

1) 답 ④

[해설]

$x^2 - 3xy + y^2 = 5$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(3xy) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(5)$$

$$2x - \left(3y + 3x \frac{dy}{dx}\right) + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(2y - 3x) \frac{dy}{dx} = 3y - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - 2x}{2y - 3x} \quad (\text{단, } 2y \neq 3x)$$

따라서 점 $(1, -1)$ 에서의 접선의 기울기는 $\frac{3y - 2x}{2y - 3x}$ 에

$$x = 1, y = -1 \text{을 대입한 값과 같으므로 } \frac{-3 - 2}{-2 - 3} = 1 \text{이다.}$$

2) 답 ④

[해설]

$ax^2 + \sqrt{y} = b$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2ax + \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} = 0 \quad (\text{단, } y \neq 0)$$

$$\frac{dy}{dx} = -4ax\sqrt{y}$$

점 $(1, 4)$ 에서의 접선의 기울기가 -2 이므로

$$-4a\sqrt{4} = -2 \text{에서}$$

$$a = \frac{1}{4}$$

또 점 $(1, 4)$ 가 곡선 $ax^2 + \sqrt{y} = b$ 위의 점이므로

$$a + 2 = b$$

$$b = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$$

$$\text{따라서 } a + b = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{5}{2}$$

3) 답 ②

[해설]

$x^2 - 2y^2 = 1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x - 4y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y} \quad (\text{단, } y \neq 0)$$

따라서 점 $(3, 2)$ 에서의 접선의 기울기는 $\frac{3}{2 \times 2} = \frac{3}{4}$ 이므로 구

하는 접선의 방정식은

$$y - 2 = \frac{3}{4}(x - 3)$$

$$\text{즉, } 3x - 4y - 1 = 0$$

따라서 $a = 3, b = -4$ 이므로

$$a + b = -1$$

4) 답 ⑤

[해설]

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(t+1) - (t-2)}{(t+1)^2} = \frac{3}{(t+1)^2} \text{이고,}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2t(t+1) - (t^2+1)}{(t+1)^2} = \frac{t^2+2t-1}{(t+1)^2} \text{이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{3}(t^2+2t-1)$$

이때 $\frac{t-2}{t+1} = -2, \frac{t^2+1}{t+1} = 1$ 을 모두 만족시키는 t 의 값은 0 이다.

따라서 점 $(-2, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $t = 0$ 일 때의 $\frac{dy}{dx}$

의 값인 $-\frac{1}{3}$ 이다.

5) 답 ⑤

[해설]

$x = 4\cos\theta, y = 4\sin\theta$ 에서

$$\frac{dx}{d\theta} = -4\sin\theta, \frac{dy}{d\theta} = 4\cos\theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{4\cos\theta}{-4\sin\theta} = -\frac{1}{\tan\theta} \quad (\text{단, } \sin\theta \neq 0)$$

이때 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는

$$-\frac{1}{\tan\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{이다.}$$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ 일 때,

$$x = 4\cos\frac{\pi}{3} = 2, y = 4\sin\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$$

따라서 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 에 대응하는 곡선 위의 점의 좌표는 $(2, 2\sqrt{3})$ 이

고 이 점에서의 접선의 기울기는 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로 접선의 방정

식은

$$y - 2\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 2)$$

$$\text{즉, } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

이 직선이 x 축, y 축과 만나는 점이 각각 A, B이므로

$$A(8, 0), B\left(0, \frac{8\sqrt{3}}{3}\right) \text{이다.}$$

따라서 구하는 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 8 \times \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{32\sqrt{3}}{3}$$

6) 답 ③

[해설]

$x = 2t - 1, y = 1 - 2t - t^2$ 에서

$$\frac{dx}{dt} = 2, \frac{dy}{dt} = -2 - 2t \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{-2 - 2t}{2} \\ &= -t - 1 \end{aligned}$$

이때 $x = 2t - 1$ 에서 $t = \frac{x+1}{2}$ 이므로

$$f'(x) = -\frac{x+1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}(x+3) \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+2h) - f(3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+2h) - f(3)}{2h} \times 2 \\ &= 2f'(3) \end{aligned}$$

이고, $\textcircled{7}$ 에서

$$f'(3) = -\frac{1}{2}(3+3) = -3 \text{이므로}$$

$$2f'(3) = -6$$

[다른풀이]

$$x = 2t - 1, \quad y = 1 - 2t - t^2 \text{에서}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2, \quad \frac{dy}{dt} = -2 - 2t \text{이므로}$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{-2-2t}{2}$$

$$= -t - 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+2h) - f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+2h) - f(3)}{2h} \times 2$$

$$= 2f'(3)$$

이고 $x = 2t - 1$ 에서 $x = 3$ 일 때 $t = 2$ 이므로

$$2f'(3) = 2(-2-1) = -6$$

7) 답 ②

[해설]

$x^2 - y \ln x + x - e = 0$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x - \frac{dy}{dx} \ln x - y \cdot \frac{1}{x} + 1 - 0 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln x} \left(2x - \frac{y}{x} + 1 \right) \quad (\text{단, } x > 0, \quad x \neq 1)$$

따라서 곡선 $x^2 - y \ln x + x - e = 0$ 위의 점 (e, e^2) 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{1}{\ln e} \left(2e - \frac{e^2}{e} + 1 \right) = e + 1$$

8) 답 ③

[해설]

$$x = t^2 + 1, \quad y = t^2 + 3at \text{에서}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2t, \quad \frac{dy}{dt} = 2t + 3a$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t+3a}{2t} \quad (\text{단, } t \neq 0)$$

$t = 3$ 에 대응하는 점에서의 접선이 직선 $y = -x + 3$ 과 평행하므로 접선의 기울기는 -1 이다.

$$\text{즉, } \frac{6+3a}{6} = -1 \text{에서}$$

$$a = -4$$

9) 답 ③

[해설]

$x^2 + axy + y^2 = b$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x + ay + ax \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(ax + 2y) \frac{dy}{dx} = -(2x + ay)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+ay}{ax+2y} \quad (\text{단, } ax+2y \neq 0) \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

점 $(1, -2)$ 에서의 접선의 기울기가 $\frac{1}{3}$ 이므로

$x = 1, \quad y = -2$ 를 $\textcircled{A}$ 에 대입하면

$$\frac{-(2-2a)}{a-4} = \frac{1}{3}$$

$$-3(2-2a) = a-4$$

$$-6+6a = a-4$$

$$5a = 2$$

$$a = \frac{2}{5}$$

또한 주어진 곡선이 점 $(1, -2)$ 를 지나므로

$$1^2 + \frac{2}{5} \times 1 \times (-2) + (-2)^2 = b$$

$$b = \frac{21}{5}$$

$$\text{따라서 } 2b - a = 2 \times \frac{21}{5} - \frac{2}{5} = 8$$

10) 답 ③

[해설]

$$x = f(t), \quad y = f(t^2) \text{에서}$$

$$\frac{dx}{dt} = f'(t), \quad \frac{dy}{dt} = 2tf'(t^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2tf'(t^2)}{f'(t)}$$

따라서 $t = 1$ 에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2f'(1)}{f'(1)} = 2$$

따라서 기울기가 2이고 점 $(2, -1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - (-1) = 2(x - 2)$$

$$y = 2x - 5$$

따라서 구하는 y 절편은 -5 이다.

11) 답 ③

[해설]

$$x = nt^2 + t, \quad y = \frac{n}{3}t^3 + 8t - 10 \text{에서}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2nt + 1, \quad \frac{dy}{dt} = nt^2 + 8$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{nt^2+8}{2nt+1}$$

이므로 $t = 3$ 에 대응하는 점에서의 접선의 기울기 $f(n)$ 은

$$f(n) = \frac{9n+8}{6n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n+8}{6n+1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 - \frac{8}{n}}{6 - \frac{1}{n}}$$

$$= \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

12) 답 ①

[해설]

$x^2 + 3ye^x - y^3 = -n^2 + 3n$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x + 3 \frac{dy}{dx} e^x + 3ye^x - 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+3ye^x}{2y-3e^x} \quad (\text{단, } 2y \neq 3e^x)$$

위의 식에 $x = 0, \quad y = n$ 을 대입하면 $\frac{3n}{2n-3}$

즉, 주어진 곡선 위의 점 $(0, n)$ 에서의 접선의 기울기가

$\frac{3n}{2n-3}$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y = \frac{3n}{2n-3}x + n$$

따라서 이 직선의 x 절편 $f(n)$ 은

$$f(n) = -\frac{2n-3}{3} = -\frac{2}{3}n + 1$$

이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{20} \{10 - f(n)\} &= \sum_{n=1}^{20} \left(9 + \frac{2}{3}n\right) \\ &= 9 \times 20 + \frac{2}{3} \times \frac{20 \times 21}{2} \\ &= 180 + 140 = 320 \end{aligned}$$

13) 답 ③

[해설]

$$x = t + 1, y = t^3 + t^2 \text{에서}$$

$$\frac{dx}{dt} = 1, \frac{dy}{dt} = 3t^2 + 2t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = 3t^2 + 2t$$

점 $(a+1, a^3 + a^2)$ 은 $t = a$ 에 대응하는 점이므로

점 $(a+1, a^3 + a^2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\begin{aligned} y - (a^3 + a^2) &= (3a^2 + 2a)\{x - (a+1)\} \\ y &= (3a^2 - 2a)x - (3a^2 + 2a)(a+1) + a^3 + a^2 \\ &= (3a^2 + 2a)x - 2a^3 - 4a^2 - 2a \end{aligned}$$

이므로 y 절편은 $g(a) = -2a^3 - 4a^2 - 2a$

이므로 y 절편은 $g(a) = -2a^3 - 4a^2 - 2a$ 이다.

이때 $g(1) = -8$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 1} \frac{g(a) + 8}{a^2 - 1} &= \lim_{a \rightarrow 1} \left\{ \frac{g(a) - g(1)}{a - 1} \times \frac{1}{a + 1} \right\} \\ &= \frac{1}{2} g'(1) \end{aligned}$$

한편, $g(a) = -2a^3 - 4a^2 - 2a$ 에서

$$g'(a) = -6a^2 - 4a - 2 \text{에서}$$

$$g'(a) = -6a^2 - 8a - 2 \text{이므로}$$

$$g'(1) = -16$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{2} g'(1) = -8$$

[다른풀이]

$$x = t + 1, y = t^3 + t^2 \text{에서 } t \text{를 소거하면}$$

$$y = (x-1)^3 + (x-1)^2$$

이므로

$$\frac{dy}{dx} = 3(x-1)^2 + 2(x-1)$$

따라서 점 $(a+1, a^3 + a^2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - (a^3 + a^2) = (3a^2 + 2a)\{x - (a+1)\}$$

$$y = (3a^2 + 2a)x - 2a^3 - 4a^2 - 2a \text{이다.}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 1} \frac{g(a) + 8}{a^3 - 1} &= \lim_{a \rightarrow 1} \frac{-2a^3 - 4a^2 - 2a + 8}{a^3 - 1} \\ &= \lim_{a \rightarrow 1} \frac{-2(a-1)(a^2 + 3a + 4)}{(a+1)(a-1)} \\ &= \lim_{a \rightarrow 1} \frac{-2(a^2 + 3a + 4)}{a+1} \\ &= -8 \end{aligned}$$

14)답 ①

[해설] 두 점 P, Q의 속도는 각각

$$f'(t) = 2\cos 2t + 2\sin 2t, g'(t) = 1 + 2\sin 2t$$

$$f'(t) = g'(t) \text{에서 } 2\cos 2t + 2\sin 2t = 1 + 2\sin 2t$$

$$2\cos 2t = 1, \cos 2t = \frac{1}{2}$$

$t > 0$ 이므로

$$2t = \frac{\pi}{3} \text{에서 } t = \frac{\pi}{6}$$

점 P의 가속도는 $f''(t) = -4\sin 2t + 4\cos 2t$ 이므로 두 점 P, Q의 속도가 처음으로 같아지는 시각에서 점 P의 가속도는

$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -4\sin \frac{\pi}{3} + 4\cos \frac{\pi}{3} = -4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \times \frac{1}{2} = 2 - 2\sqrt{3}$$

15)답 ②

[해설] 시각 t 에서 점 P의 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$ 라고 하면

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 1 + \frac{2t}{t^2 + 4}$$

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{d}{dt} v(t) \\ &= \frac{2(t^2 + 4) - 2t \times 2t}{(t^2 + 4)^2} \\ &= -\frac{2(t^2 - 4)}{(t^2 + 4)^2} \end{aligned}$$

따라서 점 P의 $t = 2$ 에서의 속도와 가속도는

$$v(2) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, a(2) = 0$$

16)답 ①

[해설] $v(t) = \frac{1}{(t+1)^2}$ 이므로 시각 t 에서 점 P의 위치를 $x(t)$ 라고 하면

$$\begin{aligned} x(3) &= x(0) + \int_0^3 v(t) dt \\ &= 2 + \int_0^3 \frac{1}{(t+1)^2} dt \\ &= 2 + \int_0^3 (t+1)^{-2} dt \\ &= 2 + \left[-\frac{1}{t+1} \right]_0^3 \\ &= 2 - \frac{1}{4} + 1 \\ &= \frac{11}{4} \end{aligned}$$

17)답 ⑤

$$\text{[해설] } x = 3t \text{에서 } \frac{dx}{dt} = 3$$

$$y = -2t^2 + 4t \text{에서 } \frac{dy}{dt} = -4t + 4$$

이므로 점 P의 시각 t 에서의 속도를 $\vec{v}$ 라고 하면

$$\vec{v} = (3, -4t + 4) \text{이므로 속력은}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + (-4t + 4)^2} = \sqrt{16(t-1)^2 + 9}$$

점 P의 속력은 $t = 1$ 일 때 최소이고, 이때의 점 P의 위치는 $(3, 2)$ 이다.

따라서 $a = 3, b = 2$ 이므로 $a^2 + b^2 = 13$

18)답 ⑤

$$\text{[해설] } x = 2t^2 + \cos 2t, y = 3 - \frac{1}{2} \sin 2t \text{에서}$$

$$\frac{dx}{dt} = 4t - 2\sin 2t, \frac{dy}{dt} = -\cos 2t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 4 - 4\cos 2t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 2\sin 2t$$

이므로 점 P의 시각 t 에서의 가속도를 $\vec{a}$ 라고 하면
 $\vec{a} = (4 - 4\cos 2t, 2\sin 2t)$

따라서 시각 $t = \frac{\pi}{4}$ 에서의 가속도는 $\vec{a} = (4, 2)$ 이므로 가속도의

크기는 $|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$
 19)답 ②

[해설] $x = \cos t + t \sin t$ 에서

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t + \sin t + t \cos t = t \cos t$$

$y = \sin t - t \cos t$ 에서

$$\frac{dy}{dt} = \cos t - \cos t + t \sin t = t \sin t$$

이므로

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (t \cos t)^2 + (t \sin t)^2 = t^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = t^2$$

따라서 $t = \frac{\pi}{6}$ 에서 $t = \frac{\pi}{3}$ 까지 점 P가 움직인 거리 s 는

$$s = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{t^2} dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} t dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}t^2\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{36}\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{24}$$

20)답 ③

[해설] $x = 2\sqrt{2}t$ 에서 $\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{2}$

$y = e^t + 2e^{-t}$ 에서 $\frac{dy}{dt} = e^t - 2e^{-t}$ 이므로

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= (2\sqrt{2})^2 + (e^t - 2e^{-t})^2 \\ &= 8 + (e^{2t} - 4 + 4e^{-2t}) \\ &= e^{2t} + 4 + 4e^{-2t} \\ &= (e^t + 2e^{-t})^2 \end{aligned}$$

따라서 $t = 0$ 에서 $t = \ln 2$ 까지 점 P가 움직인 거리 s 는

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\ln 2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^{\ln 2} \sqrt{(e^t + 2e^{-t})^2} dt \\ &= \int_0^{\ln 2} (e^t + 2e^{-t}) dt \\ &= [e^t - 2e^{-t}]_0^{\ln 2} \\ &= \left(2 - \frac{2}{2}\right) - (1 - 2) = 2 \end{aligned}$$

21)답 ⑤

[해설] $x = 2t^3 - 6t + 1$ 에서 $\frac{dx}{dt} = 6t^2 - 6$

$y = 6t^2$ 에서 $\frac{dy}{dt} = 12t$

따라서 구하는 곡선의 길이를 l 이라고 하면

$$l = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$= \int_0^1 \sqrt{(6t^2 - 6)^2 + (12t)^2} dt$$

$$= \int_0^1 \sqrt{36t^4 - 72t^2 + 36 + 144t^2} dt$$

$$= \int_0^1 \sqrt{(6t^2 + 6)^2} dt = \int_0^1 (6t^2 + 6) dt$$

$$= [2t^3 + 6t]_0^1 = 8$$

22)답 ③

[해설] $x = e^t \sin t$ 에서 $\frac{dx}{dt} = e^t(\sin t + \cos t)$

$y = e^t \cos t$ 에서 $\frac{dy}{dt} = e^t(\cos t - \sin t)$

주어진 곡선의 길이를 l 이라고 하면

$$\begin{aligned} l &= \int_0^a \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^a \sqrt{e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 + e^{2t}(\cos t - \sin t)^2} dt \\ &= \int_0^a \sqrt{e^{2t}(1 + 2\sin t \cos t) + e^{2t}(1 - 2\sin t \cos t)} dt \\ &= \int_0^a \sqrt{2e^{2t}} dt = \int_0^a \sqrt{2} e^t dt \\ &= \sqrt{2} [e^t]_0^a \\ &= \sqrt{2}(e^a - 1) = 4 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

에서 $\sqrt{2}e^a = 4$, 즉, $e^a = 2\sqrt{2}$ 이므로
 $a = \ln 2\sqrt{2} = \frac{3}{2}\ln 2$

$$a = \ln 2\sqrt{2} = \frac{3}{2}\ln 2$$

23)답 ⑤

[해설] $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\ln x$ 에서

$\frac{dy}{dx} = x - \frac{1}{4} \times \frac{1}{x} = x - \frac{1}{4x}$ 이므로

$$\begin{aligned} 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= 1 + \left(x - \frac{1}{4x}\right)^2 \\ &= 1 + \left(x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2}\right) \\ &= x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2} \\ &= \left(x + \frac{1}{4x}\right)^2 \end{aligned}$$

따라서 구하는 곡선의 길이를 l 이라고 하면

$$\begin{aligned} l &= \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= \int_1^e \sqrt{\left(x + \frac{1}{4x}\right)^2} dx \\ &= \int_1^e \left(x + \frac{1}{4x}\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\ln x\right]_1^e \\ &= \left(\frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

24)답 ②

[해설] $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{2t}{2\sqrt{t^2+3}} = \frac{t}{\sqrt{t^2+3}}$

이므로 점 P의 시각 t 에서의 속도를 v 라고 하면

$$\vec{v} = \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}, \frac{t}{\sqrt{t^2+3}} \right) \text{이고 속력은}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)^2 + \left(\frac{t}{\sqrt{t^2+3}}\right)^2} \\ = \sqrt{\frac{1}{4t} + \frac{t^2}{t^2+3}}$$

따라서 $t=1$ 에서 점 P의 속력은

$$\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

25)답 ①

[해설] 점 P의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가

$$x = 2t + 1, y = t^3 - 2t^2 - 4 \text{이므로}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2, \frac{dy}{dt} = 3t^2 - 4t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \frac{d^2y}{dt^2} = 6t - 4$$

점 P의 시각 t 에서의 가속도를 $\vec{a}$ 라고 하면 $\vec{a} = (0, 6t - 4)$
가속도의 크기는

$$|\vec{a}| = \sqrt{0^2 + (6t - 4)^2} = |6t - 4| \text{이므로}$$

$$|\vec{a}| = 0 \text{이 되는 시각은 } t = \frac{2}{3} \text{이다.}$$

26)답 ⑤

$$[\text{해설}] x = 3t^2 \text{에서 } \frac{dx}{dt} = 6t, y = t^3 - 3t \text{에서 } \frac{dy}{dt} = 3t^2 - 3$$

이므로

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (6t)^2 + (3t^2 - 3)^2 \\ = 36t^2 + 9t^4 - 18t^2 + 9 \\ = 9t^4 + 18t^2 + 9 \\ = (3t^2 + 3)^2$$

따라서 $t=1$ 에서 $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리를 s 라고 하면

$$s = \int_1^3 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ = \int_1^3 \sqrt{(3t^2 + 3)^2} dt \\ = \int_1^3 (3t^2 + 3) dt \\ = [t^3 + 3t]_1^3 \\ = (27 + 9) - (1 + 3) = 32$$

27)답 ④

$$[\text{해설}] y = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} \text{에서 } \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} \text{이므로}$$

구하는 곡선의 길이를 l 이라고 하면

$$l = \int_0^{12} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ = \int_0^{12} \sqrt{1 + \frac{1}{4}x} dx \\ = \int_0^{12} \left(1 + \frac{1}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} dx \\ = \left[\frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} \times 4 \right]_0^{12} \\ = \frac{8}{3}(8 - 1) = \frac{56}{3}$$

28)답 125

$$[\text{해설}] \frac{dx}{dt} = -\sin 2t, \frac{dy}{dt} = \cos t \text{이므로 점 P의 시각 } t \text{에서의}$$

속도를 $\vec{v}$ 라고 하면 $\vec{v} = (-\sin 2t, \cos t)$ 이고 속력은

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-\sin 2t)^2 + \cos^2 t} \\ = \sqrt{\sin^2 2t + \cos^2 t} \\ = \sqrt{4\sin^2 t \cos^2 t + \cos^2 t} \\ = \sqrt{4(1 - \cos^2 t)\cos^2 t + \cos^2 t} \\ = \sqrt{-4\cos^4 t + 5\cos^2 t}$$

$\cos^2 t = s$ 로 놓으면 $0 \leq s \leq 1$ 이고

$$|\vec{v}| = \sqrt{-4s^2 + 5s} \\ = \sqrt{-4\left(s - \frac{5}{8}\right)^2 + \frac{25}{16}}$$

점 P의 속력은 $s = \frac{5}{8}$ 일 때, 최댓값 $\frac{5}{4}$ 를 가지므로 $M = \frac{5}{4}$ 이

다. 따라서 $100M = 125$

29)답 ④

[해설] 시각 t 에서 점 P의 위치를 (x, y) 라고 하면

$$\vec{OP} = \cos t \vec{OA} - \sin t \vec{OB} \text{에서}$$

$$(x, y) = \cos t(2, 1) - \sin t(2, -1)$$

$$= (2\cos t - 2\sin t, \cos t + \sin t) \text{이므로}$$

$$x = 2\cos t - 2\sin t, y = \cos t + \sin t$$

$$\frac{dx}{dt} = -2\sin t - 2\cos t, \frac{dy}{dt} = -\sin t + \cos t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\cos t + 2\sin t, \frac{d^2y}{dt^2} = -\cos t - \sin t$$

시각 t 에서 점 P의 가속도를 $\vec{a}$ 라고 하면

$$|\vec{a}| = \sqrt{4(\sin t - \cos t)^2 + (\sin t + \cos t)^2} \\ = \sqrt{5 - 6\sin t \cos t} = \sqrt{5 - 3\sin 2t}$$

따라서 $0 \leq t \leq \pi$ 에서 점 P의 가속도의 크기의 최댓값은

$$\sin 2t = -1, \text{ 즉, } t = \frac{3}{4}\pi \text{일 때,}$$

$$\sqrt{5 - 3\sin \frac{3}{2}\pi} = \sqrt{5 + 3} = 2\sqrt{2}$$

30)답 108

$$[\text{해설}] x = 2\cos \frac{t^3}{4} \text{에서 } \frac{dx}{dt} = 2\left(-\sin \frac{t^3}{4}\right) \times \frac{3}{4}t^2$$

$$= -\frac{3}{2}t^2 \sin \frac{t^3}{4}$$

$$y = 2\sin \frac{t^3}{4} \text{에서 } \frac{dy}{dt} = 2\left(\cos \frac{t^3}{4}\right) \times \frac{3}{4}t^2 = \frac{3}{2}t^2 \cos \frac{t^3}{4} \text{이므로}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{9}{4}t^4 \sin^2 \frac{t^3}{4} + \frac{9}{4}t^4 \cos^2 \frac{t^3}{4} = \frac{9}{4}t^4$$

따라서 $t=0$ 에서 $t=6$ 까지 점 P가 움직인 거리를 s 라고 하면

$$s = \int_0^6 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ = \int_0^6 \sqrt{\frac{9}{4}t^4} dt \\ = \int_0^6 \frac{3}{2}t^2 dt \\ = \left[\frac{1}{2}t^3 \right]_0^6 = 108$$

31)답 ②

$$[\text{해설}] 1 \leq t \leq a \text{에서 } x = \ln t^2 = 2\ln|t| = 2\ln t \text{이므로}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{t}$$

$$y = t + \frac{1}{t} \text{에서 } \frac{dy}{dt} = 1 - \frac{1}{t^2}$$

주어진 곡선의 길이를 l 이라고 하면

$$\begin{aligned} l &= \int_1^a \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_1^a \sqrt{\left(\frac{2}{t}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^2} dt \\ &= \int_1^a \sqrt{\frac{4}{t^2} + 1 - \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4}} dt \\ &= \int_1^a \sqrt{\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^2} dt \\ &= \int_1^a \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt \\ &= \left[t - \frac{1}{t}\right]_1^a \\ &= \left(a - \frac{1}{a}\right) - (1 - 1) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{에서 } a - \frac{3}{2} - \frac{1}{a} = 0$$

$$2a^2 - 3a - 2 = 0, (2a+1)(a-2) = 0$$

$$a \geq 1 \text{이므로 } a = 2$$

32)답 ⑤

[해설] 점 $P(x, y)$ 가 점 $(1, 0)$ 을 출발하여 원 위를 시계 반대 방향으로 매초 두 바퀴씩 일정한 속력으로 회전하므로 t 초 후의 점 P 의 위치 (x, y) 는

$$x = \cos 4\pi t, y = \sin 4\pi t$$

t 초 후의 점 P 의 속도를 $\vec{v}$, 가속도를 $\vec{a}$ 라고 하면

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = (-4\pi \sin 4\pi t, 4\pi \cos 4\pi t)$$

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right) = (-16\pi^2 \cos 4\pi t, -16\pi^2 \sin 4\pi t)$$

따라서 $t = \frac{1}{3}$ 일 때

$$\vec{a} = \left(-16\pi^2 \cos \frac{4}{3}\pi, -16\pi^2 \sin \frac{4}{3}\pi\right) = (8\pi^2, 8\sqrt{3}\pi^2)$$

33)답 ②

$$[\text{해설}] \frac{dx}{dt} = \cos t + \sin t, \frac{dy}{dt} = -\cos t \sin t \text{이므로}$$

$t = \frac{\pi}{2}$ 일 때 곡선 C 위의 점 P 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{0}{1} = 0$$

$t = \frac{\pi}{2}$ 일 때 점 P 의 좌표는 $(1, 1)$ 이므로 곡선 C 위의 점 P 에

서의 접선 l 의 방정식은 $y = 1$ 이다.

$t = a$ 일 때, 점 P 가 직선 $y = 1$ 위에 있으므로

$$y = \frac{1}{2} \cos^2 a + 1 = 1 \text{에서 } \cos a = 0$$

$$\frac{\pi}{2} < a < 2\pi \text{이므로 } a = \frac{3}{2}\pi$$

따라서 $t = \frac{\pi}{2}$ 에서 $t = \frac{3}{2}\pi$ 까지 점 P 가 움직인 거리는

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \sqrt{(\cos t + \sin t)^2 + (-\cos t \sin t)^2} dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \sqrt{1 + 2\sin t \cos t + (\sin t \cos t)^2} dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \sqrt{(1 + \sin t \cos t)^2} dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2} \sin 2t\right)^2} dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \left(1 + \frac{1}{2} \sin 2t\right) dt$$

$$= \left[t - \frac{1}{4} \cos 2t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}$$

$$= \left(\frac{3}{2}\pi + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\right) = \pi$$

34)답 49

[해설]

$$y = \int_0^x \frac{(e^t + e^{-t})(x-t)}{2} dt$$

$$= x \int_0^x \frac{e^t + e^{-t}}{2} dt - \int_0^x \frac{t(e^t + e^{-t})}{2} dt$$

이므로 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \frac{e^t + e^{-t}}{2} dt + \frac{x(e^x + e^{-x})}{2} - \frac{x(e^x + e^{-x})}{2}$$

$$= \left[\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right]_0^x$$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= 1 + \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}$$

$$= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2$$

따라서 구하는 곡선의 길이 l 은

$$l = \int_{\ln 4}^{\ln 8} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$= \int_{\ln 4}^{\ln 8} \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2} dx$$

$$= \int_{\ln 4}^{\ln 8} \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2} [e^x - e^{-x}]_{\ln 4}^{\ln 8}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left(8 - \frac{1}{8}\right) - \left(4 - \frac{1}{4}\right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left(4 + \frac{1}{8}\right)$$

$$= \frac{33}{16}$$

즉, $p = 16$, $q = 33$ 이므로 $p + q = 16 + 33 = 49$

35) [정답] ⑤

$$x = 4t + 3 \text{에서 } \frac{dx}{dt} = 4$$

$$y = t^3 + 2t - 5 \text{에서 } \frac{dy}{dt} = 3t^2 + 2$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 + 2}{4}$$

이고 $x = 7$ 이 되는 t 의 값은 1이므로

$$f'(7) = \frac{3 \times 1^2 + 2}{4} = \frac{5}{4}$$

36) [정답] ④

$$x = \frac{3t}{2+t^2}, y = \frac{2-t^2}{2+t^2} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{3(2+t^2) - 3t \times 2t}{(2+t^2)^2} \\ &= \frac{6-3t^2}{(2+t^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{-2t(2+t^2) - (2-t^2) \times 2t}{(2+t^2)^2} \\ &= \frac{-8t}{(2+t^2)^2} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-8t}{6-3t^2} \text{이므로 } t=2 \text{일 때,}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8}{3}$$

37) [정답] ④

$y^2 + 2xy + 24 = 0$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2y \frac{dy}{dx} + 2y + 2x \frac{dy}{dx} = 0$$

$$y \frac{dy}{dx} + y + x \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x+y} \quad (\text{단, } x+y \neq 0)$$

$$x = -5, y = 4 \text{일 때, } \frac{dy}{dx} = 4$$

따라서 점 $(-5, 4)$ 에서의 접선의 기울기는 4이다.

38) [정답] ⑤

$x^3 + 2y^3 - axy + 4b = 0$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2 + 6y^2 \frac{dy}{dx} - ay - ax \frac{dy}{dx} = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

점 $(0, -1)$ 에서 $\frac{dy}{dx}$ 의 값이 3이므로 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$18 + a = 0$$

$$\therefore a = -18$$

한편 점 $(0, -1)$ 은 곡선 $x^3 + 2y^3 - axy + 4b = 0$ 위에 있으므로

$$-2 + 4b = 0$$

$$\therefore b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore ab = -18 \times \frac{1}{2} = -9$$

39) [정답] 5

$$y = x \int_0^x \frac{1}{\cos^2 t} dt - \int_0^x \frac{t}{\cos^2 t} dt$$

$$\therefore y' = \int_0^x \frac{1}{\cos^2 t} dt + x \times \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{x}{\cos^2 x}$$

$$= \int_0^x \sec^2 t dt$$

$$= \left[\tan t \right]_0^x$$

$$= \tan x$$

따라서 구하는 곡선의 길이를 l 이라 하면

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + \tan^2 x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx$$

$$\sin x = t \text{로 놓으면 } \cos x \frac{dx}{dt} = 1 \text{이고}$$

$$x = 0 \text{일 때 } t = 0, x = \frac{\pi}{6} \text{일 때 } t = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$l = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-t^2} dt$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-t)(1+t)} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[\ln |t+1| - \ln |t-1| \right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \ln 3$$

따라서 $a = 2, b = 1$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 5$$

40) [정답] ④

곡선의 길이를 l 이라 하면

$$l = \int_0^2 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$= \int_0^2 \sqrt{\left(\frac{1}{2t^2}\right)^2 + (t-1)^2} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^2 \sqrt{4t + (t-1)^2} dt \\
&= \int_0^2 \sqrt{(t+1)^2} dt \\
&= \int_0^2 (t+1) dt \quad (\because t+1 > 0) \\
&= \left[\frac{t^2}{2} + t \right]_0^2 = 4 - 0 = 4
\end{aligned}$$

41) **정답** ③

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2}{3}x\sqrt{x}, \text{ 곡선의 길이를 } l \text{ 이라 하면 } f'(x) = x^{\frac{1}{2}} \text{ 이므로} \\
l &= \int_0^3 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \\
&= \int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} dx \\
&= \int_0^3 \sqrt{1 + x} dx \\
&= \left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}
\end{aligned}$$

42) **정답** ⑤

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{4}x^2 - \ln \sqrt{x} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} \ln x \text{ 에서} \\
y' &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right) \\
\text{이므로 곡선의 길이를 } l \text{ 이라 하면} \\
l &= \int_2^8 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\
&= \int_2^8 \sqrt{1 + \left\{ \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right) \right\}^2} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_2^8 \sqrt{4 + \left(x - \frac{1}{x} \right)^2} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_2^8 \left(x + \frac{1}{x} \right) dx \quad (\because x + \frac{1}{x} > 0) \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}x^2 + \ln x \right]_2^8 \\
&= \frac{1}{2} \{ (32 + \ln 8) - (2 + \ln 2) \} \\
&= \frac{1}{2} (30 + 2 \ln 2) = 15 + \ln 2
\end{aligned}$$

43) **정답** ④

점 P의 좌표를 P(x, y)라 하면

$$x = \frac{2}{3}t^3 \text{ 에서 } \frac{dx}{dt} = 2t^2 \text{ 이고 } \frac{dy}{dt} = 2t \text{ 이다.}$$

시각 $t=0$ 에서 $t=\sqrt{3}$ 까지 점 P가 움직인 거리를 l이라 하면

$$\begin{aligned}
l &= \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{(2t^2)^2 + (2t)^2} dt \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} 2t\sqrt{t^2+1} dt
\end{aligned}$$

이때 $t^2+1=s$ 로 놓으면 $2t \frac{dt}{ds} = 1$ 이고 $t=0$ 일 때

$$s=1, \quad t=\sqrt{3} \text{ 일 때 } s=4 \text{ 이므로}$$

l

$$= \int_0^{\sqrt{3}} 2t\sqrt{t^2+1} dt = \int_1^4 \sqrt{s} ds = \left[\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}$$

44) **정답** ⑤

풀이 $x = 3 + \cos \theta$ 에서 $\frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta$

$y = 1 = \sin \theta$ 에서 $\frac{dy}{d\theta} = \cos \theta$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\cos \theta}{-\sin \theta} = -\cot \theta \quad (\text{단, } \sin \theta \neq 0)$$

$\theta = a$ 에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는 $-\cot a$ 이고 기울기가 -2 인 직선과 수직이므로 $-\cot a \times (-2) = -1$ 에서

$$\cot a = \frac{1}{2}$$

즉, $\tan a = 2$ 따라서 $\sec^2 a = 1 + \tan^2 a = 1 + 2^2 = 5$

45) **정답** ②

$x = t^2 + 1$ 에서 $\frac{dx}{dt} = 2t$

$y = \frac{2}{3}t^3 + at - 1$ 에서 $\frac{dy}{dt} = 2t^2 + a$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t^2 + a}{2t} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$y = f(x)$ 의 그래프에서 $x=2$ 일 때의 접선의 기울기는 6, 즉 $f'(2) = 6$ 이므로 주어진 곡선 위의 점 중 $x=2$ 일 때의 접선의 기울기는 6이다. $x = t^2 + 1$ 에서 $2 = t^2 + 1$ 이고 $t = 1 (t > 0)$

$\dots\dots \textcircled{B}$

$\textcircled{B}$ 을 $\textcircled{A}$ 에 대입하면 $\frac{2 \times 1^2 + a}{2 \times 1}$ 이므로 $\frac{2+a}{2} = 6$ 에서

$$a = 10$$

$\textcircled{B}$ 에서 $t = 1$ 이므로 $k = 1$ 따라서 $a + k = 10 + 1 = 11$

46) **답** ③

풀이

$$x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 2, \quad \text{즉 } x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} = 2 \text{ 에서 양변을 } x \text{ 에 대하여 미분하면}$$

$$\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt{y}y' = 0$$

$$\therefore y' = -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \quad (\text{단, } y \neq 0)$$

따라서 점 (1, 1)에서의 접선의 기울기는

$$-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}} = -1$$

47) **답** ④

풀이

점 P(1, a)는 곡선 $x^3 + y^3 - 2xy - 5 = 0$ 위의 점이므로

$$1+a^3-2a-5=0, \quad a^3-2a-4=0$$

$$(a-2)(a^2+2a+2)=0$$

이때 a 는 실수이므로 $a=2$ 이다.

한편, $x^3+y^3-2xy-5=0$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2+3y^2y'-2y-2xy'=0$$

$$\therefore y' = \frac{2y-3x^2}{3y^2-2x} \quad (\text{단, } 3y^2 \neq 2x)$$

따라서 점 $P(1, 2)$ 에서의 접선의 기울기는

$$m = \frac{2 \times 2 - 3 \times 1^2}{3 \times 2^2 - 2 \times 1} = \frac{1}{10}$$

$$\therefore am = 2 \times \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$$

48) **답** ①

풀이

$$(x+1)^2 - (x^2+1)y^3 = 0 \text{에서}$$

$$y^3 = \frac{(x+1)^2}{x^2+1} \text{이므로 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$3y^2y' = \frac{2(x+1)(x^2+1) - (x+1)^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

$$\therefore y' = \frac{-2(x+1)(x-1)}{3y^2(x^2+1)^2} \quad (\text{단, } y \neq 0)$$

$$y' > 0 \text{에서 } \frac{-2(x+1)(x-1)}{3y^2(x^2+1)^2} > 0$$

$$(x+1)(x-1) < 0, \quad y \neq 0$$

$$\therefore -1 < x < 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{\text{A}}$$

①을 해로 갖고 이차항의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x+1)(x-1) < 0, \quad \text{즉 } x^2-1 < 0$$

따라서 $a=0, \quad b=-1$ 이므로

$$a+b=0+(-1)=-1$$

49) **답** ④

풀이

$x^2+xy+y^2=12$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x+y+xy'+2yy'=0 \text{에서 } y' = -\frac{2x+y}{x+2y} \quad (\text{단, } x+2y \neq 0)$$

이므로

점 $P(a, b)$ 에서의 접선의 기울기는 $-\frac{2a+b}{a+2b}$ 이다.

접선과 직선 OP 가 서로 수직이므로 $\frac{b}{a} \times \left(-\frac{2a+b}{a+2b}\right) = -1$ 에

서 $a^2=b^2$ 이고 조건 $a>0, \quad b>0$ 에 의하여 $a=b$ 이다.

한편, 점 $P(a, b)$ 가 곡선 $x^2+xy+y^2=12$ 위의 점이므로

$$a^2+ab+b^2=12 \text{가 성립한다.}$$

$$\text{따라서 } a^2+ab+b^2=3a^2=12 \text{이므로 } a^2=4$$

이때 $a>0, \quad b>0$ 에서 $a=2, \quad b=2$ 이므로 $a+b=2+2=4$ 이다.

50) **답** ④

풀이

매개변수로 나타내어진 함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

$$x=t^3+1, \quad y=t^2-at+3a^2 \text{에서}$$

$$\frac{dx}{dt}=3t^2, \quad \frac{dy}{dt}=2t-a$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t-a}{3t^2} \quad (\text{단, } t \neq 0)$$

$t=2$ 에 대응하는 점에서의 접선의 기울기가 -1 이므로

$$\frac{4-a}{12} = -1$$

$$\therefore a=16$$

51) **답** ④

풀이

$$x = \sqrt{t} + \frac{1}{t} \text{에서 } \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{t^2}$$

$$y = \sqrt{t} - \frac{1}{t} \text{에서 } \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{1}{t^2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{1}{t^2}}{\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{t^2}} = \frac{t^2+2\sqrt{t}}{t^2-2\sqrt{t}} \quad (\text{단, } t \neq \sqrt[3]{4}) \end{aligned}$$

따라서 $t=4$ 에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는

$$\frac{16+4}{16-4} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3} \text{이다.}$$

52) **답** ②

풀이

$$x=t^2+1, \quad y=2-t-t^2 \text{에서}$$

$$\frac{dx}{dt}=2t, \quad \frac{dy}{dt}=-1-2t \text{이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-1-2t}{2t} \quad (\text{단, } t \neq 0)$$

이때 $t^2+1=2$ 와 $2-t-t^2=0$ 을 모두 만족시키는 t 의 값은 1이므로 점 $(2, 0)$ 에서의 접선의 기울기는 $t=1$ 일 때의

$$\frac{dy}{dx} \text{의 값인 } -\frac{3}{2} \text{이다.}$$

53) **답** ①

풀이

$$x=t+\frac{1}{t} \text{에서 } t \neq 0 \text{일 때}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 1 - \frac{1}{t^2} \\ &= \frac{t^2-1}{t^2} \end{aligned}$$

$$y = \frac{2t}{1+t^2} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{2(1+t^2)-2t(2t)}{(1+t^2)^2} \\ &= \frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}}{\frac{t^2-1}{t^2}} = \frac{-2t^2}{(1+t^2)^2} \quad (\text{단, } t \neq \pm 1) \text{이므}$$

로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{dy}{dx} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{-2t^2}{(1+t^2)^2} = -\frac{1}{2}$$

다른 풀이

$$x = t + \frac{1}{t} = \frac{t^2 + 1}{t}, \quad y = \frac{2t}{t^2 + 1} = \frac{2}{x} \text{ 에서}$$

$t \rightarrow 1$ 일 때, $x \rightarrow 2$ 이므로 $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{dy}{dx}$ 는 $x = 2$ 에서의 미분계수이다.

$$y' = f'(x) = -\frac{2}{x^2} \text{ 이므로 } f'(2) = -\frac{1}{2}$$

54) 답 10

풀이

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \text{ 를 } t \text{ 에 대하여 미분하면}$$

$$\frac{dx}{dt} = -3\cos^2 t \sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = 3\sin^2 t \cos t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3\sin^2 t \cos t}{-3\cos^2 t \sin t} = -\tan t \text{ (단}$$

$$\cos^2 t \sin t \neq 0)$$

접선 l 의 기울기가 $-\sqrt{3}$ 이므로 $-\tan t = -\sqrt{3}$ 에서 $\tan t = \sqrt{3}$ 이고, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ 이므로 $t = \frac{\pi}{3}$ 이다.

접선 l 의 방정식은

$$y - \sin^3 \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} \left(x - \cos^3 \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\therefore y = -\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서 $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $B\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 이므로

$$10\overline{AB} = 10\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 10 \times 1 = 10$$

대단원 마무리

55) 답 ②

풀이

$x^2y + ax + b = 0$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2xy + x^2y' + a = 0$$

$$\therefore y' = -\frac{2xy + a}{x^2} \text{ (단, } x \neq 0) \quad \dots \textcircled{\ominus}$$

점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기가 $\frac{3}{2}$ 이므로

②에 $x = 1$, $y = 1$ 을 대입하면

$$-2 - a = \frac{3}{2} \quad \therefore a = -\frac{7}{2}$$

한편, 점 $(1, 1)$ 은 곡선 $x^2y + ax + b = 0$ 위의 점이므로 $x = 1$, $y = 1$ 을 대입하면

$$1 + a + b = 0 \quad \therefore b = \frac{5}{2}$$

$$\therefore a - b = -\frac{7}{2} - \frac{5}{2} = -6$$

56) 답 ②

풀이

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2}(e^t \sin t + e^t \cos t) = \sqrt{2}e^t(\sin t + \cos t)$$

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{2}(e^t \cos t - e^t \sin t) = \sqrt{2}e^t(\cos t - \sin t)$$

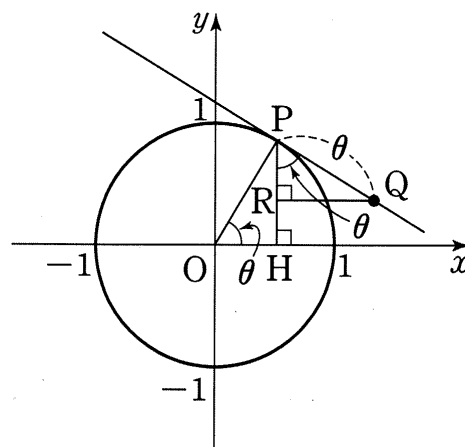
이므로 점 P 가 $t = 0$ 에서 $t = \ln 10$ 까지 움직인 거리는

$$\begin{aligned} & \int_0^{\ln 10} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^{\ln 10} \sqrt{2e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 + 2e^{2t}(\cos t - \sin t)^2} dt \\ &= \int_0^{\ln 10} \sqrt{2e^{2t}\{(\sin t + \cos t)^2 + (\cos t - \sin t)^2\}} dt \\ &= \int_0^{\ln 10} \sqrt{2e^{2t} \cdot 2} dt = \int_0^{\ln 10} 2e^t dt \\ &= [2e^t]_0^{\ln 10} = 2(e^{\ln 10} - e^0) \\ &= 2(10 - 1) = 18 \end{aligned}$$

57) 답 ⑤

풀이

점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라 하고, 점 Q 에서 선분 PH 에 내린 수선의 발을 R 라 하자.



점 P 의 좌표는 $(\cos \theta, \sin \theta)$ 이고, $\overline{PQ} = \theta$, $\angle QPR = \theta$ 이므로

점 Q 의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x = \overline{OH} + \overline{RQ} = \cos \theta + \theta \sin \theta$$

$$y = \overline{PH} - \overline{PR} = \sin \theta - \theta \cos \theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta + \sin \theta + \theta \cos \theta = \theta \cos \theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \cos \theta - (\cos \theta - \theta \sin \theta) = \theta \sin \theta$$

따라서 $\theta = 0$ 에서 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 까지 점 Q 가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\theta \cos \theta)^2 + (\theta \sin \theta)^2} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\theta^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\theta^2} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta d\theta \\ &= \left[\frac{1}{2} \theta^2 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$

58) 답 ③

풀이

$$f(x) = \frac{2}{3\sqrt{3}} x \sqrt{x+1} \text{ 이라 하면}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{x}$$

이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} \int_0^9 \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx &= \int_0^9 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{3} \sqrt{x}\right)^2} dx \\ &= \int_0^9 \sqrt{1 + \frac{1}{3}x} dx \\ &= \left[\frac{2}{3} \cdot 3 \left(1 + \frac{1}{3}x\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^9 \\ &= 2 \left(4^{\frac{3}{2}} - 1\right) = 14 \end{aligned}$$

59) **답** ④

풀이

$$\frac{dx}{dt} = 12t^2, \quad \frac{dy}{dt} = 12t \text{ 이므로 구하는 곡선의 길이 } l \text{ 은}$$

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{(12t^2)^2 + (12t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\sqrt{2}} 12t \sqrt{t^2 + 1} dt \end{aligned}$$

$$t^2 + 1 = u \text{ 로 놓으면 } \frac{du}{dt} = 2t \text{ 이고}$$

$$t = 0 \text{ 이 때 } u = 1, \quad t = 2\sqrt{2} \text{ 일 때 } u = 9 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} l &= \int_1^9 6\sqrt{u} du = \left[6 \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_1^9 = [4u\sqrt{u}]_1^9 \\ &= 108 - 4 = 104 \end{aligned}$$

60) **답** ③

풀이

곡선 l 과 직선 $y = \frac{7}{8}$ 의 교점에서 t 의 값을 $t_1, t_2 (t_1 < t_2)$ 라 하면

$$1 - \cos t_1 = \frac{7}{8} \text{ 에서 } \cos t_1 = \frac{1}{8} \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = \sin t \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} &= \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} \\ &= \sqrt{2 - 2\cos t} \\ &= \sqrt{4\sin^2 \frac{t}{2}} \\ &= 2\sin \frac{t}{2} \left(\because 0 \leq \frac{t}{2} \leq \pi \right) \end{aligned}$$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} 2 \int_{t_1}^{\pi} 2\sin \frac{t}{2} dt &= 2 \left[-4\cos \frac{t}{2} \right]_{t_1}^{\pi} = 2 \cdot 4\cos \frac{t_1}{2} \\ &= 8\sqrt{\frac{1 + \cos t_1}{2}} = 8\sqrt{\frac{1 + \frac{1}{8}}{2}} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= 8\sqrt{\frac{9}{16}} = 8 \cdot \frac{3}{4} = 6 \end{aligned}$$

61) **답** ⑤

풀이

$$\frac{dx}{dt} = e^t(\sin t - \cos t) + e^t(\cos t + \sin t) = 2e^t \sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = e^t(\sin t + \cos t) + e^t(\cos t - \sin t) = 2e^t \cos t$$

l

$$\begin{aligned} &= \int_0^a \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^a \sqrt{(2e^t \sin t)^2 + (2e^t \cos t)^2} dt \\ &= \int_0^a \sqrt{4e^{2t}} dt = \int_0^a 2e^t dt = \left[2e^t \right]_0^a = 2e^a - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{\{e^a(\sin a - \cos a) + 1\}^2 + \{e^a(\sin a + \cos a) - 1\}^2} \text{ 이므로} \\ d^2 &= e^{2a}(\sin a - \cos a)^2 + 2e^a(\sin a - \cos a) + 1 \\ &\quad + e^{2a}(\sin a + \cos a)^2 - 2e^a(\sin a + \cos a) + 1 \\ &= 2e^{2a} - 4e^a \cos a + 2 \end{aligned}$$

$$l^2 = 2d^2 \text{ 에서 } (2e^a - 2)^2 = 4e^{2a} - 8e^a \cos a + 4$$

$$4e^{2a} - 8e^a + 4 = 4e^{2a} - 8e^a \cos a + 4, \quad e^a = e^a \cos a$$

$$e^a > 0 \text{ 이므로 } \cos a = 1$$

$$0 < a \leq 2\pi \text{ 이므로 } a = 2\pi$$

62) ⑤

[해설]

{출제 의도}

음함수의 미분법을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

{풀이}

$y^3 = \ln(5 - x^2) + xy + 4$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3y^2 \times \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{5 - x^2} + y + x \times \frac{dy}{dx}$$

$$(3y^2 - x) \times \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{5 - x^2} + y$$

$x = 2, y = 2$ 를 대입하면

$$10 \times \frac{dy}{dx} = -2, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{5}$$

따라서 구하는 접선의 기울기는 $-\frac{1}{5}$ 이다.

63) ②

[해설]

$e^{x+2} + \ln y = 1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$e^{x+2} + \frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -ye^{x+2}$$

따라서 점 $(-2, 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$-1 \times e^{-2+2} = -1$$

64) ③

[해설]

점 $(1, -1)$ 이 곡선 $x^3 + ay^2 - 3xy + b = 0$ 위의 점이므로

$$1 + a + 3 + b = 0, \quad a + b = -4$$

$x^3 + ay^2 - 3xy + b = 0$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2 + 2ay \times \frac{dy}{dx} - 3y - 3x \times \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - 3x^2}{2ay - 3x} \quad (\text{단, } 2ay - 3x \neq 0)$$

점 $(1, -1)$ 에서의 접선의 기울기가 -2 이므로

$$\frac{-3 - 3}{-2a - 3} = -2, \quad -6 = 4a + 6, \quad 4a = -12$$

$$\text{즉, } a = -3$$

$$\text{이때 } b = -1 \text{ 이므로 } ab = (-3) \times (-1) = 3$$

65) ②

[해설]

r 가 유리수이므로 $r = \frac{n}{m}$ (m 과 n 은 정수, $m \neq 0$) 이라 하면

$$y = x^{\frac{n}{m}} \text{ 이므로 } y^{\overline{m}} = x^n$$

음함수의 미분법에 의하여

$$\frac{d}{dx}(y^{\overline{m}}) = \frac{d}{dx}(x^n)$$

$$\boxed{m} \times y^{m-1} \times \frac{dy}{dx} = nx^{n-1} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{nx^{n-1}}{my^{m-1}} \\ &= \frac{n}{\boxed{m}} \times \frac{x^{n-1}}{\left(x^{\frac{n}{m}}\right)^{\boxed{m-1}}} \\ &= \frac{n}{m} \times x^{\frac{n}{m}-1} \\ &= rx^{r-1} \end{aligned}$$

따라서 $f(m) = m$, $g(m) = m - 1$ 이므로

$$f(5) \times g(6) = 5 \times 5 = 25$$

66) ①

[해설]

{출제 의도}

음함수의 미분법을 이용하여 포물선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

{풀이}

$$y^2 = 4x \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면 } 2y \times \frac{dy}{dx} = 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\boxed{2}}{y} \quad (\text{단, } y \neq 0)$$

점 $A(t^2, 2t)$ 에서의 접선의 기울기는 $\frac{2}{2t} = \frac{1}{t}$ 이므로 점 A 에서의 접선의 방정식은

$$y - 2t = \frac{1}{t}(x - t^2), \quad y = \frac{\boxed{1}}{t} \times x + t$$

점 B 는 준선 $x = -1$ 위의 점이므로 $B(\boxed{-1}, 2t)$

따라서 $f(y) = \frac{2}{y}$, $g(t) = \frac{1}{t}$, $a = -1$ 이므로

$$f(a) \times g(a) = f(-1) \times g(-1)$$

$$= \frac{2}{-1} \times \frac{1}{-1} = 2$$

67) ④

[해설]

타원의 방정식 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} \times \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\boxed{-3x}}{4y} \quad (\text{단, } y \neq 0)$$

점 $A(s, t)$ 에서의 접선의 기울기가 $-\frac{3s}{4t}$ 이므로 점 A 에서의

접선에 수직이고 점 A 를 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{4t}{3s}(x - s) + t, \quad y = \frac{4t}{3s}x + \left(\boxed{-\frac{t}{3}}\right)$$

이때 이 직선의 x 절편은 $0 = \frac{4t}{3s}x - \frac{t}{3}$ 에서 $\frac{s}{4}$ 이다.

$$\text{따라서 } f(x) = -3x, \quad g(t) = -\frac{t}{3}, \quad h(s) = \frac{s}{4}$$

이므로

$$f(4) \times g(6) \times h(8) = (-12) \times (-2) \times 2 = 48$$

68) 6

[해설]

{출제 의도}

매개변수로 나타낸 함수 $x = f(t)$, $y = g(t)$ 에서 $\frac{dy}{dx}$ 를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

{풀이}

$$x = t^2 + 1, \quad y = \frac{2}{3}t^3 + 10t - 1 \text{에서}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2t, \quad \frac{dy}{dt} = 2t^2 + 10 \text{이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t^2 + 10}{2t} = \frac{t^2 + 5}{t}$$

따라서 $t = 1$ 일 때, $\frac{dy}{dx} = 6$

69) ②

[해설]

$$\frac{dx}{dt} = 2 - 2\cos 2t, \quad \frac{dy}{dt} = \sin t \text{이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t}{2 - 2\cos 2t}$$

따라서 $t = \frac{\pi}{6}$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$$\frac{\sin \frac{\pi}{6}}{2 - 2\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{2 - 2 \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

70) ③

[해설]

$x = t^2 + t$, $y = t + n \ln t$ 에서

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2 + 1, \quad \frac{dy}{dt} = 1 + \frac{n}{t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1 + \frac{n}{t}}{3t^2 + 1}$$

$f'(2) < 3$ 에서 $x = t^3 + t = 2$ 이고, $\frac{dy}{dx} < 3$ 이다.

$$t^2 + t - 2 = 0, \quad (t - 1)(t^2 - + t + 2) = 0$$

$t > 0$ 이므로 $t = 1$

$$t = 1 \text{일 때, } \frac{dy}{dx} = \frac{1 + n}{3 + 1} = \frac{1 + n}{4}$$

$$\frac{1 + n}{4} < 3 \text{이므로 } n < 11$$

따라서 구하는 모든 자연수 n 의 개수는 10이다.

71) ②

[해설]

$$x = \frac{1}{3}t^3 + t, \quad y = \ln t - 2t \text{에서}$$

$$\frac{dx}{dt} = t^2 + 1, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t} - 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{t} - 2}{t^2 + 1} = \frac{1 - 2t}{t^3 + t} \text{이므로}$$

$$g(a) = \frac{1 - 2a}{a^3 + a}$$

$$g'(a) = \frac{-2(a^2 + a) - (1 - 2a)(3a^2 + 1)}{(a^3 + a)^2}$$

$$= \frac{4a^3 - 3a^2 - 1}{(a^3 + a)^2}$$

$$= \frac{(a - 1)(4a^2 + a + 1)}{(a^3 + a)^2}$$

$$g'(a) = 0 \text{에서 } a = 1$$

$a > 0$ 에서 함수 $g(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	...	1	...
$g'(a)$		-	0	+
$g(a)$		↘	극소	↗

따라서 함수 $g(a)$ 의 최솟값은

$$g(1) = \frac{1 - 2 \times 1}{1^3 + 1} = -\frac{1}{2}$$

72) ②

[해설]

{출제 의도}

매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

{풀이}

$x = \sqrt{2} \cos^3 \theta$, $y = \sqrt{2} \sin^3 \theta$ 에서

$$\frac{dx}{d\theta} = -3\sqrt{2} \cos^2 \theta \sin \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = 3\sqrt{2} \sin^2 \theta \cos \theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{3\sqrt{2} \sin^2 \theta \cos \theta}{-3\sqrt{2} \cos^2 \theta \sin \theta} = -\tan \theta$$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ 에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는 -1 이고,

$$x = \sqrt{2} \cos^3 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}, \quad y = \sqrt{2} \sin^3 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y = -\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}, \quad \text{즉 } y = -x + 1$$

따라서 $a = -1$, $b = 1$ 이므로

$$ab = (-1) \times 1 = -1$$

73) ②

[해설]

$x = \frac{1}{3}t^3 + 4t$, $y = t^2 - 2t + \frac{5}{3}$ 에서

$$\frac{dx}{dt} = t^2 + 4, \quad \frac{dy}{dt} = 2t - 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t - 2}{t^2 + 4}$$

$t = 2$ 일 때, 접선의 기울기는 $\frac{2 \times 2 - 2}{2^2 + 4} = \frac{1}{4}$ 이고,

$$x = \frac{8}{3} + 8 = \frac{32}{3}, \quad y = 4 - 4 + \frac{5}{3} = \frac{5}{3}, \quad \text{즉 접점의 좌표는}$$

$$\left(\frac{32}{3}, \frac{5}{3}\right) \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y = \frac{1}{4}\left(x - \frac{32}{3}\right) + \frac{5}{3}$$

따라서 구하는 접선의 y 절편은

$$\frac{1}{4}\left(0 - \frac{32}{3}\right) + \frac{5}{3} = -1$$

74) ③

[해설]

$x = \sqrt{t} + a$, $y = \ln t + t$ 에서

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t} + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{t} + 1}{\frac{1}{2\sqrt{t}}} = \frac{2\sqrt{t}(t+1)}{t}$$

$t = 1$ 일 때, 접선의 기울기는

$$\frac{2(1+1)}{1} = 4 \text{이고, 접점의 좌표는}$$

$(1+a, 1)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y = 4(x - 1 - a) + 1$$

따라서 두 점 A , B 의 좌표는

$$A\left(\frac{3}{4} + a, 0\right), \quad B(0, -3 - 4a)$$

삼각형 OAB 의 넓이가 8이므로

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4} + a\right) \times (3 + 4a) = 8$$

$$(3 + 4a)^2 = 64$$

$$3 + 4a = 8 \quad \text{또는} \quad 3 + 4a = -8$$

$$\text{이때 } a > 0 \text{이므로 } a = \frac{5}{4}$$

75) 15

[해설]

$x = g(t)$ 에서 $t = f(x)$, $t = xe^{x-1} + x^2 - 1$ 이므로

$$\frac{dt}{dx} = e^{x-1} + xe^{x-1} + 2x$$

$$\text{따라서 } \frac{dx}{dt} = \frac{1}{e^{x-1} + xe^{x-1} + 2x}$$

$y = f(t)$ 에서 $y = te^{t-1} + t^2 - 1$ 이므로

$$\frac{dy}{dt} = e^{t-1} + te^{t-1} + 2t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^{t-1} + te^{t-1} + 2t}{\frac{1}{e^{x-1} + xe^{x-1} + 2x}}$$

$$= (e^{x-1} + xe^{x-1} + 2x)(e^{t-1} + te^{t-1} + 2t)$$

$x = 1$ 일 때, $t = 1 + 1 - 1 = 1$ 이고 $y = 1 + 1 - 1 = 1$ 이므로

접선의 기울기는

$$(1 + 1 + 2)(1 + 1 + 2) = 16$$

따라서 접선의 방정식은

$$y = 16(x - 1) + 1$$

이때 $A(0, -15)$ 이므로 $\overline{OA} = 15$

76) ③

[해설]

{출제 의도}

좌표평면 위를 움직이는 점의 속도를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

{풀이}

$$x = t - \frac{2}{t}, \quad y = 2t + \frac{1}{t} \text{에서}$$

$$\frac{dx}{dt} = 1 + \frac{2}{t^2}, \quad \frac{dy}{dt} = 2 - \frac{1}{t^2}$$

이므로 시각 $t = 1$ 에서 점 P 의 속도는 $(3, 1)$

따라서 시각 $t = 1$ 에서 점 P 의 속력은 $\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ 이다.

77) ②

[해설]

$x = \ln t$, $y = t^3 - t$ 에서

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}, \quad \frac{dy}{dt} = 3t^2 - 1$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{t^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 6t \text{이므로 시각 } t = 2 \text{에서의 점 } P \text{의 가속도}$$

$$\text{는 } \left(-\frac{1}{4}, 12\right) \text{이다.}$$

$$a = -\frac{1}{4}, \quad b = 12 \text{이므로}$$

$$ab = \left(-\frac{1}{4}\right) \times 12 = -3$$

78) ③

[해설]

$x = 2 \sin t$, $y = t + \cos t$ 에서

$$\frac{dx}{dt} = 2 \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = 1 - \sin t \text{이므로}$$

$$\vec{v} = (2 \cos t, 1 - \sin t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2 \sin t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\cos t \text{이므로}$$

$$\vec{a} = (-2 \sin t, -\cos t)$$

두 벡터 $\vec{v}$, $\vec{a}$ 가 서로 수직이라면 $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$ 이어야 하므로

$$(2 \cos t, 1 - \sin t) \cdot (-2 \sin t, -\cos t) = 0$$

$$-4 \sin t \cos t - \cos t + \sin t \cos t = 0$$

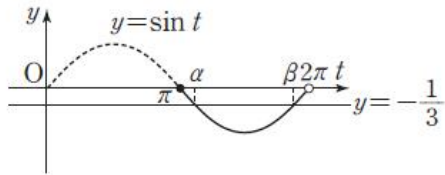
$$3 \sin t \cos t + \cos t = 0$$

$$\cos t(3 \sin t + 1) = 0$$

$$\cos t = 0 \quad \text{또는} \quad \sin t = -\frac{1}{3}$$

$$(i) \cos t = 0 \text{일 때, } t = \frac{3\pi}{2}$$

$$(ii) \sin t = -\frac{1}{3} \text{일 때, 그림에서 } t = \alpha \text{ 또는 } t = \beta$$



(i), (ii)에서 구하는 모든 실수 t 의 개수는 3이다.

79) ④

[해설]

점 $P(x, y)$ 에 대하여 점 Q 의 속력은 $\frac{|dx|}{dt}$ 이다.

점 P 가 매초 4의 일정한 속력으로 움직이므로

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = 4$$

$$\left|\frac{dx}{dt}\right| \times \sqrt{1 \times \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 4 \text{ 이고}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-1} + xe^{x-1} = (x+1)e^{x-1}$$

이므로

$$\left|\frac{dx}{dt}\right| = \frac{4}{\sqrt{1 + (x+1)^2 e^{2(x-1)}}}$$

따라서 $x = 1$ 일 때, 점 Q 의 속력은

$$\left|\frac{dx}{dt}\right| = \frac{4}{\sqrt{1+4}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

80) 15

[해설]

{출제 의도}

좌표평면 위를 움직이는 점이 움직인 거리와 속도, 가속도를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

{풀이}

$$t = \frac{s + \sqrt{s^2 + 4}}{2} \text{에서 } 2t - s = \sqrt{s^2 + 4}, \quad 4t^2 - 4ts = 4 \text{ 이므로}$$

$$s = t - \frac{1}{t} \quad \dots\dots\textcircled{\ominus}$$

$$x = 2 \ln t, \quad y = f(t) \text{에서 } \frac{dx}{dt} = \frac{2}{t}, \quad \frac{dy}{dt} = f'(t) \text{이므로 시각 } t \text{에}$$

$$\text{서의 속도는 } \left(\frac{2}{t}, f'(t)\right) \text{이고,}$$

$$\text{가속도는 } \left(-\frac{2}{t^2}, f''(t)\right) \text{이다.}$$

$$t = 2 \text{일 때, 점 } P \text{의 속도가 } \left(1, \frac{3}{4}\right) \text{이므로}$$

$$f'(2) = \frac{3}{4} \quad \dots\dots\textcircled{\ominus}$$

$$s = \int_1^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dk}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dk}\right)^2} dk$$

$$= \int_1^t \sqrt{\left(\frac{2}{k}\right)^2 + \{f'(k)\}^2} dk = t - \frac{1}{t} \quad (\textcircled{\ominus} \text{에 의해})$$

양변을 t 에 대하여 미분하면

$$\sqrt{\left(\frac{2}{t}\right)^2 + \{f'(t)\}^2} = 1 + \frac{1}{t^2}, \quad \left(\frac{2}{t}\right)^2 + \{f'(t)\}^2 = \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^2$$

$$\{f'(t)\}^2 = \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^2$$

$$f'(T) = 1 - \frac{1}{t^2} \quad (\textcircled{\ominus} \text{에 의해})$$

$$f''(t) = \frac{2}{t^3} \text{이므로 } a = f''(2) = \frac{1}{4}$$

$$\text{따라서 } 60a = 60 \times \frac{1}{4} = 15$$

81) ③

[해설]

$$x = \ln t, \quad y = \frac{1}{4} \left(t + \frac{4}{t}\right) \text{에서}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{4}{t^2}\right)$$

시각 $t = 1$ 에서 $t = 2$ 까지 점 P 가 움직인 거리는

$$\int_1^2 \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \left\{\frac{1}{4} \left(1 - \frac{4}{t^2}\right)\right\}^2} dt$$

$$= \int_1^2 \sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{16} \left(1 - \frac{8}{t^2} + \frac{16}{t^4}\right)} dt$$

$$= \int_1^2 \sqrt{\frac{1}{16} \left(1 + \frac{8}{t^2} + \frac{16}{t^4}\right)} dt$$

$$= \int_1^2 \sqrt{\left\{\frac{1}{4} \left(1 + \frac{4}{t^2}\right)\right\}^2} dt$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{4} \left(1 + \frac{4}{t^2}\right) dt$$

$$= \frac{1}{4} \left[t - \frac{4}{t}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{4} \{(2-2) - (1-4)\}$$

$$= \frac{3}{4}$$

82) ④

[해설]

$$x = 3 \sin \pi t + 4 \cos \pi t, \quad y = 3 \cos \pi t - 4 \sin \pi t \text{에서}$$

$$\frac{dx}{dt} = 3\pi \cos \pi t - 4\pi \sin \pi t,$$

$$\frac{dy}{dt} = -3\pi \sin \pi t - 4\pi \cos \pi t$$

시각 $t = 0$ 에서 $t = a$ 까지 점 P 가 움직인 거리는

$$\int_0^a \sqrt{(3\pi \cos \pi t - 4\pi \sin \pi t)^2 + (-3\pi \sin \pi t - 4\pi \cos \pi t)^2} dt$$

$$= \int_0^a \sqrt{25\pi^2 (\sin^2 \pi t + \cos^2 \pi t)} dt$$

$$= \int_0^a 5\pi dt$$

$$= [5\pi t]_0^a = 5a\pi$$

따라서 $5a\pi = 20\pi$ 이므로

$$a = 4$$

83) ④

[해설]

$$x = e^t, \quad y = f(t) \text{에서}$$

$$\frac{dx}{dt} = e^x, \quad \frac{dy}{dt} = f'(t)$$

점 P 가 점 $(1, f(0))$ 으로부터 시각 t 일 때까지 움직인 거리가

$$e^t + t^2 - 1 \text{ 이므로}$$

$$\int_0^t \sqrt{e^{2t} + \{f'(t)\}^2} ds = e^t + t^2 - 1$$

양변을 t 에 대하여 미분하면

$$\int_0^t \sqrt{e^{2t} + \{f'(t)\}^2} = e^t + 2t, \quad e^{2t} + \{f'(t)\}^2 = (e^t + 2t)^2$$

$$\text{이므로 } \{f'(t)\}^2 = 4te^t + 4t^2$$

따라서

$$\{f'(1)\}^2 = 4e + 4$$

$$= 4(e+1)$$

84) 78

[해설]

{출제 의도}

곡선의 길이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

{풀이}

$$y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{\frac{3}{2}} \text{에서}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} (x^2 + 2)^{\frac{1}{2}} \times (x^2 + 2)'$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} (x^2 + 2)^{\frac{1}{2}} \times 2x$$

$$= x(x^2 + 2)^{\frac{1}{2}}$$

따라서 $x = 0$ 에서 $x = 6$ 까지 곡선 $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{\frac{3}{2}}$ 의 길이는

$$\begin{aligned} \int_0^6 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx &= \int_0^6 \sqrt{1 + \left\{x(x^2 + 2)^{\frac{1}{2}}\right\}^2} dx \\ &= \int_0^6 \sqrt{1 + x^2(x^2 + 2)} dx \\ &= \int_0^6 \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1} dx \\ &= \int_0^6 \sqrt{(x^2 + 1)^2} dx \\ &= \int_0^6 |x^2 + 1| dx \\ &= \int_0^6 (x^2 + 1) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^6 \\ &= \frac{1}{3} \times 6^3 + 6 \\ &= 78 \end{aligned}$$

85) ①

[해설]

$$f(x) = \frac{1}{8}x^2 - \ln x \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{x} = \frac{1}{4}\left(x - \frac{4}{x}\right)$$

$x = 1$ 에서 $x = 4$ 까지 곡선 $y = f(x)$ 의 길이는

$$\begin{aligned} \int_1^4 \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx &= \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{1}{16}\left(x - \frac{4}{x}\right)^2} dx \\ &= \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{1}{16}\left(x^2 - 8 + \frac{16}{x^2}\right)} dx \\ &= \int_1^4 \sqrt{\frac{1}{16}\left(x + \frac{4}{x}\right)^2} dx \\ &= \int_1^4 \frac{1}{4}\left(x + \frac{4}{x}\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{8}x^2 + \ln x \right]_1^4 \\ &= (2 + \ln 4) - \frac{1}{8} \\ &= \frac{15}{8} + 2\ln 2 \end{aligned}$$

86) ②

[해설]

$$g(x) = \int_1^x f(k)dk \text{에서 } g'(x) = f(x)$$

$x = 1$ 에서 $x = t$ 까지 곡선 $y = g(x)$ 의 길이가 $\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4t} - \frac{1}{12}$

이므로

$$\int_1^t \sqrt{1 + \{g'(x)\}^2} dx = \int_1^t \sqrt{1 + \{f(x)\}^2} dx$$

$$= \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4t} - \frac{1}{12}$$

양변을 t 에 대하여 미분하면

$$\sqrt{1 + \{f(t)\}^2} = t^2 + \frac{1}{4t^2}$$

$$\{f(t)\}^2 = \left(t^2 + \frac{1}{4t^2}\right)^2 - 1$$

$$= \left(t^4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16t^4}\right) - 1$$

$$= \left(t^2 - \frac{1}{4t^2}\right)^2$$

함수 $f(t)$ 가 양의 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$f(t) = t^2 - \frac{1}{4t^2} \text{ 또는 } f(t) = -t^2 + \frac{1}{4t^2}$$

$$f(1) > 0 \text{이므로 } f(t) = t^2 - \frac{1}{4t^2}$$

따라서

$$f(2) = 4 - \frac{1}{16} = \frac{63}{16}$$

87) ②

[해설]

조건 (가)에 의하여 $\{f(x)\}^2 - 4\{f'(x)\}^2 = 4$ 이므로

$$4\{f'(x)\}^2 = \{f(x)\}^2 - 4$$

$\{f(x)\}^2 - 4 \geq 0$ 에서 $\{f(x) - 2\}\{f(x) + 2\} \geq 0$ 이므로

$$f(x) \leq -2 \text{ 또는 } f(x) \geq 2$$

조건 (나)에서 $a > 0$ 이고 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$f(x) \geq 2$$

$1 + \{f'(x)\}^2 = \frac{1}{4}\{f(x)\}^2$ 이므로 $x = 0$ 에서 $x = 3$ 까지 곡선

$y = f(x)$ 의 길이는

$$\int_0^3 \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx = \int_0^3 \sqrt{\frac{1}{4}\{f(x)\}^2} dx$$

$$= \int_0^3 \frac{1}{2}|f(x)|dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^3 f(x)dx$$

$$= \frac{a}{2}$$