

제 2 교시

2020학년도 Grand Master 6월 평가원 대비 모의고사 문제지

이정환 X Team. GM

수학 영역(나형)

성명		수험번호						-				
----	--	------	--	--	--	--	--	---	--	--	--	--

- 자신이 선택한 유형('가' 형/'나' 형)의 문제지인지 확인하십시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
- 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하십시오.

오늘은 누군가의 미래였다.

- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험번호, 문형 (홀수/짝수), 답을 정확히 표시하십시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하십시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하십시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

제 2 교시

수학 영역(나형)

짝수형

5지선다형

1. $3^2 + 16^{\frac{1}{4}}$ 의 값은? [2점]

- ① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3}{n^3-1}$ 의 값은? [2점]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

3. 두 집합

$$A = \{1, 2, 3, 7\}, B = \{1, 2, 4, 9, 16\}$$

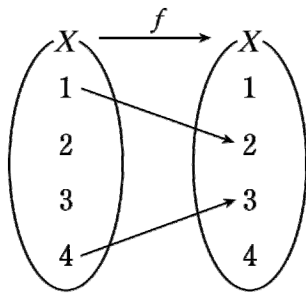
에 대하여 $n(A \cup B)$ 의 값은? [2점]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

4. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^7 a_n = 39$ 이고, $\sum_{n=1}^3 a_{2n} = 17$ 일 때, $a_1 + a_3 + a_5 + a_7$ 의 값은? [3점]

- ① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

5. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 그림은 함수 $f: X \rightarrow X$ 의 일부를 나타낸 것이다.



함수 f 가 일대일 대응일 때, $f(2) + f(3)$ 의 값은? [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

6. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 = a_4 - 12, \quad |a_2| = a_3$$

일 때, a_1 의 값은? [3점]

- ① -3 ② -6 ③ -9 ④ -12 ⑤ -15

7. 실수 x 에 대하여 두 조건 p, q 가 다음과 같다.

$$p: x^2 - 5x + 4 \leq 0$$

$$q: n-1 \leq x \leq n+1$$

q 가 p 이기 위한 충분조건이 되도록 하는 모든 자연수 n 의 값의 합은? [3점]

- ① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

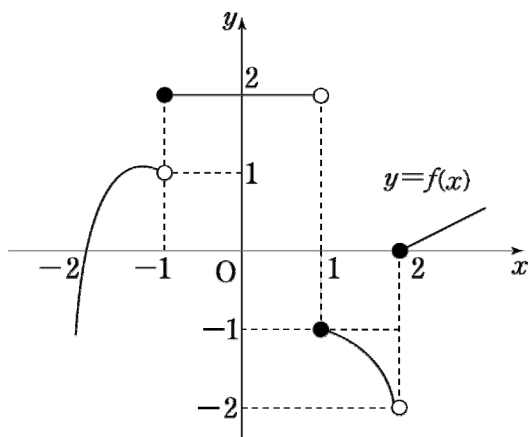
8. 두 사건 A, B 에 대하여

$$P(A^c \cup B^c) = \frac{3}{4}, P(A \cap B^c) = \frac{1}{6}$$

일 때, $P(A^c)$ 의 값은? (단, A^c 은 A 의 여사건이다.) [3점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{5}{12}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{7}{12}$

9. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ 의 값은? [3점]

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

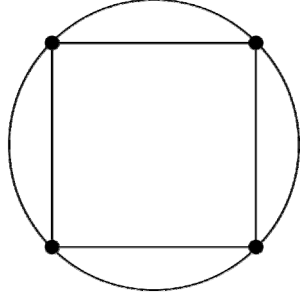
10. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P 의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 위치 x 가

$$x = t^3 - 4t^2$$

일 때, 점 P 의 시각 $t=3$ 에서의 속도는? [3점]

- ① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

11. 그림과 같이 원 위의 4개의 점을 정사각형이 되도록 연결하여 5개의 영역으로 나누었다. 서로 다른 5가지 색을 모두 사용하여 각각의 영역에 색을 칠하는 방법의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



- ① 12 ② 18 ③ 24 ④ 30 ⑤ 36

12. 어느 미술대회에 참가한 학생 32명을 대상으로 미술대회의 입상 여부를 조사한 결과는 다음과 같다.

(단위: 명)

	남학생	여학생	합계
상을 받은 학생	4	3	7
상을 못 받은 학생	16	9	25
합계	20	12	32

- 이 미술대회에 참가한 학생들 중 임의로 선택한 한 명의 학생이 여학생이었을 때, 이 학생이 상을 받았을 확률은? [3점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{5}{12}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{7}{12}$

13. 좌표평면에서 직선 $y=2x$ 와 직선 $x=3^n$ 이 만나는 점의 y 좌표를 a_n , 직선 $y=2x$ 와 직선 $y=4^n$ 이 만나는 점의 x 좌표를 b_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + b_n}{a_n - b_n}$ 의 값은? [3점]

- ① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

14. 1보다 큰 두 자연수 a, b 가

$$\log_2 ab \times \log_a 4 = 8, \quad 50 < b < 100$$

을 만족시킬 때, $a+b$ 의 값은? [4점]

- ① 60 ② 64 ③ 68 ④ 72 ⑤ 76

15. 한 개의 주사위를 6번 던져서 나온 눈의 수를 차례로

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$$

라 할 때, 부등식

$$4 \leq a_n \leq 5$$

을 만족시키는 6 이하의 자연수 n 의 개수가 2일 확률은? [4점]

- ① $\frac{76}{243}$ ② $\frac{77}{243}$ ③ $\frac{26}{81}$ ④ $\frac{79}{243}$ ⑤ $\frac{80}{243}$

16. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 닫힌 구간 $[-2, 2]$ 에서 정의된 함수

$$g(x) = (x-1)f(x)$$

의 최댓값이 $g(-1)$ 이고 최솟값은 $g(1)$ 일 때, $f(0) - f'(0)$ 의 값은? [4점]

- ① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

17. 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} \text{의 최댓값이 } 1 \text{이고, 함수 } h(x) = \frac{1}{f(x)-4} \text{이}$$

$x=1, 5$ 에서 불연속이다. $f(13)$ 의 값은? [4점]

- ① 60 ② 64 ③ 68 ④ 72 ⑤ 76

18. 숫자 0, 1, 2, 3, 4가 하나씩 적힌 공 5개가 들어있는 박스에서 한 개의 공을 꺼내어 확인한 후 다시 넣는 시행을 할 때, 좌표평면에서 원점 O에 위치한 점 $P(0, 0)$ 를 다음 조건을 만족시키도록 움직인다.

- (가) 꺼낸 공에 적힌 숫자만큼 x 축 또는 y 축의 양의 방향으로 점 P 를 움직인다.
 (나) $n \geq 4$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 점 P 의 위치가 $(n, 0)$ 이 될 때까지 x 축의 양의 방향으로만 움직이고, 점 P 의 위치가 $(n, 0)$ 이 되면 y 축의 양의 방향으로만 움직인다.

다음은 총 5번의 시행을 한 후, 점 P 가 $(4, 4)$ 에 위치할 경우의 수를 구하는 과정이다.

점 P 가 $(4, 0)$ 에 위치한 적이 있어야 총 5번의 시행이 끝난 후 점 P 가 $(4, 4)$ 에 위치할 수 있다.
 a 번의 시행 후 점 P 의 위치가 처음으로 $(4, 0)$ 이 되고,
 b 번의 시행 후 점 P 의 위치가 $(4, 4)$ 라 하면,
 $a+b=5$ 이므로 시행 횟수에 대한 순서쌍 (a, b) 로 나누어 볼 수 있다.

(i) $(a, b) = (1, 4)$ 인 경우 :
 1번의 시행 후 점 P 가 $(4, 0)$ 이 되는 경우의 수는 1이고,
 남은 4번의 시행 후 점 P 가 $(4, 4)$ 인 경우의 수는 $\boxed{\text{가}}$ 이므로 곱의 법칙에 의해 $\boxed{\text{가}}$ 이다.

(ii) $(a, b) = (2, 3)$ 인 경우 :
 2번의 시행 후 점 P 의 위치가 처음으로 $(4, 0)$ 이 되는 경우의 수와 남은 3번의 시행 후 점 P 의 위치가 $(4, 4)$ 인 경우의 수를 각각 구한 뒤 곱의 법칙을 이용하면, $\boxed{\text{나}}$ 이다.

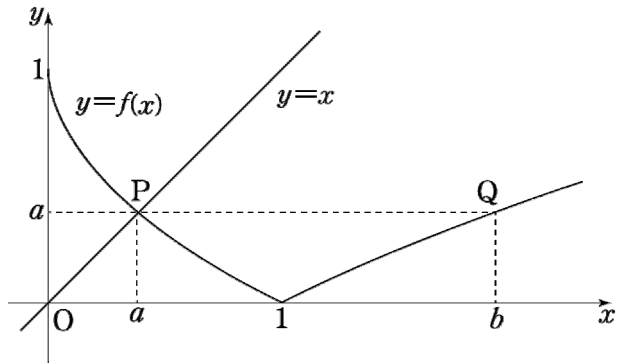
(i), (ii)와 같은 방법으로
 $(a, b) = (3, 2)$ 인 경우와 $(a, b) = (4, 1)$ 인 경우를 구하면
 \vdots
 \vdots

그러므로 총 5번의 시행을 한 후, 점 P 가 $(4, 4)$ 에 위치할 경우의 수는 합의 법칙에 의해 $\boxed{\text{다}}$ 이다.

$\boxed{\text{가}}$, $\boxed{\text{나}}$, $\boxed{\text{다}}$ 에 알맞은 수를 각각 p, q, r 이라 할 때, $p+q+r$ 의 값은? [4점]

- ① 200 ② 220 ③ 240 ④ 260 ⑤ 280

19. 그림과 같이 함수 $f(x)=|\sqrt{x}-1|$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 가 만나는 점 $P(a, a)$ 와 함수 $f(x)$ 의 그래프 위의 점 $Q(b, a)$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 0는 원점이다.) [4점]



<보 기>

ㄱ. $a < \frac{1}{2}$ 이고, $b < \frac{9}{4}$ 이다.
 ㄴ. $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 2$
 ㄷ. $\sqrt{ab} < \frac{5}{8}$

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 $A_1B_1C_1$ 이 있다.

선분 B_1C_1 의 중점을 M_1 이라 할 때, $\overline{M_1B_1} = \overline{M_1D_1}$ 인 점 D_1 에 대하여 직선 A_1B_1 과 직선 M_1D_1 이 서로 수직이고

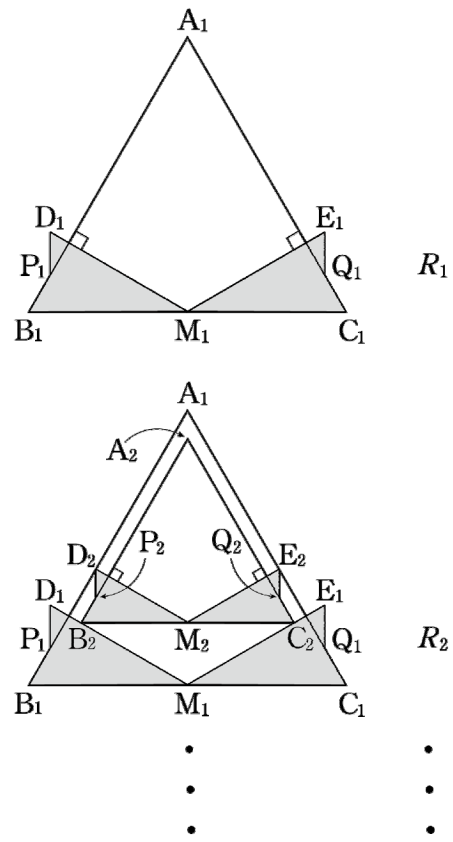
$\overline{M_1C_1} = \overline{M_1E_1}$ 인 점 E_1 에 대하여 직선 A_1C_1 과 직선 M_1E_1 이 서로 수직이다. 선분 A_1B_1 위의 점 P_1 과 선분 A_1C_1 위의 점 Q_1 에 대하여 $\angle M_1D_1P_1 = \angle M_1E_1Q_1 = 60^\circ$ 일 때, 사각형

$M_1D_1P_1B_1$ 과 사각형 $M_1C_1Q_1E_1$ 의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 두 선분 M_1D_1, M_1E_1 위에 각각 두 점 B_2, C_2 를 선분 B_1C_1 과 선분 B_2C_2 이 평행이 되도록 잡고 선분 A_1B_1 과 선분 A_2B_2 가 평행이 되도록 하는 정삼각형 $A_2B_2C_2$ 이 선분 B_2C_2 의 중점 M_2 과 선분 A_1B_1 위의 점 D_2 , 선분 A_1C_1 위의 점 E_2 에 대하여 직선 A_2B_2 과 직선 M_2D_2 이 서로 수직이고 직선 M_2E_2 과 직선 A_2C_2 가 서로 수직이 되도록 그린다. 선분 A_2B_2 위의 점 P_2 와 선분 A_2C_2 위의 점 Q_2 에 대하여

$\angle M_2D_2P_2 = \angle M_2E_2Q_2 = 60^\circ$ 일 때, 사각형 $M_2D_2P_2B_2$ 와 사각형 $M_2C_2Q_2E_2$ 의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{53-25\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{55-27\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{57-29\sqrt{3}}{2}$
 ④ $\frac{53-25\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{55}{3} - 9\sqrt{3}$

21. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 와 일차함수 $g(x)$ 에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (x \leq k) \\ g(x) & (x > k) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 방정식 $h(x) = 2x + 1$ 의 모든 실근은 3, k 이다.
 (나) 방정식 $h(h(x)) = 2h(x) + 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

$g(0) = 73$ 일 때, $h(x) = 7$ 의 모든 실근의 합은? (단, $k > 3$) [4점]

- ① 17 ② 19 ③ 21 ④ 23 ⑤ 25

단답형

22. ${}_8C_2$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. $f(x) = \frac{1}{9}x^4 + x$ 에 대하여 $f'(3)$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 6개의 수 1, 1, 2, 3, 3, 4를 모두 사용하여 만든 6자리 자연수가 짝수인 경우의 수를 구하시오. [3점]

25. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 2x^3}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$$

일 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 좌표평면에서 두 상수 a, b 에 대하여 함수 $f(x) = \frac{b(x-2)}{x-a}$ 의 그래프와 직선 $y = 3(x-a) + b$ 가 만나는 서로 다른 두 점의 x 좌표가 각각 3, 7이다. $a+b$ 의 값을 구하시오. [4점]

27. 수열 $\{a_n\}$ 이 정수 k 에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n^2} - k \right) = 2k, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5a_n - 18n^2}{2n^2 + 1} = k$$

을 만족시킨다. k^2 의 값을 구하시오. [4점]

28. 주머니에 1, 1, 1, 2, 2, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 임의로 일렬로 나열하고, 나열된 순서대로 공에 적혀 있는 수를 a, b, c 라 할 때, $a+b=c$ 일 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

29. 첫째항이 양수이고 공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{b_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \quad b_n = a_2 a_n + 9$$

(나) $100 < b_3 < 1000$ 이고, $\frac{\sqrt{b_3}}{3}$ 는 자연수이다.

자연수 k 에 대하여 $\sum_{n=1}^4 (a_n + b_n - k) = 0$ 일 때, k 의 값을 구하시오. [4점]

30. 최고차항의 계수가 정수인 사차함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$9 + f(-2) \leq 9 - |f(0)| \leq |f(x) - f(-2)|$$

을 만족시킬 때, 구간 $[-2, 1]$ 에서 함수 $|f(x)|$ 의 최댓값이 9이다. 함수 $|f(x)|$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하지 않고, 실수 전체의 집합에서 함수 $|f(x)|$ 가 미분가능하지 않은 점의 개수가 2이다. $0 < f(2) < |f(-2)|$ 일 때, $12f\left(\frac{3}{2}\right)$ 의 값을 구하시오.

[4점]

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.