29. 세 집합 $X=\{1,2,3,4\}$, $Y=\{1,2,4,8\}$, $Z=\{3,4,5,6\}$ 에 대하여 일대일 대응인 두 함수

$f:X\rightarrow Y$, $g:Y\rightarrow Z$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x\in X$ 인 모든 x에 대하여 $x+(g\circ f)(x)=f(2)+f(3)+f(4)$
(나) $\{(a,b)\mid a\in Y, b\in Y, f^{-1}(a)=a, g(b)=b\}\neq\varnothing$

$\sum_{n=1}^{4} f(n)g(2^{n-1})$ 의 값은? [4점]

대응관계 그림을 그리면서 푸는 것을 권장합니다.

$h(x)=(g\circ f)(x)$
$f(2)+f(3)+f(4)=k$ 라 하면
$h(x)=k-x$ 이고, $h(x)$ 또한 일대일 대응이므로
$h(1)=6$, $h(2)=5$, $h(3)=4$, $h(4)=3$, $k=7$이다.

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=15$ 이므로 $f(1)=15-k=8$ 이므로
$f(1)=8$, $g(8)=6$ 이다.

(나)의 집합이 공집합이 아니라는 것은, 순서쌍이 적어도 하나 존재해야 한다는 것인데,
순서쌍이 존재하려면 a와 b가 모두 적어도 하나씩은 존재해야한다.
a와 b가 될 수 있는 수는 각각 $X\cap Y$의 원소와 $Y\cap Z$의 교집합의 원소이므로
b가 될 수 있는 수는 4이다. 따라서 $g(4)=4$, $f(3)=4$ 이다.

a가 될 수 있는 수는 $1,2,4$인데
$a=1$이면 $f(1)=8$, $f(1)=1$ 이므로 f가 함수가 되기 위한 조건에 위배된다.
$a=4$이면 $f(4)=4$, $g(4)=3$인데, 이렇게 되면 $f(3)=f(4)=4$ 이므로 f가 일대일함수가 되기 위한 조건에 위배된다.
$a=2$이면 $f(2)=2$, $g(2)=5$ 이고, 이는 어떠한 조건에도 위배되지 않는다.

여기까지 얻은 결과를 종합하면
$f(1)=8$, $f(2)=2$, $f(3)=4$
$g(2)=5$, $g(4)=4$, $g(8)=6$ 이므로
$f(4)=1$, $g(1)=3$ 을 얻을 수 있다.

$$\sum_{n=1}^{4} f(n)g(2^{n-1}) = f(1)g(1) + f(2)g(2) + f(3)g(4) + f(4)g(8)$$

$$= 8\times3 + 2\times5 + 4\times4 + 1\times6 = 56$$

20. 함수 $f(x) = 4x^4 - 6x^3 + 18x^2 + 20x$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k}f\left(\frac{2k}{n}\right)$$

의 값은? [4점]

$\frac{2}{k}f\left(\frac{2k}{n}\right) = \frac{2}{n}g\left(\frac{2k}{n}\right)$ 가 되도록 최대한 $g(x)$를 추론해보자.

$g\left(\frac{2k}{n}\right) = \frac{n}{k}f\left(\frac{2k}{n}\right) = \frac{2f\left(\frac{2k}{n}\right)}{\frac{2k}{n}}$ 이므로 $2\int_0^2 \frac{f(x)}{x}dx$ 를 구하면 된다.

$$2\int_0^2 \frac{f(x)}{x}dx = 2\int_0^2 (4x^3 - 6x^2 + 18x + 20)\,dx = 2\left[x^4 - 2x^3 + 9x^2 + 20x\right]_0^2$$

$$= 152$$

25. 부등식 $\log_{\frac{1}{3}}(2^x-5) \geq \log_{\frac{1}{9}}(2^{x+3}-7)$ 을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

$2^x = t$로 치환하면 $t>0$ 이고

$\log_{\frac{1}{3}}(t-5) \geq \log_{\frac{1}{9}}(8t-7)$

밑을 통일하여 부등식을 세우면

$(t-5)^2 \leq 8t-7$

$t^2-10t+25 \leq 8t-7$

$t^2-18t+32 \leq 0$

$(t-2)(t-16) \leq 0$

그런데 진수 조건에 의해 $t>5$, $t>\dfrac{7}{8}$ 이므로

t의 범위는 $5<t \leq 16$ 이다.

$\log_2 5 < x \leq 4$ 를 만족시키는 자연수 x는 $3, 4$ 이므로

$3+4=7$

27. 방정식 $\sqrt{a}+a+b+c+d=13$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d$ 의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d\ )$ 의 개수를 구하시오. [4점]

$\sqrt{a}$ 도 음이 아닌 정수가 되어야 하므로
a가 될 수 있는 수는 완전제곱수이다.

$b+c+d=13-a-\sqrt{a}$ 로 식을 세우고 a에 수를 차례로 대입하면
$a=0$일 때 $b+c+d=13$
$a=1$일 때 $b+c+d=11$
$a=4$일 때 $b+c+d=7$
$a=9$일 때 $b+c+d=1$
a가 16이상일 때는 모순

${}_3\mathrm{H}_{13}+{}_3\mathrm{H}_{11}+{}_3\mathrm{H}_7+{}_3\mathrm{H}_1$
$=105+78+36+3$
$=222$

17. 최고차항이 양수인 3차 함수 $f(x)$가 1보다 큰 상수 a에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가). $\{f(a)\}^2 + \{f'(a)\}^2 + \{f(1)\}^2 \le 0$
> (나). $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 a를 갖는다.

$f(7)$의 값은? [4점]

① 45 ② 48 ③ 54 ④ 60 ⑤ 63

(가)의 식은 부등식이지만 좌변은 우변보다 작을 수 없고 등호일 때만 성립한다.

$f(1)=0,\ f(a)=f'(a)=0$

$f(x)=k(x-1)(x-a)^2$

(나) 에 의해 $f'(2)=0,\ f(2)=a$이므로

$(2-a)(4-a)=0,\ k(2-a)^2=a$

$a=4,\ k=1$ 이다.

$f(7)=1\times 6\times 3^2=54$

비율관계로 풀면 더 빠르게 풀 수 있습니다.

19. 좌표공간에 구 $S: x^2+y^2+z^2=r^2$ 와 평면 $\alpha: 2x+2y+z=9$가 만나는 점들로 이루어진 원 C 에 대하여 원 C와 그 내부를 밑면으로 하고 구 S 에 내접하는 원기둥이 있다. 직선 $l: \frac{x+1}{2}=\frac{y+7}{-3}=\frac{z-16}{2}$ 이 원기둥과 한 점에서만 만날 때, 구 S 의 반지름의 크기 r 의 값은? [4점]

① 6 ② $6\sqrt{2}$ ③ 8 ④ 9 ⑤ $9\sqrt{2}$

평면 α의 법선벡터를 $\vec{n}$, 직선 l의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면
$\vec{n} \cdot \vec{u} = (2,2,1)\cdot(2,-3,2)=0$ 이므로
α 와 l은 평행함을 알 수 있다.

l위의 점 $(-1,-7,16)$ 을 $2x+2y+z=k$ 에 대입하면 $k=0$ 이므로
원점과 α와의 거리를 d_1, 원점과 l사이의 거리를 d_2 라 하면
$r=\sqrt{(d_1)^2+(d_2)^2}$ 이다.

$$d_1=\frac{|0+0+0-9|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=3$$

직선 l위의 점 중 $\overrightarrow{OP}\cdot\vec{u}$ 인 점 P 를 잡으면
$(2t-1,-3t-7,2t+16)\cdot(2,-3,2)=0$
$t=-3$ 이고 $(d_2)^2=49+4+100$
$r=\sqrt{9+49+4+100}=9\sqrt{2}$

28. 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	t	계
$\mathrm{P}(X=x)$	p	$\frac{1}{t}$	$\frac{1}{9}$	1

1보다 큰 양수 t에 대하여 $\mathrm{E}(X)$가 최소일 때, $\mathrm{V}(9X)$의 값을 구하시오. [4점]

$p+\frac{1}{t}+\frac{1}{9}=1$, $\mathrm{E}(X)=p+\frac{2}{t}+\frac{t}{9}$ 에서 p를 소거하면

$\mathrm{E}(X)=\frac{8}{9}+\frac{t}{9}+\frac{1}{t}$ 이고 모든 양의 실수 t에 대하여 $\frac{8}{9}+\frac{t}{9}+\frac{1}{t} \geq \frac{8}{9}+2\sqrt{\frac{t}{9}\times\frac{1}{t}}$ 이므로

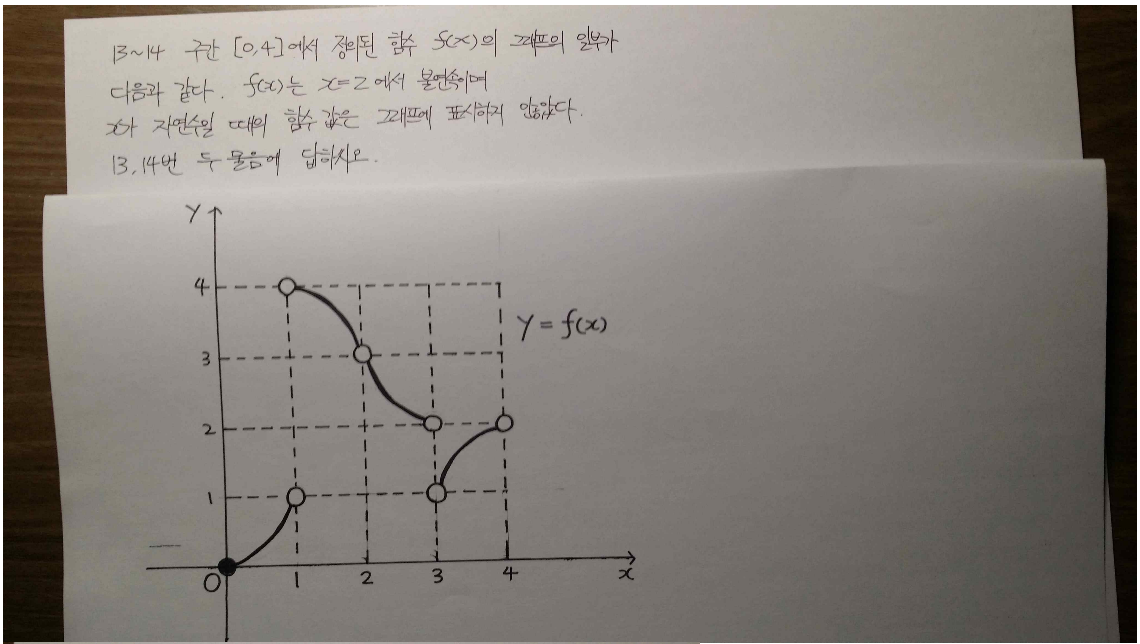
$\mathrm{E}(X)$가 최소일 때는 등호가 성립하는 $\frac{t}{9}=\frac{1}{t}$ $t=3$일 때 이다.

$$\mathrm{E}(X^2)=\frac{1^2\times5+2^2\times3+3^2\times1}{9}=\frac{26}{9}$$

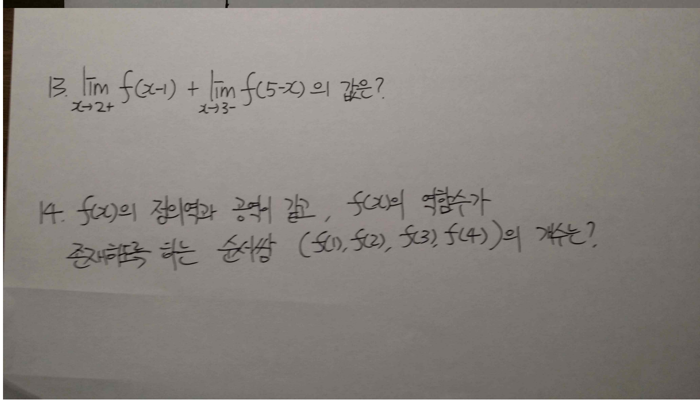
$$\mathrm{E}(X)=\frac{8}{9}+\frac{2}{3}=\frac{14}{9}$$

$$\mathrm{V}(9X)=81\times\left(\frac{26}{9}-\left(\frac{14}{9}\right)^2\right)=26\times9-14^2$$

$$=38$$



13~14 구간 $[0,4]$에서 정의된 함수 $f(x)$의 그래프의 일부가 다음과 같다. $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이며 x가 자연수일 때의 함수 값은 그래프에 표시하지 않았다. 13, 14번 두 물음에 답하시오.



13. $\lim_{x\to 2+} f(x-1) + \lim_{x\to 3-} f(5-x)$ 의 값은?

14. $f(x)$의 정의역과 공역이 같고, $f(x)$의 역함수가 존재하도록 하는 순서쌍 $(f(1), f(2), f(3), f(4))$의 개수는?

1의 우극한 + 2의 우극한
$= 4 + 3 = 7$

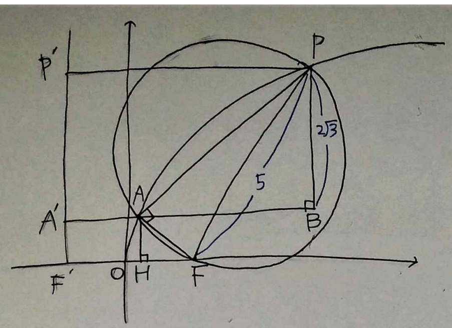
$X = \{1, 2, 3, 4\}$ $\;Y = \{f(1), f(2), f(3), f(4)\}$ 일 때
$X = Y$ 가 되며,
$f(2) \neq 3$ 인 모든 경우의 수를 구하면 된다.

$sol1)$ $f(2)$를 먼저 정하고 나머지를 정하는 방법
$3 \times 3 \times 2 \times 1 = 18$

$sol2)$ $X = Y$ 일 때를 모두 구하고 $f(2) = 3$ 일 때를 빼는 방법
$4! - 3! = 18$

20. 점 $\mathrm{F}(p, 0)$을 초점으로 하는 포물선 $y^2 = 4px\ (p > 0)$ 의 그래프 위에 점 P가 있다. 선분 PF를 지름으로 하는 원이 포물선과 만나는 점을 A라 하고, x축과 평행하고 점 A를 지나는 직선과 y축과 평행하고 점 P를 지나는 직선이 만나는 교점을 B라 하자. $\overline{\mathrm{PF}} = 5$, $\overline{\mathrm{PB}} = 2\sqrt{3}$ 일 때 p의 값이 될 수 있는 두 수 p_1 , p_2 $(p_1 < p_2)$에 대하여 $(p_1 - 1)^2 \times (p_2 - \frac{3}{2})^2$ 의 값은? [4점]

① $\frac{25}{28}$ ② $\frac{27}{28}$ ③ $\frac{30}{14}$ ④ $\frac{8}{7}$ ⑤ $\frac{5}{3}$



$\overline{AF}=t$라 하자.

포물선의 정의에 의해 $\overline{A'A}=\overline{AF}=t$

$\overline{P'P}=\overline{PF}=5$

A는 PF를 지름으로 하는 원 위의 점이므로

$\angle PAF=90°$

$\overline{PF}^2=\overline{AF}^2+\overline{PA}^2$, $\overline{PA}^2=\overline{AB}^2+\overline{PB}^2$

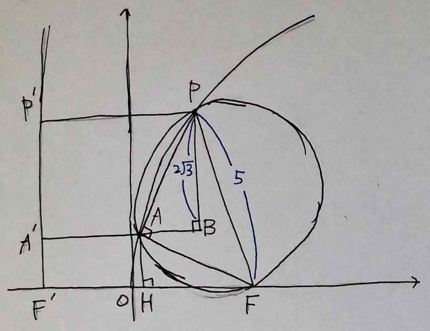
$\overline{PA}^2$를 소거하면 $\overline{PF}^2=\overline{AF}^2+\overline{AB}^2+\overline{PB}^2$

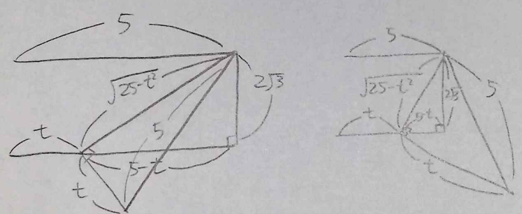
그런데 $\overline{AB}=\overline{P'P}-\overline{A'A}$ 이므로

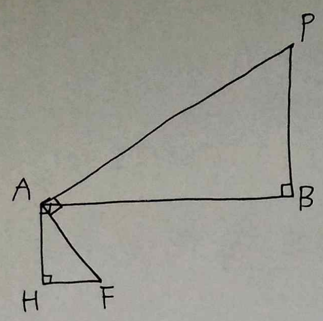
$5^2=t^2+(5-t)^2+(2\sqrt{3})^2$

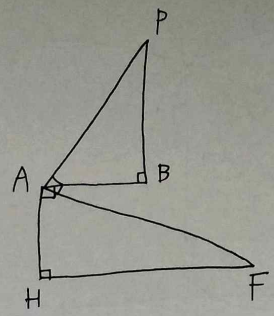
$2t^2-10t+12=0$ $2(t-2)(t-3)=0$

$t=2$ or 3









한편 $\angle PAF = \angle BAH = 90^\circ$ 이므로

$\angle PAF - \angle BAF = \angle BAH - \angle BAF$

즉, $\angle PAB = \angle FAH$ 이고 이 각을 θ라 하면

$\sin\theta = \dfrac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = \dfrac{\overline{FH}}{\overline{AF}}$

$\overline{PB} = 2\sqrt{3}$, $\overline{PA} = \sqrt{25-t^2}$, $\overline{AF} = t$ 이므로

$\overline{FH} = \dfrac{\overline{PB}}{\overline{PA}} \times \overline{AF} = \dfrac{2\sqrt{3}t}{\sqrt{25-t^2}}$

그런데 $\overline{FH} = \overline{FF'} - \overline{AA'}$ 이므로 $\overline{FH} = 2p - t$

$2p - t = \dfrac{2\sqrt{3}t}{\sqrt{25-t^2}}$ $\quad p = \dfrac{\sqrt{3}t}{\sqrt{25-t^2}} + \dfrac{t}{2}$

p는 $0<t<5$ 일 때 t의 값이 증가할수록 그 값이 커진다.

$$\boxed{t \uparrow \rightarrow \dfrac{\sqrt{3}t \uparrow^{>0}}{\sqrt{25-t^2} \downarrow_{>0}} + \dfrac{t \uparrow}{2} > 0}$$

따라서 $t=2$일 때 $p=p_1$

$t=3$ 일 때 $p=p_2$

$p_1 = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{21}} + 1$ $\quad p_2 = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{16}} + \dfrac{3}{2}$

~~$(p_1-1)^2 \times (p_2 \times$~~ $\quad (p_1-1)^2 \times (p_2 - \dfrac{3}{2})^2 = \dfrac{12}{21} \times \dfrac{27}{16} = \dfrac{27}{28}$

기하와 벡터 - 이차곡선의 정의