이정환 X Team.GM

Subject.	Class.
수학영역	나형

Caution.

Grand Master

2020학년도 6월 평가원 대비 모의고사 해설지

<6평대비 모의고사 분석서 활용>
분석서를 활용하기 전 모의고사 문제를 반드시 100분을 재고 푸시길 바랍니다.

(1) 틀린 문항에 대해 문제 포인트에서 힌트를 얻고
유사기출문항을 풀어본 후에 다시 한번 틀린 문항을 풀어본다.

(2) 다시 풀었는데도 틀린 문항은 문제의 설계를 힌트로 삼아
마지막으로 한번 더 풀어본다.

(3) 자세한 해설을 통해 문제를 완벽하게 자신의 것으로 소화하고,
포인트부터 설계과정까지 정리한다.

Examinee Info.

Name

Examinee No. □□□□ - □□□□

수학 (나)형 정답과 해설

1	①	**2**	④	**3**	③	**4**	⑤	**5**	③
6	②	**7**	②	**8**	⑤	**9**	②	**10**	①
11	④	**12**	①	**13**	④	**14**	③	**15**	⑤
16	②	**17**	⑤	**18**	④	**19**	②	**20**	③
21	③	**22**	28	**23**	13	**24**	60	**25**	22
26	9	**27**	36	**28**	67	**29**	529	**30**	81

1. 정답) ①

해설)

$3^2+16^{\frac{1}{4}}=9+2=11$

2. 정답) ④

해설)

$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^3}{n^3-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{8n^3+12n^2+6n+1}{n^3-1}=8$

3. 정답) ③

해설)

$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 7,\ 9,\ 16\}$ 이므로 $n(A\cup B)=7$

4. 정답) ⑤

해설)

$a_1+a_3+a_5+a_7=\sum_{n=1}^{7}a_n-\sum_{n=1}^{3}a_{2n}=39-17=22$

5. 정답) ③

해설)

함수 f가 일대일 대응이므로 $f(2)=1,\ f(3)=4$ 이거나 $f(2)=4,\ f(3)=1$ 이다. $\therefore\ f(2)+f(3)=5$

6. 정답) ②

해설)

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면, $a_4=a_1+3d$

$a_1=a_4-12=a_1+3d-12$ 에서 $d=4$ 이고 $-a_2=a_3$ 이다. 즉, $-a_1-d=a_1+2d$ 이므로 $a_1=-\frac{3}{2}d=-6$ 이다.

7. 정답) ②

해설)

두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하면 $P=\{x\,|\,1\le x\le 4\}$, $Q=\{x\,|\,n-1\le x\le n+1\}$ 이다.

q가 p이기 위한 충분조건이므로 $QSUBSETP$

따라서 모든 자연수 n의 값은 $2,\ 3$ 이다. $\therefore\ 5$

8. 정답) ⑤

해설)

$\mathrm{P}(A^C\cup B^C)=1-\mathrm{P}(A\cap B)$ 이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$ 이므로

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$

9. 정답) ②

해설)

$\lim_{x\to-1+}f(x)+\lim_{x\to2-}f(x)=2+(-2)=0$

10. 정답) ①

해설)

$\frac{dx}{dt}=3t^2-8t$ 이므로 $t=3$ 에서의 속도는 $27-24=3$

11. 정답) ④

해설)

가운데 정사각형에 먼저 색을 칠하고 나머지 네 영역에 네 가지 색으로 원순열을 하면 된다.

$\therefore\ {}_5\mathrm{C}_1\times(4-1)!=5\times6=30$

진짜 공부는 지금부터
대성마이맥

12. 정답) ①

해설)

학생들 중 한 명을 선택할 때 여학생인 사건을 A, 상을 받은 학생일 사건을 B라 하자. 임의로 선택한 한 명의 학생이 여학생이었을 때, 이 학생이 상을 받았을 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{3}{32}}{\frac{12}{32}}=\frac{1}{4}$$

13. 정답) ④

해설)

직선 $y=2x$와 직선 $x=3^n$이 만나는 점의 좌표는 $(3^n,\ 2\times3^n)$이므로 $a_n=2\times3^n$

직선 $y=2x$와 직선 $y=4^n$이 만나는 점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}\times4^n,\ 4^n\right)$이므로 $b_n=\frac{1}{2}\times4^n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{a_n-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times3^n+\frac{1}{2}\times4^n}{2\times3^n-\frac{1}{2}\times4^n}=-1$$

14. 정답) ③

해설)

$\log_2 ab\times\log_a 4=\log_a ab\times\log_2 4=2(1+\log_a b)=8$

이므로 $\log_a b=3$이다. $\Rightarrow\ a^3=b$

$50<b<100$ 이므로 $a=4$, $b=64$이고, $a+b=68$이다.

15. 정답) ⑤

해설)

주사위를 한 번 던지는 시행에서 부등식 $4\le a_n\le5$을 만족시키는 주사위의 눈의 수가 나오는 사건을 A라 하자. 문제에서 원하는 상황은 6회의 독립시행에서 사건 A가 2회, 사건 A^C가 4회 발생하는 상황이다.

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ 이므로 ${}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{15\times16}{3^6}=\frac{80}{243}$

16. 정답) ②

<POINT>

미분가능한 함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 경우

❶ 극댓값

❷ 극솟값

❸ 경계에서의 함숫값

⇨ 위 세 개의 함숫값에서 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

⇨ 이 문제의 경우 구간의 경계에서 최댓값과 최솟값을 갖지 않기 때문에 극대/극소를 생각해야 한다.

<COMMENT & PLAN>

전형적인 문제이다. 최대/최소 정보를 보고 $x=-1, x=1$에서 극대와 극소를 갖는다는 걸 알아차리고 $g'(-1)=g'(1)=0$으로 문제해결을 시작한다.

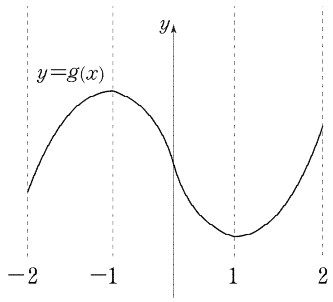
(설계1)

$g'(-1)=g'(1)=0$로 $f(x)$를 결정한다.

(설계2) 묻는 값을 바로 직접 구해도 관계는 없지만, 함수를 결정하는 거 까지 계산훈련을 하자.

해설)

$g(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 닫힌 구간 $[-2,\ 2]$에서 최댓값 $g(-1)$을 가지고, 최솟값 $g(1)$을 가지므로 다음 그림과 같이 함수 $g(x)$가 $x=\pm1$에서 극값을 갖는다.



즉, $g'(1)=g'(-1)=0$이므로

$g'(x)=3(x-1)(x+1)=f(x)+(x-1)f'(x)$이고,

$x=0$을 대입하면, $g'(0)=-3=f(0)-f'(0)$이다.

진짜 공부는 지금부터
대성마이맥

<풀어보면 좋을 기출 문항>
[2015학년도 A형 수능 29번]
두 다항함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=(x^2+2)f(x)$를 만족시킨다. $g(x)$가 $x=1$에서 극솟값 24를 가질 때, $f(1)-f'(1)$의 값을 구하시오.

정답 : 16

17. 정답) ⑤
<POINT>
(1) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이다.
⇨ $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$으로 정의되어 있지만 문제 발문에 연속조건이 나온다면 실전에서 사용하기 위해 다음과 같이 알고 활용할 수 있어야 한다.
❶ 극한값을 이용하여 함숫값을 구할 수 있다.
❷ 함숫값을 이용하여 극한값을 구할 수 있다.

(2) 함수가 실수전체에서 연속이나 혹은 미분가능하다의 조건에 등장하면 결국 주어진 함수는 실수전체에서 정의되어야 한다. 따라서 분수함수와 무리함수의 경우 정의될 조건에 대해 예민하게 반응하자.
❶ 분수함수 ⇨ 분모$\neq 0$
❷ 무리함수 ⇨ $\sqrt{\ }$안의 식≥ 0

<COMMENT & PLAN>
과거에 28번으로 출제되었던 문제이다. 개념이 문제에 적용이 되는 건 어렵지 않지만 조건을 디테일하게 읽어 나가는 것과 연속함수의 성질에 대해서 다시 한 번 공부를 하는 계기로 생각하자.

(설계1)
$h(x)=\dfrac{1}{f(x)-4}$가 $x=1,5$에서 불연속인 경우는 연속함수 성질에 의해서 분모$=0$이 될 때임을 알아차린다. $f(1)=f(5)=4$

(설계2)
$g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$의 최댓값이 1인 조건은 $f(x)$가 최소가 되는 순간 $g(x)$가 최대가 되므로 언제 최소인지 찾아서 $f(x)$를 (설계1)에서 찾은 정보까지 이용해 결정한다.

해설)
함수 $h(x)$가 $x=1,\ 5$에서 불연속이므로 이차함수 $f(x)-4=a(x-1)(x-5)$이다. (단, $a\neq 0$)
그러므로 $f(x)=a(x-1)(x-5)+4$
실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)$가 연속이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$ 또는 $f(x)<0$인데, $g(x)$의 최댓값이 1이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이고, $f(x)$의 최솟값은 1이다. $f(x)$는 $x=3$에서 최솟값을 가지므로 $f(3)=-4a+4=1$이다. ⇒ $a=\dfrac{3}{4}$, $f(x)=\dfrac{3}{4}(x-1)(x-5)+4$이고, $f(13)=72+4=76$이다.

<풀어보면 좋을 기출 문항①>
[2019학년도 나형 6월 평가원 28번]
이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $\dfrac{x}{f(x)}$는 $x=1,\ x=2$에서 불연속이다.
(나) $\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=4$

$f(4)$의 값을 구하시오.

정답 : 24

[2019학년도 나형 수능 21번]
최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x)=x(x+3)$이다.
(나) $g(0)=1$

$f(1)$이 자연수일 때, $g(2)$의 최솟값은?

① $\dfrac{5}{13}$ ② $\dfrac{5}{14}$ ③ $\dfrac{1}{3}$
④ $\dfrac{5}{16}$ ⑤ $\dfrac{5}{17}$

18. 정답) ④

<POINT>

(1) 부정방정식이 작성된다면 경우의 수를 구할 때 중복조합을 적극적으로 이용한다.

(2) 확률과 통계의 박스형 문제의 경우 서술된 설명을 잘 이해해가며 문제를 해결한다.

<COMMENT & PLAN>

과거 수열의 박스형 문제는 식의 전후만 보고도 답을 구할 수 있는 경우가 있었지만 근래 출제되는 확률과 통계 문제의 경우 서술된 내용의 이해를 잘 이해해야 문제가 해결되므로 문제처음부터 차분차분 읽어가며 문제를 해결한다.

해설)

5번의 시행에서 나오는 공의 숫자를 각각 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5$라 하면, 5 이하의 자연수 k에 대하여 $0 \le x_k \le 4$이다.

즉, a번의 시행 후에 점 P는 처음으로 $(4,\ 0)$에 위치하고, b번의 시행 후에 점 P는 $(4,\ 4)$에 있다.

(1) $(a,\ b)=(1,\ 4)$인 경우

$x_1=4$이고 $x_2+x_3+x_4+x_5=4$이다.

$\Rightarrow$ $\boxed{(가)}=p=1\times{}_4\mathrm{H}_4={}_7\mathrm{C}_4=35$

(2) $(a,\ b)=(2,\ 3)$인 경우 :

$x_1+x_2=4$, $x_2\neq 0$이고 $x_3+x_4+x_5=4$이다.

$\Rightarrow$ $\boxed{(나)}=q=({}_2\mathrm{H}_4-1)\times{}_3\mathrm{H}_4=({}_5\mathrm{C}_4-1)\times{}_6\mathrm{C}_4=60$

(3) $(a,\ b)=(3,\ 2)$인 경우:

$x_1+x_2+x_3=4$, $x_3\neq 0$이고 $x_4+x_5=4$이다.

그러므로 $({}_3\mathrm{H}_4-{}_2\mathrm{H}_4)\times{}_2\mathrm{H}_4=({}_6\mathrm{C}_4-{}_5\mathrm{C}_4)\times{}_5\mathrm{C}_4=50$

(4) $(a,\ b)=(4,\ 1)$인 경우

$x_1+x_2+x_3+x_4=4$, $x_4\neq 0$이고 $x_5=4$이다.

그러므로 $({}_4\mathrm{H}_4-{}_3\mathrm{H}_4)\times 1=({}_7\mathrm{C}_4-{}_6\mathrm{C}_4)\times 1=20$

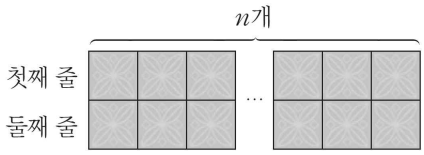
$\Rightarrow$ $\boxed{(다)}=r=35+60+50+20=165$

$\therefore\ p+q+r=35+60+165=260$

<풀어보면 좋을 기출문항>

[2017학년도 3월 교육청]

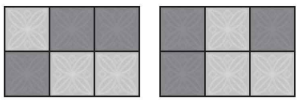
그림과 같이 가로로 n개, 세로로 2개씩 총 $2n$개의 크기가 같은 정사각형 모양의 타일을 이어 붙인다.



이 타일 중에서 3개를 골라 검은색으로 칠하되, 검은색으로 칠한 타일이 서로 이어 붙지 않게 하려고 한다. 다음은 검은색으로 칠한 타일이 이어 붙지 않은 경우와 이어 붙은 경우의 한 예이다.

이어 붙지 않은 경우:

이어 붙은 경우:



다음은 $n\ge 6$일 때, 검은색으로 칠할 타일 3개를 고르는 경우의 수 $S(n)$을 구하는 과정이다.

> 첫째 줄에 있는 타일 중 검은색으로 칠할 타일의 개수를 $k(k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$라 하면
>
> (ⅰ) $k=0$일 때, 둘째 줄에 있는 n개의 타일 중에서 검은색으로 칠할 타일 3개를 고르는 경우의 수는 $\boxed{(가)}$이다.
>
> (ⅱ) $k=1$일 때, 둘째 줄에 있는 n개의 타일 중에서 검은색으로 칠할 타일 2개를 고르는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_{n-3}$이고, 첫째 줄에서 검은색으로 칠할 타일 1개를 고르는 경우의 수는 $\boxed{(나)}$이므로, 검은색으로 칠할 타일 3개를 고르는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_{n-3}\times\boxed{(나)}$이다.
>
> (ⅲ) $k=2$일 때, (ⅱ)와 같은 방법으로 구할 수 있다.
>
> (ⅳ) $k=3$일 때, (ⅰ)과 같은 방법으로 구할 수 있다.
>
> 따라서 $S(n)=\dfrac{2(n-2)(2n^2-8n+9)}{3}$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(10)+g(8)$의 값은? (4점)

① 60　　② 61　　③ 62

진짜 공부는 지금부터 대성마이맥

④ 63 ⑤ 64

[2018학년도 10월 교육청]

다음은 4 이상의 자연수 n에 대하여 등식

$$a \times b \times c \times d = 2^n \times 3^n$$

을 만족시키는 2 이상의 자연수 a, b, c, d의 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$ 중에서 $a+b+c+d$가 짝수가 되도록 하는 모든 순서쌍의 개수를 구하는 과정이다.

> $a = 2^{x_1} \times 3^{y_1}$, $b = 2^{x_2} \times 3^{y_2}$, $c = 2^{x_3} \times 3^{y_3}$, $d = 2^{x_4} \times 3^{y_4}$이라 하면
> $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$, $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = n$
> (단, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$에 대하여 x_i, y_i는 음이 아닌 정수)이다. 이때, $a+b+c+d$가 짝수이므로 a, b, c, d가 모두 짝수이거나 a, b, c, d에서 2개만 짝수이다.
> (ⅰ) a, b, c, d가 모두 짝수인 경우
> x_1, x_2, x_3, x_4가 모두 자연수이고 y_1, y_2, y_3, y_4는 음이 아닌 정수이므로 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)$의 개수는
> ${}_4\mathrm{H}_{\boxed{(가)}} \times {}_4\mathrm{H}_n$ …㉠
> (ⅱ) a, b, c, d중에서 2개만 짝수인 경우
> x_1, x_2, x_3, x_4 중에서 자연수가 2개이고 0이 2개이므로 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$의 개수는
> ${}_4\mathrm{C}_2 \times \boxed{(나)}$
> 이다. 이때 a, b, c, d 중 홀수인 두 수는 1이 될 수 없으므로 순서쌍 $(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)$의 개수는
> ${}_4\mathrm{H}_{\boxed{(다)}}$
> 이다. 따라서 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)$의 개수는
> ${}_4\mathrm{C}_2 \times \boxed{(나)} \times {}_4\mathrm{H}_{\boxed{(다)}}$ …㉡
> (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는 ㉠+㉡이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$이라 할 때, $f(6)+h(7)+h(8)$의 값은?

① 13 ② 14 ③ 15
④ 16 ⑤ 17

19. 정답) ②

<POINT>

(1) 유리함수, 무리함수, 다항함수의 교점을 찾는 경우 식을 계속 변형, 정리해가며 방정식을 해결할 수는 있지만 식이 복잡한 경우가 많아서 막연히 계산을 하는 것 보다 문제가 묻는 거에 맞게 계산하는 것이 중요하다.

(2) 절댓값이 등장하면 절댓값 안의 식이 0이 되는 x를 기준으로 나누어 절댓값을 없애고 문제풀이를 시작한다.

**** $y = |f(x)|$의 경우 ⇨ $y = \begin{cases} f(x) & (f(x) > 0) \\ -f(x) & (f(x) < 0) \end{cases}$**

<COMMENT & PLAN>

자칫 잘못하면 계산이 많음을 느끼고 문제를 풀 때 계산 때문에 많은 시간낭비를 할 수 있지만 보기 ㄱ 자체가 정확한 값을 구하는 게 아니라 대소비교 임을 인식하고 계산 량을 줄일 수 있어야 한다. ㄴ과 ㄷ의 경우 문제에 맞게 식 변형.

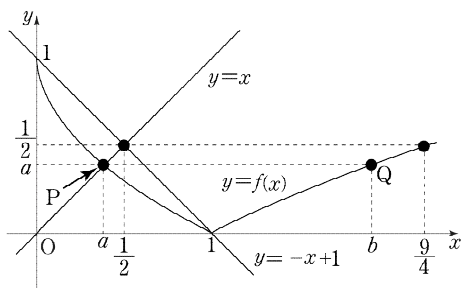
(설계1)

무리함수의 절편이 특이하므로 $y=x$와의 관계를 생각해가며 $\frac{1}{2}$를 끌어낸다.

(설계2)

합답형 문제이므로 보기의 참 거짓을 이용해 문제에서 묻는 식에 맞게 식을 변형 정리 할 수 있어야한다.

해설)



ㄱ. (참)

곡선 $y = 1 - \sqrt{x}$ 와 직선 $y = x$가 만나는 점의 좌표가 $(a,\ a)$ 이고, 곡선 $y = f(x)$ 의 x 절편과

진짜 공부는 지금부터 대성마이맥

y절편이 각각 $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$이다.

두 점 $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은 $y=-x+1$인데, 직선 $y=-x+1$과 직선 $y=x$이 만나는 점의 좌표가 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$이므로 그림을 통해 $a<\frac{1}{2}$임을 알 수 있다.

$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$을 지나고 x축에 평행한 직선이 $y=\sqrt{x}-1$과 만나는 점의 x좌표는 방정식 $\frac{1}{2}=\sqrt{x}-1$의 실근이므로 $x=\frac{9}{4}$이다. 그림을 통해 $b<\frac{9}{4}$임을 알 수 있다.

ㄴ. (참)
$a=1-\sqrt{a}$이고,
$a=\sqrt{b}-1$이므로 연립하면, $\sqrt{a}+\sqrt{b}=2$이다.

ㄷ. (거짓)
$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}=4$이고,
(ㄱ)에서 $a<\frac{1}{2}$, $b<\frac{9}{4}$이므로
$2\sqrt{ab}=4-a-b>4-\frac{1}{2}-\frac{9}{4}=\frac{5}{4}$ 이다.
그러므로 $\sqrt{ab}>\frac{5}{8}$ 이다.

<풀어보면 좋을 기출문항>
[2011학년도 11월 교육청 20번(고1)]

꼭짓점의 좌표가 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{9}{2}\right)$인 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 그래프가 점 $(0,\ 4)$를 지날 때, 무리함수 $g(x)=a\sqrt{x+b}+c$에 대하여 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 정의역은 $\{x\,|\,x\geq-2\}$이고 치역은 $\{y\,|\,y\leq4\}$이다.
ㄴ. 함수 $y=g(x)$의 그래프는 제3사분면을 지난다.
ㄷ. 방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 할 때, $\alpha\leq x\leq\beta$에서 함수 $g(x)$의 최댓값은 2이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답 ③

20. 정답) ③
<POINT>
(1)도형+급수의 문제는 등비급수 활용이다.
⇨ $S=\frac{\text{첫째항}}{\text{개수공비}\times\text{양의 비율}}$ (단. 여기서 양은 길이의 비율 또는 넓이의 비율처럼 문제에서 묻는 양의 비율이다.)

(2) 양의 비율을 찾을 때는 닮음을 이용해서 구한다.
❶ 닮음비 = 길이 비 ❷ (닮음비)^2 = 넓이 비

<COMMENT & PLAN>
전형적으로 거의 항상 출제되는 문제이다. 공식을 몰라서 문제를 해결하지 못하는 경우는 드물고 도형 분석을 못해서 문제 해결을 못하는 경우가 많다. 이런 스타일의 문제는 길이와 각을 가지고 문제를 해결하기 때문에 주어진 도형에 길이와 각을 하나씩 체크해가며 문제를 해결한다.

(설계1)
첫째항의 넓이를 구하기 위해 M_1에서 A_1B_1의 수선의 발을 내려 H_1이라 하면 M_1H_1의 길이, 즉 수선의 길이를 구한다. 그리고 밑변의 길이를 구한다.

(설계2)
$D_1P_1H_1$의 넓이를 구해 첫째 항 구하는 것을 마무리한다.

(설계3)
닮음비를 구하기 위해 닮음비를 구해야 하는 선분의 길이를 미지수로 설정하여 길이에 대한 방정식을 세운다.

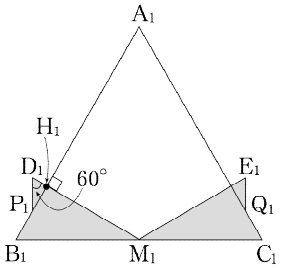
(설계4)
급수 공식에 대입해서 실수 없이 계산!

해설)
사각형 $M_nD_nP_nB_n$과 사각형 $M_nC_nQ_nE_n$의 넓이의 합을 a_n이라 하면, 그림 R_n에 그려진 도형의 넓이가 S_n이므로 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$이다. 이때, R_n에 새로 그려

진짜 공부는 지금부터 대성마이맥

지는 도형이 R_1에 그려진 도형과 닮음이므로 a_n은 등비수열이다.

ⅰ) 초항



선분 M_1D_1과 선분 A_1B_1이 만나는 점을 H_1, $\overline{D_1H_1}=l$이라 하자. 사각형 $M_1D_1P_1B_1$과 사각형 $M_1C_1Q_1E_1$이 합동이므로 삼각형 $M_1H_1B_1$의 넓이와 삼각형 $H_1D_1P_1$의 넓이의 합의 2배가 a_1이다.

직각삼각형의 길이비를 이용하면

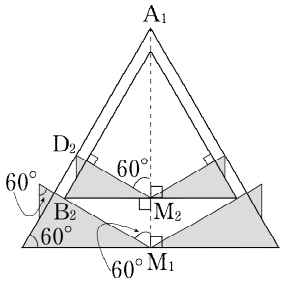
$\overline{M_1H_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\overline{M_1B_1}=\sqrt{3}$ 이고

$\overline{M_1D_1}=\overline{M_1H_1}+\overline{D_1H_1}=l+\sqrt{3}=2$ 이므로

$l=2-\sqrt{3}$ 이다.

$$a_1=\left(\frac{1}{2}\times\overline{B_1H_1}\times\overline{M_1H_1}+\frac{1}{2}\times\overline{D_1H_1}\times\overline{P_1H_1}\right)\times 2$$
$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}l\times\sqrt{3}l\right)\times 2$$
$$=8\sqrt{3}-12$$

ⅱ) 공비



$\overline{M_2B_2}=\overline{M_2D_2}=k$라 하면, a_n의 공비는

$\left(\frac{\overline{M_2B_2}}{\overline{M_1B_1}}\right)^2=\left(\frac{k}{2}\right)^2$이고, $\overline{M_1M_2}=\frac{k}{\sqrt{3}}$, 삼각형 $A_1D_2M_2$에서 $\overline{A_1M_2}=2k$이다. $\overline{A_1M_1}=2\sqrt{3}$ 이므로

$\frac{k}{\sqrt{3}}+2k=2\sqrt{3}$ 이고 이를 정리하면,

$k=\frac{2\sqrt{3}}{\left(2+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}=\frac{6}{2\sqrt{3}+1}$ 이다.

그러므로 공비는 $\left(\frac{k}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2\sqrt{3}+1}\right)^2=\frac{9}{13+4\sqrt{3}}$

이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{8\sqrt{3}-12}{1-\frac{9}{13+4\sqrt{3}}}=\frac{14\sqrt{3}-15}{\sqrt{3}+1}=\frac{57-29\sqrt{3}}{2}$$

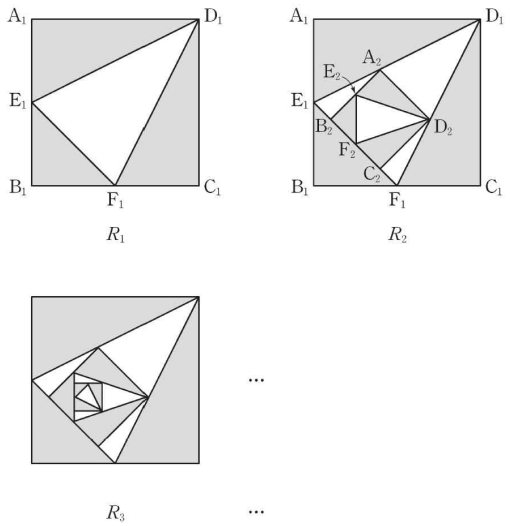
<풀어보면 좋을 기출문항>

[2017학년도 나형 6월 평가원 17번]

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 선분 A_1B_1과 선분 B_1C_1의 중점을 각각 E_1, F_1이라 하자. 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부와 삼각형 $E_1F_1D_1$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 D_1E_1 위의 점 A_2, 선분 D_1F_1 위의 점 D_2와 선분 E_1F_1 위의 두 점 B_2, C_2를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 삼각형 $E_2F_2D_2$를 그리고 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 내부와 삼각형 $E_2F_2D_2$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?



진짜 공부는 지금부터
대성마이맥

① $\frac{125}{37}$ ② $\frac{125}{38}$ ③ $\frac{125}{39}$
④ $\frac{25}{8}$ ⑤ $\frac{125}{41}$

정답 ⑤

21. 정답) ③
<POINT>
(1) 합성함수의 방정식은 대응관계를 이용해서 접근하는 게 쉽다.

(2) 1,2차 방정식을 제외한 실근의 개수는 교점의 개수로 인식할 수 있어야 한다.

(3) 함수를 결정해야 하는 경우 결정조건을 찾아가며 함수를 결정한다.

<COMMMENT & PLAN>
요즘 트렌드인 합성함수 방정식에 관련된 문제이다. 개념을 씹다와 주제를 알라에서 합성함수 방정식 해결에 대해 자세히 수업을 해놨으니 공부를 잘 한 친구라면 (가)(나) 에 정보를 처리하기가 수월했을 것으로 판단된다. 스타일 마다 해결 방법이 있으니 불안하지 않게 미리 정리해두자.

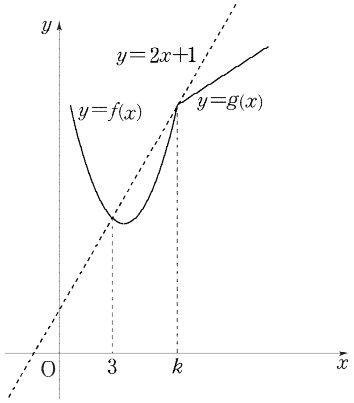
(설계1)
그래프 개형을 그려 (가) 조건을 만족하는 상황을 대략적이라고 발견한다.

(설계2)
(나) 조건에서 $h(x)$가 반복해서 등장하기 때문에 치환을 하면 (가)를 이용할 수 있게 된다.

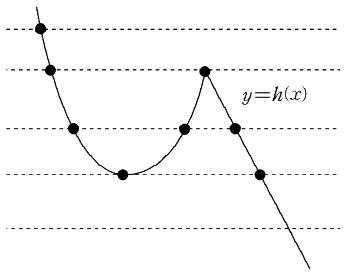
(설계3) 위에서 케이스에 따른 $f(x)$를 결정조건을 발견하고 $f(x)$를 식으로 나타낸다.

(설계4) 해결과정에서 $g(x)$에 대한 정보가 나오니 그걸 이용해 $g(x)$식도 작성한다.

해설)
$x \le k$에서 $h(x)=f(x)$이고 $3<k$이므로 (가)로부터 $3,\ k$는 $f(x)=2x+1$의 두 근이라 볼 수 있다.
$\Rightarrow f(3)=7,\ f(k)=2k+1$
(나)에서 $h(x)=t$라 하면 $h(t)=2t+1$인데,
(가)에 의하여 t의 모든 실근은 $3,\ k$이다.
즉, $h(x)=3$또는 $h(x)=k$를 만족시키는 모든 x값의 개수는 5이다. 이것은 일차함수 $g(x)$의 기울기에 따라 상황을 나누어 살펴볼 수 있다.



① 일차함수 $g(x)$의 기울기가 2가 아닌 양수일 때
$h(x)=3$과 $h(x)=k$의 근의 개수가 각각 최대 2개씩이므로 $h(h(x))=2h(x)+1$의 근의 개수는 최대 4개이다. : 모순
② $g(x)$의 기울기가 2일 때
$h(x)=2x+1$는 무수히 많은 실근을 갖는다. : 모순
$\therefore$ $g(x)$의 기울기는 음수



곡선 $y=h(x)$의 개형을 통해 $h(x)=c$(c는 상수)의 근의 개수는 1부터 3까지 가능함을 알 수 있다.
즉, $h(x)=3$와 $h(x)=k$의 근의 개수는 각각 $2,\ 3$이거나 $3,\ 2$여야 한다.
여기서 $h(x)=c$의 근의 개수가 2인 c의 값은 c가 $f(x)$의 최솟값일 때와 $c=2k+1$일 때의 두 가지이다.

① $h(x)=k$의 근의 개수가 2일 때
$h(x)=3$의 근의 개수는 3이므로 $h(x)$의 개형으로

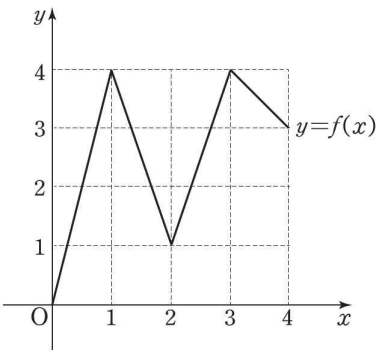
진짜 공부는 지금부터 대성마이맥

부터 ($f(x)$의 최솟값)$<3<k$임을 알 수 있다. 즉, $k\neq$($f(x)$의 최솟값)이므로
$k=2k+1 \Rightarrow k=-1$: 모순

② $h(x)=3$의 근의 개수가 2일 때
$h(x)=k$의 근의 개수는 3이므로 $h(x)$의 개형으로부터 $3=$($f(x)$의 최솟값) 이다. 따라서 $f(x)=(x-a)^2+3$

이때 $f(3)=7$이므로 $a=1$ 또는 5이다.
$a=1$이면 $h(x)=2x+1$의 두 근이 $1,\ 3$이므로 (가)조건을 만족시키지 않는다.
따라서 $a=5$이고 $f(x)=(x-5)^2+3$이다.
또한 $x=k$가 방정식 $f(x)=2x+1$의 근이므로 $k=9$이다.
$g(x)=b(x-9)+19$에서 $g(0)=73$이므로 $b=-6$이다.
따라서 $h(x)=7$의 실근은 $x=3,\ 7,\ 11$이고
그 합은 21

<풀어보면 좋을 기출문항>
[2018학년도 나형 수능 21번]
그림과 같이 닫힌 구간 $[0,4]$에서 정의된 함수 $f(x)$의 그래프는 점 $(0,0)$, $(1,4)$, $(2,1)$, $(3,4)$, $(4,3)$을 이 순서대로 선분으로 연결한 것과 같다.



다음 조건을 만족시키는 집합 $X=\{a,b\}$의 개수는? (단, $0\le a<b\le 4$)

X에서 X로의 함수 $g(x)=f(f(x))$가 존재하고 $g(a)=f(a)$, $g(b)=f(b)$를 만족시킨다.

① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

정답 ②

22. 정답) 28
해설)
${}_8C_2=\dfrac{8\times7}{2\times1}=28$

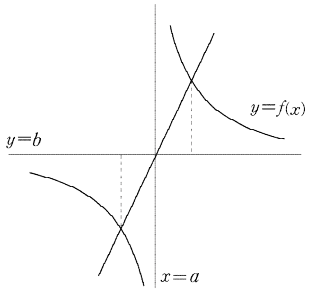
23. 정답) 13
해설)
$f'(x)=\dfrac{4}{9}x^3+1$이므로 $f'(3)=12+1=13$

24. 정답) 60
해설)
짝수인 자연수를 만들기 위해 6자리 자연수에서 일의 자리부터 배치하고 나머지 남은 다섯 자리를 채워 넣어 볼 수 있다.
일의 자리에 올 수 있는 숫자는 2와 4의 두 가지이고 각각의 상황에서 나머지 다섯 숫자의 배열은 $a,\ a,\ b,\ b,\ c$를 배열하는 상황이므로
$2\times\dfrac{5!}{2!\times2!\times1!}=60$ (가지)

25. 정답) 22
해설)
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-2x^3}{x+1}=3$에서 극한이 수렴하므로 분모와 분자의 차수가 같다. 즉, $f(x)-2x^3$은 최고차항의 계수가 3인 일차함수이다. $f(x)-2x^3=3x+k$임을 알 수 있고 따라서 $f(x)=2x^3+3x+k$이다.
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=3$에서 극한이 수렴하는데
(분모)$\to0$ 이므로 (분자)$\to0$이다. $\Rightarrow k=0$
$f(x)=2x^3+3x$이므로 $f(2)=22$이다.

26. 정답) 9
해설)
함수 $f(x)$의 두 점근선은 $x=a,\ y=b$이고 ,
직선 $y=3(x-a)+b$은 기울기가 3이고 $(a,\ b)$를 지나는 직선으로 이것을 그래프로 그리면 다음과 같다.

진짜 공부는 지금부터 대성마이맥



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3(x-a)+b$ 모두 $(a,\ b)$에 대하여 대칭인 함수이므로 이 두 함수의 교점 또한 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이다. 그런데 두 교점의 x좌표가 각각 3, 7이므로 $a=5$이다.

$x=7$이 방정식 $\dfrac{b(x-2)}{x-5}=3(x-5)+b$의 근이므로 대입하여 정리하면 $\dfrac{5}{2}b=b+6 \Rightarrow b=4$이다.

$\therefore a+b=9$

27. 정답) 36

해설)

급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n^2}-k\right)$이 수렴하므로 급수의 수렴조건에 의하여

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n^2}-k\right)=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=k$이다.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5a_n-18n^2}{2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5\frac{a_n}{n^2}-18}{2+\frac{1}{n^2}}=\frac{5k-18}{2}=k$이므로

$k=6$이다. $\therefore\ k^2=36$

28. 정답) 67

해설)

총 6개의 공이 들어있는 주머니에서 3개의 공을 뽑아 나열한 순서대로 a, b, c라 할 때, $a+b=c$일 확률은 총 6개의 공이 들어있는 주머니에서 1개씩 공을 3번 뽑아서 나온 수를 차례로 a, b, c라 할 때, $a+b=c$일 확률을 구하는것과 같다.

나열한 세 수로 $a+b=c$을 만족시켜야 하므로 가능한 세 수의 조합은 ① $1+1=2$ ② $2+2=4$ 의 두 가지 조합이 가능하다.

① $1+1=2$일 때

6개의 공 중에 1을 꺼내고, 5개의 공 중에 1을 꺼내고 4개의 공 중에 2를 꺼낼 확률이므로

$\dfrac{3}{6}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{10}$

② $2+2=4$일 때

6개의 공 중에 2을 꺼내고, 5개의 공 중에 2을 꺼내고 4개의 공 중에 4를 꺼낼 확률이므로

$\dfrac{2}{6}\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{60}$

따라서 문제에서 구하는 확률은 $\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{60}=\dfrac{7}{60}$

$\Rightarrow p+q=60+7=67$

29. 정답) 529

<POINT>

(1) 등비수열의 첫째항이 a_1이고 공비가 r이면

⇨ $a_n=a_1\times r^{n-1}$

(2) 문제에서 자연수 조건이 나오면 겁먹을 부분이 아니고 정말 조건 그대로 자연수가 되는 상황을 표현하면 된다. 조건에 예민하게 반응하자.

⇨ $\sqrt{a}$가 자연수라면 $a=m^2$의 형태

<COMMENT & PLAN>

누구나 잘 아는 등비수열에 관련된 문제이다. 하지만 조건(나)를 까다롭게 생각할 수 있으나 자연수 조건이기 때문에 겁먹지는 말고 조건의 식을 나타내어 자연수가 되기 위한 조건을 생각한다.

2019 수능 29번에 수열이 나왔기 때문에 내용을 어렵게 공부하는 것 보다 교과 기본 개념 + 조건해석에 포커스를 맞춰 공부하자.

(설계1)

a_n의 일반항 작성 ⇨ b_n의 일반항 작성

(설계2)

(설계1)에서 구한 식을 (나)조건에 대입해가며 새로운 조건식을 작성

(설계3)

구하라는 값 또한 자연수이고 그 식이 문제의 맨

마지막 물음에 있고, $\sum_{n=1}^{4}(a_n+b_n)=4k$ 로 k에 대해 식을 나타내서 k값을 계산한다.
-등비수열이기 때문에 숫자가 커질 수 있으니 계산에 유의하자.

해설)
$a_{n+1}=3a_n$ 이므로 $a_n=a_1\times 3^{n-1}$이고,
$b_n=a_2a_n+9=a_1\times a_1\times 3\times 3^{n-1}+9$ 이다.
$b_3=a_1\times a_1\times 3^3+9=9(3a_1\times a_1+1)<1000$ 이고,
$\sqrt{b_3}=3\sqrt{3(a_1)^2+1}$ 이고 $\frac{\sqrt{b_3}}{3}$ 는 자연수이므로 어떤 자연수 m에 대하여 $3(a_1)^2+1=m^2$이라 할 수 있다.
그러므로 $10<3m\le 31<10\sqrt{10}$ 이고 가능한 m의 값은 $4,\ 5,\ \cdots\ ,\ 10$이다.
이때, $\sum_{n=1}^{4}(a_n+b_n-k)=0$에서
$\sum_{n=1}^{4}(a_n+b_n)=4k=$(자연수) 이다. 이 식의 좌변을 정리해보면

$$\sum_{n=1}^{4}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{4}\left(a_1\times 3^{n-1}+(a_1)^2\times 3^n+9\right)$$
$$=120(a_1)^2+40a_1+36=4k$$

$\Rightarrow\ 30(a_1)^2+10a_1+9=k$
여기서 k가 자연수이므로 $30(a_1)^2+10a_1+9$ 또한 자연수여야 한다.
$3(a_1)^2+1=m^2$이었으므로 $a_1=\sqrt{\frac{m^2-1}{3}}$ 이고
주어진 m의 값들 중 $30(a_1)^2+10a_1+9$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 m의 값은 7로 유일하다.
$\Rightarrow\ m=7,\ a_1=4$
$\Rightarrow\ a_n=4\times 3^{n-1},\ b_n=48\times 3^{n-1}+9$
$a_n+b_n=52\times 3^{n-1}+9$ 이므로
$\sum_{n=1}^{4}(a_n+b_n)=52\left(\frac{3^4-1}{3-1}\right)+36=52\times 40+36=4k$ 이다.
그러므로 $k=529$ 이다.

<풀어보면 좋을 기출문항>
[2018학년도 나형 9월 평가원 19번]
두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 $a_1=a_2=1$, $b_1=k$이고,
모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=(a_{n+1})^2-(a_n)^2,$$

$b_{n+1}=a_n-b_n+n$
을 만족시킨다. $b_{20}=14$일 때, k의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

정답 ①

[2019학년도 나형 수능 29번]
첫째항이 자연수이고 공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$과 첫째항이 자연수이고 공비가 음의 정수인 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_7+b_7의 값을 구하시오.

(가) $\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=27$
(나) $\sum_{n=1}^{5}(a_n+|b_n|)=67$
(다) $\sum_{n=1}^{5}(|a_n|+|b_n|)=81$

정답 117

30. 정답) 81
<POINT>
(1) 항등식을 다루는 방법은 수치대입, 계수비교, 미분 정도의 방법이 있다.

(2) 함수 $|f(x)-a|$의 미분가능성
❶ 함수 $f(x)$가 미분 가능한 경우
⇨ $f(x)-a=0$인 x에서 $f'(x)=0$이면 미분가능, $f'(x)\neq 0$이면 미분 불가능

❷ 함수 $f(x)$가 미분 불가능한 경우
⇨ $f(x)-a=0$인 x에서 $f'(x)=0$이면 미분가능,

진짜 공부는 지금부터 대성마이맥

$f'(x) \neq 0$이면 미분 불가능 + 원래 함수 $f(x)$가 미분 불가능한 x에서도 함수 $|f(x)-a|$는 미분 불가.

<COMMENT & PLAN>

항등식 처리가 낯선 경우는 첫 부등식 조건 처리가 만만치 않을 것이다. 이 문제를 통해 조건 처리 방법을 배워야 한다. 나머지 조건들은 미분가능성에 대한 조건이므로 지금까지 기출에서 많이 등장했기 때문에 기출공부를 제대로 한 친구라면 어렵지 않게 해석할 수 있을 것이다. 조건을 해석해서 결정조건을 찾고 모순이 생기지 않는 함수를 찾아서 답을 내도록 하자. 그리고 최고차항의 계수가 양수가 아닌 음수가 정답이 되는 순간으로 항상 양수라고만 생각해서 문제를 해결하는 습관을 고치기에 매우 훌륭한 문제라는 생각이 든다.

(설계1)

부등식에 $x=-2$가 가장 특이점이기 때문에 $x=-2$를 대입한다.

(설계2)

최대,최소 조건이 있으므로 극대, 극소를 의심해 가며 결정조건을 생각한다.

(설계3)

조건에서 찾은 결정조건을 토대로 함수의 개형을 그려 모순이 생기지 않는 함수를 결정한다.

해설)

함수 $|f(x)|$가 $x=1$에서 미분가능하지 않으므로 $f(1)=0$이고 $f'(1)\neq 0$이다.

식 $|f(x)-f(-2)|$에 $x=-2$를 대입하면,

$|f(-2)-f(-2)|=0$이므로

부등식 $9+f(-2)\leq 9-|f(0)|\leq |f(x)-f(-2)|$에서

$f(0)\geq 9$ 또는 $f(0)\leq -9$이다.

이때, 구간 $[-2,\ 1]$에서 $|f(x)|$의 최댓값이 9가 되려면,

구간 $[-2,\ 1]$에서 $-9\leq f(x)\leq 9$이므로

$f(0)=9$ 또는 $f(0)=-9$가 되어야 하고,

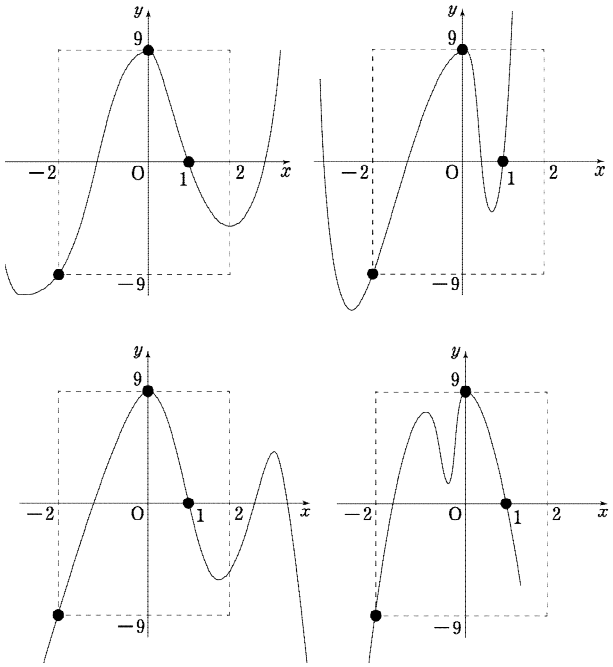
$f(x)$는 $x=0$에서 극대 또는 극소여야 한다.

또한 $f(-2)\leq -9$인데, 구간 $[-2,\ 1]$에서 $|f(x)|$의 최댓값이 9가 되려면, $f(-2)=-9$이다.

이를 종합하면, $f(1)=0$, $f'(1)\neq 0$, $f(-2)=-9$이므로

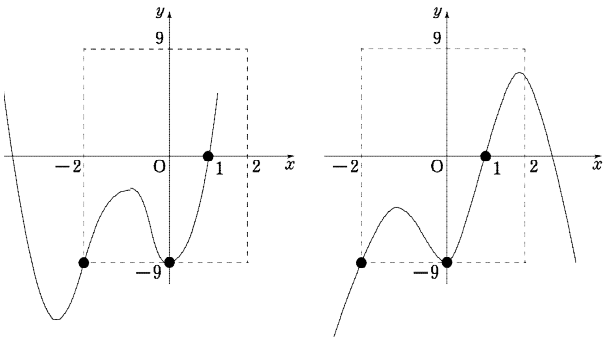
$f(0)$의 값이 9인 경우와 -9인 경우로 나누어 가능한 사차함수의 그래프를 살펴볼 수 있다.

ⅰ) $f(1)=0$, $f'(1)\neq 0$, $\underline{f(0)=9}$, $f'(0)=0$, $f(-2)=-9$



대략적으로 위와 같은 종류의 그래프들을 그릴 수 있고 $|f(x)|$가 미분가능하지 않은 점의 개수가 2가 아니거나 $0>f(2)$ 또는 $f(2)>|f(-2)|$인 경우이므로 $f(0)\neq 9$이다.

ⅱ) $f(1)=0$, $f'(1)\neq 0$, $\underline{f(0)=-9}$, $f'(0)=0$, $f(-2)=-9$



최고차항의 계수 k가 양의 정수인 경우

$f(x)+9=kx^2(x+2)(x-\alpha)$라 하면,

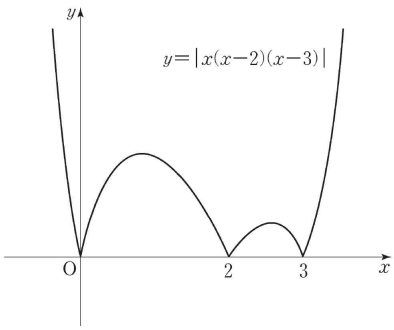
$\alpha\leq -2$이고, $f(2)=16(2-\alpha)k-9>|f(-2)|=9$가

되어 모순이다.

최고차항의 계수 k가 음의 정수인 경우
$f(x)+9=kx^2(x+2)(x-\alpha)$라 하면,
$f(1)=3(1-\alpha)k-9=0$이므로 $k(1-\alpha)=3$이다.
가능한 $(k,\ \alpha)$의 순서쌍을 구하면
$(-1,\ 4)$, $\left(-2,\ \frac{5}{2}\right)$, $(-3,\ 2)$, $\cdots$ 인데,
$0<f(2)<|f(-2)|$에서 $0<f(2)$이므로 $\alpha>2$이다. 그러므로 가능한 $f(x)$는
$f(x)=-x^2(x+2)(x-4)-9$
또는 $f(x)=-2x^2(x+2)\left(x-\frac{5}{2}\right)-9$
인데, $f(2)<|f(-2)|=9$를 만족시켜야 하므로
$f(x)=-2x^2(x+2)\left(x-\frac{5}{2}\right)-9$이다.
$\therefore\ 12f\left(\frac{3}{2}\right)=12\times\frac{27}{4}=81$

<풀어보면 좋을 기출문항>
[2017학년도 나형 9월 평가원 21번]
다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 음수인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은?

(가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 $0,\ 2,\ 3$ 뿐이다. (나) 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $\lvert x(x-2)(x-3)\rvert$ 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 할 때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.



① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

정답 ②

진짜 공부는 지금부터
대성마이맥