조건을 만족시키는 k의 개수는 4이다.



(v) $t=-1$일 때

함수 $G(x)=|f(x)-t|$의 그래프는 그림과 같다.

이때, $j(x)=\sqrt{|\cos x+1|}$라 하면

$$\lim_{h\to 0-}\frac{j(\pi+h)-j(\pi)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0-}\frac{\sqrt{|\cos(\pi+h)+1|}-\sqrt{|\cos\pi+1|}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0-}\frac{\sqrt{|-\cos h+1|}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0-}\frac{\sqrt{-\cos h+1}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0-}\left(-\sqrt{\frac{1-\cos h}{h^2}}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0-}\left\{-\sqrt{\frac{\sin^2 h}{h^2(1+\cos h)}}\right\}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{j(\pi+h)-j(\pi)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{\sqrt{|\cos(\pi+h)+1|}-\sqrt{|\cos\pi+1|}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{\sqrt{|-\cos h+1|}}{h}$$

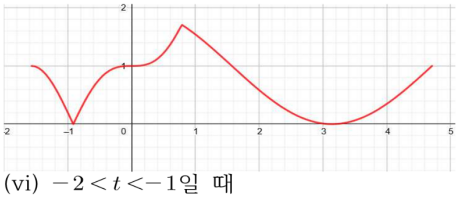
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{\sqrt{-\cos h+1}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\left(\sqrt{\frac{1-\cos h}{h^2}}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0+}\sqrt{\frac{\sin^2 h}{h^2(1+\cos h)}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

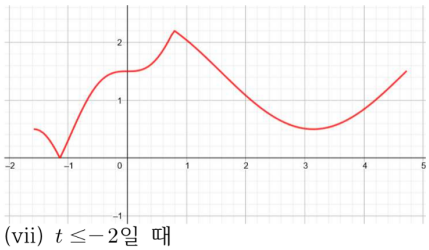
즉, $x=\pi$에서 미분가능하지 않으므로 조건을 만족시키는 k의 개수는 3이다.



(vi) $-2<t<-1$일 때

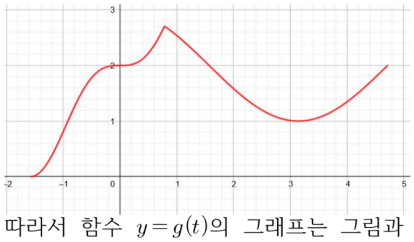
함수 $G(x)=|f(x)-t|$의 그래프는 그림과

같으므로 조건을 만족시키는 k의 개수는 2이다.

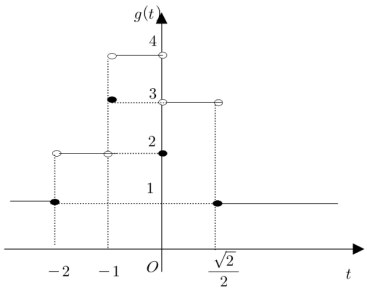


(vii) $t \le -2$일 때

함수 $G(x)=|f(x)-t|$의 그래프는 그림과 같으므로 조건을 만족시키는 k의 개수는 1이다.



따라서 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.



그런데, 합성함수 $(h \circ g)(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되어야 하므로

$$\lim_{t \to \frac{\sqrt{2}}{2}-} (h \circ g)(t) = \lim_{t \to \frac{\sqrt{2}}{2}+} (h \circ g)(t)$$

$$= (h \circ g)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

즉, $h(3)=h(1) \cdots$ ㉠

$$\lim_{t \to 0-} (h \circ g)(t) = \lim_{t \to 0+} (h \circ g)(t)$$

$$= (h \circ g)(0)$$

즉, $h(4)=h(3)=h(2) \cdots$ ㉡

$$\lim_{t \to -1-} (h \circ g)(t) = \lim_{t \to -1+} (h \circ g)(t)$$

$$= (h \circ g)(-1)$$

즉, $h(2)=h(4)=h(3) \cdots$ ㉢

$$\lim_{t \to -2-} (h \circ g)(t) = \lim_{t \to -2+} (h \circ g)(t)$$

$$= (h \circ g)(-2)$$

즉, $h(1)=h(2) \cdots$ ㉣

따라서 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣에 의하여

$h(1)=h(2)=h(3)=h(4)$

이므로

$h(1)=h(2)=h(3)=h(4)=k$

라 하면 사차함수 $h(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$h(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+k$

또한,

$$a=g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1,$$

$$b=g(0)=2,\ c=g(-1)=3$$

이므로

$h(a+5)-h(b+3)+c$

$=h(6)-h(5)+3$

$=(5\times4\times3\times2+k)-(4\times3\times2\times1+k)+3$

$=(120+k)-(24+k)+3$

$=99$

정답 ④

22

출제의도 : 평면벡터의 연산을 할 수 있는가?

정답 풀이 :

$\vec{a}+2\vec{b}=(2,4)+2(1,3)$

$=(2,4)+(2,6)=(4,10)$

따라서 모든 성분의 합은

$4+10=14$

정답 14

23

출제의도 : 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sec^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$
$$= \frac{1}{(\frac{1}{7})^2}$$
$$= 49$$

정답 49

24

출제의도 : 지수함수의 정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\int_2^4 2e^{2x-4}\,dx$$
$$= \int_2^4 2e^{2(x-2)}\,dx$$
$$= \int_0^2 2e^{2x}\,dx$$
$$= \left[e^{2x}\right]_0^2$$
$$= e^4 - 1$$

따라서 $k = e^4 - 1$이므로

$$\ln(k+1) = \ln e^4$$
$$= 4$$

정답 4

25

출제의도 : 좌표평면에서 벡터로 표현된 직선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

좌표평면 위의 점 $(6, 3)$을 지나고 벡터 $\vec{u} = (2, 3)$에 평행한 직선의 방정식은

$$\frac{x-6}{2} = \frac{y-3}{3}$$

이 직선이 x축과 만나는 점 A의 x좌표는

$$\frac{x-6}{2} = \frac{0-3}{3}$$

$x = 4$

그러므로 $\mathrm{A}(4, 0)$

또, y축과 만나는 점 B의 y좌표는

$$\frac{0-6}{2} = \frac{y-3}{3}$$

$y = -6$

그러므로 $\mathrm{B}(0, -6)$

따라서

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = (0-4)^2 + (-6-0)^2$$
$$= 16 + 36$$
$$= 52$$

정답 52

26

출제의도 : 삼각함수를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 코사인의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\overline{OQ}=2\cos\theta$이므로

$\overline{OP}=2\cos\theta-1$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

점 P의 y좌표는 선분 PH의 길이와 같다.

이때, $\overline{PH}=(2\cos\theta-1)\sin\theta$

$f(\theta)=(2\cos\theta-1)\sin\theta$로 놓으면

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= -2\sin\theta\times\sin\theta+(2\cos\theta-1)\cos\theta \\ &= -2\sin^2\theta+2\cos^2\theta-\cos\theta \\ &= -2(1-\cos^2\theta)+2\cos^2\theta-\cos\theta \\ &= 4\cos^2\theta-\cos\theta-2 \end{aligned}$$

$4\cos^2\theta-\cos\theta-2=0$에서

$\cos\theta=\dfrac{1\pm\sqrt{33}}{8}$

그런데 $\dfrac{1}{2}<\cos\theta<1$이므로

$\cos\theta=\dfrac{1+\sqrt{33}}{8}$이고,

$\cos\theta=\dfrac{1+\sqrt{33}}{8}$일 때, 점 P의 y좌표가 최대이다.

따라서 $a=1$, $b=33$이므로

$a+b=1+33=34$

정답 34

27

출제의도 : 집합의 분할을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

집합 $\{1,2,3,4,5\}$에서 원소의 개수가 2인 서로 다른 두 집합을 택하는 경우는 다음 두 가지이다.

(ⅰ) 같은 원소가 1개 있는 경우

같은 원소를 택하는 경우의 수는 5이다.

이 각각에 대하여 두 집합의 원소를 1개씩 택하는 경우의 수는

$$\begin{aligned} &{}_4C_1\times{}_3C_1\times\frac{1}{2!} \\ &=4\times3\times\frac{1}{2} \\ &=6 \end{aligned}$$

그러므로 구하는 경우의 수는

$5\times6=30$

(ⅱ) 같은 원소가 없는 경우

$$\begin{aligned} &{}_5C_2\times{}_3C_2\times\frac{1}{2!} \\ &={}_5C_2\times{}_3C_1\times\frac{1}{2!} \\ &=\frac{5\times4}{2\times1}\times3\times\frac{1}{2} \\ &=15 \end{aligned}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

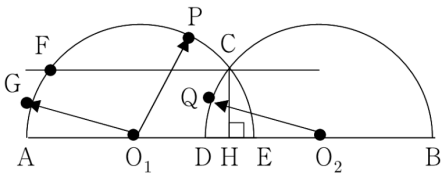
$30+15=45$

정답 45

28

출제의도 : 벡터의 연산과 내적을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



점 C를 지나고 직선 AB에 평행인 직선이 호 AC와 만나는 점을 F라고 하면

$\overrightarrow{O_2Q}=\overrightarrow{O_1G}$

를 만족시키는 점 G는 호 AF 위에 있다.

$\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_2Q}=\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1G}$

이므로 벡터 $\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1G}$의 크기가 최소인 경우는 $\angle PO_1G$의 크기가 최대일 때이며, 이때 점 G가 점 A와 일치하고, 점 P가 점 C와 일치한다. 따라서

$\left|\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1G}\right| \geq \left|\overrightarrow{O_1C}+\overrightarrow{O_1A}\right|=\frac{1}{2}$

$\angle AO_1C=\theta$라 하자.

$\left|\overrightarrow{O_1C}+\overrightarrow{O_1A}\right|=\frac{1}{2}$

의 양변을 제곱하면

$\left|\overrightarrow{O_1C}\right|^2+2\overrightarrow{O_1C}\cdot\overrightarrow{O_1A}+\left|\overrightarrow{O_1A}\right|^2=\frac{1}{4}$

$1+2\left|\overrightarrow{O_1C}\right|\left|\overrightarrow{O_1A}\right|\cos\theta+1=\frac{1}{4}$

$2\times1\times1\times\cos\theta=\frac{1}{4}-2$

$\cos\theta=-\frac{7}{8}$

점 C에서 직선 AB 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{O_1H}=\overline{O_1C}\cos(\pi-\theta)$

$=1\times(-\cos\theta)$

$=\frac{7}{8}$

이고 $\overline{O_1H}=\overline{HO_2}$이므로

$\overline{AB}=\overline{AO_1}+\overline{O_1H}+\overline{HO_2}+\overline{O_2B}$

$=1+\frac{7}{8}+\frac{7}{8}+1$

$=\frac{15}{4}$

따라서 $p=4,\ q=15$이므로

$p+q=19$

정답 19

29

출제의도 : 좌표평면에서 점이 움직인 거리와 점의 가속도를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\frac{dx}{dt}=\frac{2}{t}$, $\frac{dy}{dt}=f'(t)$ 이므로 주어진 조건에 의하여

$\int_1^t \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}\,dt$

$=\int_1^t \sqrt{\frac{4}{t^2}+\{f'(t)\}^2}\,dt=s$

또한, $t=\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}$ 에서

$t^2-st-1=0$

이므로 $s=\frac{t^2-1}{t}$

즉, $\int_1^t \sqrt{\frac{4}{t^2}+\{f'(t)\}^2}\,dt=\frac{t^2-1}{t}$ 이므로

양변을 t에 대하여 미분하면

$\sqrt{\frac{4}{t^2}+\{f'(t)\}^2}=\frac{t^2+1}{t^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$\{f'(t)\}^2=\frac{(t^2-1)^2}{t^4}$

$t=2$일 때 점 P의 속도가 $(1,\frac{3}{4})$이므로

$f'(t)=\frac{t^2-1}{t^2}=1-\frac{1}{t^2}$이다.

그러므로

$f''(t)=\frac{2}{t^3}$

또한, $t=2$일 때 점 P의 가속도가 $(-\frac{1}{2},a)$이므로

$a=f''(2)=\frac{1}{4}$

따라서 $60a=60\times\frac{1}{4}=15$

정답 15

30

출제의도 : 함수의 성질과 함수의 그래프를 이용하여 조건을 만족시키는 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)$

조건 (가)에서 $g'(1)=0$이므로

$f(1)=\ln 2-c=0$에서 $c=\ln 2$

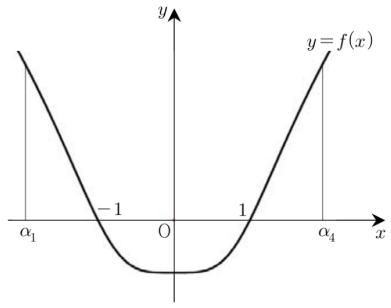
$f(x)=\ln(x^4+1)-\ln 2$

$f'(x)=\frac{4x^3}{x^4+1}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 $-\ln 2$를 갖고,

모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



조건 (가)에서 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓

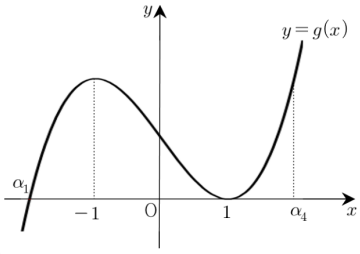
이와 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=\alpha_1$ $(\alpha_1 < -1)$로 둘러싸인 부분의 넓이가 같아지도록 α_1을 정할 수 있다.

이때, $g(x)=\int_a^x f(t)\,dt=0$을 만족시키는 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 a의 값은

$$\alpha_1,\ \alpha_2=-1,\ \alpha_3=1,\ \alpha_4=-\alpha_1$$

이므로 $m=4$이다.

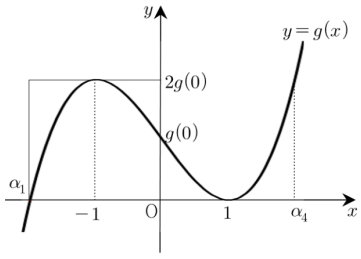
따라서 조건을 만족시키는 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



한편,

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx=\int_0^1 \{-f(x)\}\,dx$$
$$=\int_0^1 \{-g'(x)\}\,dx$$
$$=[-g(x)]_0^1$$
$$=-g(1)+g(0)$$
$$=g(0)$$

즉 $g(0)=\int_0^1 |f(x)|\,dx$



$\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)\,dx$의 값은 위의 그림에서 직사각형의 넓이와 같으므로

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)\,dx=(0-\alpha_1)\times 2g(0)$$
$$=-2\alpha_1\times\int_0^1 |f(x)|\,dx$$
$$=2\alpha_4\times\int_0^1 |f(x)|\,dx$$

이므로 조건 (나)에서 $k=2$

따라서 $c=\ln 2,\ m=4,\ k=2$이므로

$$mk\times e^c=4\times 2\times e^{\ln 2}$$
$$=4\times 2\times 2=16$$

정답 16