제 2 교시

2019학년도 KUME(쿠메) 모의고사 2회

수학 영역

(가형)

성명	

수험번호						-				

○ 자신이 선택한 유형(가 형/나 형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

필적확인란은 왜 필요할까

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

2019학년도 KUME(쿠메) 모의고사 2회

시행 : 2018년 11월 03일 (토) 오후 9시 ~ 오후 10시 45분

최종 수정 : 2019년 9월 2일

집필 : 고려대학교 수학교육과 소모임 KUME(쿠메)

김두현 김혜민 박경열 박정식 손주영 양우석 이유진 조상현 채종현

손해설 : 손주영

검토 : 정지윤

KUME(쿠메) 모의고사에 관한 문의사항은 count_luv@naver.com으로 메일을 보내주시기 바랍니다.

제 2 교시

수학 영역(가 형)

5지선다형

1. 두 벡터 $\vec{a}=(3,\ 2)$, $\vec{b}=(1,\ -1)$에 대하여 벡터 $\vec{a}-3\vec{b}$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{1-e^{2x}}$ 의 값은? [2점]

① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

3. 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 5,\ a)$, $\mathrm{B}(9,\ -7,\ 6)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표가 $(3,\ b,\ 4)$이다. $a+b$의 값은? [2점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

4. 두 사건 A와 B는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3},\quad \mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{6}$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? (단, B^C은 B의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{11}{16}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{13}{16}$ ④ $\frac{7}{8}$ ⑤ $\frac{15}{16}$

5. $0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식

$$2\cos^2\frac{x}{2}+3\sin\frac{x}{2}=3$$

의 모든 해의 합은? [3점]

① $\frac{3}{2}\pi$ ② 2π ③ $\frac{5}{2}\pi$ ④ 3π ⑤ $\frac{7}{2}\pi$

6. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t \ge 0)$에서의 위치 $(x,\ y)$가

$$x=\ln(t+1),\quad y=2\sqrt{t+1}$$

이다. 시각 $t=2$에서 점 P의 속력은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

7. 함수 $y=3\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+k$의 그래프가 직선 $y=-4$와 만나도록 하는 실수 k의 최솟값은? [3점]

① -9 ② -7 ③ -5 ④ -3 ⑤ -1

8. 5명의 학생 중 3명의 학생을 뽑아 서로 다른 연필 4자루를 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 뽑힌 학생 중 연필을 갖지 못하는 학생은 없다.) [3점]

① 200 ② 240 ③ 280 ④ 320 ⑤ 360

9. 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$가

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-5}{h}=\frac{1}{8}$$

을 만족시킨다. 함수 $f(2x-1)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(5)$의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

10. 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선이 원 $(x-2)^2+(y-6)^2=16$의 넓이를 이등분하도록 하는 모든 a의 값의 합은? [3점]

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

11. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$을 따르고,

$$\mathrm{P}(5 \le X \le 8) = \mathrm{P}(4 \le X \le 7)$$

을 만족시킨다. $\mathrm{P}(X \le 8)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.3085 ② 0.6915 ③ 0.8413 ④ 0.9332 ⑤ 0.9772

12. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x + x\tan^2 x)\,dx$의 값은? [3점]

① $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$ ② $\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$ ③ $\frac{\pi}{4} - \ln 2$ ④ $\frac{\pi}{4} + \ln 2$ ⑤ $\frac{\pi}{4} - 2\ln 2$

13. 두 주머니 A, B에 각각 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 4장의 카드가 들어있다. 갑은 한 개의 주사위를 한 번 던지는 시행을 하고, 을은 두 주머니 A, B에서 각각 카드를 임의로 한 장 꺼내는 시행을 할 때, 갑이 한 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수와 을이 꺼낸 두 장의 카드에 적혀 있는 수의 합이 서로 같을 확률은? [3점]

① $\frac{5}{96}$ ② $\frac{7}{96}$ ③ $\frac{3}{32}$ ④ $\frac{11}{96}$ ⑤ $\frac{13}{96}$

14. 좌표공간에서 점 A를 지나는 두 직선

$$l : \frac{x+4}{a}=y=\frac{6-z}{2}, \quad m : x=z-b,\ y=2$$

는 서로 수직이고, 두 직선 l, m이 xy평면과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 삼각형 APQ의 넓이는? (단, a, b는 0이 아닌 상수이다.) [4점]

① $3\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ $5\sqrt{2}$ ④ $6\sqrt{2}$ ⑤ $7\sqrt{2}$

15. 실수 a에 대하여 두 곡선 $y=2^{x-a}$, $y=\log_2 x+a$가 직선 $y=-x+10$과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 직선 $y=-x+10$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 C, D라 할 때, $5\overline{\mathrm{AB}}=3\overline{\mathrm{CD}}$를 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

16. 어느 대학교 학생들의 하루 열람실 이용시간은 평균이 m, 표준편차가 10인 정규분포를 따른다고 한다. 이 대학교 학생 중 n명을 임의추출하여 하루 열람실 이용시간을 조사한 표본평균이 $\overline{x}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $[a,\ b]$이고, 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $[c,\ d]$이다. $l_1=d-a$, $l_2=d-b$라 할 때, $l_1+l_2=\frac{43}{10}$이다. n의 값은?
(단, 열람실의 이용시간의 단위는 분이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 2.58)=0.495$로 계산한다.) [4점]

① 81 ② 100 ③ 121 ④ 144 ⑤ 169

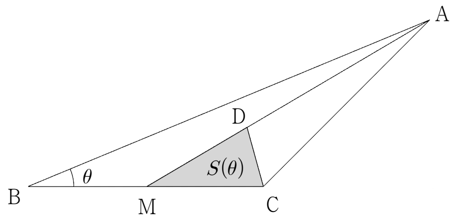
17. 좌표공간에서 구 $S: x^2+y^2+z^2=25$ 와 평면 $3x-4z=5$ 가 만나서 생기는 원 위의 두 점 A, B 에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}=6$ 이다. 구 S 위의 점 P 가

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}, \quad |\overrightarrow{\mathrm{PA}}|>|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$$

를 만족시킬 때, 실수 k 의 값은? (단, O 는 원점이다.) [4점]

① $-\frac{18}{5}$ ② $-\frac{14}{5}$ ③ -2 ④ $-\frac{6}{5}$ ⑤ $-\frac{2}{5}$

18. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}=2$, $\angle \mathrm{ABC}=\theta$ 인 이등변삼각형 ABC 가 있다. 선분 BC 의 중점을 M 이라 할 때, 선분 AM 위에 점 D 를 $\overline{\mathrm{CM}}=\overline{\mathrm{DM}}$ 이 되도록 잡는다. 삼각형 DMC 의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta}$ 의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ 1 ⑤ $\frac{7}{6}$

19. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 A에서 A로의 일대일대응 중 임의로 하나를 택하여 f라 할 때, $(f\circ f)(t)=t$를 만족시키는 실수 t의 개수를 확률변수 X라 하자. 다음은 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$의 값을 구하는 과정이다.

> A에서 A로의 일대일대응 중에서 임의로 하나를 택하는 경우의 수는 $5!=120$이다.
>
> $(f\circ f)(t)=t$를 만족시키는 실수 t는 $f(t)=t$이거나 t와 서로 다른 실수 s에 대하여 $f(t)=s$이면서 $f(s)=t$를 만족시켜야 한다.
>
> $f(t)=t$인 실수 t의 개수를 a, $f(t)=s$, $f(s)=t$ $(t<s)$인 서로 다른 두 실수 t, s의 모든 순서쌍 $(t,\ s)$의 개수를 b라 하자.
>
> (i) $X=1$인 사건은 $a=1$, $b=0$인 경우이므로
>
> $$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_5\mathrm{C}_1\times\boxed{(가)}}{5!}$$
>
> (ii) $X=2$인 사건은 $a=2$, $b=0$이거나 $a=0$, $b=1$인 경우이므로
>
> $$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2\times2+{}_5\mathrm{C}_2\times2}{5!}$$
>
> (iii) $X=3,\ 4$인 사건은 존재하지 않으므로
>
> $$\mathrm{P}(X=3)=0,\quad \mathrm{P}(X=4)=0$$
>
> (iv) $X=5$인 사건은 $a=5$, $b=0$이거나 $a=3$, $b=1$이거나 $a=1$, $b=2$인 경우이므로
>
> $$\mathrm{P}(X=5)=\frac{\boxed{(나)}}{5!}$$
>
> (v) $X=0$인 사건은 $X=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$인 사건의 여사건이므로
>
> $$\mathrm{P}(X=0)=1-\sum_{k=1}^{5}\mathrm{P}(X=k)$$
>
> (i), (ii), (iii), (iv), (v)에 의하여 확률변수 X의 평균은
>
> $$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=0}^{5}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}=\boxed{(다)}$$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $\dfrac{q\times r}{p}$의 값은? [4점]

① $\dfrac{23}{3}$ ② $\dfrac{49}{6}$ ③ $\dfrac{26}{3}$ ④ $\dfrac{55}{6}$ ⑤ $\dfrac{29}{3}$

20. 양의 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$\int_1^4 f(t)dt=8,\quad \int_1^4 f(t)\ln t\,dt=16\ln2+6$$

을 만족시킨다. 함수 $g(x)$가 모든 양수 x에 대하여

$$g(x)=\int_1^x f(t)\ln\frac{x}{t}\,dt$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

> <보 기>
>
> ㄱ. $g'(4)-g'(1)=2$
>
> ㄴ. $g'(a)=-2$를 만족시키는 실수 a가 열린구간 $(1,\ 4)$에 적어도 하나 존재한다.
>
> ㄷ. $g''(b)=0$를 만족시키는 실수 b가 열린구간 $(1,\ 4)$에 적어도 하나 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 실수 t에 대하여 닫힌 구간 $[-\pi,\ \pi]$에서 정의된 함수

$$f(x)=|x\sin x+(t+1)\cos x-t-1|$$

가 있다. 함수 $f(x)$가 열린 구간 $(-\pi,\ \pi)$에서 미분가능하지 않은 점의 개수를 $g(t)$라 할 때,

$$\lim_{t\to a+} g(t)-\lim_{t\to a-} g(t)=b$$

를 만족시키는 두 실수 a, b $(b\neq 0)$의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$를 구하면 $(a_1,\ b_1)$, $(a_2,\ b_2)$이다. $a_1+b_1+2(a_2+b_2)$의 값은? (단, $a_1<a_2$) [4점]

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

단답형

22. ${}_4C_2\times{}_4P_2$의 값을 구하시오. [3점]

23. 함수 $f(x)=2\ln(3x+3)$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

24. $\angle \mathrm{BAC} = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형 ABC 에 대하여

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 6, \ |\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}| = 10$$

을 만족시킬 때, $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ 의 값을 구하시오. [3점]

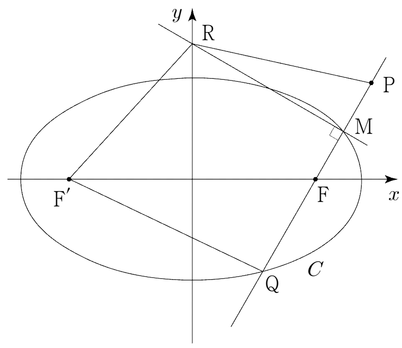
25. 곡선 $y = xe^{-x}$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ te^{-t})$ $(t > 0)$ 에서의 접선이 y 축과 만나는 점을 A라 하자. 원점 O 에 대하여 삼각형 AOP 의 넓이의 최댓값이 ae^{-3} 일 때, $6a$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 갑과 을이 각각 한 개의 주사위를 2 번씩 던져 총 4 번의 주사위를 던진다. 갑이 한 개의 주사위를 2 번 던져 나온 눈의 수가 짝수인 횟수를 a, 을이 한 개의 주사위를 2 번 던져 나온 눈의 수가 3 의 배수인 횟수를 b 라 하자. $a+b \neq 0$ 일 때, $a+b=3$ 일 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

27. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $2a+b+c+d=\sqrt{(b+c+d)^2+96}$
(나) $a \le b$

28. 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(6,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-6,\ 0)$인 타원 C가 있다. 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}}=6$이고, 직선 PF의 기울기는 $\sqrt{3}$이다. 선분 PF의 중점을 M이라 할 때, 점 M은 타원 C 위의 점이고, 타원 C와 직선 PF가 만나는 점 중 M이 아닌 점을 Q, 점 M을 지나고 직선 PF와 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 R라 하자. 사각형 $\mathrm{PRF'Q}$의 둘레의 길이가 $m+n\sqrt{21}$일 때, $m+n$의 값을 구하시오.
(단, m, n은 정수이다.) [4점]



29. $\overline{AB}=\overline{AC}=12$, $\overline{AD}=4\sqrt{7}$, $\overline{BC}=6$인 사면체 ABCD가 있다. 평면 BCD와 직선 AB가 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$이고, 직선 AD와 직선 BD는 서로 수직이다. $\angle DBC > \frac{\pi}{3}$일 때, 사면체 ABCD의 부피는 $m+n\sqrt{6}$이다. $m+n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 정수이다.) [4점]

30. 최고차항의 계수가 양수이고 최솟값이 -2인 이차함수 $f(x)$와 양수 k에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)e^{-kf(x)}$$

이라 할 때, 함수

$$h(x)=\int_1^x g(f(t))dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $h(1+x)+h(1-x)=0$이다.
> (나) 곡선 $y=h(x)$의 변곡점의 개수는 5이다.
> (다) 함수 $h(x)$가 극대 또는 극소가 되는 모든 x를 작은 수부터 크기순으로 나열하면 x_1, x_2, x_3, x_4이고, 네 수 x_1, x_2, x_3, x_4는 등차수열을 이룬다.

$g(4)$의 최솟값이 $\frac{p}{e}$일 때, 상수 p에 대하여 $16p$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$) [4점]

> ＊ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.