기대 모의고사 수학 나형
<2020 6평 대비 모의고사> 해설

이 교재의 문제가 포함되어 있는 타 교재 혹은 수업물이 있다면 kidae6150@naver.com 메일 부탁드립니다. (신고자에게 합의금 일부 지급)

문제	답	문제	답	문제	답
1	④	11	②	21	①
2	④	12	①	22	3
3	③	13	①	23	20
4	⑤	14	②	24	10
5	⑤	15	⑤	25	27
6	②	16	③	26	15
7	④	17	④	27	75
8	②	18	⑤	28	8
9	⑤	19	①	29	218
10	②	20	①	30	16

<예상 등급컷 및 출판계획 소개>

① 김기대 T 소개

- 고려대학교 수학과 13 / 대치 오르비 출강
- 수학 실전모의고사 '기대모의고사' 저자 5년차
- 수능수학 3회 연속 가형 100점

② 저자와 검토진이 예측한 등급컷

1등급 : 88 / 2등급 : 78 /3등급 : 66

본 시험지/해설지가 추가로 필요한 학생들은 orbi.kr에서 '기대모' 검색해서 다운받을 수 있습니다.

③ 기대모의고사 출판계획

Volume	출판시기	교재 컨셉	출제목표 1컷
Vol.1 가/나형 (ver. 2020) 3회분	6월~7월	* 최신문항+ 공모문항 * 최근 수능에 제일 어울리는, 트렌디한 모의	88~92
Vol.2 가/나형 (ver. 2020) 3~4회분	7월~8월	* 역대 기대모 최우수문항 * 참신한 문제/특이상황 多	88~92 (예정)
Vol.1은 新문항과 오르비 공모전을 통해 선정된 문항들로 구성됩니다.			
Vol.3은 미정이며, Vol. 1, 2, 3는 한 문항도 겹치지 않습니다.			

<2020 김기대T 강의 커리큘럼>

현 시대의 수험생들은 콘텐츠의 홍수에 살고 있습니다.
이 홍수에 아무 생각 없이 몸을 맡기면, 통제불가능한 상황이 벌어지죠.

수많은 수학 콘텐츠를 효율적으로 공부할 수 없을까란 니즈로부터 태어난 강좌가 바로 Best of Best (BoB) 입니다.
본 강의는 N제와 실모로 이루어져 있으며, 좋은 교재 중에서도 특히 좋은 문항만 선별하여 풀기 때문에 학생들에게 가성비와 시성비를 선물하는 강의입니다.

문의) 대치 오르비학원 ☎ 02-3454-0207

BoB N제 시즌 1 이과 6/9(일) 대치 오르비학원 개강 **매주 일요일 13:30~17:00 / 총 4회**	
준킬러가 어려워지고 있는 현 추세에 맞춰 준킬러를 탄탄하게 풀도록 해주고, 그동안 이해하지 못했던 초고난도 기출문항을 쉽게 풀어주는 문제풀이 수업입니다.	교재) 고퀄N제 (FIM) 선별교재 추천등급) 2등급 ~ 4등급

⤵

BoB N제 시즌 2 이과 (이과 7월 중순 개강예정)	
시즌 1에서 강조하는 '탄탄한 준킬러 해결력'을 유지한 채 킬러문항 분석법을 강화하는 수업입니다.	교재) 오르비교재 우수문항 추천등급) 1등급 끝 ~ 4등급

⤵

BoB 실전모의고사 시즌 1, 2 문과 (문과, 이과 8월 중순 개강예정)	
N제는 그렇다쳐도, 수학 실전모의고사는 정말 너무 많습니다. 그래서, 오르비에서 출판되는 실모 중에서 반드시 풀어야하는 회차를 우선적으로 풀어주는 강의를 개설합니다.	**주교재)** 오르비 실모 우수회차 **부교재)** 이외 회차 중 우수문항 컬렉션 **추천등급)** 1등급 끝 ~ 4등급

⤵

수리논술 Final	
학교 미정 (한양대, 인하대 유력)	학교별기출 + 예상문제

1. $3^{-1}\times 9^2 = 3^3 = 27.$

2. $A-B=\{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$이므로 $n(A-B)=4$

3. $y=\dfrac{ax+1}{x-2}=a+\dfrac{2a+1}{x-2}$ 이므로, 점근선의 교점은 $(2,\ a)$이다.

따라서 $b=2,\ a=3$이므로 $a+b=5$이다.

4. $a_4=r^3a_1=8a_1$이므로 $r=2$이다.

따라서 $\dfrac{a_6}{a_2}=r^4=16$이다.

5. x를 t에 대하여 미분하면 속도 $v(t)$가 나온다.
$v(t)=2t-4$이고, 점 P가 움직이는 방향을 바꿀 때는 속도의 부호가 달라지므로, $t=2$일 때 움직이는 방향이 바뀐다.

6. $(ax+2)^4=(ax)^4+{}_4\mathrm{C}_1(ax)^3 2^1+\cdots$ 이므로 x^3의 계수는 $8a^3$이다.
이 값이 64여야 하므로 $a^3=8 \Rightarrow a=2$ 이다.

7. $B^C=\{2,\ 3\}$이므로 $A\cup B^C=A=\{1,\ 2,\ 3\}$이다. 따라서 $\left(A\cup B^C\right)^C=\{4,\ 5\}$이므로 원소의 합은 9이다.

8. $\log_4 a^3=2\times\log_2 a+1=\log_2\left(2a^2\right)=\log_4\left(4a^4\right)$ 이므로
$4a^4=a^3,\ a=\dfrac{1}{4}$임을 알 수 있다.

9. $\mathrm{P}(A^C)=2\mathrm{P}(B)$에서 $1-\mathrm{P}(A)=2\mathrm{P}(B)$,
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{8}$ ($\because$독립) 이므로 두 식을 $\mathrm{P}(A)$로 정리해주면 $\left(\mathrm{P}(A)-\dfrac{1}{2}\right)^2=0$. 따라서 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{2}$이다.

10. 그래프를 통해 $x=0$에서의 우극한은 3, $x=-1$에서의 좌극한은 -1임을 알 수 있다. 따라서 $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)+\lim\limits_{x\to -1-}f(x)=2$

11. $\sum\limits_{k=1}^{5}\left(a_k+1\right)^2=\sum\limits_{k=1}^{5}\left\{\left(a_k\right)^2+2a_k+1\right\}=\sum\limits_{k=1}^{5}\left(a_k\right)^2+2\sum\limits_{k=1}^{5}a_k+5$
이므로 정답은 $25+10+5=40$이다.
(주의!! $\sum\limits_{k=1}^{5}1$은 1이 아니고 5이다.)

12. $9=5+1+1+1+1$
$=4+2+1+1+1$
$=3+3+1+1+1$
$=3+2+2+1+1$
$=2+2+2+2+1$ 중 1, 2를 포함한 분할은 3가지이다.
(참고로, $9-(1+2)=6$을 자연수 3개로 분할하는 문제와 같다.)

13. E, Y, E, C, O, N, T, A, C, T에는 E, C, T가 2개씩, Y, O, N, A가 1개씩 있으므로, 10개의 문자를 모두 배열하여 만들 수 있는 문자열의 개수는 $\dfrac{10!}{2!2!2!}$.
이 중 두 개의 E가 모두 이웃한 문자열의 개수는 E 2개를 하나로 본다면 $\dfrac{9!}{2!2!}$으로 계산할 수 있으므로, $\dfrac{\frac{9!}{2!2!}}{\frac{10!}{2!2!2!}}=\dfrac{1}{5}$이다.

14. 문제에서 제시된 수열의 귀납적 정의에 의하여
$a_6=2a_3=2(a_1+3),\ a_8=2a_4=4a_2=8a_1$ 이므로
$a_6+a_8=10a_1+6=26$에서 $a_1=2$.

따라서 $a_{12}=2a_6=4a_3=4(a_1+3)=20$이다.

15. $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$이므로 $x=0,2$에서 각각 극댓값, 극솟값을 가진다. $f(0)=0$ (참고로 $x=0$은 $f(x)=0$의 중근이다.), $f(2)=-4,\ f(3)=0$이다.

만약 a가 3이하라면, 최댓값은 0이고 최솟값은 음수이므로 합이 12(양수) 가 나올 수 없다.
따라서 a는 3보다 큰 수여야 하며, 그 때의 최댓값은 $f(a)$, 최솟값은 극솟값인 $f(2)=-4$이다.

따라서 $f(a)+f(2)=12 \Rightarrow f(a)=a^3-3a^2=16$에서
$(a-4)(a^2+a+4)=0$이므로 $a=4$이다.

16. $S_n = \dfrac{3n+1}{n}$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 3$으로 수렴한다.

즉, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$이 수렴하므로 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$이어야 한다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n - a_n}{1+a_n} = \dfrac{3-0}{1+0} = 3$이다.

출제자의 한마디
S_n이 주어졌다고 $S_n - S_{n-1} = a_n$을 무조건 구하고 보는 '기계적 풀이'는 지양하도록 하자. 문제에서 묻고 있는 것이 무엇인지 정확히 파악한 후, 필요한 정보만으로 문제들을 풀 수 있도록 훈련하는 것이 중요하다.

17. 정사각형 $AB_2C_2D_2$의 한 변의 길이를 l이라 하면 선분 AC_2의 길이는 $\sqrt{2}l$이다.
또한 선분 C_2C_1의 길이는 부채꼴의 반지름의 길이인 $\sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$이고 AC_1의 길이는 $\sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$ 이므로 $\sqrt{2}l + \sqrt{10} = 3\sqrt{2}$이다. 따라서 $l = 3-\sqrt{5}$.

수열 $\{S_n\}$의 첫 번째 항은 정사각형 $AB_1C_1D_1$의 넓이인 9이고

공비는 $\left(\dfrac{l}{3}\right)^2 = \dfrac{14-6\sqrt{5}}{9}$이므로

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n = \dfrac{9}{1-\dfrac{14-6\sqrt{5}}{9}} = \dfrac{81}{6\sqrt{5}-5} = \dfrac{81}{155}(6\sqrt{5}+5)$ 이다.

18. $840 = 2^3\times3\times5\times7$이므로, $abcd = 840$을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d)은 ${}_4H_3 \times ({}_4C_1)^3 = 1280$이다.
(추가설명 : ${}_4H_3$은 문자 4개 중 중복을 허락하여 3개를 고른 후, 골라진 횟수만큼 소인수 2를 부여하는 과정이다. 뒤의 ${}_4C_1$은 각각 3, 5, 7을 가질 문자를 4개 중 하나 선택해주는 것!)

이 중 등비수열을 이루는 숫자구성이 있는 경우를 빼줘야 한다.

a, b, c, d중 임의로 a, b, c가 등비수열을 이룬다고 가정하면
등비중항에 의하여 $b^2 = ac$이고, 따라서 $b^3d = 840$이다.
즉, 등비중항 b가 가능한 값은 1, 2 뿐이므로, 이 때 케이스를 나눠 구하도록 하자.

$i)$ 등비중항이 1일 때,
나머지 두 항은 무조건 1, 1이어야 하므로
a, b, c, d는 1 3개와 840 1개로 구성되어야 한다.
이 경우는 총 4가지.

$ii)$ 등비중항이 2일 때,
나머지 두 항이 2, 2인 경우에는 위와 마찬가지로 4가지이고
나머지 두 항이 1, 4인 경우에는 a, b, c, d는 1, 2, 4, 105로 구성되어야 한다. 이 경우는 4! 가지이다.

따라서 1280에서 $4+4+4!$을 빼주면 1248이다.
$cf.$ 이쁜 숫자 맞추려 노력했다. 헤헤

19. <(가) 해석>
$ab<6$를 만족시키는 자연수 순서쌍 (a, b)은
(5, 1), (4, 1), (3, 1), (2, 2), (2, 1), (1, 5), (1, 4), (1, 3), (1, 2), (1, 1)로 총 10개이고, (5, 1), (1, 5)일 때 $a+b$는 최댓값 6을 갖는다.
$\therefore p = 6$

$a+b$의 최댓값이 6이고, 문제 조건에서 n은 7 이상의 자연수이기 때문에 자연스럽게 $a+b \le n$를 항상 만족시킬 수 밖에 없음을 확인하자.

<(나) 해석>
a, b는 자연수이고, c는 음이 아닌 정수이므로
$a = a'+1$, $b = b'+1$로 두면 $a+b+c = a'+b'+c+2 = n$에서
$a'+b'+c = n-2$이다.
이를 만족시키는 순서쌍 (a', b', c)의 개수는
${}_3H_{n-2} = {}_nC_{n-2} = {}_nC_2$이다.
$\therefore f(n) = \dfrac{n(n-1)}{2}$

<(다) 해석>
조건부확률에 의하여
$g(n) = \dfrac{10}{\dfrac{n(n-1)}{2}} = \dfrac{20}{n(n-1)}$이다. (10은 $ab<6$를 만족시키는 자연수 순서쌍 (a, b)의 개수를 뜻한다.)

따라서 $f(p+2)\times g(p+1) = f(8)\times g(7) = 28\times\dfrac{10}{21} = \dfrac{40}{3}$이다.

출제자의 한마디
보통 '확률에서는 중복조합을 쓰면 안된다.' 는 말을 많이 들었을 것이다. 하지만, 각각 근원사건의 확률이 같은 경우, 중복조합으로 구한 경우의 수로도 확률을 구할 수 있다.
확률문제에서 중복조합을 사용할 경우, 근원사건의 확률에 대한 고민을 한 후 사용해주자.

20.
ㄱ.
$x = a$에서 미분가능해야 하므로 $-3a^2+8a+3 = m$임을 알 수 있다. (참)

ㄴ.
<u>미분가능한 함수에서 극대인 점의 좌우에서 $f'(x)$의 부호변화가 생기게 된다.</u> $y = -x^3+4x^2+3x$는 원래 $x=3$에서 극대인 삼차함수이므로, $x<a$ 범위에 점 $(3, f(3))$이 포함되지 않도록 a값을 설정해줘야 한다.
따라서 자연수 a는 1, 2만 가능하여 개수는 2이다.

<주의>
여러 학생들이, $a=3$이어도 $x<a$ 범위에 점 $(3, f(3))$이

포함되지 않지 않느냐고 할 수 도 있다.
$a=3$일 때를 따로 조사해보자.
함수 $f(x)$를 완성시켜보면 $a=3$일 때 $m=0$이므로

$$f(x)=\begin{cases} -x^3+4x^2+3x & (x\le 3)\\ 18 & (x>3)\end{cases}$$ (연속성에 의하여 $n=18$)

이므로 상수함수 구간이 생긴다.

하지만 상수함수는 모든 점에서 극대, 극소이므로 $a\ne 3$이다.

*** '상수함수는 모든 점에서 극대, 극소이다.' 라는 문장이 이해가 안되거나 생소하다면 지금 즉시 미적분 I 교과서의 *극대와 극소의 정의* 를 읽어봐야 한다.**
생소할 수 있으나, 18수능 가형 30번 출제 시 본 개념을 의식하여 넣은 조건이 있는 것으로 보아 평가원도 극값의 정의를 신경 쓰고 있고, 언제든 출제가능한 소재라 생각한다.

출제자의 한마디

교과서에서의 극대와 극소의 정의, 친절하게 펴왔습니다. ^^

극댓값의 정의는 '$x=a$를 포함하는 어떤 개구간에 대하여 그 개구간 내의 모든 원소 x들에 대하여 $f(x)\le f(a)$을 만족하면 $f(a)$는 $f(x)$의 극댓값' 이고

극솟값의 정의는 '$x=a$를 포함하는 어떤 개구간에 대하여 그 개구간 내의 모든 원소 x들에 대하여 $f(x)\ge f(a)$을 만족하면 $f(a)$는 $f(x)$의 극솟값'이라 한다.

위 정의에 상수함수를 떠올려보면, 두 정의 모두 동시에 만족시킴을 알 수 있으므로, 상수함수의 모든 점은 극대이자 극소입니다.

ㄷ.
ㄴ.에 의하여 $a=1, 2$만 가능함을 알 수 있다.

$a=1$일 때 함수 $f(x)$를 완성시켜보면

$$f(x)=\begin{cases} -x^3+4x^2+3x & (x\le 1)\\ 8x-2 & (x>1)\end{cases}$$ 이고

$a=2$일 때 함수 $f(x)$를 완성시켜보면

$$f(x)=\begin{cases} -x^3+4x^2+3x & (x\le 2)\\ 7x & (x>2)\end{cases}$$

이다.

두 그래프는 $x\le 1$까지는 같은 그래프인 $y=-x^3+4x^2+3x$를 가진다. 따라서 함수 $y=-x^3+4x^2+3x$의 극솟값인

$-\left(-\frac{1}{3}\right)^3+4\left(-\frac{1}{3}\right)^2+3\left(-\frac{1}{3}\right)=--\frac{14}{27}$ 부터

$x=1$에서의 함숫값 6 사이에서 직선 $y=k$을 그으면, a의 값에 관계없이 만나는 점이 같게 되어 문제의 조건을 성립하게 된다.

따라서, 우선 $k=1, 2, 3, 4, 5, 6$이 가능하다.

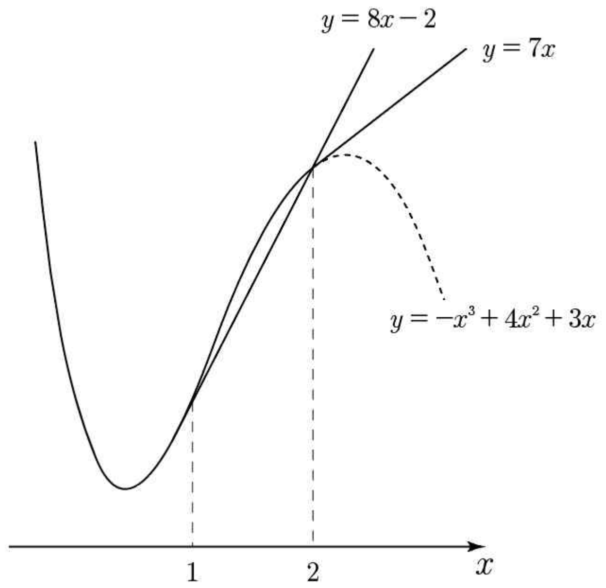
여기까지만 하면 ㄷ 보기가 맞다고 할 수 있으나, 아직 $x>1$인 부분을 신경 쓰지 않았다.
$a=1$일 때, $x>1$에서의 함수는 $8x-2$이며

$a=2$일 때, $x>1$에서의 함수는

$$f(x)=\begin{cases} -x^3+4x^2+3x & (1<x\le 2)\\ 7x & (x>2)\end{cases}$$ 로 나뉜다.

이 때, $y=8x-2$와 $y=-x^3+4x^2+3x$의 교점을 $1<x\le 2$에서 구하면 $x=2,\ y=14$가 나오며, 마찬가지로 $8x-2$와 $7x$의 교점을 $x\ge 2$에서 구하면 $x=2,\ y=14$가 나온다.

즉, $k=14$여도 문제의 조건을 잘 만족시킬 수 있다는 뜻이다.
따라서 가능한 k의 개수는 7이다.



〈참고 그림〉

21. 곡선 $y=f^{-1}(x)$와 직선 $x+4y=8$이 만나는 점들을 모두 $y=x$에 대하여 대칭시키면, 그 이동한 세 교점들은 곡선 $y=f^{-1}(x)$와 직선 $x+4y=8$을 $y=x$에 대하여 각각 대칭시킨 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y+4x=8$ 사이의 세 교점과 동일하다.

따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y+4x=8$ 사이의 세 교점의 x좌표가 각각 $-2, 1, 2$임을 알 수 있으므로
$f(-2)=16, f(1)=4, f(2)=0$임을 알 수 있다.

출제자의 한마디

위의 해설이 이해가 안된다면 이렇게 해보자.

곡선 $y=f^{-1}(x)$와 직선 $x+4y=8$이 만나는 점은 3개이고,
이 세 점의 y좌표는 각각 $-2, 1, 2$이므로
세 교점은 각각 $(16,\ -2)$, $(4,\ 1)$, $(0,\ 2)$임을 직선 $x+4y=8$에 $y=-2, 1, 2$를 대입함으로써 알 수 있다.

즉, 곡선 $y=f^{-1}(x)$ 위에 세 점 $(16,\ -2)$, $(4,\ 1)$, $(0,\ 2)$이 있으므로 $f^{-1}(16)=-2$, $f^{-1}(4)=1$, $f^{-1}(0)=2$, 즉
$f(-2)=16$, $f(1)=4$, $f(2)=0$임을 알 수 있다.

또한, $f(x)$가 지나는 세 점 $(-2, 16)$, $(1, 4)$, $(2, 0)$은 x좌표의 값이 커질수록 y좌표의 값이 작아지고 있다.

즉, 역함수를 갖는 $f(x)$는 감소함수 여야 함을 알 수 있고,
이는 a의 값이 음수여야 함을 알려준다.
($20ax+c$ 부분만 봐도, 기울기인 $20a$가 음수여야 감소함수의 경향을 띄겠죠?)

이제, 세 점 $(-2, 16)$, $(1, 4)$, $(2, 0)$의 x좌표의 값이 범위 $x \ge k$, $x < k$ 중 어디에 속하는지에 따라 대입해줘야 하는 함수가 달라진다.

만약 1과 -2가 $x<k$에 포함된다면 $20ax+c$라는 일차함수는 $(1, 4)$, $(-2, 16)$을 지나야한다.
즉, 이는 위에서 한 번 언급된 $y+4x=8$이라는 직선과 같다.

그런데 이 경우 함수 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y+4x=8$ 사이의 교점이 $x<k$ 범위에서 무한개가 나오므로 교점이 정확히 3개라는 조건에 모순이 된다.

따라서 $x<k$ 범위엔 $-2, 1, 2$가 모두 포함되지 않거나 $-2, 1, 2$ 중 -2만 포함되어야 한다.
(1이 포함되는 순간 위에 설명한대로 모순!)

만약 $x<k$ 범위에 $-2, 1, 2$가 모두 포함되지 않으면
$-2, 1, 2$는 모두 $x \ge k$에 속하므로
$f(-2)=16$, $f(1)=4$, $f(2)=0$인 함수 $y=ax^3-2a^2x+b$ 가 존재하는지 확인해주면 된다.

비교적 숫자가 작은 $f(1)=4$, $f(2)=0$를 이용해서
$y=ax^3-2a^2x+b$에 대입해주면
$-2a^2+a+b=4$, $-4a^2+8a+b=0$이고, 두 식을 빼서 b를 소거해주면 $2a^2-7a-4=0$으로부터 $a=4$ or $-\frac{1}{2}$이다.
그런데 위에서 a가 음수임을 밝혔으므로 $a=-\frac{1}{2}$이다.
이를 위의 관계식에 대입해주면 b는 5임을 알 수 있다.

따라서 우리가 구하는 함수는 $-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x+5$인데,
이 함수는 점 $(-2, 16)$을 지나지 않는다.

따라서 $x<k$ 범위엔 $-2, 1, 2$ 중 -2만 포함되어야 한다.

이 경우도 마찬가지로 $f(1)=4$, $f(2)=0$를 이용하여 함수 $y=ax^3-2a^2x+b$를 결정하고, $f(-2)=16$을 이용하여 함수 $y=20ax+c$를 결정하면 a, b는 위에서 구한 것과 같이 각각 $-\frac{1}{2}$, 5가 나오고 c는 -4가 나온다.

따라서 $f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x+5 & (x \ge k) \\ -10x-4 & (x<k) \end{cases}$가 완성되었다.

이제 k를 구해야 하는데, 함수 $f(x)$가 평범한 역함수를 갖는 것이 아니고 실수 전체의 집합에서 정의된 역함수를 가져야 하므로, 함수 $f(x)$가
① 일대일 대응!
이고
② 실수 전체의 집합을 치역으로!
가져야만 $f^{-1}(x)$의 정의역이 실수 전체의 집합이 될 수 있다.

따라서 $f(x)$는 $x=k$에서 연속이어야 ①, ②를 만족시킬 수 있다.
(2018학년도 9월 평가원 21번도 같은 논리가 사용되었다.)

이제, $x=k$에서의 연속이기 위한 조건을 적용시켜주면
$-\frac{1}{2}k^3-\frac{1}{2}k+5=-10k-4$을 만족시켜야 하고,
이 삼차방정식을 정리해주면 $k^3-19k-18=0$이 나온다.
좌변을 인수분해 하면 $(k+1)(k^2-k-18)=0$이 나온다.
따라서 $k=-1$ or $k=\frac{1\pm\sqrt{73}}{2}$가 나오는데,
$x<k$ 범위에는 $-2, 1, 2$ 중 -2만 유일하게 포함되어야 한다고 위에서 보였으므로 이 중 가능한 값은 $k=-1$ 뿐이다.

따라서 $(k+a)^2-bc=\frac{9}{4}+20=\frac{89}{4}$ 이다.

22. $\lim_{n\to\infty}\frac{9n^3+100n^2}{3n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{9+100\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n^3}}=3$이다.

23. $f'(x)=3x^2+4x$이므로 $f'(2)=20$이다.

24. 세 수 a_1, a_3, a_5도 등차수열을 이루므로
$a_1+a_3+a_5=3a_3=9$이고, $a_3=3$임을 알 수 있다.
따라서 $a_4=4$이고, 공차 d는 $a_4-a_3=1$임을 알 수 있다.
따라서 $a_{10}=a_3+7d=10$임을 알 수 있다.

25. $f(x)=x^3+x-a$라 하면 $f'(x)=3x^2+1>0$이므로 $f(x)$는 증가함수이다.
따라서 사이값정리에 의하여 $f(1)f(3)<0$이면 $f(x)=0$의 해 α가 $1<\alpha<3$ 이하이다.
$(2-a)(30-a)<0 \Leftrightarrow (a-2)(a-30)<0$에서 $2<a<30$이므로
자연수 a의 개수는 27이다.

출제자의 한마디

본 해설은 사이값정리의 '역'을 쓴 것이다.

일반적으로 사이값정리의 역은 성립하지 않으나, 함수의 증감이 일정한 경우, 즉 증가함수이거나 감소함수일 때는 역도 성립함을 어렵지 않게 알 수 있다.

26. 미지수가 있는 이차부등식을 먼저 풀기 어려우므로, 본 명제의 '대우'를 생각하면

'$x \geq 5$이면 $x^2-8x+a \geq 0$이다.' 가 된다.

이것이 참이 되도록 하는 a의 최솟값을 구하자.

x^2-8x+a는 $x=4$에서 최솟값 $a-16$를 갖는 이차식이므로 $x \geq 5$에서 x^2-8x+a의 최솟값은 $5^2-8\times5+a=a-15$이다. 따라서 $a-15 \geq 0$이여야 문제의 명제를 만족시키므로 a의 최솟값은 15이다.

27. i) A, B가 검은색 볼펜을 받았을 때,
4명 중 1명을 골라 나머지 검은색 볼펜을 받게 하고, 나머지 3명 중 1명을 골라 파란색 볼펜을 받게 하면 나머지 2명은 자연스럽게 빨간색 볼펜을 받게 된다.
이 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1 = 12$

ii) A, B가 빨간색 볼펜을 받았을 때,
4명 중 1명을 골라 파란색 볼펜을 받게 하면 나머지 3명은 자연스럽게 검은색 볼펜을 받게 된다. 이 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1=4$

따라서 $p=\dfrac{12}{12+4}=\dfrac{3}{4}$ 이므로 $100p=75$ 이다.

28. X에서 X로의 함수이므로 두 함수 f, f^{-1}의 치역은 모두 X이다. (f^{-1}은 f의 역함수)
따라서 $f(2)+f^{-1}(2)=8$을 만족하는 케이스는
$(f(2), f^{-1}(2))=(5,3), (4,4), (3,5)$ 뿐인데,
$(f(2), f^{-1}(2))=(4,4)$라 가정하면 $f^{-1}(2)=4$에서 $f(4)=2$임을 알 수 있다.

하지만 방정식 $f(f(x))=x$에 $x=2$을 대입해보면
$f(f(2))=f(4)=2$이므로 방정식 $f(f(x))=x$의 근이 존재하게 된다. 이는 (다) 조건에 위배된다.

따라서 $(f(2), f^{-1}(2))=(5,3), (3,5)$인 경우만 체크해주면 된다.

$(f(2), f^{-1}(2))=(5,3)$인 경우, $f(2)=5, f(3)=2$이다.
$f(4)$가 가질 수 있는 값인 이제 3, 4가 남았는데
(f의 역함수가 존재하므로 일대일대응인데 2, 5를 이미 $f(2), f(3)$이 가져갔으므로)
만약 $f(4)=4$이면 (다)조건에 모순이므로 $f(4)$는 반드시 3이고, 마찬가지로 $f(5)$는 반드시 4이다.
따라서 이 때 $f(3)f(5)$의 값은 8이다.

또한 $(f(2), f^{-1}(2))=(5,3)$인 경우, $f(2)=3, f(5)=2$이다.
$f(4)$가 가질 수 있는 값인 이제 4, 5가 남았는데
(f의 역함수가 존재하므로 일대일대응인데 3, 2를 이미 $f(2), f(5)$가 가져갔으므로)
만약 $f(4)=4$이면 (다)조건에 모순이므로 $f(4)$는 반드시 5이고, 마찬가지로 $f(3)$는 반드시 4이다.

이 때 $f(3)f(5)$의 값 역시 8이므로, 정답은 8 이다.

29. (가)조건을 보면 $(x-1)f'(1) \leq 0$, $(x-2)^2f'(2) \leq 0$, $(x-3)^3f'(3) \leq 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 한다.
$(x-1)f'(1) \leq 0$와 $(x-3)^3f'(3) \leq 0$를 봐보자.
$(x-1)f'(1) \leq 0$를 보면, $x=1$의 좌, 우에서 $(x-1)$의 부호가 바뀜을 알 수 있다.
($x>1$일 때는 $x-1>0$이고, $x<1$일 때는 $x-1<0$이다.)

하지만 $f'(1)$은 상수이기 때문에, $f'(1)$이 0이 아니라고 가정하면, $x=1$의 좌, 우 근방에서 $(x-1)f'(1)$의 부호가 바뀐다.
즉, 모든 실수 x에 대하여 $(x-1)f'(1) \leq 0$를 만족한다는 조건을 충족시키지 못한다.
이는 $f'(1)$이 0이 아니라고 가정한 것이 잘못된 것이다.
따라서 $f'(1)=0$이다. (귀류법을 사용)

(참고 : 혹은, $x=0, x=2$를 $(x-1)f'(1) \leq 0$에 대입하여 $f'(1) \geq 0$, $f'(1) \leq 0$를 얻음으로써 $f'(1)=0$임을 알아도 무방하다. 하지만 이 해설 역시 $x=1$를 기준으로 좌, 우의 x값을 잡아줘야 된다는 점에서 위의 풀이와 비슷하다.)

마찬가지로 $(x-3)^3f'(3) \leq 0$에서 $(x-3)^3$의 부호가 $x=3$의 좌, 우에서 부호변화가 생기므로, 위의 논리와 똑같이 설명하면 $f'(3)=0$임을 알 수 있다.

위에서 구한 두 조건 $f'(1)=f'(3)=0$에서 $f'(x)=0$은 두 근 1, 3을 갖는 삼차방정식 이므로
$f'(x)=k(x-1)(x-3)(x-a)$ $(k \neq 0)$
(단, $\underline{k\text{는 } f'(x)\text{의 최고차항의 계수이고, } a\text{는 상수}}$)로 둘 수 있다.

$(x-2)^2f'(2) \leq 0$에서는 모든 실수 x에 대하여 $(x-2)^2$의 부호가 음수인 경우가 없기 때문에, 저 부등식이 항상 성립하기 위해서는 $f'(2) \leq 0$여야 한다.
$f'(2)=k\times1\times(-1)\times(2-a)=k(a-2)$ 이므로
$\underline{k>0\text{일 때, } a \leq 2\text{이고 } k<0\text{일 때, } a \geq 2}$임을 알 수 있다.

이제 (나)조건을 보자.
$f(x)$의 극대 또는 극소인 점은 오직 하나이기 위해선 $f'(x)$의 부호가 바뀌는 어떤 x가 오직 하나만 존재해야 한다.

a가 1이나 3이 아닌 다른 숫자라고 가정해보자. 그러면 $f'(x)=0$는 서로 다른 실근을 3개를 가지는 삼차방정식이 된다.
즉, $x=1, 3, a$일 때 x의 좌, 우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌게 되므로, $f(x)$가 극값을 3개 가지게 된다.
이는 (나)조건에 모순. 따라서 귀류법에 의하여 a는 1이나 3이어야 한다.

i) $k>0$ 일 때,

$a \leq 2$를 만족해야하고 a는 1이나 3이어야 하므로 만족하는 a는 1뿐이다. 따라서 $f'(x)=k(x-1)^2(x-3)$.

따라서 $f'\left(\dfrac{5}{2}\right)=-\dfrac{9k}{8}=-9$ ($\because k$가 양수이므로 $f'\left(\dfrac{5}{2}\right)=-\dfrac{9k}{8}<0$,

$\left|f'\left(\frac{5}{2}\right)\right|=9$) 에서 $k=8$ 이고

$f'(x)=8(x-1)^2(x-3)$

ii) $k<0$ 일 때,

$a\ge 2$를 만족해야하고 a는 1이나 3이어야 하므로 만족하는 a는 3뿐이다. 따라서 $f'(x)=k(x-1)(x-3)^2$.

$f'\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3k}{8}=-9$ ($\because k$가 음수이므로 $f'\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3k}{8}<0$,

$\left|f'\left(\frac{5}{2}\right)\right|=9$)에서 $k=-24$이고

$f'(x)=-24(x-1)(x-3)^2$

i), ii)에 의하여 $f'(0)$의 값으로 가능한 값은 각각 -24, 24×9으로 총 2개이고, 최댓값은 216이므로 $M+n=218$이다.

〈29번 참고자료〉

출제자가 출제 당시 전혀 의도하지 않았지만,
검토진들이 일관되게 제시한 '연계문항'입니다.
평가원과 비슷한 생각을 하고 있다고 추론할 수 있습니다 ㅋ.ㅋ

(16학년도 평가원 6월 21번)

21. 최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g(1)=0$
> (나) $\lim_{x\to n}\frac{f(x)}{g(x)}=(n-1)(n-2)$ $\quad (n=1, 2, 3, 4)$

$g(5)$의 값은? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

(15학년도 평가원 6월 21번)

21. 자연수 n에 대하여 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$의 극댓값을 a_n이라 하자.

> (가) $f(n)=0$
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $(x+n)f(x)\ge 0$이다.

a_n이 자연수가 되도록 하는 n의 최솟값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

30. 사고가 복잡한 문제이기 때문에 해설에 밑줄 처진 부분이 이해가 되었다면 알아보기 쉽도록 그 부분에 동그라미를 쳐놓자.

우선 함수 $h(x)$가 연속함수이므로 $f(0)=g(0)$을 만족해야 한다.

(가) 조건에서 $\lim_{t\to-\infty}\frac{h(t)}{t^2}=1$을 통해 $g(x)$의 차수는 이차이며 최고차항의 계수가 1임을 알 수 있다.

또한 $\lim_{t\to\infty}\frac{h(t)}{t^3}=1$을 통해 $f(x)$의 차수는 삼차이며 최고차항의 계수가 1임을 알 수 있다.

이제 (나) 조건을 봐보면, $x\ne 0$인 모든 실수 x에서는
$\lim_{t\to 0}h'(x-t)=h'(x)$, $\lim_{t\to 0}h'(x+t)=h'(x)$이므로
($\because x\ne 0$인 모든 실수 x에서 $h'(x)$는 다항함수이므로 연속이기 때문에 극한값=함숫값이 성립!)
$\lim_{t\to 0}h'(x-t)h'(x+t)=\{h'(x)\}^2$임을 알 수 있다.
(나) 조건의 집합의 원소가 $-1, 1$ 뿐이므로
$h'(-1)=h'(1)=0$임을 알 수 있다.
(즉, 다른 x에서는 $h'(x)\ne 0$이다.)

이제 $x=0$일 때를 고려해줘야 하는데, $x=0$일 때
$\lim_{t\to 0}h'(x-t)h'(x+t)=\lim_{t\to 0}h'(-t)h'(t)$는 t에 $-t$를 대입해도 같은 식이기 때문에 $t\to 0+$일 때만 따져주면 된다.
($\lim_{t\to 0}h'(-t)h'(t)=\lim_{t\to 0+}h'(-t)h'(t)$)
$\lim_{t\to 0+}h'(-t)=g'(0)$, $\lim_{t\to 0+}h'(+t)=f'(0)$이므로 $f'(0)g'(0)>0$임을 알 수 있다. ($\because$ 0은 (나) 조건의 집합의 원소가 아니므로)

$x<0$일 때 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$이고
$h'(-1)=g'(-1)=0$이므로 $g(x)=(x+1)^2+a$ 꼴이다.
또한 $g'(0)=2$이므로 $g'(0)>0$이다. 따라서 $f'(0)>0$
($\because f'(0)g'(0)>0$)

$x\ge 0$일 때 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$이고
$f'(0)>0$, $f'(1)=0$이다.

만약 $f(x)$가 $x=1$에서 극대 혹은 극소를 갖는다고 가정해보자.

$f(x)$가 $x=1$에서 극대를 갖는다면, $x_2>1$인 어떤 x_2에서 극소를 가질 것이고, $f'(x_2)=0$을 만족시킨다.
($\because$ 최고차항의 계수가 양수인 모든 삼차함수에 대하여 극대, 극소인 점의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하면 항상 $x_1<x_2$이다.)
(삼차함수 개형을 떠올려보세요.)

이는 $-1, 1$을 제외한 다른 x에서는 $h'(x)\ne 0$이다. 라는 (나)조건에 모순이다.

또한 $f(x)$가 $x=1$에서 극소를 갖는다면 $f'(0)>0$이란 조건에 모순이다. (위에처럼 (나)조건에 의해 모순이 생긴다.)

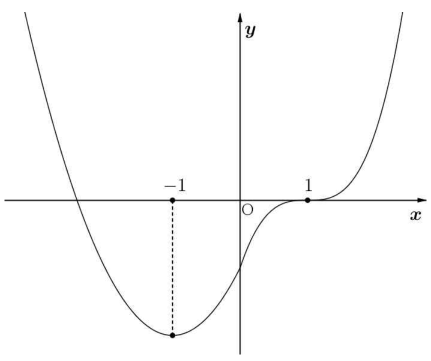
따라서 $f'(1)=0$이지만 $x=1$에서 $f(x)$는 극대도 극소도 아닌 점이다. 즉 $f'(x)$의 그래프는 $x=1$에서 x축과 만나지만
부호변화는 없는 함수여야하고, 따라서 $f'(x)=3(x-1)^2$임을 알 수 있다.

따라서 $f(x)=(x-1)^3+b$임을 알 수 있다.

위에서 구한 사실들과 문제에서 사용하지 않은 조건을 종합하면 다음과 같다.
1. $f(0)=g(0)$
2. $f(x)=(x-1)^3+b$
3. $g(x)=(x+1)^2+a$
4. $h(0)<0,\ y=|h(x)|$가 두 점에서 미분가능하지 않다.

우선 $f(0)=g(0)$이므로 $1+a=-1+b$에서 $\underline{a=b-2}$ 이다.
또한 $f'(0)=3,\ g'(0)=2$이므로 $f'(0)\neq g'(0)$이라서
$x=0$에서 함수 $y=|h(x)|$는 미분가능하지 않음을 알 수 있다.

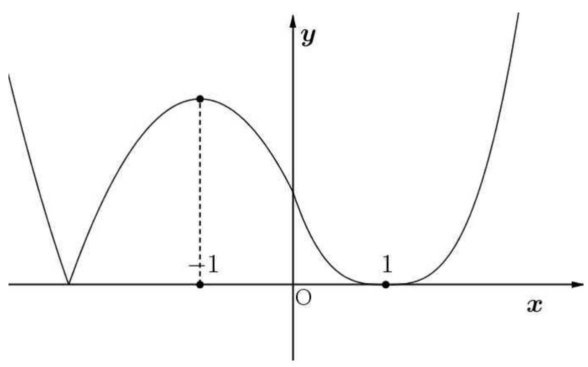
1.~4.의 조건을 만족시키도록 $y=h(x)$그래프를 그리면 다음과 같다.



$h(1)$이 0이 아닌 다른 값이라면, $y=|h(x)|$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 3이다.
($y=|h(x)|$와 x축 사이의 두 교점과 $x=0$인 점으로 총 3개)
($h(0)<0$을 만족시키도록 x축을 그림과 다른 위치에 그려보면서 확인해보도록 하자.)

$h(1)=f(1)=0$이므로 이차함수 $g(x)$와 x축이 만나는 점에서
$y=|h(x)|$가 미분가능하지 않지만
$x=1$에서 삼차함수 $f(x)$가 x축에 접해져있기 때문에
$y=|h(x)|$가 미분가능하게 된다.

<참고 그림 : $y=|h(x)|$>



따라서 $f(1)=0$으로부터 $b=0$이므로 $a=b-2=-2$이다.

종합하면 $f(x)=(x-1)^3,\ g(x)=(x+1)^2-2$이므로
$h(3)h(-3)=f(3)g(-3)=8\times2=16$이다.