이정환 X Team.GM

Subject.	Class.
수학영역	가형

Caution.

Grand Master

2020학년도 6월 평가원 대비 모의고사 해설지

<6평대비 모의고사 분석서 활용>
분석서를 활용하기 전 모의고사 문제를 반드시 100분을 재고 푸시길 바랍니다.

(1) 틀린 문항에 대해 문제 포인트에서 힌트를 얻고
유사기출문항을 풀어본 후에 다시 한번 틀린 문항을 풀어본다.

(2) 다시 풀었는데도 틀린 문항은 문제의 설계를 힌트로 삼아
마지막으로 한번 더 풀어본다.

(3) 자세한 해설을 통해 문제를 완벽하게 자신의 것으로 소화하고,
포인트부터 설계과정까지 정리한다.

Examinee Info.

Name

Examinee No. □□□□ - □□□□

수학 (가)형 모의고사 분석서 정답 및 해설

1	③	**2**	⑤	**3**	②	**4**	①	**5**	④
6	③	**7**	④	**8**	②	**9**	①	**10**	⑤
11	②	**12**	②	**13**	③	**14**	③	**15**	①
16	⑤	**17**	④	**18**	⑤	**19**	④	**20**	②
21	⑤	**22**	10	**23**	8	**24**	5	**25**	45
26	67	**27**	9	**28**	21	**29**	59	**30**	31

1. 정답) ③
해설)
${}_7\mathrm{P}_3 = 7\times6\times5 = 210$

2. 정답) ⑤
해설)
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x}{\sin 2x} = \dfrac{5}{2}$

3. 정답) ②
해설)
$\vec{a}=(3,\ 4)$, $\vec{b}=(x,\ y)$ 이므로
$2\vec{a}-\vec{b}=(6,\ 8)-(x,\ y)=(6-x,\ 8-y)$이다.
그러므로 $(6-x)+(8-y)=14-x-y=0$ $\therefore\ x+y=14$

4. 정답) ①
해설)
사건 $A,\ B$가 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A)=\dfrac{4}{3}\mathrm{P}(B)=2\mathrm{P}(A\cap B)$에서
$\mathrm{P}(A)=2\mathrm{P}(A\cap B)=2\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ 이고, $\mathrm{P}(A)\neq0$ 이므로
$\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{2}$ 이다. $\mathrm{P}(A)=\dfrac{4}{3}\mathrm{P}(B)$ 이므로 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{2}{3}$ 이다.
$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{3}$

5. 정답) ④
해설)
$f'(x)=\dfrac{3x^2}{x^3-6}$ 이므로 $f'(2)=\dfrac{12}{2}=6$ 이다.

6. 정답) ③
해설)
닫힌 구간 $[0,\ \pi]$ 에서 $y=\sin\dfrac{8}{3}x$ 와 직선 $y=\dfrac{1}{2}$ 이
만나는 교점은 $0\le x\le\pi$ 일 때, 방정식
$\sin\dfrac{8}{3}x=\dfrac{1}{2}$ 의 실근과 같다. $\dfrac{8}{3}x$ 로 가능한 값들은
$\dfrac{8}{3}x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5\pi}{6},\ 2\pi+\dfrac{\pi}{6},\ 2\pi+\dfrac{5}{6}\pi\ \cdots$
이를 정리하면, $x=\dfrac{\pi}{16},\ \dfrac{5\pi}{16},\ \dfrac{13\pi}{16},\ \dfrac{17}{16}\pi\ \cdots$이고,
이 중 $0\le x\le\pi$ 인 것은 3개다.

7. 정답) ④
해설)
$\displaystyle\int_0^{\sqrt3} x\sqrt{x^2+1}\,dx$ 에서 $x^2+1=a$ 라 치환하여 적분하면,
$$\int_0^{\sqrt3} x\sqrt{x^2+1}\,dx=\int_1^4\frac{\sqrt a}{2}\,da=\left[\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}\right]_1^4=\frac{7}{3}$$

8. 정답) ②
해설)
타원 $\dfrac{(x+a)^2}{12}+\dfrac{(y+2a)^2}{8}=1$ 은 타원 C: $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{8}=1$ 을
$(-a,\ -2a)$ 만큼 평행이동한 곡선이다. 타원 C의 한
초점의 x좌표를 c라 하면 $c=\sqrt{12-8}=2$ 이다. 타원 C의
두 초점은 $(-2,\ 0)$, $(2,\ 0)$ 이다.
그러므로 타원 $\dfrac{(x+a)^2}{12}+\dfrac{(y+2a)^2}{8}=1$ 의 초점은 각각
$(-2-a,\ -2a)$, $(2-a,\ -2a)$ 이다. 삼각형 $\mathrm{OFF'}$에서
밑변이 $\overline{\mathrm{FF'}}=4$ 이고, 높이는 $2a$ 이므로 넓이는
$\dfrac{1}{2}\times4\times2a=4a$ 이다. 따라서 $a=1$이다.

9. 정답) ①
해설)
학생들 중 한 명을 선택할 때 여학생인 사건을 A, 상을 받은 학생일 사건을 B라 하자. 임의로 선택한 한 명의 학생이 여학생이었을 때, 이 학생이 상을 받았을 확률은
$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{1}{4}$ 이다.

10. 정답) ⑤

해설)

모든 실수 x에 대하여 $\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1} \geq 0$이고,

곡선 $y=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$은 x축과 점 $(-1,\ 0)$에서 만나므로

x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{-1}^{3} \frac{(x+1)^2}{x^2+1}dx = \int_{-1}^{3} \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}dx = \int_{-1}^{3}\left(1+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\left[x+\ln(x^2+1)\right]_{-1}^{3}$$

$$=4+\ln 5$$

11. 정답) ②

해설)

x^{k-3}의 계수는

$$\sqrt{5}\times{}_k\mathrm{C}_{k-3}(1)^{k-3}\times\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^3=\sqrt{5}\times{}_k\mathrm{C}_3(1)^{k-3}\times\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^3$$

$$=\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\times\frac{1}{5}$$

인데, 분모에 $3!\times 5$가 있으므로 $k(k-1)(k-2)$의 값은 $3!\times 5\times 3$의 배수가 되어야 한다. 즉, $k(k-1)(k-2)$이 인수로 9를 갖는 모든 자연수 k의 값을 나열해 보면, $k=9,\ 10,\ 11,\ 18,\ 19,\ 20,\ \cdots$ 이다. 이 중 10을 인수로 갖는 자연수 k의 최솟값은 10이다.

12. 정답) ②

해설)

곡선 $y(x^2+y)=2x$가 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표를 찾기 위해 두 식 $y(x^2+y)=2x$, $y=x$을 연립하여 계산하면, $x(x^2+x)=2x$에서 $x(x+2)(x-1)=0$이므로 제1사분면에 위치한 점 P 좌표는 $(1,\ 1)$이다.

$y(x^2+y)=2x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{dy}{dx}(x^2+y)+y\left(2x+\dfrac{dy}{dx}\right)=2$이고 $x=y=1$을 대입하면,

$2\dfrac{dy}{dx}+2+\dfrac{dy}{dx}=2$이므로 $\dfrac{dy}{dx}=0$이다.

13. 정답) ③

해설)

주사위를 한 번 던지는 시행에서 부등식 $4 \leq a_n \leq 5$을 만족시키는 주사위의 눈의 수가 나오는 사건을 A라 하자.

문제에서 원하는 상황은 6회의 독립시행에서 사건 A가 2회, 사건 A^C가 4회 발생하는 상황이다.

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$이므로 ${}_6\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^4=\dfrac{15\times 16}{3^6}=\dfrac{80}{243}$

14. 정답) ③

<Point>

(1) 역함수의 미분법을 교과서에서 배우는 이유는 '역함수를 구하지 않고 역함수의 미분계수를 구할 수 있다' 이다.
따라서 역함수를 구하지 않고 역함수의 미분계수를 구할 수 있어야 한다.

(2) 역함수의 미분계수에 대해서 묻는다면 문제 해결의 시작은
⇨ $f^{-1}(x)=g(x)$일 때
$f(g(x))=x$ 또는 $g(f(x))=x$의 식을 작성한 후 문제해결을 시작한다. 이후 양변을 미분해서 역함수의 미분계수를 구한다.

(3) 역함수에 대한 정보를 원함수에 대한 정보로 바꾸어 생각한다.

<COMMENT & PLAN>

14번 정도에 출제될 전형적인 스타일의 문제이다. 하지만 원래함수에 역함수를 합성시키는 과정이 훈련되어 있지 않은 친구들은 문제를 풀 때 합성시키는 과정에서 당황해 할 수 있기 때문에 실제 시험에서 당황하지 않을 정도로 많이 훈련을 해야 한다.

(설계1)
$f(g(x))=x$를 작성한다.

(설계2)
식을 미분하여 f, g의 함숫값과 미분계수를 구한다.

해설)

$f(x)$와 $g(x)$는 역함수 관계에 있으므로 $f(g(x))=x$이고, $f'(g(x))g'(x)=1$이다.

식 $f(2^x+1)=e^{\frac{1}{4}x}$에 $x=0$을 대입하면, $f(2)=1$이다. ⇒ $g(1)=2$, $f'(g(1))g'(1)=1$

$\Rightarrow\ g'(1)=\dfrac{1}{f'(g(1))}=\dfrac{1}{f'(2)}$

$f(2^x+1)=e^{\frac{1}{4}x}$의 양변을 미분하면,

$(2^x\ln 2)f'(2^x+1)=\dfrac{1}{4}e^{\frac{1}{4}x}$이고 $x=0$을 대입하면,

$\ln 2\times f'(2)=\dfrac{1}{4}$이다.

$\therefore\ g'(1)=\dfrac{1}{f'(g(1))}=\dfrac{1}{f'(2)}=\ln 16$

<풀어보면 좋은 기출문제>

[2013학년도 6월 평가원]

실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 1이다. 함수 $f(2x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1,\ a)$에서의 접선의 기울기는 b이다. $10(a+b)$의 값을 구하시오. (4점)

정답 : 15

[2014학년도 9월 평가원]

함수 $f(x)=\ln(\tan x)$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{4g(8h)-\pi}{h}$의 값을 구하시오. (4점)

정답 :16

15. 정답) ①

<POINT>

(1) 지수함수,로그함수,삼각함수와 다항함수는 일반적으로 연립이 불가능하다. 특수하게 접하는 경우는 방정식의 해결이 가능하다.

(2) 문제에서 좌표평면위에 함수가 주어진다면 기본적으로 좌표를 도입해서 식을 세워 문제를 계산으로 해결할 수 있어야 한다.

(3) 직각삼각형의 작도가 필연적으로 되는 경우에는 삼각비를 이용하여 문제의 접근을 할 수 있다.

<COMMENT & PLAN>

지수함수와 다항함수가 만나서 계산해야 하는 전형적인 계산문제이다. 막연한 계산 보다는 문제를 해결할 때 직각삼각형이 등장하기 때문에 한번은 삼각비에 대한 이용을 고려해 볼 수 있어야 하며, 지수함수와 다항함수에 대한 방정식이기 때문에 식 2개가 필요할 수 있다는 생각을 열어두고 문제해결을 시작한다.

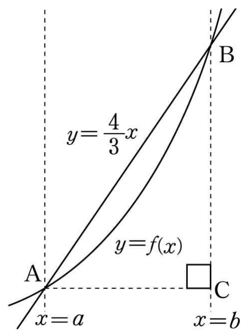
(설계1)

점 A, B에 대한 좌표를 설정한다.

(설계2)

직각삼각형을 이용해 길이를 표현하고, 계산한다. 혹은 식 2개를 작성해서 방정식을 해결한다.

해설)



$f(x)=3^x$라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{4}{3}x$가 만나는 두 점 A, B의 x좌표를 각각 a, b라 하고, 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선과 점 B를 지나고 y축에 평행한 직선이 만나는 점을 C라 하면, 삼각형 ACB가 직각삼각형이므로 길이 비를 이용할 수 있다.

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=5:3$이고, $\overline{\mathrm{AB}}=\frac{10}{3}$이므로 $b-a=2$이다.

또한, $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=5:4$이므로 $\overline{\mathrm{BC}}=\frac{8}{3}$이고

$\overline{BC}=f(a+2)-f(a)=3^{a+2}-3^{a}=8\times3^{a}=\frac{8}{3}$ 이다.

그러므로 $\underline{a=-1}$, $b=1$ 이고,

$f(1)=3+k=\frac{4}{3}$ 이므로 $k=-\frac{5}{3}$ 이다.

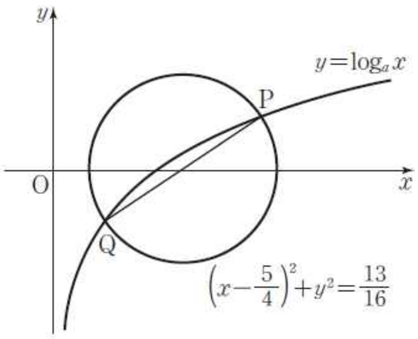
<풀어보면 좋은 기출문항>

[2018학년도 9월 평가원]

$a>1$인 실수 a에 대하여 곡선 $y=\log_a x$와

원 C: $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+y^2=\frac{13}{16}$의 두 교점을 P, Q라 하자.

선분 PQ가 원 C의 지름일 때, a의 값은? (4점)



① 3　② $\frac{7}{2}$　③ 4　④ $\frac{9}{2}$　⑤ 5

16. 정답) ⑤

<POINT>

직각삼각형에서 길이를 구해야 하는 경우 피타고라스 정리 또는 삼각비를 이용할 수 있다.

<COMMENT & PLAN>

점 C의 좌표를 구해야 하기 때문에 정삼각형의 변의 길이를 구해야하고, 문제에선 삼각비가 제시되어있기 때문에 삼각비를 어떻게 이용할 것인지, 직선 OA의 기울기는 각의 입장에서 어떻게 사용할 것인지, 점 C의 x좌표를 구하기 위해 어떤 각을 구해야 하는지 생각해 볼 필요가 있다.

(설계1)

$\triangle OAB$에서 $\overline{AB}$의 길이를 구한다.

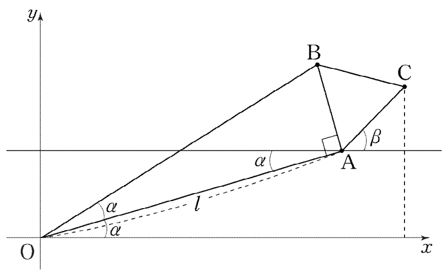
(설계2)

직선 $\overline{OA}$의 기울기가 주어져 있으므로 $\overline{OA}$와 x축이 이루는 양의 각에 대한 tan값을 구할 수 있다.

(설계3)

$\overline{AC}$ 또한 (설계1)에서 구했기 때문에 $\overline{AC}$와 x축이 이루는 각을 문제에서 제시한 각들과 관계를 찾아 삼각비를 구한 후 점 C의 좌표를 구한다.

해설)



선분 OA의 길이를 l이라 하고, 직선 OA와 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 α라 하면, 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선과 선분 OA가 이루는 예각의 크기 또한 α이다. $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{6}$ 이므로

$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{13}}{13}$, $\cos\alpha=\frac{6}{\sqrt{39}}=\frac{2\sqrt{39}}{13}$

인데, $\sin(\angle AOB)=\frac{\sqrt{13}}{13}$ 이므로 $\angle AOB=\alpha$ 이다.

점 A의 x좌표는 $l\times\cos\alpha=\frac{2\sqrt{39}}{13}l=4\sqrt{3}$ 이므로

$l=2\sqrt{13}$ 이다.

한편, $\overline{AB}=\overline{AC}=l\times\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{6}l$ 이므로

직선 AC와 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 이루는

각의 크기를 β라 하면,

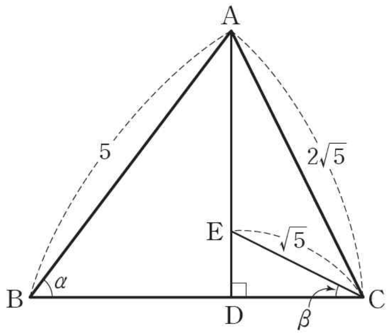
$\beta=\pi-\left(\frac{\pi}{3}\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\pi}{6}+\alpha$ 이고, 점 C의 x 좌표는

$$4\sqrt{3}+\overline{\mathrm{AC}}\cos\beta$$
$$=4\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{6}l\times\left(\cos\frac{\pi}{6}cos\,\alpha-\sin\frac{\pi}{6}sin\,\alpha\right)$$
$$=4\sqrt{3}+\frac{\sqrt{39}}{3}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2\sqrt{39}}{13}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{13}}{13}\right)$$
$$=4\sqrt{3}+\frac{\sqrt{39}}{3}\times\left(\frac{5\sqrt{13}}{26}\right)$$
$$=\frac{29}{6}\sqrt{3}$$

<풀어보면 좋을 기출문항>

[2018학년도 수능]

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=5$, $\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{5}$ 인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 D라 하자. 선분 AD를 3 : 1로 내분하는 점 E에 대하여 $\overline{\mathrm{EC}}=\sqrt{5}$ 이다. $\angle\mathrm{ABD}=\alpha$, $\angle\mathrm{DCE}=\beta$라 할 때, $\cos(\alpha-\beta)$의 값은? (4점)



① $\frac{\sqrt{5}}{5}$　② $\frac{\sqrt{5}}{4}$　③ $\frac{3\sqrt{5}}{10}$　④ $\frac{7\sqrt{5}}{20}$　⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

17. 정답) ④

<POINT>

(1) 부정방정식이 작성된다면 경우의 수를 구할 때 중복조합을 적극적으로 이용한다.

(2) 확률과 통계의 박스형 문제의 경우 서술된 설명을 잘 이해해가며 문제를 해결한다.

<COMMENT & PLAN>

과거 수열의 박스형 문제는 식의 전후만 보고도 답을 구할 수 있는 경우가 있었지만 근래 출제되는 확률과 통계 문제의 경우 서술된 내용의 이해를 잘 이해해야 문제가 해결되므로 문제처음부터 차분차분 읽어가며 문제를 해결한다.

해설)

5번의 시행에서 나오는 공의 숫자를 각각 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5라 하면, 5 이하의 자연수 k에 대하여 $0\le x_k\le 4$이다.

즉, a번의 시행 후에 점 P는 처음으로 $(4,\ 0)$에 위치하고, b번의 시행 후에 점 P는 $(4,\ 4)$에 있다.

(1) $(a,\ b)=(1,\ 4)$인 경우

$x_1=4$이고 $x_2+x_3+x_4+x_5=4$이다.

$\Rightarrow$ $\boxed{(가)}=p=1\times{}_4\mathrm{H}_4={}_7\mathrm{C}_4=35$

(2) $(a,\ b)=(2,\ 3)$인 경우 :

$x_1+x_2=4$, $x_2\ne 0$이고 $x_3+x_4+x_5=4$이다.

$\Rightarrow$ $\boxed{(나)}=q=({}_2\mathrm{H}_4-1)\times{}_3\mathrm{H}_4=({}_5\mathrm{C}_4-1)\times{}_6\mathrm{C}_4=60$

(3) $(a,\ b)=(3,\ 2)$인 경우:

$x_1+x_2+x_3=4$, $x_3\ne 0$이고 $x_4+x_5=4$이다.

그러므로 $({}_3\mathrm{H}_4-{}_2\mathrm{H}_4)\times{}_2\mathrm{H}_4=({}_6\mathrm{C}_4-{}_5\mathrm{C}_4)\times{}_5\mathrm{C}_4=50$

(4) $(a,\ b)=(4,\ 1)$인 경우

$x_1+x_2+x_3+x_4=4$, $x_4\ne 0$이고 $x_5=4$이다.

그러므로 $({}_4\mathrm{H}_4-{}_3\mathrm{H}_4)\times 1=({}_7\mathrm{C}_4-{}_6\mathrm{C}_4)\times 1=20$

$\Rightarrow$ $\boxed{(다)}=r=35+60+50+20=165$

$\therefore\ p+q+r=35+60+165=260$

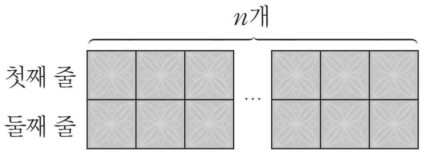
6월 평가원 대비 이정환 X GRAND MASTER 모의고사

모의고사 분석서

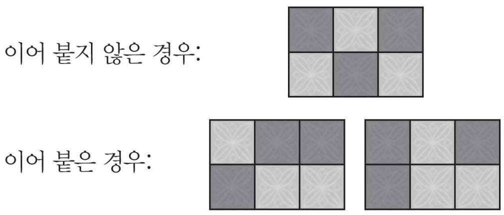
<풀어보면 좋을 기출문항>

[2017학년도 3월 교육청]

그림과 같이 가로로 n개, 세로로 2개씩 총 $2n$개의 크기가 같은 정사각형 모양의 타일을 이어 붙인다.



이 타일 중에서 3개를 골라 검은색으로 칠하되, 검은색으로 칠한 타일이 서로 이어 붙지 않게 하려고 한다. 다음은 검은색으로 칠한 타일이 이어 붙지 않은 경우와 이어 붙은 경우의 한 예이다.



다음은 $n \geq 6$일 때, 검은색으로 칠할 타일 3개를 고르는 경우의 수 $S(n)$을 구하는 과정이다.

> 첫째 줄에 있는 타일 중 검은색으로 칠할 타일의 개수를 $k(k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$라 하면
>
> (ⅰ) $k=0$일 때, 둘째 줄에 있는 n개의 타일 중에서 검은색으로 칠할 타일 3개를 고르는 경우의 수는 $\boxed{\text{(가)}}$이다.
>
> (ⅱ) $k=1$일 때, 둘째 줄에 있는 n개의 타일 중에서 검은색으로 칠할 타일 2개를 고르는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_{n-3}$이고, 첫째 줄에서 검은색으로 칠할 타일 1개를 고르는 경우의 수는 $\boxed{\text{(나)}}$이므로, 검은색으로 칠할 타일 3개를 고르는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_{n-3} \times \boxed{\text{(나)}}$이다.
>
> (ⅲ) $k=2$일 때, (ⅱ)와 같은 방법으로 구할 수 있다.
>
> (ⅳ) $k=3$일 때, (ⅰ)과 같은 방법으로 구할 수 있다.
>
> 따라서 $S(n) = \dfrac{2(n-2)(2n^2-8n+9)}{3}$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(10)+g(8)$의 값은? (4점)

① 60　　② 61　　③ 62
④ 63　　⑤ 64

[2018학년도 10월 교육청]

다음은 4 이상의 자연수 n에 대하여 등식

$$a \times b \times c \times d = 2^n \times 3^n$$

을 만족시키는 2 이상의 자연수 a, b, c, d의 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$ 중에서 $a+b+c+d$가 짝수가 되도록 하는 모든 순서쌍의 개수를 구하는 과정이다.

> $a=2^{x_1} \times 3^{y_1}$, $b=2^{x_2} \times 3^{y_2}$, $c=2^{x_3} \times 3^{y_3}$, $d=2^{x_4} \times 3^{y_4}$이라 하면
>
> $x_1+x_2+x_3+x_4=n$,
>
> $y_1+y_2+y_3+y_4=n$
>
> (단, $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$에 대하여 x_i, y_i는 음이 아닌 정수)
>
> 이다. 이때, $a+b+c+d$가 짝수이므로 a, b, c, d가 모두 짝수이거나 a, b, c, d에서 2개만 짝수이다.
>
> (ⅰ) a, b, c, d가 모두 짝수인 경우
>
> x_1, x_2, x_3, x_4가 모두 자연수이고 y_1, y_2, y_3, y_4는 음이 아닌 정수이므로 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)$의 개수는
>
> ${}_4\mathrm{H}_{\boxed{(가)}} \times {}_4\mathrm{H}_n$ …㉠
>
> (ⅱ) a, b, c, d중에서 2개만 짝수인 경우
>
> x_1, x_2, x_3, x_4 중에서 자연수가 2개이고 0이 2개이므로 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$의 개수는
>
> ${}_4\mathrm{C}_2 \times \boxed{\text{(나)}}$
>
> 이다. 이때 a, b, c, d 중 홀수인 두 수는 1이 될 수 없으므로 순서쌍 $(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)$의 개수는
>
> ${}_4\mathrm{H}_{\boxed{(다)}}$
>
> 이다. 따라서 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)$의 개수는
>
> ${}_4\mathrm{C}_2 \times \boxed{\text{(나)}} \times {}_4\mathrm{H}_{\boxed{(다)}}$ …㉡
>
> (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는 ㉠+㉡이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$이라 할 때, $f(6)+h(7)+h(8)$의 값은? (4점)

① 13　　② 14　　③ 15
④ 16　　⑤ 17

18. 정답) ⑤

<POINT>

(1) 평면곡선 문제해결은 시작이 정의이다. 포물선의 정의를 이용하기 위해 준선을 긋고 포물선 위의 점을 초점과 연결하고, 작도한 준선에 수선의 발을 내려 두 선분의 길이가 같음을 체크한다.

(2) 삼각형의 넓이를 구하는 경우

❶ $S=\frac{1}{2}(\text{밑변})(\text{높이})$

❷ $S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$

위 두 가지 중 어떤 걸로 해결할지 조건에 따라 유리한 식으로 선택한다.

<COMMENT & PLAN>

요즘 평면곡선의 문제가 18~20번 혹은 27~28번에 출제되어 학생들이 시험 볼 때 힘들게 하는 경우가 있다. 실제 풀이를 듣고 보면 어렵지는 않으나 시간 내에 문제를 해결하는 것이 중요하므로, 시간 내에 해결하는 것을 훈련해야 한다. 모의고사를 시간을 재고 해결하며 훈련하거나 N제를 푸는 경우 5~7분정도 시간을 재고 해결하는 연습을 하자.

(설계1)

포물선의 정의를 이용하기 위해 준선을 긋고 길이를 체크한다.

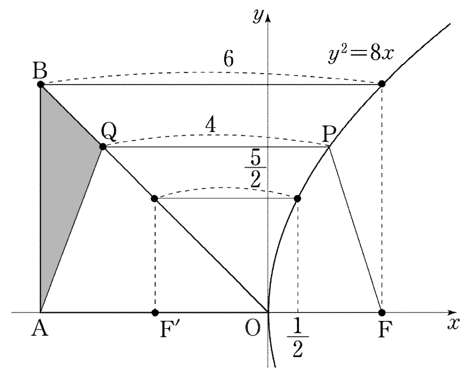
(설계2)

문제에서 제시된 $\overline{PQ}$의 길이를 어떻게 이용할지 고민하며 길이를 표시한다.

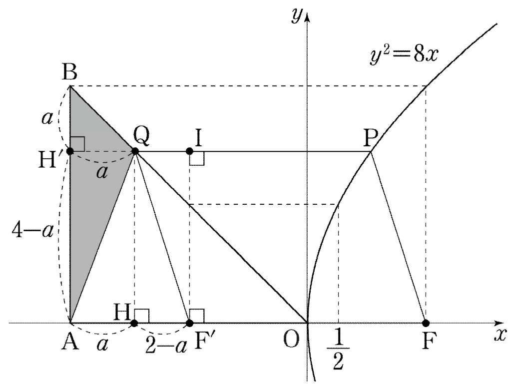
(설계3)

위 넓이 공식 중 ❶을 이용하기가 편하다. 이유는 문제에서 각에 대한 정보를 찾으려면 결국 길이를 이용해서 삼각비를 구해야하기 때문에 길이를 구하는 과정에서 밑변과 높이를 구해야겠다는 생각을 갖고 미지수를 잡아 해결할 수 있다.

해설)



포물선 $y^2=8x$의 초점을 $\mathrm{F}(2,\ 0)$라 하고, $\mathrm{F}'(-2,\ 0)$이라 하자. 점 F'을 지나고 x축에 수직인 직선과 선분 OB가 만나는 점의 좌표는 $(-2,\ 2)$이고 포물선 위의 점 중 y좌표가 2인 점은 $\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$이므로 이 두 점 사이의 거리는 $\frac{5}{2}$이다. 그러므로 점 Q의 x좌표는 점 F'의 x좌표보다 작다.



점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 H,
점 Q에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H'이라 하자.
$\overline{\mathrm{QH}'}=\overline{\mathrm{AH}}=a$라 하면,
$\overline{\mathrm{BH}'}=a$이고 $\overline{\mathrm{H}'\mathrm{A}}=\overline{\mathrm{QH}}=4-a$, $\overline{\mathrm{HF}'}=2-a$이다.
삼각형 QHF'에서 피타고라스의 정리에 의해
$\overline{\mathrm{QF}'}=\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{(2-a)^2+(4-a)^2}$ 이다.
($\because$ 사각형 FPQF'이 평행사변형)
한편, 점 F'을 지나고 x축에 수직인 직선은 포물선의 준선이므로 $x=-2$와 선분 PQ가 만나는 점을 I라 하면,
$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PI}}$ 이다. $\overline{\mathrm{HF}'}=\overline{\mathrm{QI}}=2-a$인데,
$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QI}}+\overline{\mathrm{PI}}$에서 $4=(2-a)+\sqrt{(2-a)^2+(4-a)^2}$ 이다.

$4=(2-a)+\sqrt{(2-a)^2+(4-a)^2}$

$\Leftrightarrow\ (a+2)^2=(2-a)^2+(4-a)^2$

$\Leftrightarrow\ a^2-16a+16=0$

$\Leftrightarrow\ a=8\pm4\sqrt{3}$

인데, 선분 $\overline{\mathrm{QH}'}<\overline{\mathrm{AF}'}$이므로 $a=8-4\sqrt{3}$ 이다.
그러므로 삼각형 AQB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 4\times a=16-8\sqrt{3}$ 이다.

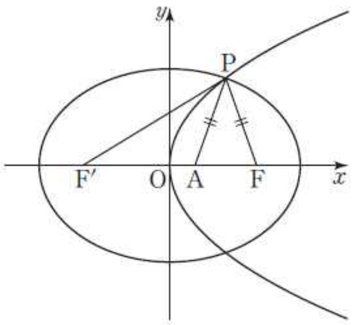
<풀어보면 좋을 기출문항>

[2018학년도 9월 평가원]

좌표평면에서 초점이 $\mathrm{A}(a,0)$ $(a>0)$ 이고 꼭짓점이 원점인 포물선과 두 초점이 $\mathrm{F}(c,0)$, $\mathrm{F}'(-c,0)$ $(c>a)$ 인 타원의 교점 중 제 1사분면 위의 점을 P라 하자.

$$\overline{\mathrm{AF}}=2,\ \overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PF}},\ \overline{\mathrm{FF'}}=\overline{\mathrm{PF'}}$$

일 때, 타원의 장축의 길이는 $p+q\sqrt{7}$ 이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) (4점)



정답 : 29

19. 정답) ④

<POINT>

(1) 벡터의 실수배 표현은

❶ 평행

❷ 계수 합$=1$인 경우 내분/외분벡터로의 해석

❸ 각 체크 이후 닮음

위 세 가지 중 하나로 해석하고 문제를 접근 할 수 있어야 한다.

(2) 원 위의 점이 지름 양 끝과 연결된 경우 직각삼각형임을 인식하여 문제 조건에 맞게 직각삼각형을 활용할 수 있다.

(3) 기하와 벡터 문제를 해결할 때 가장 중요한 것은 문제해결에 필요한 도형들의 위치관계를 파악하는 것이다. 길이와 각을 이용해 위치관계를 결정할 수 있어야 한다.

<COMMENT & PLAN>

벡터 문제로 벡터의 대수적 조건을 해석해서 해석에 따른 필요한 정보들을 찾아서 위치관계를 확인해야 한다. 그 호흡이 짧은 경우 난이도가 낮은 문제, 호흡이 긴 경우는 난이도가 상대적으로 높은 문제에 해당되는데 위치관계 과정 자체는 교과서 대표예제 수준으로 전형적이기 때문에 어떤 도형이 나오든 길이와 각을 자유롭게 구해서 위치관계를 결정할 수 있어야 한다.

(설계1)

조건(가)에서 '평행 / 방향이 같다.' 를 이용해서 P의 위치를 결정한다.

(설계2)

조건(나)에서 직선 MC가 원의 중심을 지나고 점 Q가 지름의 양끝 점 중 하나임을 알 수 있다.

(설계3)

$\triangle\mathrm{PQM}$이 직각삼각형이고 (설계1)에서 평행선 작도가 되어있으므로 삼각비를 적극적으로 이용해서 문제를 해결한다.

(설계4)

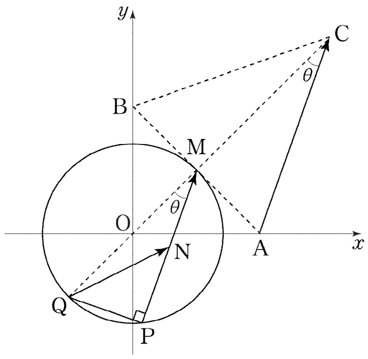
k값의 경우 실수배 부분이기 때문에 길이를 알아야 결정이 되므로 k를 구하기 위한 도형의 길이들을 구해나간다.

해설)

세 점 A, B, C 사이의 관계를 확인해보면, $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{AB}}=4$이다. 선분 AB의 중점을 M이라 하면, 점 M은 원 위의 점이고 $\overline{\mathrm{MC}}=4$이다.

(가) 조건에서 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}=2\overrightarrow{\mathrm{PM}}=k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$에 의해

점 P에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{PM}$과 $\overrightarrow{AC}$는 방향이 같다.
그러므로 $\angle ACM=\theta$라 하면 $\angle PMO=\theta$이다.



(나) 조건에서 $\overrightarrow{QO}=\dfrac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}}{4}=\dfrac{\overrightarrow{MC}}{2}$ 인데,

$\left|\dfrac{1}{2}\overrightarrow{MC}\right|=2$ 이므로 점 Q의 위치는 선분 CM의 연장선이 원과 만나는 점이다.
두 점 P, M의 중점을 N이라 하면,
$|\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{QP}+2\overrightarrow{OM}|=|\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{QM}|=2|\overrightarrow{QN}|$
인데, 삼각형 ACM에서

$\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ 임을 알 수 있으므로

$|\overrightarrow{QP}|=4\times\sin\theta=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$ 이고

$|\overrightarrow{PN}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{PM}|=\dfrac{1}{2}\times 4\times\cos\theta=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$ 이다.

또한, 삼각형 QPN이 직각이등변삼각형이므로

$|\overrightarrow{QN}|=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ 이고 $2|\overrightarrow{QN}|=\dfrac{8\sqrt{10}}{5}$ 이다.

한편, $k=\dfrac{|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{2|\overrightarrow{PM}|}{|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{\frac{16}{\sqrt{5}}}{\frac{2\sqrt{5}}{1}}=\dfrac{8}{5}$ 이다.

$\therefore\ \dfrac{1}{k}\times|\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=\dfrac{2|\overrightarrow{QN}|}{k}=\sqrt{10}$

<풀어보면 좋을 기출문항>

[2019학년도 수능]

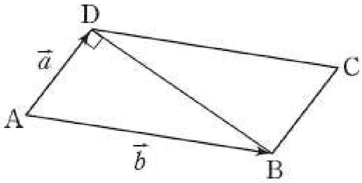
좌표평면에서 넓이가 9인 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA 위를 움직이는 점을 각각 P, Q, R라 할 때,

$$\overrightarrow{AX}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AR})+\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 영역의 넓이가 $\dfrac{q}{p}$이다.
$p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) (4점)

정답 : 53

[2009학년도 사관학교]
그림과 같은 $\overline{AD} = 1$, $\overline{AB} = \sqrt{6}$, $\angle ADB = 90^\circ$ 인 평행사변형



ABCD 에서 $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ 라 놓는다. 꼭짓점 D 에서 선분 AC 에 내린 수선의 발을 E 라 할 때, 벡터 $\overrightarrow{AE} = k(\vec{a} + \vec{b})$ 를 만족시키는 실수 k 의 값은? (4점)

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{5}{18}$

④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}}{6}$

20. 정답) ②
<POINT>
(1) 적분 문제는
❶ 적분 값의 계산
- 단순 적분 계산은 난이도가 낮은 편
- 식을 변형해서 적분 계산을 하는 경우
20번 혹은 21번 난이도까지 출제될 수 있다.
❷ 계산이 불가능한 경우 : 넓이로 해석

(2) 낯선 함수가 출제되는 경우 함수 분석이 문제 해결에 결정적일 수 있다.
❶ 정의역 ⇨ 분수함수/무리함수/로그함수의 경우 더 예민하게 반응
❷ 특징 ⇨ 대칭성, 주기성, 정점
❸ 증가와 감소 ⇨ 도함수의 부호로 확인
❹ 점근선 ⇨ 극한을 이용해서 확인
❺ 볼록성 ⇨ 이계도함수의 부호로 확인

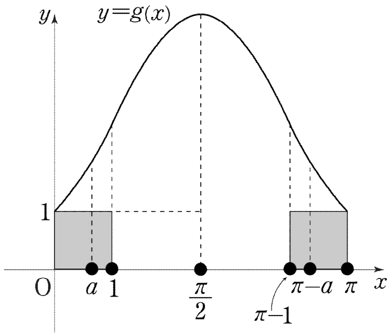
<COMMENT & PLAN>
주어진 식이 적분이 불가능 한 상태이기 때문에 피적분함수를 분석해서 묻는 식을 넓이입장으로 인식해서 문제를 해결할 수 있어야 한다. 특히 대소비교의 경우 더욱 그러하며, 적분 값을 구체적으로 구하는 경우 정보를 더 찾아내서 식을 변형하여 적분 값을 구해 나갈 수 있다.

(설계1)
함수 $y = e^{2\sin x}$를 분석해서 문제해결을 시작한다.

(설계2)
합답형 문제의 경우 ㄱ, ㄴ, ㄷ을 풀어나가는 과정에 참인명제가 있으면 적극 활용해야 하므로 보기의 결과를 기억해가며 문제를 해결한다.

해설)
ㄱ. (참)
$\int_{\pi-a}^{\pi} e^{2\sin x}dx = 1$ 에서 $g(x) = e^{2\sin x} = \{f'(x)\}^2$ 이라 하면,
모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \geq 0$ 이다.
$g'(x) = 2\cos x\, e^{2\sin x}$ 이므로 구간 $[0,\ \pi]$ 에서 함수
$g(x) = e^{2\sin x}$ 는 $x = \frac{\pi}{2}$ 에서 극댓값을 가지고,
직선 $x = \frac{\pi}{2}$ 에 대하여 대칭이다.
$\Rightarrow \int_{\pi-a}^{\pi} e^{2\sin x}dx = \int_{0}^{a} e^{2\sin x}dx$
또한, 구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 $g'(x) > 0$ 이므로 $g(x) = e^{2\sin x}$ 는
구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 증가하고 $g(0) = 1$ 이므로 구간

$[0,\ \pi]$ 에서 함수 $g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$\int_0^1 g(x)\,dx > 1$ 이므로 $\int_0^a g(x)\,dx = \int_0^a e^{2\sin x}dx = 1$ 이 되는 상수 a 에 대하여 $0<a<1$ 이다.

ㄴ. (참)

구간 $[0,\ \pi]$ 에서 함수 $f'(x)=e^{\sin x}$ 와 함수 $g(x)=e^{2\sin x}$ 는 모두 $x=\frac{\pi}{2}$ 에서 극댓값을 가지고, 직선 $x=\frac{\pi}{2}$ 에 대하여 대칭이다.

$\int_0^a g(x)\,dx = 1$, $f(0)=\int_a^0 f'(x)\,dx = b$ 이므로

$$\int_{\pi-a}^{\pi} f'(x)\{f'(x)-a\}\,dx = \int_{\pi-a}^{\pi}\{g(x)-af'(x)\}\,dx$$
$$= \int_0^a \{g(x)-af'(x)\}\,dx$$
$$= 1+ab$$

이때, $\int_a^0 f(x)\,dx = b<0$ 이므로 $1+ab>b+1$ 이다.

ㄷ. (거짓)

$\int_0^a \{f(x)\}^2 \sin x\,dx$ 의 값을 구하는 과정 중

(ㄱ)에서 $\{f(x)\}^2=v$, $\sin x = u'$ 라 하고,

(ㄴ)에서 $f(x)=v$, $\cos x\, e^{\sin x}=u'$ 라 하여 부분적분을 이용하면

$$\int_0^a \{f(x)\}^2 \sin x\,dx \quad \cdots \quad (ㄱ)$$
$$= \Big[\ \{f(x)\}^2 \times (-\cos x)\ \Big]_0^a + \int_0^a 2f'(x)f(x)\cos x\,dx$$
$$= b^2 + \int_0^a 2f'(x)f(x)\cos x\,dx$$
$$= b^2 + \int_0^a 2\cos x\, e^{\sin x} f(x)\,dx \quad \cdots \quad (ㄴ)$$
$$= b^2 + \Big[\ 2f(x)\times e^{\sin x}\ \Big]_0^a - 2\int_0^a f'(x)\,e^{\sin x}\,dx$$
$$= b^2 - 2b - 2\int_0^a e^{2\sin x}\,dx$$
$$= b^2 - 2b - 2$$
$$= (b-1)^2 - 3$$

이므로 $\int_0^a \{f(x)\}^2 \sin x\,dx < (b-1)^2 - a$ 이다.

<풀어보면 좋을 기출문항>

[2018학년도 6월 평가원]

실수 a와 함수 $f(x)=\ln(x^4+1)-c$ ($c>0$인 상수)에 대하여 함수 $g(x)$를

$g(x)=\int_a^x f(t)dt$라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 2가 되도록 하는 모든 a의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$ (m은 자연수)이다. $a=\alpha_1$일 때, 함수 $g(x)$와 상수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.
(나) $\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)dx = k\alpha_m \int_0^1 \lvert f(x)\rvert dx$

$mk\times e^c$의 값을 구하시오. (4점)

정답 : 16

21. 정답) ⑤

<POINT>

(1) 함수를 결정해야하는 경우 무작정 식을 써서 미지수를 늘려 해결하는 것이 아니라 조건을 해석해가며 문제 상황에 맞는 함수의 결정조건을 찾아 함수의 식을 결정한다.

<COMMENT & PLAN>

19학년도의 6월 9월의 경우 킬러 문항이 난이도가 과거에 비해는 낮아진 편이며 수능의 경우 17,18학년도 에 비해 킬러 문제의 난이도는 대폭 낮아졌다. 그래서 6평 대비 모의고사에 킬러 난이도도 준 킬러 난이도를 고려하며 좀 낮게 제작을 했다. 문제 자체의 평가를 하자면 조건에 맞게 함수의 결정조건을 캐치 하는 게 난이도가 높지는 않고, 조건에 모순이 생기지 않게 함수의 결정조건을 찾는 게 핵심.

(설계1)

(가)에서 $f(1)$의 함숫값을 두가지 케이스로 찾을 수 있다.

(설계2)

(나)조건에서 $f'(1)$과 $f'(0)$ 그리고 $f(0)$도 모두 결정할수 있다.

(설계3)

$x=1, x=0$에 대한 함수의 조건을 케이스에 따라 매치해가며 문제에서 원하는 함수를 찾는다.

해설)

구간 $[-1,\ 1]$에 속하는 모든 실수 x에 대하여

$|f(x)| \le \frac{\pi}{6}$ 이므로 $-\frac{1}{2} \le \sin(f(x)) \le \frac{1}{2}$이다.

(가) 조건에서 $g(1)=a+\frac{\sqrt{3}}{2}=a+\cos(f(1))$ 이므로

$f(1)=\frac{\pi}{6}$ 또는 $f(1)=-\frac{\pi}{6}$ $\cdots$ ①

임을 알 수 있고,

$g(x)=ax+\cos(f(x))$을 미분하고 $x=1$을 대입하면,

(나) 조건에서 $g'(1)=a-\sin(f(1))\times f'(1)=a$ 이므로

$f(1)=0$ 또는 $f'(1)=0$ 이다.

①에서 $f(1)\neq 0$ 이므로 $f'(1)=0$ 이다.

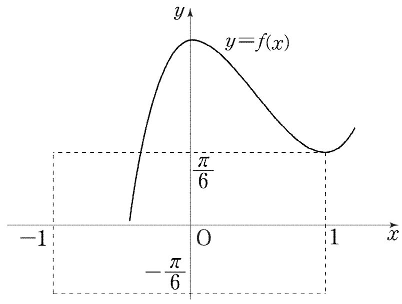
마찬가지로 (나) 조건에서

$g'(0)=a-\sin(f(0))\times f'(0)=a$ 이므로

$f(0)=0$ 또는 $f'(0)=0$ 이다.

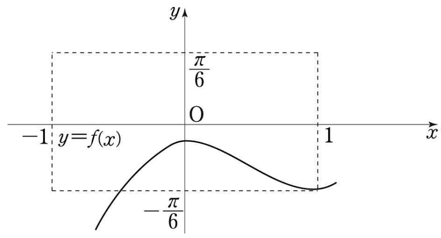
ⅰ) $f'(0)=0$ 이면, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대, $x=1$에서 극소이므로 두 가지 상황이 생긴다.

ⅰ-a) $f'(1)=0$, $f(1)=\frac{\pi}{6}$ 인 경우



구간 $[-1,\ 1]$에서 $f(x)>\frac{\pi}{6}$ 인 x값을 가지게 되므로 조건에 모순이다.

ⅰ-b) $f'(1)=0$, $f(1)=-\frac{\pi}{6}$ 인 경우



$f(x)=\frac{\pi}{12}(x-1)^2(x-\alpha)-\frac{\pi}{6}$ 에서

$f'(x)=\frac{\pi}{3}(x-1)(x-\alpha)+\frac{\pi}{6}(x-1)^2$ 이고 $f'(0)=0$ 이므로

$\alpha=-\frac{1}{2}$ 이다.

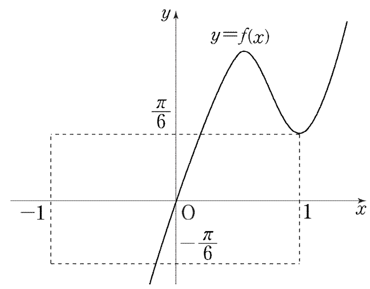
즉, $f(x)=\frac{\pi}{12}(x-1)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{\pi}{6}$ 이고,

$-1 \le x < -\frac{1}{2}$ 일 때, $f(x)<-\frac{\pi}{6}$ 이 되므로 모순이다.

ⅰ-a)와 ⅰ-b) 의 경우가 모두 모순이므로 $f'(0)\neq 0$ 이고, $f(0)=0$ 이다.

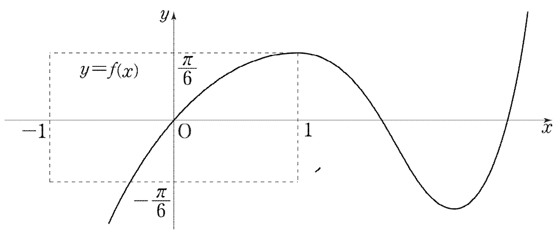
ⅱ) $f(0)=0$ 이면 함수 $f(x)$는 세 가지 상황이 생긴다.

ⅱ-a) $f'(1)=0$, $f(1)=\frac{\pi}{6}$ 인 경우



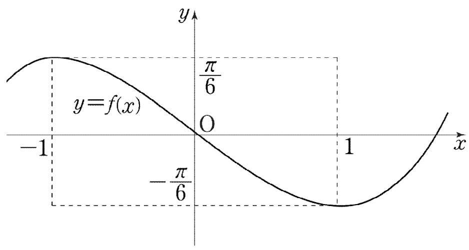
구간 $[-1,\ 1]$에서 $f(x)>\frac{\pi}{6}$ 인 x값을 가지게 되므로 조건에 모순이다.

ⅱ-b) $f(x)$가 $x=1$에서 극대인 경우



구간 $[-1,\ 0]$ 에서 $f(x)<-\frac{\pi}{6}$ 인 x 값을 가지게 되므로 조건에 모순이다.

ii-c) $f'(1)=0$, $f(1)=-\frac{\pi}{6}$ 인 경우



$f(x)+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}(x-1)^2(x-\alpha)$ 라 하면, $f(0)=0$ 이므로

$\alpha=-2$ 이다. 즉, $f(x)=\frac{\pi}{12}(x-1)^2(x+2)-\frac{\pi}{6}$ 이고

$f'(x)=\frac{\pi}{4}(x-1)(x+1)$ 이므로 $x=-1$ 에서 극댓값 $\frac{\pi}{6}$ 를

갖는다. 구간 $[-1,\ 1]$ 에서 $|f(x)|\leq\frac{\pi}{6}$ 을 만족한다.

구간 $[0,\ k]$ 에서 함수 $g(x)$ 의 역함수가 존재하려면 함수 $g(x)$ 가 구간 $[0,\ k]$ 에서 증가하거나 감소해야한다.
즉, $x=2$ 를 기준으로 $g'(x)$ 의 부호가 바뀐다. 그러므로 $g'(2)=0$ 이어야 한다.

$g'(2)=a-f'(2)\sin(f(2))=a-\frac{3\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 이므로

$a=\frac{3}{8}\pi$ 이다.

<풀어보면 좋을 기출문항>
[2019학년도 수능]

최고차항의 계수가 6π인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\dfrac{1}{2+\sin(f(x))}$이 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소이고, $\alpha\geq 0$인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5,\ \cdots$라 할 때, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\alpha_1=0$이고 $g(\alpha_1)=\frac{2}{5}$이다.
(나) $\dfrac{1}{g(\alpha_5)}=\dfrac{1}{g(\alpha_2)}+\dfrac{1}{2}$

$g'\left(-\frac{1}{2}\right)=a\pi$라 할 때, a^2의 값을 구하시오.

$\left(\text{단, } 0<f(0)<\frac{\pi}{2}\right)$ (4점)

정답 : 27

22. 정답) 10

해설)

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$에서 점근선의 방정식은

$y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$이다. $\therefore\ m^2=\frac{5}{4}\ \Rightarrow\ 8m^2=10$

23. 정답) 8

해설)

$f(x)=\ln x+4x^3$를 미분하면 $f'(x)=\frac{1}{x}+12x^2$이고 이

식을 미분하면, $f''(x)=24x-\frac{1}{x^2}$이다. $\therefore\ f\left(\frac{1}{2}\right)=8$

24. 정답) 5

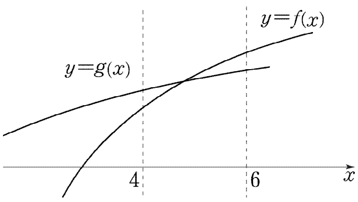
해설)

점 P의 시각 $t=2$에서의 속력은

$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{16}{2^2}\right)^2+(8-5)^2}=5$이다.

25. 정답) 45

해설)



$f(x)=2\log_2(x-2)$라 하고 $g(x)=\log_2(x+a)$라 할 때, 구간 $(4,\ 6)$에서 방정식 $\log_2(x-2)^2=\log_2(x+a)$의 근이 존재하려면 그림과 같은 상황이다.

$x=4$에서 $f(4)<g(4)$이므로 $4<a+4\ \Rightarrow\ 0<a$

$x=6$에서 $f(6)>g(6)$이므로 $16>6+a\ \Rightarrow\ 10>a$

가능한 a의 값의 범위는 $0<a<10$이므로 모든 정수 a의 값의 합은 $1+2+\cdots+9=45$이다.

26. 정답) 67

〈POINT〉

(1) 구분이 되지 않는 공이 여러 개 있을 때

$\text{확률}=\frac{\text{경우의수}}{\text{경우의수}}$로 계산하려면 수학적 확률의 전제가 근원사건의 확률은 동일하다 이므로 구분 되지 않는 여러 개의 공을 모두 다르게 봐야한다.

(2) 확률의 계산 방법은 덧셈정리 곱셈정리 여사건의 확률 세 가지 이므로 이 문제의 확률의 계산을 할 때 곱셈정리를 이용해 계산해야겠다는 판단을 해야 된다.

〈COMMENT & PLAN〉

이 문제를 해결할 때 경우의 수로 해결을 하려고하면 쓸게 왜 이렇게 많지? 라는 생각이 들 수 있다. 기출문제를 공부할 때 곱셈정리를 이용하는 순간을 정확하게 공부한 학생의 경우 곱셈정리로 해결을 할 것이다. 두 해결의 시간차이가 다소 나기 때문에 기출문제를 다양한 방법으로 공부하되 공부하면서 가장 우수한 풀이로 풀 때의 이유를 정확하게 공부해야한다.

(설계1)

$a+b=c$가 되는 케이스를 나눈다.

(설계2)

케이스에 맞게 확률을 계산한다.

해설)

총 6개의 공이 들어있는 주머니에서 3개의 공을 뽑아 나열한 순서대로 a, b, c라 할 때, $a+b=c$일 확률은 총 6개의 공이 들어있는 주머니에서 1개씩 공을 3번 뽑아서 나온 수를 차례로 a, b, c라 할 때, $a+b=c$일 확률을 구하는것과 같다.

나열한 세 수로 $a+b=c$을 만족시켜야 하므로 가능한 세 수의 조합은 ① $1+1=2$ ② $2+2=4$ 의 두 가지 조합이 가능하다.

① $1+1=2$일 때

6개의 공 중에 1을 꺼내고, 5개의 공 중에 1을 꺼내고 4개의 공 중에 2를 꺼낼 확률이므로

$\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{10}$

② $2+2=4$일 때

6개의 공 중에 2을 꺼내고, 5개의 공 중에 2을 꺼내고 4개의 공 중에 4를 꺼낼 확률이므로

$\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{60}$

따라서 문제에서 구하는 확률은 $\frac{1}{10}+\frac{1}{60}=\frac{7}{60}$

$\Rightarrow\ p+q=60+7=67$

<풀어보면 좋을 기출문항>

[2016학년도 9월 평가원]

주머니에 $1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내어 임의로 일렬로 나열하고, 나열된 순서대로 공에 적혀있는 수를 $a,\ b,\ c,\ d$라 할 때, $a \le b \le c \le d$일 확률은? (4점)

① $\frac{1}{15}$

② $\frac{1}{12}$

③ $\frac{1}{9}$

④ $\frac{1}{6}$

⑤ $\frac{1}{3}$

27. 정답) 9

<POINT>

(1) 극한+도형 문제의 핵심은 문제에서 묻는 길이 또는 넓이를 각으로 표현하는 것이다.

⇨ 각을 포함한 직각삼각형의 관찰이 핵심

(2) 여러 개의 도형이 등장하는 경우 도형이 결합되는 부분을 찾아서 관계식을 작성하거나 길이를 표현한다.

<COMMENT & PLAN>

전형적인 극한+도형 문제이다. 기출에서도 자주 봤던 문제의 소재이고, 다각형+다각형이기 때문에 난이도 측면에서도 높은 문항은 아니다. 넓이를 구해야 하므로 정사각형의 한 변의 길이를 각으로 나타내며 문제를 해결하자.

(설계1)

$\triangle \mathrm{ABC}$에서 $\overline{\mathrm{BC}}$의 길이를 각으로 나타낸다.

(설계2)

$\triangle \mathrm{BCD}$이 이등변 삼각형이기 때문에 $\overline{\mathrm{BD}}$의 길이를 각으로 표현한다.

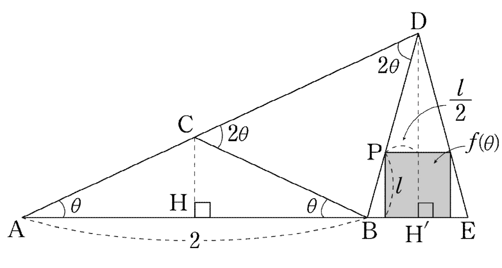
(설계3)

$\triangle \mathrm{BDE}$에서 D에서 $\overline{\mathrm{BE}}$에 수선의 발을 내려 직각삼각형을 만든 후 정사각형의 한변의 길이를 구하기 위해 닮음이나 길이를 이용해 관계식을 작성한다.

(설계4)

표현된 넓이의 θ의 개수를 확인하여 실수없이 극한값을 구한다.

해설)



두 점 C, D에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 각각 H, H'라 하자. $\overline{\mathrm{AH}}=1$이므로 $\overline{\mathrm{BC}}=\frac{1}{\cos\theta}$이고,

$\overline{\mathrm{BD}}=\frac{1}{\cos\theta}$이다.

또한 $\angle \mathrm{BCD}=\angle \mathrm{CAH}+\angle \mathrm{CBH}=2\theta$이며,

$\angle \mathrm{DBH}'=\angle \mathrm{BDC}+\angle \mathrm{DAB}=3\theta$이다.

정사각형과 선분 BD가 만나는 점을 P라 하고,

정사각형의 한 변의 길이를 l이라 하자.

$\overline{\mathrm{DP}}\times\cos3\theta=\frac{1}{2}l$, $\overline{\mathrm{BP}}\times\sin3\theta=l$ 이고,

$\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{DP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 이므로

$\frac{1}{\cos\theta}=\overline{\mathrm{DP}}+\overline{\mathrm{BP}}=l\times\left(\frac{1}{2\cos3\theta}+\frac{1}{\sin3\theta}\right)$ 을 만족한다.

그러므로 $l=\frac{1}{\cos\theta}\times\left(\frac{2\sin3\theta\cos3\theta}{\sin3\theta+2\cos3\theta}\right)$ 이다.

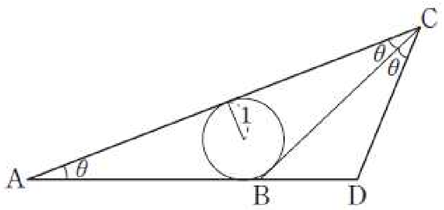
$f(\theta)=l^2$ 이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{\theta^2}\times\frac{1}{\cos^2\theta}\times\left(\frac{2\cos3\theta\sin3\theta}{\sin3\theta+2\cos3\theta}\right)^2=9$$

<풀어보면 좋을 기출문항>

[2015학년도 수능]

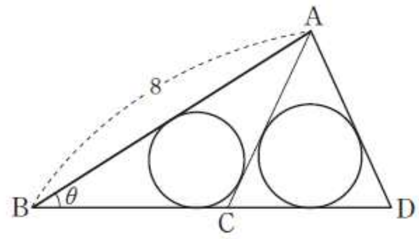
그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에 외접하고 $\angle\mathrm{CAB}=\angle\mathrm{BCA}=\theta$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 선분 AB의 연장선 위에 점 A가 아닌 점 D를 $\angle\mathrm{DCB}=\theta$가 되도록 잡는다. 삼각형 BDC의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to0+}\{\theta\times S(\theta)\}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) (4점)



① $\frac{2}{3}$　② $\frac{8}{9}$　③ $\frac{10}{9}$
④ $\frac{4}{3}$　⑤ $\frac{14}{9}$

[2014학년도 7월 교육청]

$\overline{\mathrm{AB}}=8$, $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$, $\angle\mathrm{ABC}=\theta$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 그림과 같이 선분 BC의 연장선 위에 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AD}}$인 점 D를 잡는다. 삼각형 ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_1, 삼각형 ACD에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_2라 할 때, $\lim_{\theta\to0+}\frac{r_1r_2}{\theta^2}$의 값은? (4점)



① 6　② 7　③ 8
④ 9　⑤ 10

28. 정답) 21

<POINT>

(1) 상황에 따른 경우의 수 구할 때 선택해야할 개념

❶ 구분O ⇨ 구분O : 중복순열

❷ 구분X ⇨ 구분O : 중복조합

❸ 구분O ⇨ 구분X : 집합의 분할

❹ 구분X ⇨ 구분X : 자연수의 분할

(2) 집합의 분할의 경우 조분할 경우의 수 구하는 방법을 이용해 해결할 수 있지만, 자연수의 분할 경우는 경우를 직접 세야 하므로 평상시에 모의고사에서 실수 없이 세는 것을 훈련해야 한다.

<COMMENT & PLAN>

28번에 출제되는 경우의 수 문제 또는 확률의 문제는 항상 정답률이 낮다. 학생들과 상담을 해보면 거의 대부분 틀린 이유를 실수라고 대답하지만 그게 실력이라는 생각을 해야 한다. 경우의 수에서 중요한 것은 빠짐없이 중복 없이 세는 것인데 실수라는 것은 용납이 되지 않는 부분이기 때문이다. 실수 없이 문제를 해결하는 훈련을 하고, 상황에 맞게 바로바로 이용해야 할 개념 정리를 잘 해두자. 그리고 평상시에 주관식으로 훈련하고, 다양하게 풀어 검토하는 습관까지 길러 본인 스스로 정답률을 끌어올리자.

(설계1)

볼펜을 필통에 넣는 것에 따라 케이스를 분류한다.

(설계2)

볼펜은 한 필통에 넣는 경우 자연수의 분할로 문제를 해결해야하고, 볼펜을 두 필통에 나눠 담는 경우 중복조합을 이용해서 해결한다. 사실 그냥 세는 것도 시간이 오래 걸리진 않는다.. 하지만 검토 차원에서 중복조합으로 식을 세워 정답의 안정성을 올려놓는 게 좋지 않을까..?

해설)

ⅰ) 한 필통에 볼펜 2개를 모두 넣는 경우

남은 연필 9개를 3개의 필통에 나누어 담으면 된다.
이미 2개의 볼펜이 들어있는 필통 이외의 나머지 2개의 필통은 구분할 수 없다. 그러므로 이미 볼펜이 들어있는 필통에 연필을 넣은 개수에 따라 나누어 살펴볼 수 있다.

ⅰ-a) 이미 2개의 볼펜이 들어있는 필통에 1개의 연필을 넣는 경우 자연수 8을 두 개의 홀수로 분할하는 방법의 수와 같으므로 $8=(1+7)=(3+5)$으로 2(가지)이다.

ⅰ-b) 이미 2개의 볼펜이 들어있는 필통에 3개의 연필을 넣는 경우 자연수 6를 두 개의 홀수로 분할하는 방법의 수와 같으므로 $6=(1+5)=(3+3)$으로 2(가지)이다.

ⅰ-c) 이미 2개의 볼펜이 들어있는 필통에 5개의 연필을 넣는 경우 자연수 4를 두 개의 홀수로 분할하는 방법의 수와 같으므로 $4=(1+3)$으로 1(가지)이다.

ⅰ-d) 이미 2개의 볼펜이 들어있는 필통에 7개의 연필을 넣는 경우 자연수 2를 두 개의 홀수로 분할하는 방법의 수와 같으므로 $2=(1+1)$으로 1(가지)이다.

ⅰ-a), ⅰ-b), ⅰ-c), ⅰ-d)를 종합하면,
ⅰ)을 만족하는 경우의 수는 $2+2+1+1=6$(가지)이다.

ⅱ) 볼펜 2개를 두 필통에 나누어 담은 경우

볼펜의 색이 서로 다르므로 세 필통이 서로 구분된다.
볼펜이 들어있는 두 필통에 각각 짝수개의 연필이 들어가면 되고, 볼펜이 없는 필통에는 홀수개의 연필이 들어가면 된다.
즉, $2n+2m+(2l+1)=9$를 만족시키는 모든 음이 아닌 세 정수 n, m, l 순서쌍 $(n,\ m,\ l)$의 개수를 구하는 것과 같다.
$2n+2m+(2l+1)=9$을 정리하면, $n+m+l=4$이므로
${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4=15$(가지)이다.

ⅰ)과 ⅱ)를 종합하면, 총 방법의 수는
$6+15=21$(가지)이다.

<풀어보면 좋을 기출문항>

[2019학년도 6월 평가원]

자연수 n에 대하여 $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 a_n이라 하자. 다음은 $\sum_{n=1}^{8} a_n$의 값을 구하는 과정이다.

> 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d$가 $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키려면 음이 아닌 정수 k에 대하여
> $c+d=2k$이어야 한다.
> $c+d=2k$인 경우는 (1) 음이 아닌 정수 $k_1,\ k_2$에 대하여
> $c=2k_1,\ d=2k_2$인 경우이거나 (2) 음이 아닌 정수 $k_3,\ k_4$에 대하여
> $c=2k_3+1,\ d=2k_4+1$인 경우이다.
> (1) $c=2k_1,\ d=2k_2$인 경우:
> $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 $\boxed{(가)}$이다.
> (2) $c=2k_3+1,\ d=2k_4+1$인 경우:
> $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 $\boxed{(나)}$이다.
> (1), (2)에 의하여 $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수 a_n은
> $$a_n=\boxed{(가)}+\boxed{(나)}$$
> 이다. 자연수 m에 대하여
> $$\sum_{n=1}^{m}\boxed{(나)}={}_{m+3}\mathrm{C}_4$$
> 이므로 $\sum_{n=1}^{8} a_n=\boxed{(다)}$
> 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 r라 할 때, $f(6)+g(5)+r$의 값은? (4점)

① 893　② 918　③ 943
④ 968　⑤ 993

29. 정답) 59

<POINT>

(1) 한 정점으로부터 거리가 같은 점들의 모임

⇨ 보조도형으로 원을 도입.

; 길이가 같은 여러 개의 선분이 나와도 원을 도입할 수 있다.

(2) 벡터의 내적이 등장하면

❶ 대수적 정의

❷ 기하 : 정사영

❸ 성분도입

⇨ 위 세 가지로 주어진 식의 해결이 힘든 경우 벡터를 분해해서 다룰 수 있다.

❶ 원 또는 구의 중심

❷ 수선의발

❸ 중점 또는 무게중심

<COMMENT & PLAN>

29번 문제치고 쉽게 느낄 수 있으나 요즘 29번 문제의 난이도가 높지는 않으므로 현 평가원 난이도로 생각했을 때 가장 적절 수준에서 출제가 된 문항이다. 우선 앞 기하 문제에서도 이야기 했듯이 문제에서 제시된 점들의 위치를 결정해야한다. 마지막으로 내적 계산을 위해 정삼각형에서 각에 대한 체크와 벡터가 이루는 각에 대한 체크도 놓치지 말자.

(설계1)

등장한 점들의 위치 결정

(설계2)

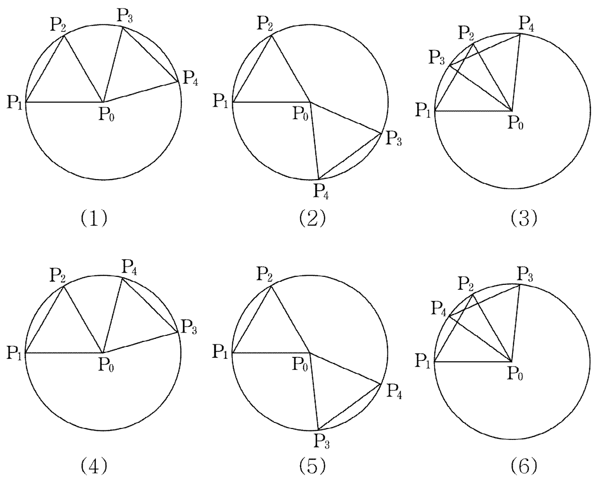
삼각비는 길이에 대한 비율이고, 반지름은 주어져있지 않기 때문에 미지수로 설정해서 각에 대한 삼각비를 구한다. 그 이후 묻는 값을 구하기 위해 필요한 값을 구한다.

해설)

$|\overrightarrow{\mathrm{P_0P}_n}|=|\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}|=|\overrightarrow{\mathrm{P_3P_4}}|$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$

이므로 점 $\mathrm{P_0}$를 중심이고 반지름이 $|\overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}}|=r$인 원 위에 네 점 $\mathrm{P_1},\ \mathrm{P_2},\ \mathrm{P_3},\ \mathrm{P_4}$이 있고 $|\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}|=|\overrightarrow{\mathrm{P_3P_4}}|$이므로 두 삼각형 $\mathrm{P_0P_1P_2}$, $\mathrm{P_0P_3P_4}$은 모두 정삼각형이다.

그러므로 세 점 $\mathrm{P_0},\ \mathrm{P_1},\ \mathrm{P_2}$의 위치를 고정한 뒤 남은 두 점 $\mathrm{P_3},\ \mathrm{P_4}$의 위치를 파악할 수 있다.



대략적으로 가능한 케이스를 분류해 보면 위 그림과 같이 6가지로 볼 수 있다.

$\overrightarrow{P_2P_3}\cdot\overrightarrow{P_1P_4}>\left|\overrightarrow{P_2P_3}\right|^2$을 만족해야하는데,

(4), (5), (6)의 경우 $\left|\overrightarrow{P_2P_3}\right|=\left|\overrightarrow{P_1P_4}\right|$이고, 두 벡터 $\overrightarrow{P_2P_3}$, $\overrightarrow{P_1P_4}$가 이루는 각을 θ라 하면

$-1\le\cos\theta\le 1$이므로

$\overrightarrow{P_2P_3}\cdot\overrightarrow{P_1P_4}=\left|\overrightarrow{P_2P_3}\right|\cdot\left|\overrightarrow{P_1P_4}\right|\cos\theta\le\left|\overrightarrow{P_2P_3}\right|^2$이다.

즉, (4), (5), (6)의 경우는 모순이다.

(1), (2), (3)의 경우 두 벡터 $\overrightarrow{P_2P_3}$, $\overrightarrow{P_1P_4}$가 평행하다.

그러므로

$\overrightarrow{P_2P_3}\cdot\overrightarrow{P_1P_4}>\left|\overrightarrow{P_2P_3}\right|^2$

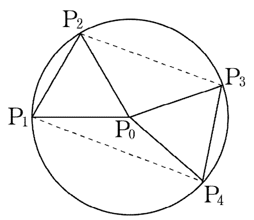
$\Leftrightarrow\ \left|\overrightarrow{P_2P_3}\right|\cdot\left|\overrightarrow{P_1P_4}\right|\cos\theta>\left|\overrightarrow{P_2P_3}\right|^2$

인데, (3)의 경우 두 벡터 $\overrightarrow{P_2P_3}$, $\overrightarrow{P_1P_4}$의 방향이 반대이므로 $\cos\theta=-1$이고 모순이다.

(1)과 (2)의 경우 모두 두 벡터 $\overrightarrow{P_2P_3}$, $\overrightarrow{P_1P_4}$의 방향이 같으므로 $\cos\theta=1$이다.

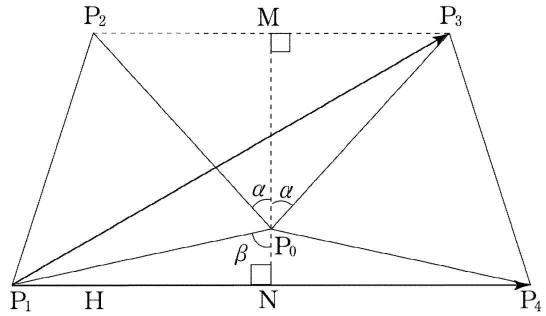
즉, $\left|\overrightarrow{P_2P_3}\right|\cdot\left|\overrightarrow{P_1P_4}\right|>\left|\overrightarrow{P_2P_3}\right|^2\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{P_1P_4}\right|>\left|\overrightarrow{P_2P_3}\right|$

를 만족시켜야 하므로 (1)의 경우에 다섯 점 P_0, P_1, P_2, P_3, P_4이 $\overrightarrow{P_2P_3}\cdot\overrightarrow{P_1P_4}>\left|\overrightarrow{P_2P_3}\right|^2$을 만족한다.



$r=\left|\overrightarrow{P_0P_4}\right|=\dfrac{\sqrt{7}}{4}\left|\overrightarrow{P_2P_3}\right|$이므로 $r<\left|\overrightarrow{P_2P_3}\right|=\dfrac{4}{\sqrt{7}}r$이다.

그러므로 $\angle P_2P_0P_3>\dfrac{\pi}{3}$이다.



점 P_0에서 두 선분 P_2P_3, P_1P_4에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하고, $\angle P_2P_0M=\alpha$라 하자.

$r=\left|\overrightarrow{P_0P_4}\right|=\dfrac{\sqrt{7}}{4}\left|\overrightarrow{P_2P_3}\right|$에서

$\overline{P_2M}=\dfrac{1}{2}\overline{P_2P_3}=\dfrac{2}{\sqrt{7}}r$이므로 $\sin\alpha=\dfrac{\overline{P_2M}}{\overline{P_0P_2}}=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$이다.

$\Rightarrow\ \sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$, $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

$\angle P_1P_0N=\beta$라 하면, $\beta=\pi-\dfrac{\pi}{3}-\alpha=\dfrac{2}{3}\pi-\alpha$이고,

$\left|\overrightarrow{P_1P_4}\right|=2\overline{P_1N}=2r\sin\beta$이다.

$$\sin\beta=\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\alpha\right)=\sin\frac{2}{3}\pi\cos\alpha-\cos\frac{2}{3}\pi\sin\alpha$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$=\frac{5}{2\sqrt{7}}$$

이므로

$\left|\overrightarrow{P_1P_4}\right|=2\overline{P_1N}=2r\sin\beta=\dfrac{5}{\sqrt{7}}r$

$\overrightarrow{P_1P_4}\cdot\overrightarrow{P_1P_3}=\dfrac{q}{p}\times\left|\overrightarrow{P_0P_1}\right|^2$을 정리하면,

$\overrightarrow{P_1P_4}\cdot\left(\overrightarrow{P_1P_0}+\overrightarrow{P_0P_3}\right)=\dfrac{q}{p}\times r^2$

$\Leftrightarrow\ 2\left|\overrightarrow{P_1N}\right|^2+2\left|\overrightarrow{P_1N}\right|\times\left|\overrightarrow{P_0P_3}\right|\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\dfrac{q}{p}r^2$

$\Leftrightarrow\ 2r^2\sin^2\beta+2r\sin\beta\times r\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\dfrac{q}{p}r^2$

$\Leftrightarrow\ 2\sin^2\beta+2\sin\beta\times\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\dfrac{q}{p}$

이다. $\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$, $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$, $\sin\beta=\dfrac{5}{2\sqrt{7}}$을

대입하면, $\dfrac{q}{p}=2\times\left(\dfrac{5}{2\sqrt{7}}\right)^2+2\times\dfrac{5}{2\sqrt{7}}\times\dfrac{2}{\sqrt{7}}=\dfrac{45}{14}$이다.

$\therefore\ p+q=59$

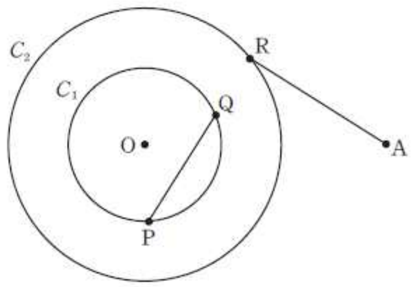
<풀어보면 좋을 기출문항>

[2018학년도 7월 교육청]

그림과 같이 평면 위에 $\overline{\mathrm{OA}}=2\sqrt{11}$ 을 만족하는 두 점 O, A와 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 각각 $\sqrt{5}$, $\sqrt{14}$인 두 원 C_1, C_2가 있다. 원 C_1 위의 서로 다른 두 점 P, Q와 원 C_2 위의 점 R가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 양수 k에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{QR}}$
> (나) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AR}}=0$이고 $\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{AR}}=2:\sqrt{6}$

원 C_1 위의 점 S에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AS}}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값을 구하시오. (단, $\frac{\pi}{2}<\angle\mathrm{ORA}<\pi$) (4점)



정답 : 486

[2018학년도 6월 평가원]

좌표평면에서 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 한 점을 A, 중심이 O이고 반지름의 길이가 3인 원 위의 점을 B라 할 때, 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=3\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$
> (나) $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2=20$

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최솟값은 m이고, 이때 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=k$이다. $m+k^2$의 값을 구하시오. (4점)

정답 : 7

30. 정답) 31

<POINT>

(1) 미분가능이 조건인 경우 두 가지를 체크한다.

❶ 연속

❷ 좌 미분계수 = 우 미분계수

(2) 30번 급의 문제에서 적분 값을 구하는 경우 구간에 따라 함수가 정의가 될 수 있다는 의심을 해서 문제를 해결한다.

<COMMENT & PLAN>

과거 기출 문제를 변형해서 제작된 문제이다. 교육청 기출이지만 기출 30번에 한번 등장한 소재로 구간에 따른 함수의 관찰과 정답을 도출하기 까지 집중있게 계산하는 것이 중요한 문항이다. 요즘 킬러의 난이도가 낮아지고 있지만 킬러문항이 다른 준 킬러 문항보다 해석이 어렵다기 보다 계산의 호흡이 긴 경향이 있어서 이런 스타일의 문항을 많이 훈련하는 것은 중요하다는 생각이 든다.

(설계1)

미분가능 조건으로 함수 $f(x)$를 완벽하게 결정한다.

(설계2)

특이하게 정사각형의 한 변의 길이가 1이 되는 경우를 발견하고 그에 따라 정사각형 꼭짓점의 y좌표가 최소가 되는 순간을 구하는 함수가 달라지므로 한 변의 길이가 1이 되는 순간을 기준으로 $g(t)$를 결정한다.

(설계3)

$g(t)$를 구간에 따라 완벽하게 결정한 후 적분값을 계산한다.

해설)

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이다.

$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}f(x)$ $\Rightarrow$ $1=|4+b|$ 이므로

$b=-5$ 또는 $b=-3$이다.

$i)$ $b=-5$인 경우

방정식 $2^{-x+2}-5=0$의 근은 $x=2-\log_2 5<0$이므로

$x\geq0$일 때 $2^{-x+2}-5<0$이다.

따라서 $x\geq0$일 때

$f(x)=|2^{-x+2}-5|=5-2^{-x+2}$이므로

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\begin{cases}-2\ln a\times a^x & (x<0)\\ \ln2\times2^{-x+2} & (x>0)\end{cases}$$

이고, 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$-2\ln a=4\ln 2$ $\Rightarrow$ $a=\dfrac{1}{4}$이다.

이때 $a>1$이어야 하므로 모순이다.

$ii)$ $b=-3$인 경우

방정식 $2^{-x+2}-3=0$의 근은 $x=2-\log_2 3>0$이므로

$0\leq x<2-\log_2 3$일 때 $2^{-x+2}-3>0$이다.

따라서 $0\leq x<2-\log_2 3$일 때

$f(x)=|2^{-x+2}-3|=2^{-x+2}-3$이므로 함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\begin{cases}-2\ln a\times a^x & (x<0)\\ -\ln2\times2^{-x+2} & (0<x<2-\log_2 3)\end{cases}$$

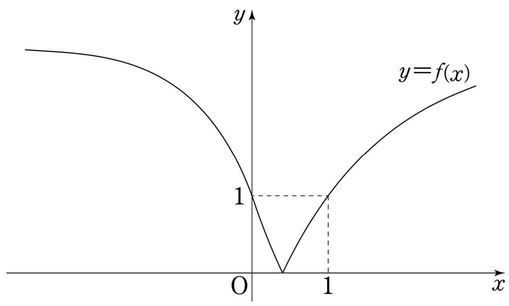
이고, 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$-2\ln a=-4\ln 2$ $\Rightarrow$ $a=4$이다.

따라서 두 상수 a, b의 값은 $a=4$, $b=-3$이고, 함수

$$f(x)=\begin{cases}-2\times4^x+3 & (x<0)\\ |2^{-x+2}-3| & (x\geq0)\end{cases}$$

의 그래프는 다음과 같다.

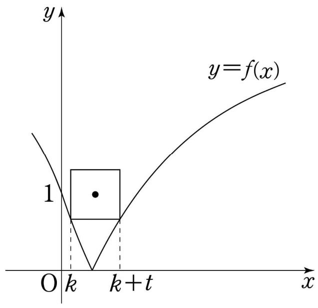


함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$이 만나는 점의 좌표는 $3-2^{-x+2}=1$에서 $x=1$이다.

그러므로 $0<t\leq1$이면 한 변의 길이가 t이고 점 P의 y좌표가 최소가 되는 정사각형의 두 꼭짓점은 함수 $f(x)$의 그래프 위에 있고, 나머지 두 꼭짓점은 제1사분면 위에 있으며

$t>1$이면 한 변의 길이가 t이고 점 P의 y좌표가 최소가 되는 정사각형의 두 꼭짓점은 함수 $y=f(x)$의 그래프 위에 있고, 제1사분면과 제2사분면에 하나씩 있다.

(Ⅰ) $0 < t \leq 1$일 때



정사각형과 곡선 $y=f(x)$가 만나는 두 꼭짓점의 x좌표를 각각 k, $k+t$라 하면 두 꼭짓점의 y좌표가 같으므로 $f(k)=f(k+t) \;\Rightarrow\; 2^{-k+2}-3=3-2^{-k-t+2}$이다.

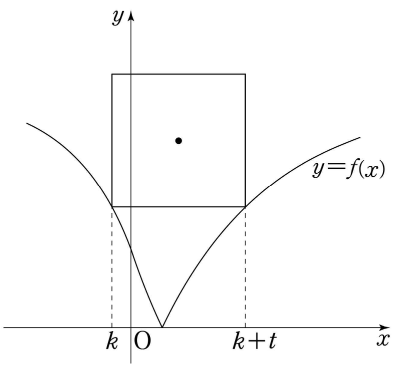
식을 정리하면, $2^{-k+2}\times\left(1+2^{-t}\right)=6$,

$2^{-k+2}=\dfrac{6}{1+2^{-t}}$ 이므로

$f(k)=2^{-k+2}-3=\dfrac{6}{1+2^{-t}}-3$이다. 이때 정사각형의 두 대각선의 교점의 y좌표는 $f(k)+\dfrac{t}{2}$ 이므로

$g(t)=\dfrac{6}{1+2^{-t}}-3+\dfrac{t}{2}$ 이다.

(Ⅱ) $t>1$일 때



정사각형과 곡선 $y=f(x)$가 만나는 두 꼭짓점의 x좌표를 각각 k, $k+t$라 하면 두 꼭짓점의 y좌표가 같으므로 $f(k)=f(k+t) \;\Rightarrow\; -2\times4^{k}+3=3-2^{-k-t+2}$이다.

식을 정리하면, $2^{2k+1}=2^{-k-t+2}$에서 $k=\dfrac{1-t}{3}$ 이므로

$f(k)=-2\times4^{k}+3=-2\times4^{\frac{1-t}{3}}+3$이다. 이때 정사각형의 두 대각선의 교점의 y좌표는 $f(k)+\dfrac{t}{2}$ 이므로

$g(t)=-2\times4^{\frac{1-t}{3}}+3+\dfrac{t}{2}$ 이다.

그러므로 함수 $g(t)$는

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{6}{1+2^{-t}}+\dfrac{t}{2}-3 & (0\leq t\leq 1)\\[2ex] -2\times4^{\frac{1-t}{3}}+\dfrac{t}{2}+3 & (t>1)\end{cases}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}&\int_0^4 g(t)\,dt\\
&=\int_0^1 g(t)\,dt+\int_1^4 g(t)\,dt\\
&=\int_0^1\left(\frac{6}{1+2^{-t}}+\frac{t}{2}-3\right)dt+\int_1^4\left(-2\times4^{\frac{1-t}{3}}+\frac{t}{2}+3\right)dt\\
&=\int_0^1\frac{6\times2^t}{2^t+1}\,dt+\int_1^4-2\times4^{\frac{1-t}{3}}\,dt+\int_0^4\frac{t}{2}\,dt+\int_2^4 3\,dt\\
&=\left[\frac{6}{\ln2}\ln\left(2^t+1\right)\right]_0^1+\left[\frac{6}{\ln4}\times4^{\frac{1-t}{3}}\right]_1^4+\left[\frac{1}{4}t^2\right]_0^4+6\\
&=\frac{6(\ln3-\ln2)}{\ln2}+\frac{3}{\ln2}\times\left(-\frac{3}{4}\right)+4+6\\
&=\frac{16\ln2+24\ln3-9}{4\ln2}\end{aligned}$$

$p=16$, $q=24$, $r=-9$이므로 $p+q+r=31$이다.

<풀어보면 좋을 기출문항>

[2016학년도 4월 교육청]

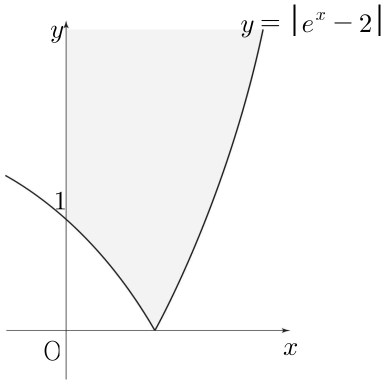
좌표평면에서 x, y에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq |e^x - 2| \end{cases}$$

가 나타내는 영역을 D라 하자. 양의 실수 t에 대하여 영역 D의 서로 다른 네 점을 꼭짓점으로 하는 정사각형 A가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 정사각형 A의 한 변의 길이는 t이다.
(나) 정사각형 A의 한 변은 x축과 평행하다.

정사각형 A의 두 대각선의 교점의 y좌표의 최솟값을 $f(t)$라 할 때, $f'(\ln 2) + f'(\ln 5) = \dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) (4점)



정답 : 71