기대 모의고사 수학 가형
〈2020 6평 대비 모의고사〉 해설

이 교재의 문제가 포함되어 있는 타 교재 혹은 수업물이 있다면 kidae6150@naver.com 메일 부탁드립니다. (신고자에게 합의금 일부 지급)

문제	답	문제	답	문제	답
1	③	11	②	21	⑤
2	③	12	⑤	22	28
3	④	13	③	23	1
4	②	14	⑤	24	2
5	④	15	④	25	3
6	⑤	16	①	26	85
7	④	17	③	27	20
8	②	18	③	28	288
9	①	19	①	29	8
10	⑤	20	②	30	26

〈예상 등급컷 및 출판계획 소개〉

① 출제진 소개

김기대 T
- 고려대학교 수학과 13 / 대치 오르비학원 출강
- 수학 실전모의고사 '기대모의고사' 저자 5년차
- 수능수학 3회 연속 가형 100점

김주한
- 고려대학교 물리학과 16
- 강남대성학원 모의고사 수학영역 문제출제진

② 저자와 검토진이 예측한 등급컷

1등급 : 88 / 2등급 : 80 /3등급 : 71

본 시험지/해설지가 추가로 필요한 학생들은 orbi.kr에서 '기대모' 검색 후 다운받을 수 있습니다.

③ 기대모의고사 출판계획

Volume	출판시기	교재 컨셉	출제목표 1컷
Vol.1 가/나형 (ver. 2020) 3회분	6월~7월	* 최신문항 +공모문항 * 최근 수능에 제일 어울리는, 트렌디한 모의	88~92
Vol.2 가/나형 (ver. 2020) 3~4회분	7월~8월	* 역대 기대모 최우수문항 * 참신한 문제/특이상황 多	88~92 (예정)
Vol.1은 新문항과 오르비 공모전을 통해 선정된 문항들로 구성됩니다. Vol.3은 미정이며, Vol. 1, 2, 3는 한 문항도 겹치지 않습니다.			

〈2020 김기대T 강의 커리큘럼〉

현재 수험생들은 콘텐츠의 홍수에 살고 있습니다.
이 홍수에 아무 생각 없이 몸을 맡기면, 통제불가능한 상황이 벌어지죠.

수많은 수학 콘텐츠를 효율적으로 공부할 수 없을까란 니즈로부터 태어난 강좌가 바로 Best of Best (BoB) 입니다.
본 강의는 N제와 실모로 이루어져 있으며, 좋은 교재 중에서도 특히 좋은 문항만 선별하여 풀기 때문에 학생들에게 가성비와 시성비를 선물하는 강의입니다.

문의) 대치 오르비학원 ☎ 02-3454-0207

BoB N제 시즌 1 **이과**
6/9(일) 대치 오르비학원 개강
매주 일요일 13:30~17:00 / 총 4회

준킬러가 어려워지고 있는 현 추세에 맞춰 준킬러를 탄탄하게 풀도록 해주고, 그동안 이해하지 못했던 초고난도 기출 문항을 쉽게 풀어주는 문제풀이 수업입니다.	**교재)** 고퀄N제 (FIM) 선별교재 **추천등급)** 1등급 끝 ~ 4등급

⤵

BoB N제 시즌 2 **이과**
(7월 중순 개강예정)

시즌 1에서 강조하는 '탄탄한 준킬러 해결력'을 유지한 채 킬러문항 분석법을 강화하는 수업입니다.	**교재)** 오르비교재 우수문항 **추천등급)** 1등급 끝 ~ 4등급

⤵

BoB 실전모의고사 시즌 1, 2 **이과**
(**문과, 이과** 8월 중순 개강예정)

N제는 그렇다쳐도, 수학 실전모의고사 는 정말 너무 많습니다. 그래서, 오르비에서 출판되는 실모 중에서 반드시 풀어야하는 회차를 우선적으로 풀어주는 강의를 개설합니다.	**주교재)** 오르비 실모 우수회차 **부교재)** 이외 회차 중 우수문항 컬렉션 **추천등급)** 1등급 끝 ~ 4등급

⤵

수리논술 Final
(이과, 수능 다음주 개강)

학교 미정 (한양대, 인하대 유력)	학교별기출 + 예상문제

1. $2\vec{a}=(2,\ 4)$이므로 $2+4=6$.

2. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{6x}-1}{3x}=\lim_{x\to 0}2\times\frac{e^{6x}-1}{6x}=2$.

3. $\sin\frac{3\pi}{4}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

4. $y=\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}$의 점근선 중 x축과 평행한 점근선은 $y=1$이고 $y=2^x+k$의 점근선은 $y=k$이므로 $k=1$

5. $f'(x)=1-\frac{1}{x}$이므로 $x=1$에서 극솟값 $f(1)=1$을 가짐을 알 수 있다. 따라서 $a+b=2$

6. $\mathrm{P}(A^C)=2\mathrm{P}(B)$에서 $1-\mathrm{P}(A)=2\mathrm{P}(B)$,
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B)=\frac{1}{8}$ ($\because$ 독립) 이므로 두 식을 $\mathrm{P}(A)$로 정리해주면 $\left(\mathrm{P}(A)-\frac{1}{2}\right)^2=0$. 따라서 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$이다.

7. $\log_2(x-4)$, $\log_2 x$가 존재하기 위한 진수의 조건은 $x>4$이고, 로그 성질에 의해 부등식은 $\log_2 x(x-4)\geq\log_2 32$이 되므로 $x^2-4x\geq 32$임을 알 수 있다.
$x^2-4x-32\geq 0\Leftrightarrow(x-8)(x+4)\geq 0$과 $x>4$에서 $x\geq 8$. 따라서 x의 최솟값은 8이다.

8. 음함수의 미분법에 의하여
$(x+1)e^x+(1-e^y)y'=0$, $y'=\frac{(x+1)e^x}{e^y-1}$ 이다.
따라서 점 $\mathrm{P}(1,\ 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $\frac{2e}{e-1}$ 이다.

9. $9=5+1+1+1+1$
$=4+2+1+1+1$
$=3+3+1+1+1$
$=3+2+2+1+1$
$=2+2+2+2+1$ 중 1, 2를 포함한 분할은 3가지이다.
(참고로, $9-(1+2)=6$을 자연수 3개로 분할하는 문제와 같다.)

10. 직선 AB가 x축의 양의 방향과 이루는 각도를 θ라 하면, $\tan\theta=2$이다. 이 때 직선 AC의 기울기가 될 수 있는 값은 $\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$, $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$이다. $\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2-1}{1+2}=\frac{1}{3}$,
$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2+1}{1-2}=-3$이므로 두 수의 합은 $-\frac{8}{3}$이다.

11. E, Y, E, C, O, N, T, A, C, T에는 E, C, T가 2개씩, Y, O, N, A가 1개씩 있으므로, 10개의 문자를 모두 배열하여 만들 수 있는 문자열의 개수는 $\frac{10!}{2!2!2!}$.
이 중 두 개의 E가 모두 이웃한 문자열의 개수는 E 2개를 하나로 본다면 $\frac{9!}{2!2!}$으로 계산할 수 있으므로, $\frac{\frac{9!}{2!2!}}{\frac{10!}{2!2!2!}}=\frac{1}{5}$이다.

12. 역함수의 미분법에 의하여 $g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$ 이므로
$g'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{f'\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)}$이다.

먼저 $g\left(\frac{1}{2}\right)$를 구하자. $g\left(\frac{1}{2}\right)=k$라 하면 $f(k)=\frac{1}{2}$이므로 $2k^4-k^2-1=0$, $(2k^2+1)(k^2-1)=0$ 으로부터 $k=1$ 임을 알 수 있다. ($f(x)$의 정의역이 $\{x\,|\,x\geq 0\}$이므로 $k\geq 0$이다.)

따라서 $\frac{1}{f'(1)}$을 구하면 된다.
$f(x)$를 미분해야하는데, 꼴이 매서우므로 변형 후 미분하자.
$f(x)=\frac{x^4}{x^2+1}=x^2-1+\frac{1}{x^2+1}$이고, 미분하면
$f'(x)=2x-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$이므로, $f'(1)=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$이다.

따라서 $g'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{2}{3}$ 이다.

13. l_2의 기울기가 $\frac{1}{2}$이라는 조건은 l_2의 방향벡터가 $(2,1)$이라는 뜻과 같다. 또한 $(1,\ 2)$와 $(2,\ 1)$이 모두 원 $x^2+y^2=5$위의 점이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$의 값은 결국 두 직선의 방향벡터의 내적값임을 알 수 있다.
따라서 $(1,\ 2)\cdot(2,\ 1)=4$이다.

출제자의 한마디
평면에서 직선의 방향벡터는 직선의 기울기와 밀접한 관계를 (사실상 의미하는 바가 같은 관계) 갖고 있음을 항상 염두에 두자.

14. $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$ 이므로 $\sin x = t$라 하면 치환적분법에 의하여

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}(\cos x)^3 dx = \int_0^1 e^t(1-t^2)dt$이다.

이후 부분적분법에 의하여

$\int_0^1 e^t(1-t^2)dt = \left[(-t^2+2t-1)e^t\right]_0^1 = 1$ 임을 알 수 있다.

15.

$i)$ A, B가 검은색 볼펜을 받았을 때,
4명 중 1명을 골라 나머지 검은색 볼펜을 받게 하고, 나머지 3명 중 1명을 골라 파란색 볼펜을 받게 하면 나머지 2명은 자연스럽게 빨간색 볼펜을 받게 된다.
이 경우의 수는 ${}_4C_1 \times {}_3C_1 = 12$

$ii)$ A, B가 빨간색 볼펜을 받았을 때,
4명 중 1명을 골라 파란색 볼펜을 받게 하면 나머지 3명은 자연스럽게 검은색 볼펜을 받게 된다. 이 경우의 수는 ${}_4C_1 = 4$

따라서 확률은 $\frac{12}{12+4} = \frac{3}{4}$ 이다.

16. 곡선 $y = \sin ax \left(0 \le x \le \frac{\pi}{a}\right)$는 직선 $x = \frac{\pi}{2a}$에 대하여 대칭이므로 선분 AB 역시 직선 $x = \frac{\pi}{2a}$에 대하여 대칭이여야 한다. 그리고 한 변의 길이가 1이므로 A, B의 x좌표는 각각 $\frac{\pi}{2a} - \frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{2a} + \frac{1}{2}$이다.
점 C가 x축 위에 있으므로, 점 A, B의 y좌표는 정삼각형의 높이인 $\frac{\sqrt{3}}{2}$와 같아야 한다. 따라서 $\sin a\left(\frac{\pi}{2a} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
(혹은 $\sin a\left(\frac{\pi}{2a} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$)여야 한다.
즉, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{a}{2}\right) = \cos\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$로부터 $\frac{a}{2} = \frac{\pi}{6}, \frac{11}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi \cdots$ 이 가능한데 이 중 $0 < a \le \pi$인 a는 $a = \frac{\pi}{3}$임을 알 수 있다.

한편, 두 점 A, B의 x좌표가 1, 2 이므로 곡선 $y = \sin(ax)$과 선분 AB로 둘러싸인 부분의 넓이는
$\int_1^2 \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)dx - 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{\pi} - \frac{\sqrt{3}}{2}$으로 구할 수 있다.

17. $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라 하자. $x < 0$에서
$g'(x) = -e^{-x}(1-x)$이고 $g(x)$가 $x = 0$에서 미분가능하므로
$f(0) = 0$, $f'(0) = -1$ 이다. 따라서 $b = -1$, $c = 0$ 이므로
$f(x) = x^3 + ax^2 - x$.
한편, $g''(x)$를 구해보면 $g''(x) = \begin{cases} (2-x)e^{-x} & (x < 0) \\ 6x + 2a & (x > 0) \end{cases}$이다.
a의 부호에 따라 $g''(x)$의 부호변화를 조사해보자.

$i)$ $a \ge 0$일 때,
$x < 0$에서 $g''(x) > 0$이고 $x \ge 0$에서도 $g''(x) \ge 0$이므로 $g(x)$의 변곡점이 존재하지 않는다.

$ii)$ $a < 0$일 때,
$\lim_{x \to 0+} g''(x) = 2a < 0$이고 $\lim_{x \to 0-} g''(x) = 2 > 0$이므로 $x = 0$의 좌, 우에서 $g''(x)$의 부호가 바뀌었다. 따라서 $x = 0$에서 변곡점을 갖는다.
또한 $6x + 2a = 0$, $x = -\frac{a}{3}$에서도 $g''(x)$의 부호변화가 있으므로 변곡점은 총 2개 (즉, $n = 2$)이며 두 변곡점의 좌표는
$(0, 0)$, $\left(-\frac{a}{3}, \frac{2}{27}a^3 + \frac{a}{3}\right)$ 이다.

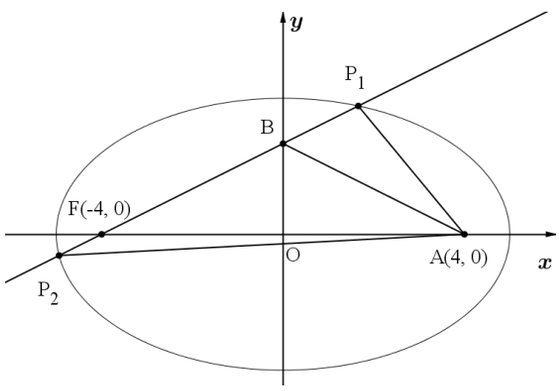
이 두 점이 직선 $y = -3x$ 위에 있어야 하므로
$(0, 0)$, $\left(-\frac{a}{3}, \frac{2}{27}a^3 + \frac{a}{3}\right)$을 직선의 방정식에 대입해주면
$a = -3$임을 알 수 있다.

따라서 $f(x) = x^3 - 3x^2 - x$에서 $f(n) = f(2) = 8 - 12 - 2 = -6$임을 알 수 있다.

출제자의 한마디
응 $n = 1$ 아니야 ^~^ 변곡점을 판단하는 기준은 $f''(x)$의 값이 0인지가 아닌 <u>**$f''(x)$의 부호변화가 있는지를 체크하는 것**</u>이다. 이 문제처럼 $f''(x) \ne 0$ 여도 변곡점을 가질 때도 있으며, $f''(x) = 0$ 여도 변곡점을 갖지 않을 때도 있다. '이계도함수가 존재한다.' 는 전제가 있어야 $x = a$에서 변곡점이면 $f''(a) = 0$라 할 수 있는데, 본 문제에선 $x = 0$에서 이계도함수가 존재한다고 언급하지 않았다.

18. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$의 초점이 $(4, 0)$, $(-4, 0)$이다. 초점 중 하나는 A이고, 나머지 하나인 점 F가 B$(0, 2)$를 지나고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선과 x축 사이의 교점임을 알아채는 것이 이 문제의 핵심 포인트이다.

B$(0, 2)$를 지나고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선과 타원 사이에 두 교점이 생길텐데, 이 점들이 점 P가 될 수 있는 점이다.



삼각형 ABP의 둘레의 길이가 작을 때의 점 P를 P_1, 클 때의 점 P를 P_2라 하면

$l_1=\overline{AB}+\overline{P_1B}+\overline{AP_1}=\overline{BF}+\overline{P_1B}+\overline{AP_1}=\overline{P_1F}+\overline{AP_1}$ 인데

타원의 정의에 의하여 $\overline{P_1F}+\overline{AP_1}=10$ (장축의 길이) 이다.

따라서 $l_1=10$.

$l_2=\overline{AB}+\overline{BP_2}+\overline{AP_2}=\overline{AB}+\overline{BF}+\overline{FP_2}+\overline{AP_2}=2\overline{AB}+10$

(by 타원의 정의 및 대칭성, $\overline{AB}=\overline{FB}$) 이므로

$l_2-l_1=2\overline{AB}=4\sqrt{5}$이다.

19.

〈 (가) 해석〉

$ab<6$를 만족시키는 자연수 순서쌍 (a, b)은

$(5, 1)$, $(4, 1)$, $(3, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 5)$, $(1, 4)$, $(1, 3)$, $(1, 2)$, $(1, 1)$로 총 10개이고, $(5, 1)$, $(1, 5)$일 때 $a+b$는 최댓값 6을 갖는다.

$\therefore p=6$

$a+b$의 최댓값이 6이고, 문제 조건에서 n은 7 이상의 자연수이기 때문에 자연스럽게 $a+b\le n$를 항상 만족시킬 수 밖에 없음을 확인하자.

〈 (나) 해석〉

a, b는 자연수이고, c는 음이 아닌 정수이므로

$a=a'+1$, $b=b'+1$로 두면 $a+b+c=a'+b'+c+2=n$에서

$a'+b'+c=n-2$이다.

이를 만족시키는 순서쌍 (a', b', c)의 개수는

${}_3H_{n-2}={}_nC_{n-2}={}_nC_2$이다.

$\therefore f(n)=\frac{n(n-1)}{2}$

〈 (다) 해석〉

조건부확률에 의하여

$g(n)=\frac{10}{\frac{n(n-1)}{2}}=\frac{20}{n(n-1)}$이다. (10은 $ab<6$를 만족시키는 자연수 순서쌍 (a, b)의 개수를 뜻한다.)

따라서 $f(p+2)\times g(p+1)=f(8)\times g(7)=28\times\frac{10}{21}=\frac{40}{3}$이다.

출제자의 한마디
보통 '확률에서는 중복조합을 쓰면 안된다.' 는 말을 많이 들었을 것이다. 하지만, 각각 근원사건의 확률이 같은 경우, 중복조합으로 구한 경우의 수로도 확률을 구할 수 있다.
근원사건이 기대되는 정도가 같은 경우, 어떤 방법을 쓰든 상관이 없다.

20.

ㄱ.

선분 AB의 중점과 선분 BC의 중점을 지나는 직선이 직선 DE이므로, 중점연결정리에 의하여 직선 AC와 평행하다.

ㄴ.

원의 중심을 O라 하면, $\angle$DAE는 호 DE에 대한 원주각이므로, 중심각의 $\frac{1}{2}$배, 즉 $\angle DAE=\frac{1}{2}\angle DOE$이다.

삼각형 DOE는 두 변 OD, OE의 길이가 1인 이등변삼각형이다.

점 O에서 선분 DE에 내린 수선의 발을 H라 하면,

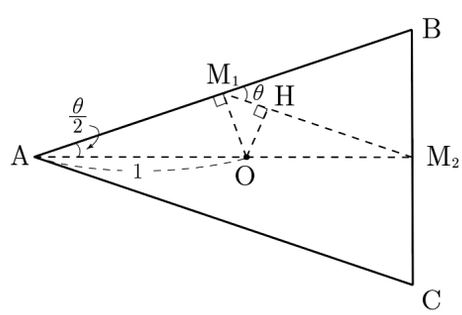
이등변삼각형의 성질에 의하여 선분 OH는 $\angle$DOE를 이등분하는 선이 된다.

따라서 $\cos(\angle DAE)=\cos\left(\frac{1}{2}\angle DOE\right)=\frac{\overline{OH}}{\overline{OE}}=\overline{OH}$ 이다.

따라서 ㄴ.은 옳다.

ㄷ.

이제 선분 OH의 길이를 구해보자.



선분 AB의 중점을 M_1, 선분 BC의 중점을 M_2라 하면,

$\angle M_1AO=\frac{\theta}{2}$, $\angle AM_1O=\frac{\pi}{2}$, $\overline{AO}=1$이므로 $\overline{M_1O}=\sin\frac{\theta}{2}$이다.

또한 중점연결정리에 의해 삼각형 M_1M_2B와 ACB는 닮음이므로

$\angle M_2M_1B = \angle CAB = \theta$에서 $\angle OM_1H = \frac{\pi}{2} - \theta$이다.

따라서 $\overline{OH} = \overline{M_1O} \times \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\frac{\theta}{2}\cos\theta$이므로

$\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta}{\theta} = \frac{1}{2}$이다.

21. (가)조건에서 방정식 $\left(\int_2^x f(t)dt - f(4)\right)\left(\int_4^x f(t)dt - f(2)\right) = 0$의 해 중 두 개가 2, 4임을 알 수 있으므로 $x = 2, 4$를 대입해보자.

$x = 2$를 저 식에 대입하면 $f(4)\left(f(2) - \int_4^2 f(t)dt\right) = 0$이다.

따라서 $f(4) = 0$ <u>이거나</u>

$f(2) = \int_4^2 f(t)dt$여야 한다. …①

또한, $x = 4$를 저 식에 대입하면 $\left(f(4) - \int_2^4 f(t)dt\right)f(2) = 0$이다.

따라서 $f(2) = 0$ <u>이거나</u>

$f(4) = \int_2^4 f(t)dt$여야 한다. …②

결론적으로 ①, ②에서 각각 두 경우 중 최소한 한 경우씩을 만족해야 하므로, 4개의 케이스가 나온다.

$i)$ $f(4) = 0$ and $f(2) = 0$ 일 때, 실수 전체 집합에서 증가한다는 조건에 모순이 되므로 불가능하다.

$ii)$ $f(4) = 0$ and $f(4) = \int_2^4 f(t)dt$일 때,

$f(4) = 0 = \int_2^4 f(t)dt$인데, $f(x)$는 실수 전체 집합에서 증가하는 함수이고 $f(4) = 0$이므로 구간 $(2, 4)$에서 함수 $f(x)$는 음의 함숫값을 갖고, 따라서 $\int_2^4 f(t)dt$의 값은 0이 될 수 없다.

(자세히 말하면 $\int_2^4 f(t)dt$는 음수여야 한다.)

$iii)$ $f(2) = 0$ and $f(2) = \int_4^2 f(t)dt$ $\left(= -\int_2^4 f(t)dt\right)$일 때,

$ii)$에서와 비슷하게 $f(x)$가 증가함수이고 $f(2) = 0$이므로 구간 $(2, 4)$에서 함수 $f(x)$는 양의 함숫값을 갖기 때문에 $\int_2^4 f(t)dt$의 값은 0이 될 수 없다. 따라서 모순.

$i) \sim iii)$이 모두 불가능하므로, 결국

$f(4) = \int_2^4 f(t)dt$ and $f(2) = \int_4^2 f(t)dt$ $\left(= -\int_2^4 f(t)dt\right)$

만 가능함을 알 수 있고, 이 두 식에서

<u>$f(4) = a$라 하면 $f(2) = -a$</u>임을 알 수 있다.

(참고로, $f(x)$는 증가하는 함수이므로 $f(4) = a$는 당연히 양수여야 할 것이다.)

이제 (나)조건과 (다)조건을 융합해서 보자. (나)조건은 점대칭, (다)조건은 적분관계식을 주었는데, 익숙한 조건이 아닌가?

바로 18학년도 6평 30번 문제에서 사용된 점대칭함수의 적분이다.

점대칭함수의 적분에 의하여 $\int_3^5 f(x)dx$의 값은 네 점 $(3, 0)$, $(5, 0)$, $(3, f(4))$, $(5, f(4))$를 꼭짓점으로 하는 직사각형의 넓이인 $2f(4)$와 같으므로,

(**<u>해설 마지막의 추가해설(유도과정)을 반드시 읽어보도록 하자.</u>**)

$\int_3^5 f(x)dx = \int_4^5 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx = 2f(4)$이다.

$\int_4^5 f(x)dx = 2f(4) - \int_3^4 f(x)dx$를 (다)조건에 대입하면

$2f(4) - \int_3^4 f(x)dx - \int_2^3 f(x)dx = 2f(4) - \int_2^4 f(x)dx = f(4)$

$= 2$ 이므로 $f(4) = 2$이다.

출제자의 한마디
해설의 편의를 위해 정적분의 구간을 나눠 두 정적분으로 만드는 '번거로운 짓'을 했지만, 실전풀이는 증가하는 점대칭함수의 그래프를 그려서 해석할 수 있어야 한다.

따라서 $f(6)$의 값을 구하면 되는데,

$f(4) = 2$, $f(2) = -2$이고 $f(x)$는 $(4, 2)$에 대한 점대칭함수이므로 $f(6) + f(2) = 2f(4)$에서 $f(6) = 6$임을 알 수 있다.

이제, A의 원소 중 2, 4가 아닌 것들을 파악해 보자.

$f(4) = 2$, $f(2) = -2$를 대입해보면

$\left\{x \,\middle|\, \left(\int_2^x f(t)dt - 2\right)\left(\int_4^x f(t)dt + 2\right) = 0\right\}$인데,

$\int_2^x f(t)dt - 2 = \int_2^x f(t)dt - \int_2^4 f(t)dt = \int_4^x f(t)dt$이므로 결국

$\int_4^x f(t)dt\left(\int_4^x f(t)dt + 2\right) = 0$의 해를 찾으면 된다.

$\int_4^x f(t)dt$의 값이 0이거나 -2인 x를 모두 찾기 위해 함수

$g(x) = \int_4^x f(t)dt$의 그래프를 그려보자.

$g(2) = -\int_2^4 f(t)dt = -2$, $g(4) = 0$이고 $g'(x) = f(x)$이다.

또한 $g'(x) = f(x) = 0$을 만족시키는 $x = \alpha$는 구간 $(2, 4)$에 오직 하나 존재할 것이고 ($\because f(2)f(4) = -4 < 0$이고 $f(x)$는 증가함수이므로 사이값 정리에 의하여)

함수 $g(x)$는 $x = \alpha$에서 극솟값을 가질 것이다.

그 극솟값은 $f(2)$의 값인 -2보다 작으므로

($\because$구간 $(2, \alpha)$에서 $f(x) < 0 \Leftrightarrow g'(x) < 0$이므로 $g(x)$는 감소함수이다.)

결론적으로 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2, $g(x)=-2$의 서로 다른 실근의 개수도 2가 되어 $n(A)$의 값은 4가 된다.

따라서 $f(6)+n(A)=6+4=10$.

〔'점대칭함수의 적분에 의하여 $\int_3^5 f(x)dx$의 값은 네 점 $(3, 0)$, $(5, 0)$, $(3, f(4))$, $(5, f(4))$를 꼭짓점으로 하는 직사각형의 넓이인 $2f(4)$와 같으므로~' 에 대한 추가해설(유도과정)〕

ⓐ $f(x)=0$인 x는 3보다 작다. (즉, $f(3)>0$)

pf) $f(4)=\int_2^4 f(t)dt$를 보자.

$f(4)$는 $(3, 0)$, $(4, 0)$, $(3, f(4))$, $(4, f(4))$를 꼭짓점으로 갖는 직사각형의 넓이와 같다.
만약 $f(x)=0$인 x가 3 이상이라 가정하면, (귀류법)
$\int_3^4 f(t)dt$의 값은 이 직사각형의 넓이와 같을 수 없다.
(=직사각형의 넓이보다 항상 작은 값을 갖게 된다.)
심지어 $\int_2^3 f(t)dt$의 값은 $f(t)$가 구간 $(2, 3)$에서 음수이므로 정적분 값도 음수이다.
이는 조건에 모순이므로 $f(x)=0$인 x는 3보다 작다.
또한 $f(x)$는 증가함수이므로, $x\geq 3$이면 $f(x)>0$.

ⓑ $\int_3^5 f(t)dt=2f(4)$

pf) 정적분의 값=둘러싸인 넓이가 되려면, 적분구간 내에서 $f(t)$의 부호가 바뀌지 않아야 한다. (부호가 양수이면 그대로, 부호가 음수이면 정적분의 값에 -1을 곱해줘야 둘러싸인 넓이)

ⓐ에서 $x\geqq 3$이면 $f(x)>0$임을 보였으므로 적분구간 $3\sim 5$에서 $f(t)$의 부호는 바뀌지 않는다.
즉, 정적분의 값=둘러싸인 넓이이고, $f(x)$는 $(4, f(4))$에 대해 점대칭이므로
$x=3$, $y=f(4)$, $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이와
$x=5$, $y=f(4)$, $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 같다.
$\int_3^5 f(t)dt$에서 $x=5$, $y=f(4)$, $y=f(x)$로 둘러싸인 부분을 $x=3$, $y=f(4)$, $y=f(x)$로 둘러싸인 부분으로 옮겨주면 점 $(3, 0)$, $(5, 0)$, $(3, f(4))$, $(5, f(4))$를 꼭짓점으로 하는 직사각형의 넓이인 $2f(4)$와 같음을 알 수 있다.

(*cf.* 적분구간 내에서 함숫값의 부호가 바뀌지 않아야 기하학적으로 증명이 되지만, 사실 (가)식을 적분구간 $[0, 1]$에서 적분한 후 좌변의 적분에 치환적분을 적당히 적용시켜주면 함숫값의 부호에 상관없이 $\int_3^5 f(t)dt=2f(4)$임을 보일 수 있다.)

22. ${}_4C_3+{}_4P_3=4+4\times 3\times 2=28$ 이다.

23. $x=0$이면 $t=1$이므로 $f(0)=e^1=e$.
또한 매개변수 미분법에 의하여 $f'(x)=te^t$이므로
$f'(0)=1e^1=e$이다. 따라서 $\dfrac{f'(0)}{f(0)}=1$.

24. $(ax+2)^4=(ax)^4+{}_4C_1(ax)^3 2^1+\cdots$ 이므로 x^3의 계수는 $8a^3$이다. 이 값이 64여야 하므로 $a^3=8\Rightarrow a=2$ 이다.

25. 미분가능한 함수 $f(x)$의 그래프가 원점에서 x축에 접하므로 $f(0)=0$, $f'(0)=0$이다. $g(x)=f(x)e^{-x}+3x$을 미분한 후 $x=0$을 대입하면 $g'(0)=(f'(0)-f(0))e^0+3=3$임을 알 수 있다.

26. 쌍곡선의 성질에 의해 $\overline{PF}-\overline{PF'}=4$이므로
$\overline{PF}+\overline{PQ}=4+\overline{PF'}+\overline{PQ}$ 이다.
따라서 $\overline{PF}+\overline{PQ}$ 의 최솟값을 구하기 위해선
$\overline{PF'}+\overline{PQ}$ 의 최솟값을 구하면 된다.

먼저 점 P가 정해졌을 때, $\overline{PQ}$가 최소가 되기 위해서는
항상 직선 PQ가 원의 중심을 지나고, 직선 PQ가 원과 만나는 점 중 점 P에 가까운 점이 점 Q가 되어야 한다.
따라서 원의 중심을 $A(0, 3)$이라 하면, $\overline{PQ}$의 최솟값은 $\overline{PA}-\dfrac{1}{2}$ 이다.

이제 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{PF'}+\overline{PA}-\dfrac{1}{2}$ 의 값이 최소가 되도록 하는 점 P의 위치를 찾자.

세 점 A, F′, P가 일직선상에 있을 때, $\overline{PF'}+\overline{PA}$ 의 값이 최소가 되고 이때 원점 O에 대하여 직각삼각형 OAF′에서
$\overline{PF'}+\overline{PA}=\overline{F'A}=\sqrt{3^2+4^2}=5$이다.
따라서 $\overline{PF'}+\overline{PQ}$ 의 최솟값은 $5-\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{2}$ 이고,
$\overline{PF}+\overline{PQ}$ 의 최솟값은 $\dfrac{9}{2}+4=\dfrac{17}{2}$ 이다.
$\therefore 10m=85$

27. $g(x)$는 연속함수이므로 $x=1$에서의 연속성에 의해

$f(1)=\frac{1}{4}$임을 알 수 있다.

즉, 점 $\left(1,\ \frac{1}{4}\right)$는 곡선 $y=f(x)$ 위에 있다.

먼저 구체적인 함수가 제시된 $x=1$부터 $x=3$까지의 곡선 $g(x)$의 길이를 구해보자. $g'(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x}$이므로 곡선의 길이는

$$\int_1^3\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx=\int_1^3\sqrt{\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\ln x\right]_1^3=2+\frac{1}{2}\ln 3 \text{ 이다.}$$

따라서 $x=0$부터 $x=1$까지의 $y=f(x)$의 길이가 1임을 알 수 있다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(0,\ f(0))$, $\left(1,\ \frac{1}{4}\right)$에 대하여 두 점을 잇는 곡선의 길이의 최솟값은 두 점을 이은 선분의 길이인 $\sqrt{1^2+\left(f(0)-\frac{1}{4}\right)^2}$ 이다.

그런데 $x=0$부터 $x=1$까지의 곡선 $y=f(x)$의 길이가 1이므로, $f(0)-\frac{1}{4}$의 값은 0이 되어야 한다.

따라서 $f(0)=\frac{1}{4}$이며 $f(x)$는 이 구간에서 직선이 되어야 하므로

$f(x)=\frac{1}{4}\ \ (0\le x\le 1)$.

$$\therefore \int_0^2 g(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}+\left(\frac{13}{12}-\ln 2\right)=\frac{4}{3}-\ln 2 \text{ 이다.}$$

따라서 $a+b=\frac{1}{3}$, $60(a+b)=20$ 이다.

출제자의 한마디
구한 $f(x)$가 $f(x)=\frac{1}{4}\ \ (0\le x\le 1)$이라서 $x=1$에서 $g(x)$가 **우연히** $x=1$에서 미분가능하게 된다. 하지만 문제에서는 $g(x)$가 $x=1$에서 연속인 것만 알 수 있을 뿐 미분가능성을 알지 못한다. 따라서 곡선의 길이를 한 번에 $\int_0^3\sqrt{1+\{g'(x)\}^2}\,dx$로 구하는 것은 위험한 발상이다.

28. $280=2^3\times5\times7$이므로, $abcd=280$을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$은 ${}_4H_3\times({}_4C_1)^2=320$이다.

(추가설명 : ${}_4H_3$은 문자 4개 중 중복을 허락하여 3개를 고른 후, 골라진 횟수만큼 소인수 2를 부여하는 과정이며, 뒤의 ${}_4C_1$은 각각 5, 7을 가질 문자를 4개 중 하나 선택해주는 것이다.)

이 중 등비수열을 이루는 숫자구성이 있는 경우를 빼줘야 한다.

$a,\ b,\ c,\ d$중 임의로 $a,\ b,\ c$가 등비수열을 이룬다고 가정하면 등비중항에 의하여 $b^2=ac$이고, 따라서 $b^3d=280$이다.

즉, 등비중항 b가 가능한 값은 1, 2 뿐이므로, 이 때 케이스를 나눠 구하도록 하자.

$i)$ 등비중항이 1일 때,
나머지 두 항은 무조건 1, 1이어야 하므로
$a,\ b,\ c,\ d$는 1 3개와 280 1개로 구성되어야 한다.
이 경우는 총 4가지.

$ii)$ 등비중항이 2일 때,
나머지 두 항이 2, 2인 경우에는
$a,\ b,\ c,\ d$는 2 3개와 35 1개로 구성되어야 한다.
이 경우는 $i)$과 마찬가지로 4가지이며

나머지 두 항이 1, 4인 경우에는
$a,\ b,\ c,\ d$는 1, 2, 4, 35로 구성되어야 한다.
이 경우는 4! 가지이다.

따라서 320에서 $4+4+4!$을 빼주면 288이다.

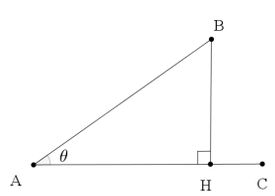
출제자의 한마디
검토진들이 제일 많이 대답한 오답은 292였다. 혹시... 님도..?

29. 원 위의 점에 대한 벡터 내적, 합의 최대, 최소를 묻는 문제의 경우 스타트는 항상 '원의 중심으로 벡터분해'으로 하는 것이 좋다.
(해설 마지막을 참고)

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BQ}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP})\cdot\overrightarrow{BQ}$로 벡터분해하면 $\overrightarrow{CP}$는 크기는 1이고 방향은 어느 방향이든 다 가질 수 있는 벡터이기 때문에, $\overrightarrow{BQ}$가 결정이 됐을 때 $\overrightarrow{BQ}$와 같은 방향으로 $\overrightarrow{CP}$를 결정시켜주면 내적값이 최대가 될 것이다.

$i)$ $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BQ}$가 최대일 때의 상황을 구해보자.
$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BQ}=|\overrightarrow{AC}|\times|\overrightarrow{BQ}|\times\cos\theta$를 $|\overrightarrow{AC}|\times(|\overrightarrow{BQ}|\times\cos\theta)$의 관점으로 보면, 두 점 B, Q를 선분 AC에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면 $|\overrightarrow{AC}|\times(|\overrightarrow{BQ}|\times\cos\theta)=|\overrightarrow{AC}|\times|\overrightarrow{H_1H_2}|$와 같다.

==========
(참고)

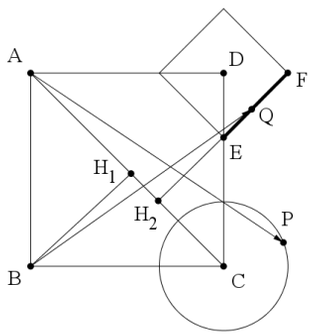


위 그림에서 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AH}|\times|\overrightarrow{AC}|$ (단, θ가 예각)
위 개념은 실전에서 매우 자주 사용되므로 꼭 알아두자.
==========

$\overrightarrow{AC}$는 고정된 벡터이고 점 B 역시 고정된 점이므로, Q의 수선의 발 H_2가 점 B의 수선의 발 H_1으로부터 멀리 떨어져 있을 때

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BQ} = |\overrightarrow{AC}| \times |\overrightarrow{H_1H_2}|$가 최대가 나온다.

점 D를 대각선의 교점으로 갖는 정사각형의 두 변은 선분 AC와 평행하고 나머지 두 변은 선분 AC와 수직이므로 점 Q가 아래 그림의 굵은 변 (변 EF) 위에 있을 때 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BQ} = |\overrightarrow{AC}| \times |\overrightarrow{H_1H_2}|$가 최대이다.



〈그림 1〉

(참고 : 만약 점 Q가 변 EF의 반대 변에 있다면 두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BQ}$의 사이각이 둔각이 나와 최솟값이 나오게 된다.)

따라서 이 상황에서 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BQ} = |\overrightarrow{AC}| \times |\overrightarrow{H_1H_2}|$의 값은

$3\sqrt{2} \times \left(\frac{1}{2} \times \sqrt{2}\right) = 3$이다. … ①

$ii)$ $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{BQ}$의 최댓값을 결정해보자. 점 Q의 위치는 정사각형의 특정한 한 변 위에 있어야 함이 결정된 상태이다.
또한 $\overrightarrow{CP}$는 점 Q의 위치에 관계없이 $\overrightarrow{BQ}$와 같은 방향을 가질 수 있고 크기가 1로 고정되어 있으므로, 결국 $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{BQ}$의 값은 $|\overrightarrow{BQ}|$의 크기에 결정된다.
$|\overrightarrow{BQ}|$의 크기의 최댓값은 Q = F (해설의 〈그림 1〉 참고) 일 때이고, 직각삼각형 BAF는 두 변이 3, 4인 직각삼각형이므로 $|\overrightarrow{BF}| = 5$이다. 따라서 $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{BQ}$의 최댓값은 $1 \times 5 = 5$ … ②

①, ② 에 의하여 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BQ} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP}) \cdot \overrightarrow{BQ}$의 최댓값은 8임을 알 수 있다.
<u>참고로, 위의 풀이는 $i)$, $ii)$에서의 최대가 되는 상황을 동시에 만족시키는 점이 존재해야만 사용할 수 있는 풀이다.</u>

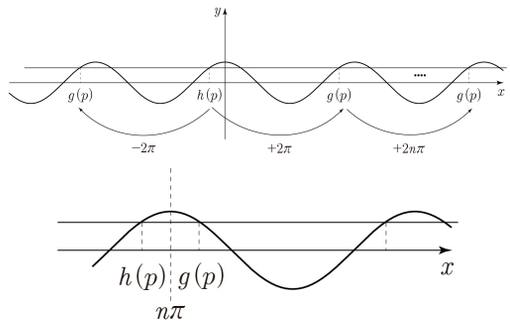
<u>본 풀이에선, 점 F가 $i)$, $ii)$에 공통적으로 들어가기 때문에 최댓값을 $3+5=8$이라고 할 수 있었던 것이다.</u>

출제자의 한마디
벡터의 구성요소는 방향과 크기이다. 중심이 O인 원 위의 점 P에 대한 벡터가 있을 때 $\overrightarrow{OP}$가 나오게끔 벡터분해를 해주면 $\overrightarrow{OP}$는 방향 무제한, 크기 고정인 벡터이기 때문에 벡터간 계산 값의 최대, 최소를 결정할 때 자유분방하게 활약할 수 있다. 물론, 원 나왔을 때 무조건 이렇게 하면 풀린다! 라고 하는 것은 아니다. '첫 시도로 해볼 만한 제일 괜찮은 녀석' 정도일 뿐이다.

30. 해설의 편의를 위해 $g(x) = \frac{6\pi x}{x^2+1}$, $h(x) = \frac{8\pi}{x^2+1}$이라 하자.

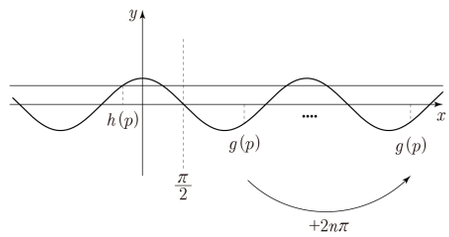
이 두 함수가 모두 미분가능한 함수이므로, 함수 $\{\cos f(x)\}^2$의 미분가능성은 $x=p$에서만 따져주면 된다.
함수 $\{\cos f(x)\}^2$이 $x=p$에서 미분가능하기 위해선
$x=p$에서 연속이어야 하고,
$x=p$에서 연속이기 위해선 $\{\cos g(p)\}^2 = \{\cos h(p)\}^2$이어야 한다. 이때 가능한 경우가 두 가지 존재한다.

(i) $\cos g(p) = \cos h(p)$인 경우
정수 n에 대하여
$g(p) = 2n\pi + h(p)$ 또는 $g(p) = 2n\pi - h(p)$이어야 한다.



〈참고 그림〉

(ii) $\cos g(p) = -\cos h(p)$인 경우
정수 n에 대하여
$g(p) = 2n\pi + (\pi - h(p))$ 또는 $g(p) = 2n\pi + (\pi + h(p))$이어야 한다.



또, 함수 $\{\cos f(x)\}^2$이 $x=p$에서 미분가능하기 위해선 위의 연속조건을 만족시키면서
$\lim_{x \to p} \frac{\{\cos f(x)\}^2 - \{\cos f(p)\}^2}{x-p}$의 값이 존재해야 한다.

$$\lim_{x \to p+} \frac{\{\cos f(x)\}^2 - \{\cos f(p)\}^2}{x-p} = \lim_{x \to p+} \frac{\{\cos g(x)\}^2 - \{\cos g(p)\}^2}{x-p}$$
$$= \lim_{x \to p+} \frac{\{\cos g(x) - \cos g(p)\}\{\cos g(x) + \cos g(p)\}}{x-p}$$
$$= \lim_{x \to p+} \left[\frac{g(x)-g(p)}{x-p} \times \frac{\cos g(x) - \cos g(p)}{g(x)-g(p)} \times \{\cos g(x) + \cos g(p)\}\right]$$
$= -2g'(p)\sin g(p)\cos g(p)$이고,

해설 편의상 $2\sin g(p)\cos g(p) = \sin 2g(p)$ 배각공식을 이용하여
$-2g'(p)\sin g(p)\cos g(p) = -g'(p)\sin 2g(p)$라 두고 풀이하자.

<u>(배각공식을 쓰지 않고 본 식 모양 그대로 유지해도 이후 과정이 매우 순탄히 진행되니 교과외문제로 오해하지 말 것!)</u>

동일한 과정을 통해

$\lim_{x\to p-}\frac{\{\cos f(x)\}^2-\{\cos f(p)\}^2}{x-p}=-h'(p)\sin 2h(p)$ 이다.

따라서 $g'(p)\sin 2g(p)=h'(p)\sin 2h(p)$ 이면

$\lim_{x\to p+}\frac{\{\cos f(x)\}^2-\{\cos f(p)\}^2}{x-p}=\lim_{x\to p-}\frac{\{\cos f(x)\}^2-\{\cos f(p)\}^2}{x-p}$

이므로 $\lim_{x\to p}\frac{\{\cos f(x)\}^2-\{\cos f(p)\}^2}{x-p}$ 의 값이 존재하고,

함수 $\{\cos f(x)\}^2$은 $x=p$ 에서 미분가능하다.

이제 연속조건을 만족시키면서

$g'(p)\sin 2g(p)=h'(p)\sin 2h(p)$ 을 만족시키는 p의 값을 찾자.

<u>(i) $g(p)=2n\pi+h(p)$ 또는 $g(p)=2n\pi+(\pi+h(p))$ 인 경우</u>

$\sin 2g(p)=\sin 2h(p)$ 이므로. $g'(p)=h'(p)$ 이면

$g'(p)\sin 2g(p)=h'(p)\sin 2h(p)$ (미분가능성 조건)을 만족시킨다.

우선 $g'(p)=h'(p)$ 인 p를 찾자.

$g'(x)=\frac{6\pi(x^2+1)-12\pi x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{-6\pi x^2+6\pi}{(x^2+1)^2}$ 이고,

$h'(x)=\frac{-16\pi x}{(x^2+1)^2}$ 이므로 방정식 $\frac{-6\pi x^2+6\pi}{(x^2+1)^2}=\frac{-16\pi x}{(x^2+1)^2}$ 을 풀면

$3x^2-8x-3=(3x+1)(x-3)=0$ 에서

$p=-\frac{1}{3}$ 또는 $p=3$ 일 때, $g'(p)=h'(p)$ 임을 알 수 있다.

이 때, $g\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{9\pi}{5}$, $h\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{36\pi}{5}$ 이므로 $p=-\frac{1}{3}$ 는

$g(p)=2n\pi+(\pi+h(p))$ 의 경우에 해당되며

$g(3)=\frac{9\pi}{5}$, $h(3)=\frac{4\pi}{5}$ 이므로 $p=3$ 또한

$g(p)=2n\pi+(\pi+h(p))$ 의 경우에 해당된다.

따라서 이 경우, 조건을 만족시키는 p는 $p=-\frac{1}{3}$ 또는 $p=3$

두 개 존재한다.

<u>(ii) $g(p)=2n\pi-h(p)$ 또는 $g(p)=2n\pi+(\pi-h(p))$ 인 경우</u>

$\sin 2g(p)=-\sin 2h(p)$ 이므로

$g'(p)=-h'(p)$ 이면 $g'(p)\sin 2g(p)=h'(p)\sin 2h(p)$ 을 만족시킨다.

우선 $g'(p)=-h'(p)$ 인 p를 찾자.

방정식 $\frac{-6\pi x^2+6\pi}{(x^2+1)^2}=\frac{16\pi x}{(x^2+1)^2}$ 을 풀면,

$3x^2+8x-3=(3x-1)(x+3)=0$ 이므로

$p=\frac{1}{3}$ 또는 $p=-3$ 일 때, $g'(p)=-h'(p)$ 이다.

이때 $g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{9\pi}{5}$, $h\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{36\pi}{5}$ 이므로 $p=\frac{1}{3}$ 는

$g(p)=2n\pi+(\pi-h(p))$ 의 경우에 해당되며

$g(-3)=-\frac{9\pi}{5}$, $h(3)=\frac{4\pi}{5}$ 이므로 $p=3$ 또한

$g(p)=2n\pi+(\pi-h(p))$ 의 경우에 해당된다.

따라서 이 경우, 조건을 만족시키는 p는 $p=\frac{1}{3}$ 또는 $p=-3$

두 개 존재한다.

이제 끝났다고 생각할 수 있지만, $i)$과 $ii)$ 케이스의 시작을 봐보면 $\sin 2g(p)=\sin 2h(p)$ 또는 $\sin 2g(p)=-\sin 2h(p)$ 라는 이유로 $g'(p)\sin 2g(p)=h'(p)\sin 2h(p)$ 에서 아무렇지도 않게 $\sin 2g(p)$, $\sin 2h(p)$ 를 나눴다.

하지만, 어떤 수나 식을 나눌 때에는 항상 '0이 아니다.' 라는 전제조건이 필요하다.

즉, 우리는 이 전제조건을 가정한 채 $i)$, $ii)$의 케이스를 진행한 것이므로, $\sin 2g(p)$, $\sin 2h(p)$ 중 적어도 하나가 0인 케이스도 따로 고려를 해줘야 한다.

다행히도 연속조건 $g(p)=2n\pi+h(p)$, $g(p)=2n\pi+(\pi+h(p))$, $g(p)=2n\pi-h(p)$, $g(p)=2n\pi+(\pi-h(p))$ 에 의하여, $\sin 2g(p)$, $\sin 2h(p)$ 중 하나가 0이면 다른 하나도 0일 수 밖에 없으므로 동시에 0인 경우만 따지면 된다.

(iii) $\sin 2g(p)=\sin 2h(p)=0$ 인 경우

$g'(p)\sin 2g(p)=h'(p)\sin 2h(p)$ 에서 $\sin 2g(p)=\sin 2h(p)=0$ 이면 $g'(p)$ 와 $h'(p)$ 의 값에 관계없이

$g'(p)\sin 2g(p)=h'(p)\sin 2h(p)=0$ 이므로, 미분가능조건을 만족시킨다.

$\sin 2g(p)=\sin 2h(p)=0$ 을 만족시키기 위해선 <u>두 정수 n, m</u>에 대하여 $g(p)=\frac{n}{2}\pi$, $h(p)=\frac{m}{2}\pi$ 를 만족시켜야 한다.

조금 더 간단한 함수 $h(x)$를 기준으로 가능한 p를 찾자.

방정식 $h(p)=\frac{8\pi}{p^2+1}=\frac{m}{2}\pi$ 을 풀면, $(p^2+1)=\frac{16}{m}$ 에서

$p=\pm\sqrt{\frac{16}{m}-1}$ (분모조건과 루트 조건에 의해

$0<m\le 16$)이다.

그런데 $\sqrt{\frac{16}{m}-1}$ 이 무리수인 경우, $g\left(\sqrt{\frac{16}{m}-1}\right)=$

$\frac{3m\pi\sqrt{\frac{16}{m}-1}}{8}$ 은 어떠한 경우에도 $g(p)=\frac{n}{2}\pi$ (n은 정수)

꼴이 나올 수 없다.

따라서 $\sqrt{\frac{16}{m}-1}$ 의 값은 유리수가 되어야 하고,

그러한 m의 값은 $m=8$, $m=16$ 두 가지가 존재한다.

$m=8$일 때, $p=\pm 1$이고, $g(-1)=-3\pi$, $g(1)=3\pi$이므로
$\sin 2g(p)=\sin 2h(p)=0$을 항상 만족시킨다.
$m=16$일 때, $p=0$이고, $g(0)=0$이므로
$\sin 2g(p)=\sin 2h(p)=0$을 만족시킨다.

따라서 이 경우, 조건을 만족시키는 p는 $p=-1$ 또는 $p=0$ 또는 $p=1$ 세 가지 존재한다.

(이런 p값들도 연속조건 $g(p)=2n\pi+h(p)$,
$g(p)=2n\pi+(\pi+h(p))$, $g(p)=2n\pi-h(p)$,
$g(p)=2n\pi+(\pi-h(p))$중 하나를 잘 만족시킨다.)

따라서 가능한 p는 -3, -1, $-\frac{1}{3}$, 0, $\frac{1}{3}$, 1, 3으로 총 7개 존재하므로 $n=7$이고, $\sum_{k=1}^{n}(p_k)^2=\frac{182}{9}$이므로 $\frac{9}{n}\sum_{k=1}^{n}(p_k)^2=26$이다.

30번 출제자 Comment
연속조건을 만족시키면서 $g'(p)\sin 2g(p)=h'(p)\sin 2h(p)$을 만족시키는 p의 값을 찾을 때, 연속조건을 만족시키는 p의 값이 무수히 많이 나오므로 연속조건을 먼저 분석/분해하여 p에 대한 상세정보를 이용해 푸는 것은 너무 어려운 일이다. 따라서 해설의 방향처럼 연속조건을 만족시키는 케이스를 크게 3~4가지로 나눈 후 미분가능성 조건을 이용하고, 그 조건을 맞는 p들이 연속조건을 만족시키는지 '대입'함으로써 확인하는 방향의 풀이가 옳다.

Orbi RED

3만원대에 모든책을 푼다!

부모님 마음이 가벼워집니다

월 3만원대에 모든 책을 대여하다!

Orbi RED 월 구독!

문제집을 무한으로 풀다!

오르비북스 모든 문제집을
마음껏 대여하실 수 있습니다.

무조건 깨끗한 새 책으로!

항상 새 책이 준비되어 있으며
마음껏 풀고 메모해도 됩니다.

대여, 반납은 자유롭게!

대여와 반납은 어디든지 편한 대여소에서
자유롭게 이용 가능합니다.

대여 상품 진열대

봉투 모의고사

마음껏 원하는대로

Orbi RED

오르비학원
대여소

강남점 02) 522.0207
서울시 서초구 서초대로 74길 33 비트빌 2층

대치점 02) 539.0207
서울시 강남구 도곡로 408 디마크타워 5층

신촌점 02) 719.0207
서울시 마포구 백범로 8 우정마샹스 2층

2권만 풀어도 이득!

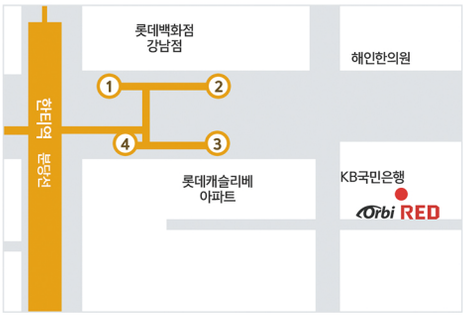
책값 걱정 없이 공부에만 집중하세요!
더 열심히 공부할수록 학생에게 더 이익입니다.

알만한 학생은 다 아는 "수험생 베스트셀러" 오르비북스 출판 문제집

Orbi RED 대여소

궁금한 점이 있으시다면
가까운 대여소에 방문해보세요!

강남점 02) 522.0207
서울시 서초구 서초대로 74길 33 비트빌 2층
2 신분당



대치점 02) 539.0207
서울시 강남구 도곡로 408 디마크타워 5층
분당

신촌점 02) 719.0207
서울시 마포구 백범로 8 우정마샹스 2층
2

자세한 내용은 red.orbi.kr 홈페이지를 방문해주세요