

1) 답 ①

[해설]

호의 길이가 반지름의 길이의 2배이므로 부채꼴의 중심각의 크기는 2(라디안)이다

두 부채꼴 A_1, A_2 의 호의 길이를 각각 l_1, l_2 , 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2 , 넓이를 각각 S_1, S_2 라 하자.

$$l_1 = r_1 \times 2, l_2 = r_2 \times 2 \text{이므로}$$

$$l_1 + l_2 = 2r_1 + 2r_2 = 2(r_1 + r_2),$$

$$l_1 + l_2 = 8 \text{이므로 } r_1 + r_2 = 4$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \times r_1^2 \times 2, S_2 = \frac{1}{2} \times r_2^2 \times 2 \text{이므로}$$

$$S_1 + S_2 = r_1^2 + r_2^2$$

$$S_1 + S_2 = 10 \text{이므로 } r_1^2 + r_2^2 = 10$$

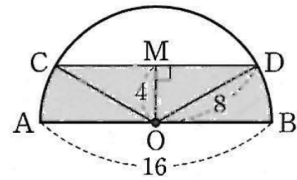
$$r_1^2 + r_2^2 = (r_1 + r_2)^2 - 2r_1r_2 \text{에서}$$

$$10 = 4^2 - 2r_1r_2, r_1r_2 = 3$$

따라서 두 부채꼴 A_1, A_2 의 반지름의 길이의 곱은 3이다

2) 답 ③

[해설]



위의 그림과 같이 선분 AB의 중점을 O라 하고, 점 O에서 현 CD에 내린 수선의 발을 M이라 하면 $\overline{OM} = 4$, $\overline{OD} = 8$ 이므로 피타고라스정리에 의하여

$$\overline{MD} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$$

삼각형 ODM은 직각삼각형이므로

$$\angle ODM = \frac{\pi}{6}, \angle MOD = \frac{\pi}{3}, \angle DOB = \frac{\pi}{6}$$

따라서 어두운 부분의 넓이는

$$\{(\text{부채꼴 ODB의 넓이}) \times 2 + (\text{삼각형 OCD의 넓이})\}$$

$$= \frac{1}{2} \times 8^2 \times \frac{\pi}{6} \times 2 + \frac{1}{2} \times 8\sqrt{3} \times 4$$

$$= \frac{32}{3}\pi + 16\sqrt{3}$$

3) 답 ④

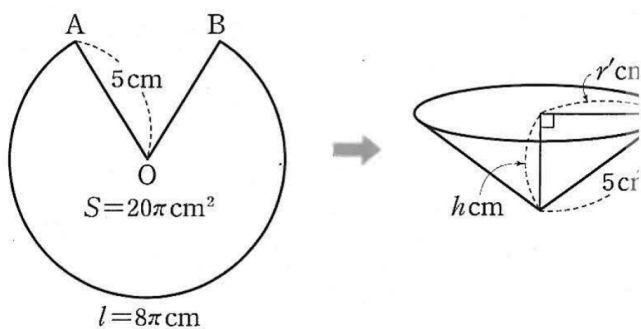
[해설]

부채꼴의 반지름의 길이를 r cm, 호의 길이를 l cm, 넓이를 S cm²라 하면

$$S = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r \times 8\pi = 4r\pi = 20\pi$$

이므로 $r = 5$

따라서 이 부채꼴의 호 AB를 밑변의 둘레로 하는 원뿔모양의 용기를 만들면 그림과 같다.



부채꼴로 만든 원뿔의 높이를 h cm, 밑면의 반지름의 길이를 r' cm라 하면 $2\pi r' = 8\pi$ 에서 $r' = 4$

$$S^2 = 4^2 + h^2 \text{에서 } h = 3$$

따라서 이 원뿔 모양의 용기의 부피를 V 라 하면

$$V = \frac{1}{3} \times (\text{밑넓이}) \times (\text{높이})$$

$$= \frac{1}{3} \times \pi(r')^2 \times h = \frac{1}{3} \times 4^2 \times 3 = 16(\text{cm}^3)$$

4) 답 ③

[해설]

직선 $y = \sqrt{3}x$ 와 x 축의 양의 방향이 이루는 각을 θ 라 하면 $\tan \theta = \sqrt{3}$ 이므로

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

큰 원과 작은 원의 중심을 각각 O_1, O_2 라 하고 큰 원과 작은 원이 x 축과 접하는 점을 각각 B_1, B_2 라 하면 원의 접선의 성질에 의하여

$$\angle B_1OO_1 = \angle POO_1, \angle B_2OO_2 = \angle POO_2 \text{이므로}$$

$$\angle B_2OO_2 = \frac{\pi}{6}, \angle B_1OO_1 = \frac{\pi}{3}$$

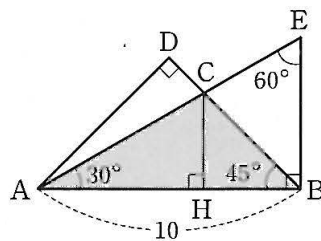
$$\text{따라서 삼각형 } OO_1P \text{에서 } \overline{O_1P} = R = \overline{OP} \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \times \overline{OP},$$

$$\text{삼각형 } OO_2P \text{에서 } \overline{O_2P} = r = \overline{OP} \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \overline{OP} \text{이므로}$$

$$\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{3} \times \overline{OP}}{\frac{1}{\sqrt{3}} \times \overline{OP}} = 3$$

5) 답 ②

[해설]



점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = \frac{\overline{CH}}{\tan 30^\circ}, \overline{BH} = \frac{\overline{CH}}{\tan 45^\circ}$$

$$\overline{AB} = \overline{AH} + \overline{BH} = \frac{\overline{CH}}{\tan 30^\circ} + \frac{\overline{CH}}{\tan 45^\circ}$$

$$= \sqrt{3}\overline{CH} + \overline{CH} = (\sqrt{3} + 1)\overline{CH}$$

$$\overline{CH} = \frac{\overline{AB}}{\sqrt{3} + 1} = \frac{10}{\sqrt{3} + 1}$$

$$= \frac{10(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = 5(\sqrt{3} - 1)$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CH} = \frac{1}{2} \times 10 \times 5(\sqrt{3} - 1) = 25(\sqrt{3} - 1)$$

6) 답 ③

[해설]

$x^2 - ax - a^2 = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = a \quad \cdots \text{㉠}$$

$$\sin \theta \cos \theta = -a^2 \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠의 양변을 제곱하면

$$1 + 2\sin \theta \cos \theta = a^2 \quad \cdots \text{㉢}$$

$$\text{㉡을 ㉢에 대입하면 } 1 - 2a^2 = a^2, a^2 = \frac{1}{3}$$

$$a > 0 \text{이므로 } a = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

7) 답 ①

[해설]

점 A는 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점
이므로 $OA = 2$

점 A에서 x축 위에 내린 수선의
발을 B라 하면 직각삼각형
OAB에서

$$OB = 2\cos\theta, AB = 2\sin\theta$$

이므로 점 A의 좌표는
($2\cos\theta, 2\sin\theta$)이다

점 A는 $y = 2\sin x$ 의 그래프 위의 점이므로
 $2\sin\theta = 2\sin(2\cos\theta)$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{이므로 } 2\cos\theta = \theta$$

$$\text{따라서 } \cos\theta = \frac{\theta}{2}$$

8) 답 ③

[해설]

그림에서 함수 $y = a\cos bx + c$ 의 최댓값과 최솟값이 각각
3, -1이고 $a > 0$ 이므로

$$a + c = 3, -a + c = -1$$

위의 두 식을 풀면 $a = 2, c = 1$

또한, 주기는 π 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = \pi \text{에서 } b = 2$$

따라서 $a + b + c = 2 + 2 + 1 = 5$

9) 답 ①

[해설]

함수 $y = \sin \frac{\pi}{3}x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$ 이므로 $y = \sin \frac{\pi}{3}x$ 의 그래

프와 x축이 만나는 점의 x좌표 중에서 양수인 최솟값은 3이
다.

또한, $BC = 2$ 이고 두 점 B, C의 좌표를 각각
($b, 0$), ($b+2, 0$)으로 놓으면 함수 $y = \sin \frac{\pi}{3}x$ 의 그래프

는 직선 $x = \frac{3}{2}$ 에 대하여 대칭이므로 $\frac{b + (b+2)}{2} = \frac{3}{2}$, 즉

$$b = \frac{1}{2}$$

따라서 $B\left(\frac{1}{2}, 0\right), C\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ 이므로 점 A의 좌표는

$$\left(\frac{1}{2}, \sin \frac{\pi}{6}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{이다.}$$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는

$$\overline{BC} \times \overline{AB} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

10) 답 ⑤

[해설]

ㄱ. 반지름의 길이가 1인 원의 둘레의 길이를 30등분하였으므로
 $15\theta = \pi$ 이고 점 P_k 와 점 P_{k+15} ($k = 0, 1, \dots, 14$)

는 원점에 대하여 대칭이므로

$$\sin 16\theta = \sin(\pi + \theta) = -\sin\theta, \text{ 즉}$$

$$\sin\theta + \sin 16\theta = 0, \sin 17\theta = \sin(\pi + 2\theta) = -\sin 2\theta, \text{ 즉}$$

$$\sin 2\theta + \sin 17\theta = 0$$

같은 방법으로 하면

$$\sin 3\theta + \sin 18\theta = 0, \dots, \sin 15\theta + \sin 30\theta = 0 \text{이므로}$$

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \dots + \sin 30\theta = 0 \text{ (참)}$$

$$\text{ㄴ. } \cos 16\theta = \cos(\pi + \theta) = -\cos\theta, \text{ 즉 } \cos\theta + \cos 16\theta = 0,$$

$$\cos 17\theta = \cos(\pi + 2\theta) = -\cos 2\theta, \text{ 즉 } \cos 2\theta + \cos 17\theta = 0$$

같은 방법으로 하면

$$\cos 3\theta + \cos 18\theta = 0, \dots, \cos 15\theta + \cos 30\theta = 0 \text{이므로}$$

$$\cos\theta + \cos 2\theta + \dots + \cos 30\theta = 0 \text{ (참)}$$

$$\text{ㄷ. } \tan 29\theta = \tan(2\pi - \theta) = \tan(-\theta) = -\tan\theta, \text{ 즉}$$

$$\tan\theta + \tan 29\theta = 0$$

$$\tan 28\theta = \tan(2\pi - 2\theta) = \tan(-2\theta) = -\tan 2\theta, \text{ 즉}$$

$$\tan 2\theta + \tan 28\theta = 0$$

같은 방법으로 하면

$$\tan 3\theta + \tan 27\theta = 0, \dots, \tan 14\theta + \tan 16\theta = 0$$

$$\tan\theta + \tan 2\theta + \dots + \tan 30\theta$$

$$= \tan 15\theta + \tan 30\theta = \tan\pi + \tan 2\pi = 0 \text{ (참)}$$

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

11) 답 4

[해설]

직선 $x + 2y - 3 = 0$ 의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이므로 $\tan\theta = -\frac{1}{2}$

즉, $\cos\theta = -2$ 이므로

$$\frac{\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right)}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{1 + \cos(\pi + \theta)}$$

$$= \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} + \frac{-\sin\theta}{1 - \cos\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta(1 - \cos\theta) - \sin\theta(1 + \cos\theta)}{(1 + \cos\theta)(1 - \cos\theta)}$$

$$= \frac{-2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta} = -2\cot\theta = -2 \times (-2) = 4$$

12) 답 1

[해설]

삼각형의 세 내각의 크기의 합은 π 이므로 $A + B + C = \pi$

$$\text{따라서 } \frac{B+C}{2} = \frac{\pi-A}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \text{이므로}$$

$$\sin\left(\frac{2\pi-A}{2}\right)\cos\left(\frac{B+C}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi+A}{2}\right)\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)$$

$$= \sin\left(\pi - \frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right)$$

$$= \sin\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2} + \cos\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

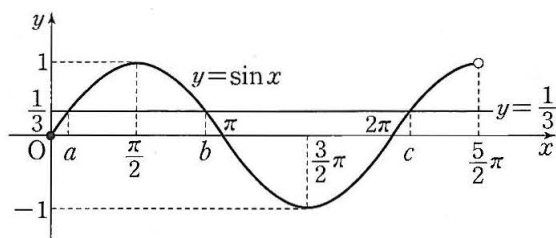
$$= \sin^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{A}{2} = 1$$

13) 답 ①

[해설]

$3\sin x = 1$ 에서 $\sin x = \frac{1}{3}$ 이므로 방정식의 해는 아래 그림에서

함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{3}$ 의 교점의 x좌표이다.



$$\text{이때 } \frac{a+b}{2} = \frac{\pi}{2} \text{이므로}$$

$$a + b = \pi \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또, 함수 $y = \sin x$ 의 그래프는 주기가 2π 이므로

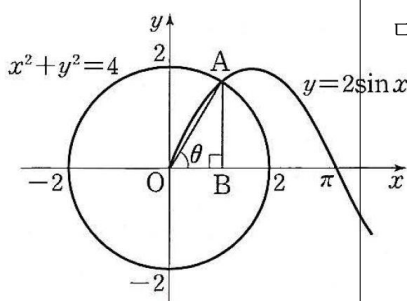
$$c - a = 2\pi \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧에서

$$a + \frac{b-c}{2} = \frac{2a+b-c}{2} = \frac{(a+b) - (c-a)}{2} = \frac{\pi - 2\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

이므로

$$\sin\left(a + \frac{b-c}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$



14) 답 ③

[해설]

$$f(|f(x)|) = \sin(|\sin x|) = \frac{1}{2} \text{에서}$$

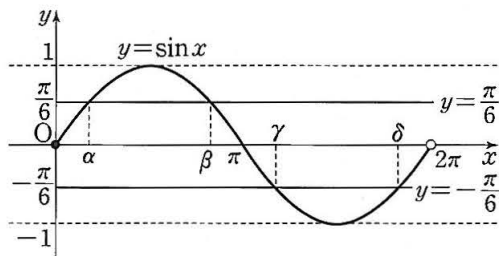
$$|\sin x| = 2n\pi + \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } |\sin x| = 2n\pi + \frac{5\pi}{6}$$

(단, n 은 음이 아닌 정수)

그런데 $0 \leq |\sin x| \leq 1$ 이고

$$\frac{5\pi}{6} > 1 \text{이므로 } |\sin x| = \frac{\pi}{6} \text{에서}$$

$$\sin x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \sin x = -\frac{\pi}{6}$$



(i) $\sin x = \frac{\pi}{6}$ 일 때

두 근을 α, β 라 하면 α, β 는 직선 $x = \frac{\pi}{2}$ 에 대칭이므로

$$\alpha + \beta = \pi \text{이다.}$$

(ii) $\sin x = -\frac{\pi}{6}$ 일 때

두 근을 γ, δ 라 하면 γ, δ 는 직선 $x = \frac{3}{2}\pi$ 에 대칭이므로

$$\gamma + \delta = 3\pi \text{이다.}$$

(i), (ii)에서 $\sin(|\sin x|) = \frac{1}{2}$ 의 모든 근의 합은

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi + 3\pi = 4\pi$$

15) 답 ④

[해설]

x 에 대한 이차함수 $y = x^2 - 2x \cos \theta + 1$ 에서

$y = (x - \cos \theta)^2 + 1 - \cos^2 \theta$ 이므로 꼭짓점의 좌표는 $(\cos \theta, 1 - \cos^2 \theta)$

꼭짓점이 부등식 $2\sqrt{2}x - 2y - 1 < 0$ 을 만족시키므로

$$2\sqrt{2} \cos \theta - 2(1 - \cos^2 \theta) - 1 < 0 \text{에서}$$

$$2\cos^2 \theta + 2\sqrt{2} \cos \theta - 3 < 0$$

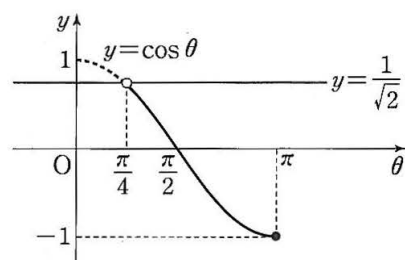
$$(\sqrt{2} \cos \theta - 1)(\sqrt{2} \cos \theta + 3) < 0$$

그런데 $\sqrt{2} \cos \theta + 3 > 0$ 이고

$0 \leq \theta \leq \pi$ 에서 $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ 이므로

$$-1 \leq \cos \theta < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

따라서 $\frac{\pi}{4} < \theta \leq \pi$



16) 답 ④

[해설]

$-1 \leq \cos ax \leq 1$ 에서 $-3 \leq 3\cos ax \leq 3$ 이므로 함수

$y = 3\cos ax$ 의 치역은 $\{y \mid -3 \leq y \leq 3\}$

함수 $y = 2 + 3\cos a(x-1)$ 의 그래프는 $y = 3\cos ax$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한

것이므로 치역은 $\{y \mid -1 \leq y \leq 5\}$ 이다.

즉, $M=5, m=-1$ 이다.

또한, $3\cos ax = 3\cos(ax+2\pi) = 3\cos a\left(x + \frac{2\pi}{a}\right)$ 이므로 함수

$y = 3\cos ax$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{a}$ ($a > 0$)이다.

따라서 함수 $y = 2 + 3\cos a(x-1)$ 의 주기도 $\frac{2\pi}{a}$ 이다.

$$\text{즉, } \frac{2\pi}{a} = \pi \text{이므로 } a = 2$$

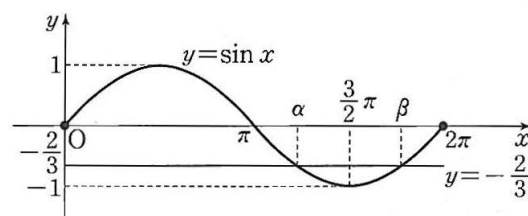
따라서 $M+m+a = 5+(-1)+2 = 6$

17) 답 ①

[해설]

$3\sin x = -2$ 에서 $\sin x = -\frac{2}{3}$ 이므로 함수 $y = \sin x$ 의 그래프

와 직선 $y = -\frac{2}{3}$ 를 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = -\frac{2}{3}$ 의 교점의

x 좌표를 α, β ($\alpha < \beta$)라 하면 $\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{3}{2}\pi$ 이므로

$$\alpha + \beta = 3\pi$$

즉 방정식 $3\sin x = -2$ 를 만족시키는 모든 x 의 값의 합 θ 는

$$\theta = \alpha + \beta = 3\pi$$

따라서

$$\cos \theta = \cos 3\pi = \cos(2\pi + \pi) = \cos \pi = -1$$

18) 답 ②

[해설]

$$\theta + \alpha = \frac{\pi}{2} \text{이므로}$$

$$\sin^2 \alpha = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos^2 \theta$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{이므로}$$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \theta + \tan^2 \theta$$

$$= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \tan^2 \theta$$

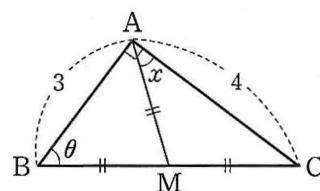
$$= 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$= \frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\overline{OA}^2}$$

$$\frac{1}{\overline{OA}^2} = 9 \text{에서 } \overline{OA} > 0 \text{이므로 } \overline{OA} = \frac{1}{3}$$

19) 답 ②

[해설]



$\angle A = \frac{\pi}{2}$ 이고, 점 M 은 직각삼각형 ABC 의 빗변의 중점이므로

점 M 은 삼각형 ABC 의 외심이다.

$$\text{즉, } \overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM}$$

따라서 삼각형 MAB 는 이등변삼각형이므로

$$\angle ABM = \angle BAM$$

$$\angle ABM = \theta, \angle CAM = x \text{라 하면}$$

$$x + \theta = \frac{\pi}{2} \text{ 이므로 } x = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\sin(\angle CAM) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

삼각형 ABC는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{BC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\text{따라서 } \cos\theta = \frac{3}{5}$$

[다른 풀이]

점 M은 삼각형 ABC의 외심이므로

$$\overline{AM} = \overline{CM}$$

즉, 삼각형 MCA가 이등변삼각형이므로 $\angle CAM = \angle ACM$

또한, 삼각형 ABC가 직각삼각형이므로

$$\overline{BC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

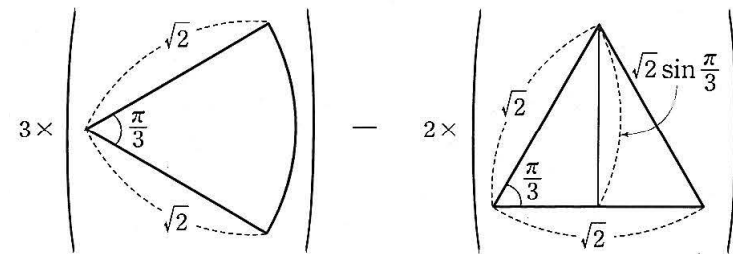
따라서

$$\sin(\angle CAM) = \sin(\angle ACM) = \frac{3}{5}$$

20) 답 ③

[해설]

세 원이 각각 서로 다른 원의 중심을 지나므로 세 원의 중심을 꼭짓점으로 하는 삼각형은 정삼각형이다. 구하는 부분의 넓이는 다음과 같다.



반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 인 부채꼴의 넓이를 S_1 , 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 정삼각형의 넓이를 S_2 라 하면 구하는 부분의 넓이는 $3S_1 - 2S_2$ 이다.

$$S_1 = \frac{1}{2} \times (\sqrt{2})^2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{따라서 } 3S_1 - 2S_2 = 3 \times \frac{\pi}{3} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \sqrt{3}$$

21) 답 ②

[해설]

임의의 정수 k 에 대하여

$$f(4k) = \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f(4k+1) = \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$f(4k+2) = \sin\left(2k\pi + \pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f(4k+3) = \sin\left(2k\pi + \frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore f(n) = f(4k) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (참)}$$

$$\therefore f(4k+2) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, f(4k+4) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 이므로}$$

$$f(4k+2) + f(4k+4) = 0 \text{ (참)}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{20} \log_2 |f(2k-1)| \\ &= \log_2 |f(1)| + \log_2 |f(3)| + \cdots + \log_2 |f(99)| \\ &= \log_2 \left| \frac{1}{2} \right| + \log_2 \left| -\frac{1}{2} \right| + \cdots + \log_2 \left| -\frac{1}{2} \right| \\ &= \log_2 \left(\frac{1}{2} \right)^{50} = \log_2 2^{-50} = -50 \text{ (거짓)} \end{aligned}$$

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

22) 답 ②

[해설]

$$y = 2\sin^2 x + a\cos x + 3$$

$$= 2(1 - \cos^2 x) + a\cos x + 3$$

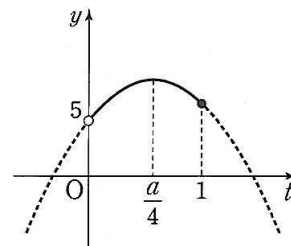
$$= -2\cos^2 x + a\cos x + 5$$

$\cos x = t$ 로 놓으면

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ 이고, } y = -2t^2 + at + 5$$

$$y = -2t^2 + at + 5 = -2\left(t^2 - \frac{a}{2}t\right) + 5 = -2\left(t - \frac{a}{4}\right)^2 + \frac{a^2}{8} + 5$$

(i) $0 < \frac{a}{4} \leq 1$ 일 때, 즉 $0 < a \leq 4$ 일 때

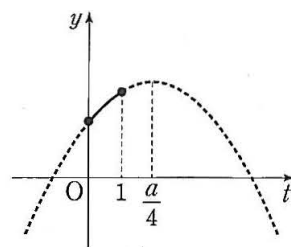


$t = \frac{a}{4}$ 일 때 최댓값은

$$\frac{a^2}{8} + 5 \text{ 이고, } \frac{a^2}{8} + 5 = \frac{49}{8} \text{ 에서 } \frac{a^2}{8} = \frac{9}{8}, a^2 = 9$$

$$0 < a \leq 4 \text{ 이므로 } a = 3$$

(ii) $\frac{a}{4} > 1$ 일 때, 즉 $a > 4$ 일 때



$$t = 1 \text{ 일 때 최댓값은 } -2 + a + 5 = \frac{49}{8} \text{ 이므로}$$

$$a = \frac{25}{8}$$

이때 $\frac{25}{8} < 4$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 양수 a 의 값은 3이다.

23) 답 ⑤

[해설]

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \text{ 이고 } \sin(\pi + x) = -\sin x \text{ 이므로}$$

$$f(x) = \frac{16\sin^2(\pi + x) + 9}{4\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{16\sin^2 x + 9}{4\sin x}$$

$\sin x = t$ 라 하면 $0 < x < \pi$ 일 때 $0 < t \leq 1$ 이다. 이때

$$g(t) = \frac{16t^2 + 9}{4t} \text{ 라 하자.}$$

$$g(t) = \frac{16t^2 + 9}{4t} = 4t + \frac{9}{4t} \geq 2\sqrt{4t \times \frac{9}{4t}} = 6$$

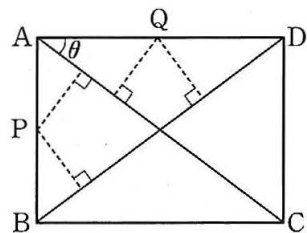
함수 $g(t)$ 의 최솟값이 6이고, 등호는 $4t = \frac{9}{4t}$ 에서 $t = \frac{3}{4}$ 일 때 성립한다.

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값 β 는 6이고, $\sin\alpha = \frac{3}{4}$ 이므로

$$\beta \times \sin\alpha = 6 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{2}$$

24) 답 29

[해설]



$\angle DAC = \angle BDA = \theta$ 라 하면

$$t = \overline{AQ} \sin\theta + \overline{DQ} \sin\theta = \overline{AD} \sin\theta = 4 \sin\theta$$

마찬가지로

$$\begin{aligned} s &= \overline{AP} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \overline{BP} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ &= \overline{AB} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \overline{AB} \cos\theta = 3 \cos\theta \end{aligned}$$

$$\text{그런데 } \overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\sin\theta = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{3}{5}, \quad \cos\theta = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{4}{5}$$

$$s = t = \frac{12}{5}, \quad s + t = \frac{24}{5} \text{이므로}$$

$$m = 5, \quad n = 24$$

$$\text{따라서 } m + n = 5 + 24 = 29$$

25) 답 ②

[해설]

$$(x^2 + 1)(1 + \cos\alpha) + 2x(1 + \sin\alpha) = 0 \text{을 정리하면}$$

$$(1 + \cos\alpha)x^2 + 2(1 + \sin\alpha)x + (1 + \cos\alpha) = 0$$

(i) $1 + \cos\alpha = 0$ 이면

$$1 + \sin\alpha \neq 0 \text{이므로 } x = 0$$

따라서 $\alpha = \pi$ 일 때 실근을 갖는다.

(ii) $1 + \cos\alpha \neq 0$ 이면

$$\frac{D}{4} = (1 + \sin\alpha)^2 - (1 + \cos\alpha)^2 \geq 0$$

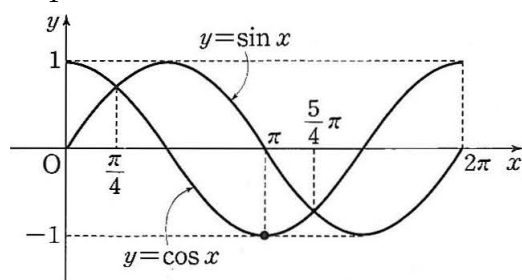
$$(\sin\alpha + \cos\alpha + 2)(\sin\alpha - \cos\alpha) \geq 0$$

그런데 $\sin\alpha \geq -1$, $\cos\alpha > -1$ 이므로

$$\sin\alpha + \cos\alpha + 2 > 0$$

따라서 $\sin\alpha \cos\alpha \geq 0$ 이므로

$$\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{5}{4}\pi \quad (\alpha \neq \pi)$$



(i), (ii)에서 최댓값 $M = \frac{5}{4}\pi$, 최솟값 $m = \frac{\pi}{4}$ 이므로

$$M + m = \frac{5}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi = \frac{3}{2}\pi$$

26) 답 800

[해설]

호 AB를 $2n$ 등분한 각 부채꼴 $OP_{k-1}P_k$ ($k = 1, 2, \dots, 2n$)

의 중심각의 크기는

$$\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2n} = \frac{\pi}{4n}$$

또한, 직각삼각형 OP_1H_1 에서 $\angle P_1OH_1 = \frac{\pi}{4n} = \theta$ 라 하면

$$\overline{OP_1} = 2 \text{이므로}$$

$$\sin\theta = \frac{\overline{P_1H_1}}{\overline{OP_1}} = \frac{\overline{P_1H_1}}{2}$$

직각삼각형 OP_2H_2 에서 $\angle P_2OH_2 = 2 \times \frac{\pi}{4n} = 2\theta$ 이고

$$\overline{OP_2} = 2 \text{이므로}$$

$$\sin 2\theta = \frac{\overline{P_2H_2}}{\overline{OP_2}} = \frac{\overline{P_2H_2}}{2}$$

이와 같은 방법으로

$$\sin 3\theta = \frac{\overline{P_3H_3}}{2}, \quad \dots, \quad \sin(2n-1)\theta = \frac{\overline{P_{2n-1}H_{2n-1}}}{2}$$

임을 알 수 있다.

$$f(n) = \sum_{k=1}^{2n-1} \overline{P_kH_k}^2$$

$$= \overline{P_1H_1}^2 + \overline{P_2H_2}^2 + \dots + \overline{P_{2n-1}H_{2n-1}}^2$$

$$= 4\{\sin^2\theta + \sin^2 2\theta + \dots + \sin^2(2n-1)\theta\}$$

$$= 4\{\sin^2\theta + \sin^2(2n-1)\theta\} + 4\{\sin^2 2\theta + \sin^2(2n-2)\theta\}$$

$$+ \dots + 4\{\sin^2(n-1)\theta + \sin^2(n+1)\theta\} + 4\sin^2 n\theta$$

$$= 4\left\{\sin^2\theta + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right\} + 4\left\{\sin^2 2\theta + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)\right\}$$

$$+ \dots + 4\left\{\sin^2(n-1)\theta + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - (n-1)\theta\right)\right\} + 4\sin^2 n\theta$$

$$= 4\{\sin^2\theta + \cos^2\theta\} + 4\{\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta\} + \dots$$

$$+ 4\{\sin^2(n-1)\theta + \cos^2(n-1)\theta\} + 4 \times \frac{1}{2}$$

$$= 4(n-1) + 2 = 4n - 2$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{20} f(n) = \sum_{n=1}^{20} (4n - 2)$$

$$= 4 \times \frac{20 \times 21}{2} - 2 \times 20$$

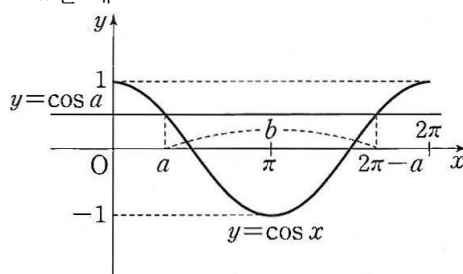
$$= 840 - 40 = 800$$

27) 답 ④

[해설]

$\cos x = \cos a$ 에서 $x = a$ 또는 $x = 2\pi - a$

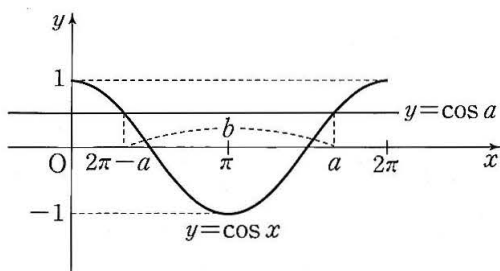
(i) $0 \leq a < \pi$ 일 때



위의 그림에서 $\cos b \leq \cos a$ 를 만족시키는 b 의 값의 범위는

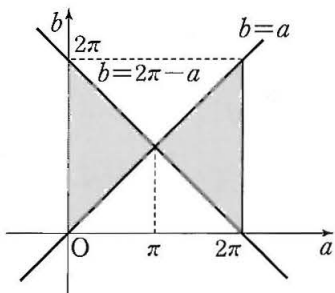
$$a \leq b \leq 2\pi - a$$

(ii) $\pi \leq a \leq 2\pi$ 일 때



위의 그림에서 $\cos b \leq \cos a$ 를 만족시키는 b 의 값의 범위는 $2\pi - a \leq b \leq a$

(i), (ii)에서 점 $P(a, b)$ 의 영역은 다음 그림과 같다.



따라서 점 P 가 나타내는 영역의 넓이는

$$2 \times \frac{1}{2} \times 2\pi \times \pi = 2\pi^2$$

28) 답 ②

[해설] 사인함수의 덧셈정리와 삼각함수 사이의 관계를 이용한다.

$$(1) \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$(2) \tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right), \sin \theta, \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$ 가 이 순서대로 등차수열을

이루므로 $2\sin \theta = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$ 가 성립한다.

사인함수의 덧셈정리에 의하여

$$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \theta \cos \frac{\pi}{3} - \cos \theta \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta$$

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \theta \cos \frac{\pi}{6} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta$$

$$\text{이므로 } 2\sin \theta = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \sin \theta + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \cos \theta$$

$$\frac{3 - \sqrt{3}}{2} \sin \theta = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \cos \theta$$

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \text{에서 } \cos \theta \neq 0 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{(1 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})}{(3 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})} \\ &= \frac{-2\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta \text{이므로 } \sec^2 \theta = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

29) 답 ⑤

[해설] $\cos(x - y) = \frac{1}{3}$ 에서

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi, 0 < y < \frac{\pi}{2} \text{이므로}$$

$$0 < x - y < \pi$$

$$\sin(x - y) = \sqrt{1 - \cos^2(x - y)} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos x = -\frac{2}{3} \text{에서 } \frac{\pi}{2} < x < \pi \text{이므로}$$

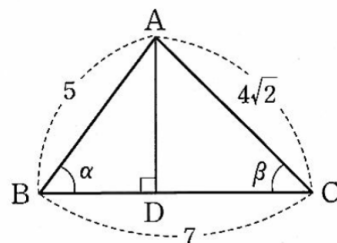
$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

따라서

$$\begin{aligned} \cos y &= \cos(x - (x - y)) \\ &= \cos x \cos(x - y) + \sin x \sin(x - y) \\ &= -\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ &= \frac{2\sqrt{10} - 2}{9} \end{aligned}$$

30) 답 ④

[해설]



삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라 하면

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2$$

$$= \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2$$

$$\overline{BD} = x \text{라 하면 } \overline{CD} = 7 - x \text{이므로}$$

$$\overline{AD}^2 = 5^2 - x^2 = (4\sqrt{2})^2 - (7 - x)^2 \text{에서}$$

$$25 - x^2 = 32 - 49 + 14x - x^2$$

$$x = 3$$

$$\text{즉, } \overline{BD} = 3, \overline{CD} = 4, \overline{AD} = 4 \text{이다.}$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

이므로

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{10} \end{aligned}$$

31) 답 ③

$$[\text{해설}] (1) \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$(2) a > 0, b > 0 \text{일 때, } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

(단, 등호는 $a = b$ 일 때 성립한다.)

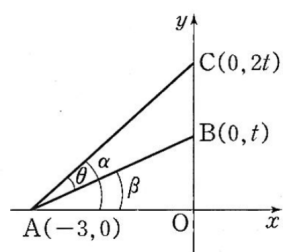
원점 O에 대하여 $\angle BAC = \theta, \angle OAC = \alpha,$
 $\angle OAB = \beta$ 로 놓으면

$$\tan \alpha = \frac{2t}{3}, \tan \beta = \frac{t}{3}$$

$$\tan \theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{2t}{3} - \frac{t}{3}}{1 + \frac{2t}{3} \times \frac{t}{3}} = \frac{\frac{t}{3}}{1 + \frac{2t^2}{9}} = \frac{3}{2t + \frac{9}{t}} \end{aligned}$$

$$t > 0 \text{이고 } 2t + \frac{9}{t} \geq 2\sqrt{2t \times \frac{9}{t}} = 6\sqrt{2} \text{이므로}$$



$$\tan \theta = \frac{3}{2t + \frac{9}{t}} \leq \frac{3}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

그러므로 $\tan \theta$ 의 최댓값은 $M = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 이고, 이때 등호는

$$2t = \frac{9}{t} \text{ 일 때 성립하므로 } t = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } a = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ 이므로 } aM = \frac{3\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{3}{4}$$

32) 답 ③

[해설] 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan \alpha + \tan \beta = \sin \theta \quad \cdots \textcircled{A}$$

$$\tan \alpha \tan \beta = \cos \theta \quad \cdots \textcircled{B}$$

$$\text{이고, } \tan(\alpha + \beta) = -\frac{1}{3} \text{ 이므로}$$

$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = -\frac{1}{3} \quad \cdots \textcircled{C}$$

①, ②을 ③에 대입하면

$$\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = -\frac{1}{3} \quad \cdots \textcircled{D}$$

$$-3 \sin \theta = 1 - \cos \theta \quad \cdots \textcircled{E}$$

$$\textcircled{E} \text{의 양변을 제곱하면 } 9 \sin^2 \theta = 1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$9(1 - \cos^2 \theta) = 1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$5 \cos^2 \theta - \cos \theta - 4 = 0$$

$$(5 \cos \theta + 4)(\cos \theta - 1) = 0$$

⑤에서 $\cos \theta \neq 1$ 이므로

$$\cos \theta = -\frac{4}{5}$$

이것을 ⑤에 대입하면

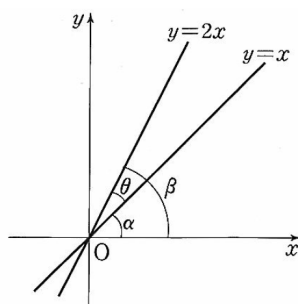
$$\sin \theta = -\frac{3}{5}$$

따라서

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3}{4}$$

33) 답 ③

[해설] 두 직선 $y = x + 1$, $y = 2x - 1$ 이 이루는 예각의 크기는
평행이동한 두 직선 $y = x$, $y = 2x$ 가 이루는 예각의 크기와 같다.



위의 그림과 같이 두 직선 $y = x$, $y = 2x$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α , β 라 하면

$$\theta = \beta - \alpha$$

$$\tan \alpha = 1, \tan \beta = 2 \text{ 이므로}$$

$$\tan \theta = \tan(\beta - \alpha)$$

$$= \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha}$$

$$= \frac{2 - 1}{1 + 2 \times 1} = \frac{1}{3}$$

따라서

$$\tan \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan \theta - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \theta \tan \frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} - 1}{1 + \frac{1}{3}} = -\frac{1}{2}$$

34) 답 ④

[해설] 함수의 연속의 정의와 지수함수, 삼각함수의 극한을 이용한다.

$$(1) \text{ 함수 } f(x) \text{가 } x=a \text{에서 연속이면 } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 연속이므로 $x=0$ 에서 연속이다. 즉, $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 이다.

따라서

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^{2x} - 1)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^{2x} - 1)(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^{2x} - 1)(1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^{2x} - 1)(1 + \cos x)}{\sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot 2(1 + \cos x) \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{1}{\frac{\sin x}{x}} \right)^2 \cdot \frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot 2(1 + \cos x) \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\frac{\sin x}{x}} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} 2(1 + \cos x) \\ &= \left(\frac{1}{1} \right)^2 \times 1 \times 2(1 + 1) = 4 \end{aligned}$$

35) 답 ⑤

[해설] $f(x) = ax + b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)이라 하면

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{ax + b} = \frac{1}{3} \text{ 이고, } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (ax + b) = 0$$

$$\text{따라서 } \frac{\pi}{2}a + b = 0 \text{ 에서}$$

$$b = -\frac{\pi}{2}a$$

$$x - \frac{\pi}{2} = t \text{ 로 놓으면 } x \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ 일 때 } t \rightarrow 0 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{ax + b} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{ax - \frac{\pi}{2}a} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{a \left(x - \frac{\pi}{2} \right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos \left(t + \frac{\pi}{2} \right)}{at} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{at} \\ &= -\frac{1}{a} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } -\frac{1}{a} = \frac{1}{3} \text{ 에서}$$

$$a = -3, b = \frac{3}{2}\pi \text{이므로}$$

$$f(x) = -3x + \frac{3}{2}\pi$$

따라서

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -3 \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{3}{2}\pi = 3\pi$$

36) 답 ②

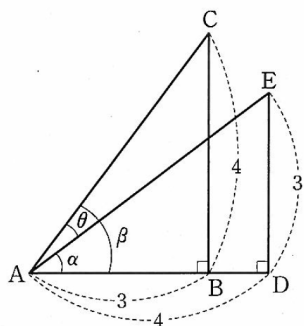
$$\begin{aligned} \text{[해설]} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2 \cos x (1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 \cos x (1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin^2 x}{x^2} \times \frac{1}{\cos x (1 + \cos x)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x (1 + \cos x)} \\ &= 1 \times \frac{1}{1 \times 2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

37) 답 ④

$$\begin{aligned} \text{[해설]} \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \alpha \times \tan \frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha \times 1} = 5 \\ \tan \alpha + 1 &= 5 - 5 \tan \alpha \text{이므로} \\ 6 \tan \alpha &= 4 \\ \tan \alpha &= \frac{2}{3} \\ \sec^2 \alpha &= 1 + \tan^2 \alpha \\ &= 1 + \frac{4}{9} = \frac{13}{9} \\ \cos^2 \alpha &= \frac{1}{\sec^2 \alpha} = \frac{9}{13} \\ \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi \text{이므로} \\ \cos \alpha &= -\frac{3}{\sqrt{13}} = -\frac{3\sqrt{13}}{13} \end{aligned}$$

38) 답 ③

[해설]



직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

직각삼각형 ADE에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AE} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$\angle EAD = \alpha$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)라 하면

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$\angle CAB = \beta$ ($0 < \beta < \frac{\pi}{2}$)라 하면

$$\sin \beta = \frac{4}{5}, \cos \beta = \frac{3}{5} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sin(\beta - \alpha) \\ &= \sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha \\ &= \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} - \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \\ &= \frac{7}{25} \end{aligned}$$

39) 답 ①

$$\begin{aligned} \text{[해설]} f(x) &= \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2} \sin x \\ &= \cos x \cos \frac{\pi}{6} + \sin x \sin \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \sin x \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \sin x \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \end{aligned}$$

ㄱ. $y = \cos x$ 의 주기는 2π 이므로 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x$ 의 주

기는 2π 이다. (참)

ㄴ. $f(0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 그

래프는 원점에 대하여 대칭이 아니다. (거짓)

ㄷ. $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이고

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \text{이므로}$$

함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 최솟값은 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다. (거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ이다.

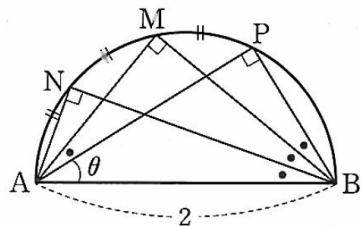
[다른 풀이]

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } f(-x) &= \cos\left(-x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2} \sin(-x) \\ &= \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2} \sin x \\ &= \cos x \cos \frac{\pi}{6} - \sin x \sin \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \sin x \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \sin x \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \\ -f(x) &= -\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2} \sin x \\ &= -\cos x \cos \frac{\pi}{6} - \sin x \sin \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \sin x \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \sin x \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \end{aligned}$$

이므로

$$f(-x) \neq -f(x)$$

즉, 함수 $f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이 아니다. (거짓)
 40) 답 ④
 [해설]



그림과 같이 같은 길이의 호에 대한 원주각의 크기가 같으므로
 $\angle ABN = x$ 라 하면
 $\angle ABP = 3x$

따라서 직각삼각형 APB에서

$$3x + \theta = \frac{\pi}{2} \text{ 이므로}$$

$$x = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \\ = \frac{\pi}{6} - \frac{\theta}{3}$$

$$\overline{BN} = \overline{AB} \cos x \\ = 2 \cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\theta}{3} \right) \\ = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\theta}{3} + \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{\theta}{3} \right) \\ = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\theta}{3} + \frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{3} \right) \\ = \sqrt{3} \cos \frac{\theta}{3} + \sin \frac{\theta}{3}$$

$$\overline{BN} = a \cos \frac{\theta}{3} + b \sin \frac{\theta}{3} \text{ 에서}$$

$$a = \sqrt{3}, b = 1$$

따라서

$$a^2 + b^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4$$

41) 답 ④

[해설] $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{5}{7} \quad \dots \textcircled{1}$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{3}{7} \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 에서

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{4}{7}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} \\ = \sqrt{1 - \frac{25}{49}} \\ = \frac{2\sqrt{6}}{7} \quad (0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2} \text{ 이므로})$$

따라서

$$\tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \\ = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} \\ = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \\ = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{7}}{\frac{4}{7}} \\ = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2}$$

[다른 풀이]

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{에서 } \cos \alpha \cos \beta = \frac{4}{7}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{에서 } \sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{7}$$

따라서

$$\tan \alpha \tan \beta = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = -\frac{1}{4}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{5}{7} \text{ 에서 } \sin(\alpha + \beta) = \frac{2\sqrt{6}}{7} \text{ 이므로}$$

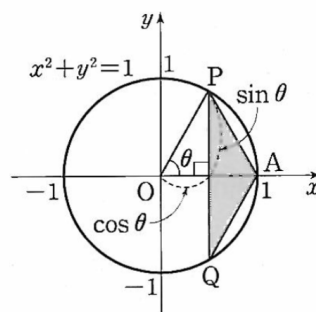
$$\frac{\frac{2\sqrt{6}}{7}}{\frac{5}{7}} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)}$$

따라서

$$\tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

42) 답 ④

[해설]



위의 그림에서

$$S(\theta) = \left\{ \frac{1}{2} \times (1 - \cos \theta) \times \sin \theta \right\} \times 2 \\ = \sin \theta (1 - \cos \theta)$$

$$S\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin \frac{\theta}{2} \left(1 - \cos \frac{\theta}{2}\right)$$

따라서

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{S\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta (1 - \cos \theta)}{\sin \frac{\theta}{2} \left(1 - \cos \frac{\theta}{2}\right)} \\ = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta (1 - \cos \theta) (1 + \cos \theta) \left(1 + \cos \frac{\theta}{2}\right)}{\sin \frac{\theta}{2} \left(1 - \cos \frac{\theta}{2}\right) \left(1 + \cos \frac{\theta}{2}\right) (1 + \cos \theta)} \\ = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta (1 - \cos^2 \theta)}{\sin \frac{\theta}{2} \left(1 - \cos^2 \frac{\theta}{2}\right)} \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1 + \cos \frac{\theta}{2}}{1 + \cos \theta} \\ = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin^3 \theta}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} \times \frac{2}{2}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left\{ \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^3 \times \left(\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \right)^3 \times 8 \right\} \\
&= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^3 \times \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}} \right)^3 \times 8 \\
&= 1^3 \times \left(\frac{1}{1} \right)^3 \times 8 \\
&= 8
\end{aligned}$$

43) 답 ③

[해설] $x \rightarrow 0+$ 일 때, $x > \sin x$ 이므로 함수 $f(x)$ 를 $f(x) = \sin x$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌 구간 $[\sin x, x]$ 에서 연속이고, 열린 구간 $(\sin x, x)$ 에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$$\frac{f(x) - f(\sin x)}{x - \sin x} = f'(c) \quad (\sin x < c < x) \text{인 } c \text{가 존재한다.}$$

다.

$f'(x) = \cos x$ 이고 $x \rightarrow 0+$ 일 때

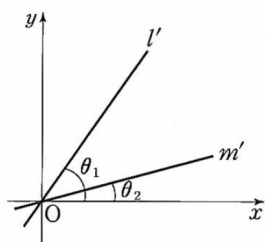
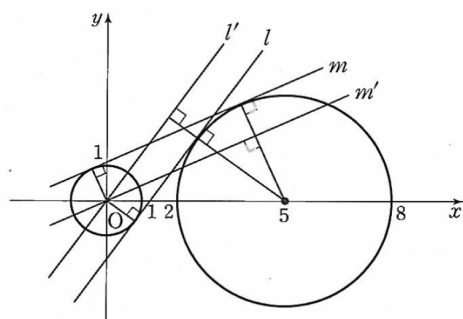
$\sin x \rightarrow 0+$ 이므로 $c \rightarrow 0+$ ($\sin x < c < x$)

따라서

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{x - \sin x} = \lim_{c \rightarrow 0+} \cos c = 1$$

44) 답 19

[해설] 두 직선 l, m 을 각각 원점을 지나도록 평행이동한 직선을 l', m' 이라 하면 다음 그림에서 두 직선 l, m 이 이루는 예각의 크기는 두 직선 l', m' 이 이루는 예각의 크기와 같다.



직선 l' 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ_1 이라 하면

$$\sin \theta_1 = \frac{3+1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\begin{aligned}
\cos \theta_1 &= \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5} \right)^2} \\
&= \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

직선 m' 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ_2 라 하면

$$\sin \theta_2 = \frac{3-1}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\begin{aligned}
\cos \theta_2 &= \sqrt{1 - \left(\frac{2}{5} \right)^2} \\
&= \frac{\sqrt{21}}{5}
\end{aligned}$$

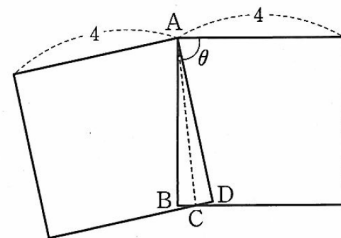
$$\begin{aligned}
\sin \theta &= \sin(\theta_1 - \theta_2) \\
&= \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\
&= \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{21}}{5} - \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \\
&= \frac{-6 + 4\sqrt{21}}{25}
\end{aligned}$$

따라서 $p = 25, q = -6$ 이므로

$$p + q = 25 + (-6) = 19$$

45) 답 ④

[해설] 그림과 같이 겹쳐진 도형의 꼭짓점을 B, C, D라 하자.



삼각형 ABC와 삼각형 ADC는 합동(RHS 합동)이므로 두

삼각형 ABC, ADC의 넓이는 $\frac{1}{2}$ 로 서로 같다.

또한,

$$\begin{aligned}
\Delta ADC &= \frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{CD} \\
&= \frac{1}{2} \times 4 \times \overline{CD} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \overline{CD} = \frac{1}{4}$$

$\angle CAD = \alpha$ 라 하면

$$\tan \alpha = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\frac{1}{4}}{4} = \frac{1}{16}$$

한편, $2\alpha + \theta = \frac{\pi}{2}$ 에서

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
\tan \alpha &= \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \\
&= \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{1 - \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan \frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

$$16 \left(1 - \tan \frac{\theta}{2} \right) = 1 + \tan \frac{\theta}{2}$$

$$17 \tan \frac{\theta}{2} = 15$$

$$\text{따라서 } \tan \frac{\theta}{2} = \frac{15}{17}$$

46) [정답] ①

$$\sin x \cos y = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{4} \quad \dots\dots\textcircled{A}$$

$$\cos x \sin y = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4} \quad \dots\dots\textcircled{B}$$

(i) ①+②을 하면

$$\sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin(x+y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0 < x < \frac{\pi}{3}, \quad 0 < y < \frac{\pi}{3} \quad \text{에서} \quad 0 < x+y < \frac{2}{3}\pi \quad \text{이므로}$$

$$x+y = \frac{\pi}{3} \quad \dots\dots\textcircled{C}$$

(ii) ①-②을 하면

$$\sin x \cos y - \cos x \sin y = \sin(x-y) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$0 < x < \frac{\pi}{3}, \quad 0 < y < \frac{\pi}{3} \quad \text{에서} \quad -\frac{\pi}{3} < x-y < \frac{\pi}{3} \quad \text{이므로}$$

$$x-y = \frac{\pi}{4} \quad \dots\dots\textcircled{D}$$

③, ④을 연립하여 풀면 $x = \frac{7}{24}\pi$, $y = \frac{\pi}{24}$

$$\therefore \cos(x-y) = \cos \frac{5}{6}\pi = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

47) [정답] 35

$$\sin x \sin y = \frac{1}{3} \quad \dots\dots\textcircled{A}$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} \quad \dots\dots\textcircled{B}$$

②-①을 하면

$$\begin{aligned} \cos x \cos y - \sin x \sin y &= \cos(x+y) \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \tan^2(x+y) &= \sec^2(x+y) - 1 \\ &= \frac{1}{\cos^2(x+y)} - 1 \\ &= 36 - 1 = 35 \end{aligned}$$

48) [정답] ⑤

두 점 A, B의 좌표를 $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$ 이라 하자. (단, $a < 0$, $b > 0$)

두 직선 OA, OB가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α , β 라 하면

$$\tan \alpha = \frac{a^2}{a} = a, \quad \tan \beta = \frac{b^2}{b} = b$$

$$\begin{aligned} \tan 45^\circ &= \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{a - b}{1 + ab} = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore a - b = 1 + ab$$

두 실수 a, b는 이차방정식 $x^2 = 2x + k$, 즉 $x^2 - 2x - k = 0$ 의 서로 다른 두 실근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $a+b=2$, $ab=-k$

$$\therefore a - b = 1 - k$$

$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab \quad \text{이므로} \quad (1-k)^2 = 2^2 + 4k$$

위의 식을 정리하면 $k^2 - 6k - 3 = 0$

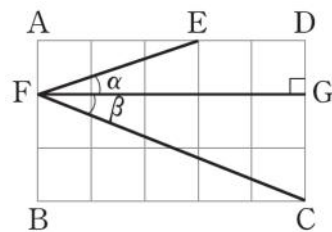
$$\therefore k = 3 + 2\sqrt{3} \quad (\because k > 0)$$

49) [정답] ①

점 F에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 G라 하고, $\angle EFG = \alpha$, $\angle CFG = \beta$ 라 하자.

$$\tan \alpha = \frac{1}{3}, \quad \tan \beta = \frac{2}{5} \quad \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \tan(\angle EFC) &= \tan(\alpha + \beta) \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{\frac{1}{3} + \frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{3} \times \frac{2}{5}} = \frac{\frac{11}{15}}{1 - \frac{2}{15}} = \frac{11}{13} \end{aligned}$$



50) [정답] ④

$$\begin{aligned} PQ &= \left| 2\sin k - \sin\left(k + \frac{\pi}{3}\right) \right| = \left| 2\sin k - \sin k \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \cos k \cdot \sin \frac{\pi}{3} \right| \\ &= \left| \frac{3}{2} \sin k - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos k \right| = \sqrt{3} \left| \sin\left(k - \frac{\pi}{6}\right) \right| \end{aligned}$$

따라서 $\sin\left(k - \frac{\pi}{6}\right) = -1$ 또는 $\sin\left(k - \frac{\pi}{6}\right) = 1$ 일 때, 선분

PQ의 길이는 최대이다.

$$\sin\left(k - \frac{\pi}{6}\right) = -1 \quad \text{에서} \quad k - \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}\pi \quad \therefore k = \frac{5}{3}\pi$$

$$\sin\left(k - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \quad \text{에서} \quad k - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore k = \frac{2}{3}\pi$$

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{5}{3}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{7}{3}\pi$$

51) [정답] ④

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta &= -\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta \\ &= 2\left(-\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta\right) \\ &= 2\sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\text{에서} \quad \sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) = \frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta\right) \\ &= 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

한편,

$$\sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{5}$$

이므로

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta &= 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= 2 \times \frac{\sqrt{24}}{5} = \frac{4\sqrt{6}}{5} \\ &\quad \left(\because \frac{\pi}{6} < \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{2}{3}\pi\right) \end{aligned}$$

52) [정답] ①

$$1 - \sin^2 10^\circ = \cos^2 10^\circ \quad \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} (1 - \sin^2 10^\circ) \sec^2 10^\circ &= \cos^2 10^\circ \cdot \frac{1}{\cos^2 10^\circ} \\ &= 1 \end{aligned}$$

53) [정답] ④

$$\begin{aligned} &\sin \frac{\pi}{12} \cdot \tan \frac{5}{12}\pi \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}\right) \cdot \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{6}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} \right) \times \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore a + b = 6 + 2 = 8$$

54) [정답] ③

두 직선 $x - 3y + 1 = 0$, $kx - 2y + 5 = 0$ 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α , β 라 하면

$$\tan \alpha = \frac{1}{3}, \tan \beta = \frac{k}{2}$$

$$|\tan(\alpha - \beta)| = \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right|$$

$$= \left| \frac{\frac{1}{3} - \frac{k}{2}}{1 + \frac{1}{3} \times \frac{k}{2}} \right| = \left| \frac{-3k + 2}{k + 6} \right| = 1$$

$$3k - 2 = \pm(k + 6)$$

$$\therefore k = 4 \text{ 또는 } k = -1$$

따라서 구하는 모든 상수 k 의 값의 합은

$$4 + (-1) = 3$$

55) [정답] 80

$$f(x) = -\sin x + \sqrt{a} \cos x$$

$$\sqrt{a+1} \sin(x+\alpha)$$

$$\left(\text{단, } \sin \alpha = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}}, \cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{a+1}} \right)$$

에서 $-1 \leq \sin(x+\alpha) \leq 1$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $-\sqrt{a+1}$

$$-\sqrt{a+1} = -9 \text{ 에서}$$

$$a+1 = 81 \quad \therefore a = 80$$

56) [정답] 20

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan \frac{\pi}{5} + \tan \frac{\pi}{a} = m \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$$\tan \frac{\pi}{5} \cdot \tan \frac{\pi}{a} = 1 - m \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A} + \textcircled{B}$ 을 하면

$$\tan \frac{\pi}{5} + \tan \frac{\pi}{a} + \tan \frac{\pi}{5} \cdot \tan \frac{\pi}{a} = 1$$

$$\tan \frac{\pi}{5} + \tan \frac{\pi}{a} = 1 - \tan \frac{\pi}{5} \cdot \tan \frac{\pi}{a}$$

$$\frac{\tan \frac{\pi}{5} + \tan \frac{\pi}{a}}{1 - \tan \frac{\pi}{5} \cdot \tan \frac{\pi}{a}} = 1$$

$$\therefore \tan \left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{a} \right) = 1$$

$$\text{따라서 } \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{a} = \frac{\pi}{4} \text{ 에서 } \frac{\pi}{a} = \frac{\pi}{20}$$

$$\therefore a = 20$$

57) [정답] ③

$$\overline{OQ'} = \cos(\alpha - \beta)$$

$$= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\overline{OR'} = \cos(\alpha + \beta)$$

$$= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\therefore \overline{OR'} \cdot \overline{OQ'} = (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)$$

$$\times (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)$$

$$= \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta$$

$$= \cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) - (1 - \cos^2 \alpha) \sin^2 \beta$$

$$= \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

58) [정답] ⑤

$$m_1 = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{10} \right), m_2 = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{10} \right) \text{ 이므로}$$

$$m_1 - m_2 = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{10} \right) - \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{10} \right)$$

$$= \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{10}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{10}} - \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{10}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{10}}$$

$$= \frac{1 + \tan \frac{\pi}{10}}{1 - \tan \frac{\pi}{10}} - \frac{1 - \tan \frac{\pi}{10}}{1 + \tan \frac{\pi}{10}}$$

$$= \frac{4 \tan \frac{\pi}{10}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{10}}$$

$$= 2 \tan \left(\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{10} \right) = 2 \tan \frac{\pi}{5}$$

59) [정답] ②

$3 \sin x + 4 \cos x = t$ 로 놓으면

$$t = 5 \sin(x + \alpha) \quad \left(\text{단, } \sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \alpha = \frac{3}{5} \right) \text{ 에서}$$

$$-5 \leq t \leq 5$$

따라서 주어진 함수 $f(x)$ 의 치역은 함수

$$g(t) = \frac{t+10}{t-10} = 1 + \frac{20}{t-10} \quad (-5 \leq t \leq 5) \text{ 의 치역과 같다.}$$

함수 $y = \frac{t+10}{t-10}$ 의 그래프는 그림과 같으므로 구하는 최댓값

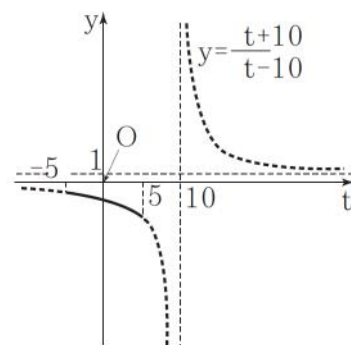
M 과 최솟값 m 은

$$M = g(-5) = \frac{5}{-15}$$

$$= -\frac{1}{3}$$

$$m = g(5) = \frac{15}{-5} = -3$$

$$\therefore Mm = \left(-\frac{1}{3} \right) \times (-3) = 1$$



60) [정답] ③

$$\frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{(1 + \sin \alpha)^2 + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)}$$

$$= \frac{1 + 2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)}$$

$$= \frac{2(1 + \sin \alpha)}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)}$$

$$= \frac{2}{\cos \alpha}$$

$$\text{따라서 } \frac{2}{\cos \alpha} = \frac{10}{3} \text{ 에서 } \cos \alpha = \frac{3}{5} \text{ 이다.}$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ 이므로 } \sin \alpha > 0$$

$$\therefore \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{1 + \cos\beta}{\sin\beta} + \frac{\sin\beta}{1 + \cos\beta} = \frac{(1 + \cos\beta)^2 + \sin^2\beta}{\sin\beta(1 + \cos\beta)}$$

$$= \frac{1 + 2\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\beta}{\sin\beta(1 + \cos\beta)}$$

$$= \frac{2(1 + \cos\beta)}{\sin\beta(1 + \cos\beta)}$$

$$= \frac{2}{\sin\beta}$$

따라서 $\frac{2}{\sin\beta} = -\frac{5}{2}$ 에서 $\sin\beta = -\frac{4}{5}$ 이다.

$\pi < \beta < \frac{3}{2}\pi$ 이므로 $\cos\beta < 0$

$$\therefore \cos\beta = -\sqrt{1 - \sin^2\beta} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\therefore \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$= \frac{3}{5} \times \left(-\frac{3}{5}\right) - \frac{4}{5} \times \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{7}{25}$$

61) [정답] ⑤

점 $P\left(k, -\frac{7}{4}\right)$ 을 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y = m(x - k) - \frac{7}{4}$$

$$x^2 = m(x - k) - \frac{7}{4} \text{ 에서}$$

$$x^2 - mx + mk + \frac{7}{4} = 0 \quad \dots\dots\textcircled{\ominus}$$

①이 중근을 가져야 하므로 ①의 판별식을 D 라 하면

$$D = m^2 - 4\left(mk + \frac{7}{4}\right) = m^2 - 4km - 7 = 0 \quad \dots\dots\textcircled{\ominus}$$

①의 두 근을 m_1, m_2 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$m_1 + m_2 = 4k, \quad m_1 m_2 = -7$$

두 직선 l_1, l_2 의 기울기를 각각 m_1, m_2 라 하고, 두 직선 l_1, l_2 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β 라 놓으면 $m_1 = \tan\alpha, m_2 = \tan\beta$ 이다.

두 직선 l_1, l_2 가 이루는 예각의 크기가 45° 이므로

$$\tan 45^\circ = |\tan(\alpha - \beta)|$$

$$= \left| \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} \right|$$

$$= \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

$$= \left| \frac{m_1 - m_2}{1 - 7} \right|$$

$$= \left| \frac{m_1 - m_2}{6} \right| = 1$$

$$\therefore (m_1 - m_2)^2 = 36$$

따라서 $(m_1 + m_2)^2 = (m_1 - m_2)^2 + 4m_1 m_2$ 에서

$$16k^2 = 36 - 28 = 8$$

$$\therefore k^2 = \frac{1}{2}$$

따라서 구하는 양수 a 의 값은 $a = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

62) [정답] ①

$$f(9) = 2\sin 9\theta + 3\cos 9\theta$$

$$= 2\sin(10\theta - \theta) + 3\cos(10\theta - \theta)$$

$$= 2(\sin 10\theta \cos \theta - \cos 10\theta \sin \theta)$$

$$+ 3(\cos 10\theta \cos \theta + \sin 10\theta \sin \theta)$$

$$f(10) = 2\sin 10\theta + 3\cos 10\theta$$

$$f(11) = 2\sin 11\theta + 3\cos 11\theta$$

$$= 2\sin(10\theta + \theta) + 3\cos(10\theta + \theta)$$

$$= 2(\sin 10\theta \cos \theta + \cos 10\theta \sin \theta)$$

$$+ 3(\cos 10\theta \cos \theta - \sin 10\theta \sin \theta)$$

$$\therefore f(9) + f(10) + f(11)$$

$$= 2\sin 10\theta(2\cos \theta + 1) + 3\cos 10\theta(2\cos \theta + 1)$$

$$= (2\sin 10\theta + 3\cos 10\theta)(2\cos \theta + 1)$$

$$= 0$$

$$f(10) = 2\sin 10\theta + 3\cos 10\theta \neq 0 \text{ 이므로}$$

$$2\cos \theta + 1 = 0$$

$$\therefore \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

63) [정답] ④

$\angle OAP = \theta$ 로 놓으면

$$\overline{AP} = 2\cos \theta$$

$$\overline{AQ} = 2\cos\left(\frac{3}{4}\pi - \theta\right)$$

$$= 2\left(\cos\frac{3}{4}\pi\cos\theta + \sin\frac{3}{4}\pi\sin\theta\right)$$

$$= \sqrt{2}\sin\theta - \sqrt{2}\cos\theta$$

$$\therefore 2\sqrt{2}\overline{AP} + 3\overline{AQ}$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot 2\cos\theta + 3(\sqrt{2}\sin\theta - \sqrt{2}\cos\theta)$$

$$= 4\sqrt{2}\cos\theta + 3\sqrt{2}\sin\theta - 3\sqrt{2}\cos\theta$$

$$= 3\sqrt{2}\sin\theta + \sqrt{2}\cos\theta$$

$$= 2\sqrt{5}\sin(\theta + \alpha)$$

$$\left(\text{단, } \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}, \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

따라서 구하는 최댓값은 $2\sqrt{5}$ 이다.

64) [정답] 44

$\angle ACB = \theta$ 로

놓으면

$$\angle ABC = 2\theta$$

사인법칙에 의하여

$$\frac{5}{\sin\theta} = \frac{8}{\sin 2\theta} \text{ 에서}$$

$$\frac{5}{\sin\theta} = \frac{8}{2\sin\theta\cos\theta}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{4}{5}$$

점 A 에서 선분 BC 에 내린 수선의 발을 D 라 하면

$$\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{DC}$$

$$= 5\cos 2\theta + 8\cos\theta$$

$$= 5(2\cos^2\theta - 1) + 8\cos\theta$$

$$= 5 \times \left(2 \times \frac{16}{25} - 1\right) + 8 \times \frac{4}{5}$$

$$= \frac{39}{5}$$

$$\therefore p + q = 5 + 39 = 44$$

65) [정답] ③

$\angle AOP = \theta$ 로 놓으면

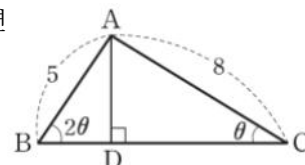
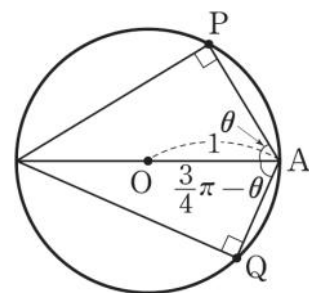
삼각형 AOP 에서

$$\overline{OA} = \overline{OP} = 2a, \quad \overline{AP} = a$$

이므로

$$\cos\theta = \frac{(2a)^2 + (2a)^2 - a^2}{2 \cdot 2a \cdot 2a}$$

$$= \frac{7}{8}$$



$$\begin{aligned}\therefore \sin \theta &= \sqrt{1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{8} \\ \therefore \triangle AOB &= \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \sin 2\theta \\ &= 2a^2 \cdot 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 2a^2 \cdot 2 \times \frac{\sqrt{15}}{8} \times \frac{7}{8} \\ &= \frac{7\sqrt{15}}{16} a^2\end{aligned}$$

66) [정답] ③

$\angle BOP_1 = \theta_1$, $\angle BOP_2 = \theta_2$ 라 하고 세 점 P_1 , P_2 , P_3 이 움직인 거리를 각각 l_{P_1} , l_{P_2} , l_{P_3} 이라 하면

$$l_{P_1} = 1 \cdot \theta_1 = \theta_1, \quad l_{P_2} = 2 \cdot \theta_2 = 2\theta_2, \quad l_{P_3} = 4 \cdot \theta = 4\theta$$

이고 세 점의 속력은 같으므로

$$\theta_1 = 2\theta_2 = 4\theta$$

$$\therefore \theta_1 = 4\theta, \quad \theta_2 = 2\theta$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sin 4\theta = 4 \sin 4\theta,$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 \sin 2\theta = 8 \sin 2\theta,$$

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 \sin \theta = 16 \sin \theta$$

이고 이것을 $3S_3 = 2(S_1 + S_2)$ 에 대입하면

$$48 \sin \theta = 2(4 \sin 4\theta + 8 \sin 2\theta)$$

$$6 \sin \theta = \sin 4\theta + 2 \sin 2\theta$$

$$= 2 \sin 2\theta \cos 2\theta + 4 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 4 \sin \theta \cos \theta \cos 2\theta + 4 \sin \theta \cos \theta$$

$$3 = 2 \cos \theta \cos 2\theta + 2 \cos \theta (\because \sin \theta \neq 0)$$

$$= 2 \cos \theta (2 \cos^2 \theta - 1) + 2 \cos \theta$$

$$= 4 \cos^3 \theta$$

$$\therefore \cos^3 \theta = \frac{3}{4}$$

67) [정답] ③

$$f(x) = 2 \cos^2 x + k \sin 2x - 1$$

$$= 2 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} + k \sin 2x - 1$$

$$= k \sin 2x + \cos 2x$$

$$= \sqrt{k^2 + 1} \sin(2x + \alpha)$$

$$\left(\text{단, } \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}}, \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}} \right)$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $\sqrt{k^2 + 1}$ 이므로

$$\sqrt{k^2 + 1} = \sqrt{10}, \quad k^2 = 9$$

이때 $k > 0$ 이므로 $k = 3$

68) [정답] 35

$$3 \cos 2x + 17 \cos x = 0 \text{ 에서}$$

$$3(2 \cos^2 x - 1) + 17 \cos x = 0$$

$$6 \cos^2 x + 17 \cos x - 3 = 0$$

$$(6 \cos x - 1)(\cos x + 3) = 0$$

$$\therefore \cos x = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{36}} - 1$$

$$= 36 - 1$$

69) [정답] ④

$$\frac{\sin 30^\circ}{\sin 10^\circ} - \frac{\cos 30^\circ}{\cos 10^\circ}$$

$$= \frac{\sin 30^\circ \cos 10^\circ - \cos 30^\circ \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ}$$

$$= \frac{\sin(30^\circ - 10^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 20^\circ}$$

$$= \frac{\sin 20^\circ}{\frac{1}{2} \sin 20^\circ}$$

$$= 2$$

70) [정답] 35

$$\sin 15^\circ + \cos 15^\circ = \sqrt{2} \sin(15^\circ + 45^\circ)$$

$$= \sqrt{2} \sin 60^\circ$$

$$= \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\tan 15^\circ + \cot 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} + \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}$$

$$= \frac{1}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ}$$

$$= \frac{2}{\sin 30^\circ}$$

$$= \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

$$\therefore p = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad q = 4$$

$$\therefore 2(p^2 + q^2) = 2\left(\frac{6}{4} + 16\right) = 35$$

71) [정답] ③

$$\tan x = \frac{4}{3} \text{ 에서 } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ 이므로 } \sin x = \frac{4}{5}, \cos x = \frac{3}{5}$$

$$\tan y = -\frac{3}{4} \text{ 에서 } \frac{\pi}{2} < y < \pi \text{ 이므로}$$

$$\sin y = \frac{3}{5}, \cos y = -\frac{4}{5}$$

$$\sin(2x + y) = \sin 2x \cos y + \cos 2x \sin y$$

$$= 2 \sin x \cos x \cos y + (2 \cos^2 x - 1) \sin y$$

$$= 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} \times \left(-\frac{4}{5}\right) + \left(2 \times \frac{9}{25} - 1\right) \times \frac{3}{5}$$

$$= -\frac{117}{125}$$

72) [정답] ②

$$\sin 3\theta \sin \theta = -\frac{1}{2}(\cos 4\theta - \cos 2\theta)$$

$$= -\frac{1}{2}(2 \cos^2 2\theta - 1 - \cos 2\theta)$$

$$= -\frac{1}{2}(\cos 2\theta - 1)(2 \cos 2\theta + 1)$$

$$= -\frac{1}{2}(2 \cos^2 \theta - 1 - 1)(4 \cos^2 \theta - 2 + 1)$$

$$= -(\cos^2 \theta - 1)(4 \cos^2 \theta - 1)$$

$$= -\left(\frac{1}{3} - 1\right)\left(\frac{4}{3} - 1\right)$$

$$= \frac{2}{9}$$

73) [정답] 64

$$\cos 7x + \cos 8x = 2 \cos \frac{15}{2}x \cos \frac{x}{2}$$

$$\therefore \cos \frac{15}{2}x \cos \frac{x}{2} = 0$$

$$\therefore \cos \frac{15}{2}x = 0 \quad \text{또는} \quad \cos \frac{x}{2} = 0$$

$$(i) \cos \frac{15}{2}x = 0 \quad \text{에서} \quad \frac{15}{2}x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore x = \frac{4n\pi \pm \pi}{15} \quad (\text{단, } n \text{ 은 정수})$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{15} \quad \text{또는} \quad x = \frac{3}{15}\pi \quad \text{또는} \quad x = \frac{5}{15}\pi \quad \text{또는}$$

$$x = \frac{7}{15}\pi \quad \text{또는} \quad x = \frac{9}{15}\pi \quad \text{또는} \quad x = \frac{11}{15}\pi \quad \text{또는}$$

$$x = \frac{13}{15}\pi$$

$$(ii) \cos \frac{x}{2} = 0 \quad \text{에서} \quad \frac{x}{2} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore x = 4n\pi \pm \pi \quad (\text{단, } n \text{ 은 정수})$$

이때 근은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 구하는 서로 다른 모든 근의 합은

$$\frac{\pi}{15} + \frac{3}{15}\pi + \frac{5}{15}\pi + \frac{7}{15}\pi + \frac{9}{15}\pi + \frac{11}{15}\pi + \frac{13}{15}\pi = \frac{49}{15}\pi$$

$$\therefore p+q = 15+49 = 64$$

74) [정답] ③

$$x = \sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta$$

$$= 1 - \cos^2 \theta + 2 \cos^2 \theta$$

$$= 1 + \cos^2 \theta$$

$$= 1 + \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$\text{에서} \quad \cos 2\theta = 2(x-1) - 1 = 2x-3$$

$$y = \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

$$\text{에서} \quad \sin 2\theta = 2y$$

$$\therefore \sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta = (2y)^2 + (2x-3)^2 = 1$$

위의 식을 정리하면

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

따라서 구하는 도형의 넓이는 $\frac{\pi}{4}$ 이다.

75) [정답] ②

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$$

$$= 2 \sin(A+B) \cos(A-B) + 2 \sin C \cos C$$

$$= 2 \sin C \cos(A-B) + 2 \sin C \cos C \quad (\because A+B = \pi - C)$$

$$= 2 \sin C \{\cos(A-B) + \cos C\}$$

$$= 2 \sin C \{\cos(A-B) + \cos(\pi - A - B)\}$$

$$= 2 \sin C \{\cos(A-B) - \cos(A+B)\}$$

$$= 2 \sin C \{-2 \sin A \sin(-B)\}$$

$$= 4 \sin A \sin B \sin C = 4 \times \frac{1}{4} = 1$$

76) [정답] ④

반원의 중심을 O 라 하고 $\angle PBO = \theta$ 라 하면 원주각과 중심각 사이의 관계에 의하여 $\angle AOP = 2\theta$ 이다.

부채꼴 AOP 에서 $x = 2 \cdot 2\theta = 4\theta$

$$\therefore \theta = \frac{x}{4}$$

$$\frac{\overline{AP}}{4} = \sin \theta$$

$$\therefore \overline{AP} = 4 \sin \theta$$

$$\frac{\overline{BP}}{4} = \cos \theta$$

$$\therefore \overline{BP} = 4 \cos \theta$$

즉, 삼각형 ABP 의 넓이 $S(x)$ 는

$$S(x) = \frac{1}{2} \cdot \overline{AP} \cdot \overline{BP}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4 \sin \theta \cdot 4 \cos \theta$$

$$= 8 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 4 \sin 2\theta$$

$$= 4 \sin \frac{x}{2}$$

$$\therefore m+n = 4+2 = 6$$

77) [정답] ④

직선 l_1 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α 라 하면 직선 l_2 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 2α 이다.

두 직선 l_1, l_2 의 기울기를 각각 m_1, m_2 라 하면

$$m_1 = \tan \alpha, \quad m_2 = \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2m_1}{1 - m_1^2}$$

점 $(a, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식을 $y = m(x-a)$ 라 하면

$$x^2 + 1 = m(x-a) \quad \text{에서} \quad x^2 - mx + am + 1 = 0$$

위의 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = m^2 - 4am - 4 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

⑦의 두 실근이 m_1, m_2 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$m_1 + m_2 = 4a, \quad m_1 m_2 = -4$$

$$\text{따라서} \quad m_1 m_2 = \frac{2m_1^2}{1 - m_1^2} = -4 \quad \text{에서}$$

$$2m_1^2 = -4(1 - m_1^2), \quad m_1^2 = 2$$

$$\therefore m_1 = \sqrt{2} \quad (\because m_1 > 0)$$

$$m_2 = -\frac{4}{m_1} = -\frac{4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} \quad \text{이므로}$$

$$4a = m_1 + m_2 = \sqrt{2} + (-2\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$$

$$\therefore a = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

78) [정답] ⑤

$$-\pi \leq x \leq \pi, \quad -\pi \leq y \leq \pi \quad \text{이므로}$$

$$-2\pi \leq x+y \leq 2\pi, \quad -2\pi \leq x-y \leq 2\pi$$

$$\sin(x+y) = \sin x \sin y \quad \text{에서}$$

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x+y}{2} = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos \frac{x+y}{2} \left(\sin \frac{x+y}{2} - \sin \frac{x-y}{2} \right) = 0$$

$$\cos \frac{x+y}{2} \cdot 2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} = 0$$

$$\therefore \cos \frac{x+y}{2} = 0 \quad \text{또는} \quad \cos \frac{x}{2} = 0 \quad \text{또는} \quad \sin \frac{y}{2} = 0$$

$$(i) \cos \frac{x+y}{2} = 0 \quad \text{일 때,} \quad -\pi \leq \frac{x+y}{2} \leq \pi \quad \text{이므로}$$

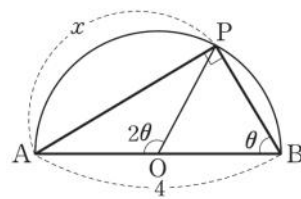
$$\frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{또는} \quad \frac{x+y}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore x+y = \pi \quad \text{또는} \quad x+y = -\pi$$

$$(ii) \cos \frac{x}{2} = 0 \quad \text{일 때,} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{이므로}$$

$$\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{2} \quad \text{또는} \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}$$

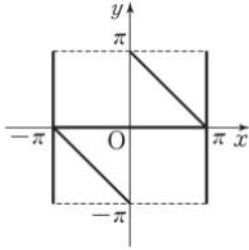
$$\therefore x = -\pi \quad \text{또는} \quad x = \pi$$



(iii) $\sin \frac{y}{2} = 0$ 일 때, $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{y}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\frac{y}{2} = 0$
 $\therefore y = 0$

(i)~(iii)에서 점 (x, y) 가 그리는 도형
 은 그림과 같다.

따라서 구하는 도형 전체의 길이는
 $3 \times 2\pi + 2 \times \sqrt{2}\pi = (6 + 2\sqrt{2})\pi$



79) [정답] 13

$\angle ABC = \theta$ 라 놓으면 평행사변형 ABCD 의 넓이는 28 이므로

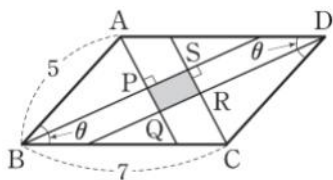
$$\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \sin \theta = 5 \cdot 7 \cdot \sin \theta = 35 \sin \theta = 28 \text{ 에서}$$

$$\sin \theta = \frac{4}{5}$$

$$\angle ABP = \frac{\theta}{2}, \angle BAP = \frac{1}{2}(\pi - \theta) = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \text{ 이므로}$$

$$\angle APB = \frac{\pi}{2} \text{ 이다.}$$

따라서 사각형 PQRS 는 직사각형이다.



직각삼각형 ADQ 에서

$$\overline{AQ} = \overline{AD} \sin \frac{\theta}{2} = 7 \sin \frac{\theta}{2}$$

직각삼각형 ABP 에서

$$\overline{AP} = \overline{AB} \sin \frac{\theta}{2} = 5 \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \overline{PQ} = \overline{AQ} - \overline{AP}$$

$$= 7 \sin \frac{\theta}{2} - 5 \sin \frac{\theta}{2} = 2 \sin \frac{\theta}{2}$$

직각삼각형 ADQ 에서

$$\overline{DQ} = \overline{CD} \cos \frac{\theta}{2} = 5 \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \overline{QR} = \overline{DQ} - \overline{DR}$$

$$= 7 \cos \frac{\theta}{2} - 5 \cos \frac{\theta}{2} = 2 \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \square PQRS = \overline{PQ} \cdot \overline{QR}$$

$$= 2 \sin \frac{\theta}{2} \cdot 2 \cos \frac{\theta}{2}$$

$$= 2 \sin \theta$$

$$= 2 \times \frac{4}{5} = \frac{8}{5}$$

$$\therefore p + q = 5 + 8 = 13$$

80) [정답] ③

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 1 \text{ 이므로}$$

$$\frac{a + 2 - a}{1 - a(2 - a)} = 1 \text{ 에서}$$

$$2 = 1 - 2a + a^2$$

$$a^2 - 2a - 1 = 0$$

$$\therefore a = 1 + \sqrt{2} \quad (\because a > 0)$$

81) [정답] ①

$$f(x) = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) - k \cos x$$

$$= 2 \left(\sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6} \right) - k \cos x$$

$$= \sqrt{3} \sin x + (1 - k) \cos x$$

$$= \sqrt{3 + (1 - k)^2} \sin(x + \alpha)$$

$$\left(\text{단, } \sin \alpha = \frac{1 - k}{\sqrt{3 + (1 - k)^2}}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3 + (1 - k)^2}} \right)$$

x 는 임의의 실수이므로 $-1 \leq \sin(x + \alpha) \leq 1$ 이다.

즉, 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $\sqrt{3 + (1 - k)^2}$ 이므로

$$\sqrt{3 + (1 - k)^2} = \sqrt{7} \text{ 에서}$$

$$(1 - k)^2 = 4$$

$$\therefore k = -1 \text{ 또는 } k = 3$$

따라서 구하는 음수 k 의 값은 -1 이다.

82) [정답] ④

$$\tan \theta = \frac{4}{3} \text{ 이므로}$$

$$\sin \theta = -\frac{4}{5}, \cos \theta = -\frac{3}{5} \quad \left(\because \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \right)$$

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{5} \right) = \frac{4}{5}$$

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{5} \right) = \frac{1}{5}$$

$$\therefore \tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} = 4$$

$$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \text{ 에서 } \frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{3}{4}\pi \text{ 이므로}$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \tan \frac{\theta}{2} = -2$$

$$\therefore \sin \frac{\theta}{2} + 2 \cos \frac{\theta}{2} - \tan \frac{\theta}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{2\sqrt{5}}{5} + 2 = 2$$

83) [정답] ③

$$\cos 2x + \cos 2y = 1 - 2 \sin^2 x + 1 - 2 \sin^2 y$$

$$= 2 - 2 \sin^2 x - 2(1 - \sin^2 x)$$

$$= -4 \sin^2 x + 4 \sin x$$

$$= -4 \left(\sin x - \frac{1}{2} \right)^2 + 1$$

.....

⑦

$-1 \leq \sin y \leq 1$ 이고

$\sin y = 1 - \sin x$ 에서 $-1 \leq 1 - \sin x \leq 1$ 이므로

$$0 \leq \sin x \leq 2$$

$$\therefore 0 \leq \sin x \leq 1$$

즉, ⑦은 $\sin x = \frac{1}{2}$ 일 때 최댓값 1 을 갖고, $\sin x = 0$ 또는

$\sin x = 1$ 일 때 최솟값 0 을 갖는다.

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 $1 + 0 = 1$

84) [정답] ③

$$1 + \sin \frac{\pi}{5} - \cos \frac{\pi}{5}$$

$$= 1 + 2 \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{10} - \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{10} \right)$$

$$= 2 \sin \frac{\pi}{10} \left(\cos \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{10} \right)$$

$$\begin{aligned}
& 1 + \sin \frac{\pi}{5} + \cos \frac{\pi}{5} \\
&= 1 + 2 \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{10} + \left(2 \cos^2 \frac{\pi}{10} - 1 \right) \\
&= 2 \cos \frac{\pi}{10} \left(\cos \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{10} \right) \\
\therefore (\text{주어진 식}) &= \frac{2 \sin \frac{\pi}{10} \left(\cos \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{10} \right)}{2 \cos \frac{\pi}{10} \left(\cos \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{10} \right)} = \tan \frac{\pi}{10}
\end{aligned}$$

85) [정답] ③

함수 $f(x) = a \sin x + b \cos x$ 의 그래프는 점 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2} \right)$ 을 지나

$$\begin{aligned}
& \text{므로} \\
f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{2} \\
\therefore \sqrt{3}a + b &= 1 \\
f(x) &= a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha) \\
& \left(\text{단, } \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)
\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}
M &= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (1 - \sqrt{3}a)^2} = \sqrt{4a^2 - 2\sqrt{3}a + 1} \\
&= \sqrt{4\left(a - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}} \geq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

즉, M 은 $a = \frac{\sqrt{3}}{4}$ 일 때, 최솟값을 갖는다.

이때, $b = 1 - \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4}$ 이므로

$$a_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}, b_1 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore a_1 + b_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1 + \sqrt{3}}{4}$$

[다른 풀이]

함수 $f(x)$ 의 최댓값 M 이 최소일 때는 함수 $f(x)$ 가 $x = \frac{\pi}{3}$

에서 극댓값 $\frac{1}{2}$ 을 가질 때이다.

즉, $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$ 이다.

$f'(x) = a \cos x - b \sin x$ 에서

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}b = 0 \quad \therefore a - \sqrt{3}b = 0$$

위의 식과 $\sqrt{3}a + b = 1$ 을 연립하여 풀면 $a = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $b = \frac{1}{4}$

이다.

86) [정답] ①

$\angle CAB = 3\theta$ 라 하자.

$\overline{DB} = \tan 2\theta$, $\overline{EB} = \tan \theta$ 이므로

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{DB} - \overline{EB}}{\overline{DB} + \overline{EB}} &= \frac{\tan 2\theta - \tan \theta}{\tan 2\theta + \tan \theta} \\
&= \frac{\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} \\
&= \frac{\sin 2\theta \cos \theta - \cos 2\theta \sin \theta}{\sin 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \sin \theta} \\
&= \frac{\sin(2\theta - \theta)}{\sin(2\theta + \theta)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sin \theta}{\sin 3\theta} = \frac{\overline{RB}}{\overline{PB}}$$

87) [정답] ①

$\tan \frac{x}{2} = t$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}
\sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \\
&= \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} \\
&= \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{\tan^2 \frac{x}{2} + 1} \\
&= \frac{2t}{t^2 + 1} \quad \dots\dots \textcircled{7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos x &= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \\
&= \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} \\
&= \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \\
&= \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \dots\dots \textcircled{8}
\end{aligned}$$

이므로 ⑦, ⑧을 주어진 방정식에 대입하여 정리하면

$$5t^2 - t - \boxed{3} = 0 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

이다.

이때 ⑨의 서로 다른 두 실근이 $\tan \frac{\alpha}{2}$, $\tan \frac{\beta}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}
\tan \frac{\alpha + \beta}{2} &= \frac{\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2}}{1 - \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2}} \\
&= \frac{\frac{6}{5}}{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)} \\
&= \boxed{\frac{3}{4}}
\end{aligned}$$

이다.

$$\therefore f(t) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad a = 3, \quad b = \frac{3}{4}$$

$$\therefore abf(3) = 3 \times \frac{3}{4} \times \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{9}{5}$$

88) [정답] 17

(i) 점 $P(x, y)$ 가 선분 $OA(0 \leq x \leq \pi, y = 0)$ 위를 움직일 때

$$\begin{aligned}
T &= \sin x \cos y + \cos(x + y) \\
&= \sin x + \cos x \\
&= \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

$\frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5}{4}\pi$ 이므로 T 의 최댓값과 최솟값은 각각 $\sqrt{2}$, -1 이다.

(ii) 점 $P(x, y)$ 가 선분 $OB(x=0, 0 \leq y \leq \pi)$ 위를 움직일 때

$$T = \sin x \cos y + \cos(x+y) = \cos y$$

따라서 T 의 최댓값과 최솟값은 각각 1, -1이다.

(iii) 점 $P(x, y)$ 가 선분 $AB(0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi, x+y=\pi)$ 위를 움직일 때

$$T = \sin x \cos y + \cos(x+y)$$

$$= \sin x \cos(\pi-x) + \cos \pi$$

$$= -\sin x \cos x - 1$$

$$= -\frac{1}{2} \sin 2x - 1$$

$0 \leq 2x \leq 2\pi$ 이므로 T 의 최댓값과 최솟값은 각각

$$-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \text{ 이다.}$$

$$\text{이상에서 } M = \sqrt{2}, m = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore 4(M^2 + m^2) = 4\left(2 + \frac{9}{4}\right) = 17$$

89) [정답] ③

$$\sin x \cos y = a \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\cos x \sin y = b \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A} + \textcircled{B}$ 을 하면

$$\sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin(x+y) = a+b \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$\textcircled{C}$ 을 만족시키는 실수 a, y 가 존재하려면 $|a+b| \leq 1$

$\textcircled{A} - \textcircled{B}$ 을 하면

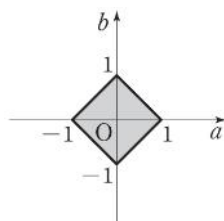
$$\sin x \cos y - \cos x \sin y = \sin(x-y) = a-b \quad \dots\dots \textcircled{D}$$

$\textcircled{D}$ 을 만족시키는 실수 x, y 가 존재하려면 $|a-b| \leq 1$

역으로 $|a+b| \leq 1, |a-b| \leq 1$ 이면 $\sin(x+y) = a+b,$

$\sin(x-y) = a-b$ 를 만족시키는 실수 x, y 가 존재한다.

따라서 주어진 연립방정식의 해가 존재하려면 $|a+b| \leq 1, |a-b| \leq 1$ 이고 이것을 좌표평면 위에 나타내면 그림과 같다.



90) [정답] ②

$$\text{ㄱ. } \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$= (\sin y + \sin z)^2 + (\cos y + \cos z)^2$$

$$= (\sin^2 y + \cos^2 y) + (\sin^2 z + \cos^2 z) + 2(\sin y \cos z + \cos y \sin z)$$

$$= 2 + 2\cos(y-z)$$

$$= 1$$

$$\therefore \cos(y-z) = -\frac{1}{2} \text{ (참)}$$

$$\text{ㄴ. } \sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$= 2(\sin y + \sin z)(\cos y + \cos z)$$

$$= 2\sin y \cos y + 2\sin z \cos z + 2(\sin y \cos z + \cos y \sin z)$$

$$= \sin 2y + \sin 2z + 2\sin(y+z) \text{ (참)}$$

ㄷ. ㄱ, ㄴ에서

$$\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z$$

$$= 2(\sin 2y + \sin 2z) + 2\sin(y+z)$$

$$= 4\sin(y+z)\cos(y+z) + 2\sin(y+z)$$

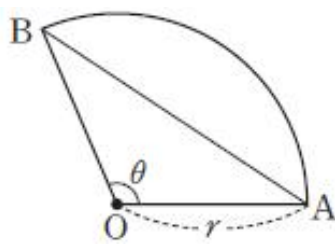
$$= 2\sin(y+z)\{2\cos(y+z) + 1\}$$

$$= 0 \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

91) [정답] ②

부채꼴 OAB 의 반지름의 길이를 r 라 하자.



ㄱ. 부채꼴 OAB 의 넓이는 $\frac{1}{2}r^2\theta$ 이고, 삼각형 OAB 의

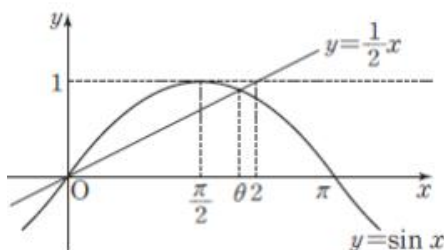
넓이는 $\frac{1}{2}r^2\sin\theta$ 이다.

부채꼴 OAB 의 넓이가 선분 AB 에 의하여 이등분되므로

$$\frac{1}{2}r^2\sin\theta = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}r^2\theta \text{ 즉, } \sin\theta = \frac{\theta}{2} \text{ (거짓)}$$

ㄴ. 등식 $\sin\theta = \frac{\theta}{2}$ 을 만족시키는 $\theta(0 < \theta < \pi)$ 의 값은 곡

선 $y = \sin x$ 와 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 의 교점의 x 좌표와 같다.



그림에서 $\frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi$ 임을 알 수 있다. (참)

ㄷ. (호 AB 의 길이) $= r\theta, \overline{OA} = r$ 이고 ㄴ에서 $\theta < 2\pi$ 이므로

$r\theta < 2r$ 따라서 (호 AB 의 길이) $< 2 \times \overline{OA}$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄴ이다.

92) [정답] ⑤

$\cos^2 x - 1 = -\sin^2 x$ 이므로 주어진 방정식은

$$-\sin^2 x + a \sin x - \sin^2 x = 0 \quad \sin x(2\sin x - a) = 0$$

따라서 $\sin x = 0$ 또는 $\sin x = \frac{a}{2}$

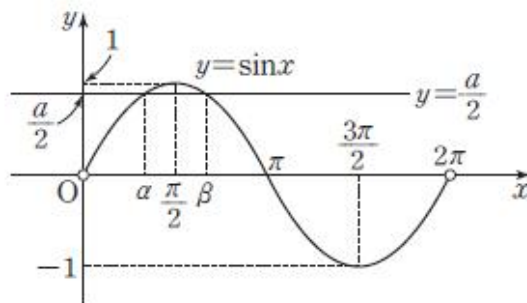
$0 < x < 2\pi$ 에서 방정식 $\sin x = 0$ 의 실근은 $x = \pi$

$0 < \frac{a}{2} < 1$ 이므로 $0 < x < 2\pi$ 에서 방정식 $\sin x = \frac{a}{2}$ 는 서로

다른 두 실근을 갖는다. 이 두 실근을 α, β

($0 < \alpha < \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$)라 하면

$\alpha + \beta = \pi$ ㉠ 가 성립한다.



세 수 α, β, π 가 이 순서대로 등차수열을 이루어야 하므로 등차중항의 성질에 의하여 $2\beta = \alpha + \pi$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{2\pi}{3}$

이때 $\sin \frac{\pi}{3} = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로 $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{2\pi}{3}$ 는 방정식 $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 두 실근이다. 따라서 $\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 에서 $a = \sqrt{3}$

93) **정답** ⑤

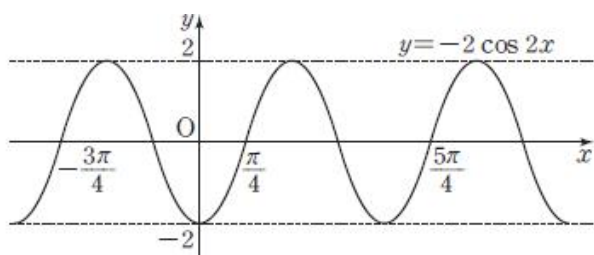
함수 $y = a \cos(bx - c)$ 의 최댓값이 2이고 $a < 0$ 이므로 $a = -2$ 함수 $y = a \cos(bx - c)$ 의 주기가 π 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{b} = \pi \text{ 따라서 } b = 2 \text{이다.}$$

이때 주어진 함수는 $y = -2 \cos(2x - c)$ 이고

$$y = -2 \cos(2x - c) = -2 \cos\left\{2\left(x - \frac{c}{2}\right)\right\} \text{이므로} \quad \text{함수}$$

$y = -2 \cos 2x$ 의 그래프를 x 축 방향으로 $\frac{c}{2}$ 만큼 평행 이동한 것과 같다. 함수 $y = -2 \cos 2x$ 의 그래프는 다음과 같다.



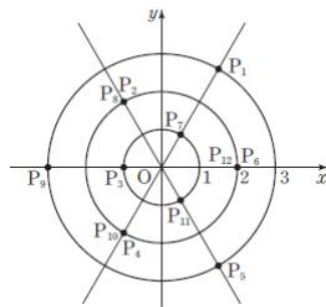
이때 함수 $y = -2 \cos(2x - c)$ 의 그래프는 함수 $y = -2 \cos 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{3\pi}{4} + n\pi$ (n 은 정수)만큼 평행 이동한 것과 같다. 따라서 양수 $\frac{c}{2}$ 의 최솟값은 $\frac{3\pi}{4}$ 이므로 c 의 최솟값은 $\frac{3\pi}{2}$ 이다.

$$\text{따라서 } a + b + c \text{의 최솟값은 } -2 + 2 + \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

94) **정답** 17

함수 $y = \sin \frac{\pi}{2}x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$ 이므로 $n = 1, 2, 3, \dots$

일 때 수열 $\{a_n\}$ 의 각 항을 차례로 나열하면 3, 2, 1, 2가 반복하여 나타난다. 한편, $a_n > 0$ 이므로 점 $P_n(a_n \cos \frac{n\pi}{3}, a_n \sin \frac{n\pi}{3})$ 는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 a_n 인 원 위의 점 중에서 동경 OP_n 이 나타내는 각의 크기가 $\frac{n\pi}{3}$ 인 점이다. (단, O 는 원점이다.)



이때 함수 $y = \cos \frac{\pi}{3}x$ 와 함수 $y = \sin \frac{\pi}{3}x$ 의 주기는 모두

$$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6 \text{이므로 } n = 1, 2, 3, \dots \text{ 일 때 점 } P_n \text{이 속하는 사}$$

분면 또는 좌표축을 차례로 나열하면 제1사분면, 제2사분면, x 축, 제3사분면, x 축이 반복되어 나타난다. 따라서 조건 (나)를 만족시키는 최소의 자연수 n 은 5이고, 4와 6의 최소공배수는 12이므로 조건 (나)를 만족시키는 자연수 n 을 차례로 나열하면 첫째항이 5이고 공차가 12인 등차수열을 이룬다. 이 등차수

$$\text{열을 } \{b_k\} \text{라 하면 } b_k = 5 + (k-1) \times 12 = 12k - 7 \text{이다.}$$

$$b_k = 12k - 7 \leq 200 \text{에서 } k \leq \frac{207}{12} = 17.25 \text{이므로 수열}$$

$\{b_k\}$ 의 항 중 200 이하인 항의 개수는 17이다.

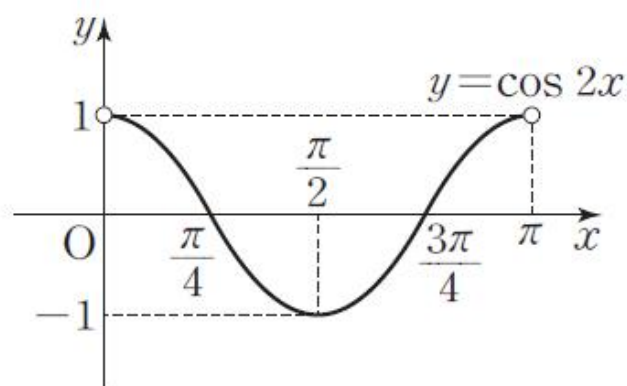
따라서 구하는 모든 자연수 n 의 개수는 17이다.

95) **정답** ③

$$g(x) = t \text{라 하면 } (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(t) = 0$$

$$f(t) = \sin \frac{t}{2} = 0 \text{에서 } \frac{t}{2} = n\pi \quad (n \text{은 정수}) \text{이므로}$$

$t = 2n\pi, \dots$ ㉠ 한편, $0 < x < p$ 에서 함수 $y = \cos 2x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $-1 \leq \cos 2x < 1$ 이므로 $-2\pi \leq g(x) = 2\pi \cos 2x < 2\pi$ 즉, $-2\pi \leq t < 2\pi, \dots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $t = -2\pi$ 또는 $t = 0$

(i) $t = -2\pi$ 일 때, $g(x) = 2\pi \cos 2x = -2\pi$ 에서

$$\cos 2x = -1 \quad (0 < x < \pi) \text{이므로 } x = \frac{\pi}{2}$$

(ii) $t = 0$ 일 때, $g(x) = 2\pi \cos 2x = 0$ 에서

$$\cos 2x = 0 \quad (0 < x < \pi) \text{이므로 } x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{3\pi}{4}$$

(i),(ii)에서 방정식 $(f \circ g)(x) = 0$ 의 실근은

$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$ 이므로 모든 실근의 합은

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$$

96) **정답** ②

$$\csc x - \cot x = \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\csc x - \cot x}{e^{-x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^{-x} - 1)\sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{x}{\sin x} \times \frac{-x}{e^{-x} - 1} \times \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} \times (-1) \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \times \frac{-x}{e^{-x} - 1} \times \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \times \frac{-1}{1 + \cos x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{e^{-x} - 1} \times \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{1 + \cos x}$$

$$= 1 \times 1 \times 1^2 \times \frac{-1}{1 + 1} = -\frac{1}{2}$$

97) **정답** ①

삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\sin(x+h) + \sin(x-h)$$

$$= \sin x \cosh + \cos x \sinh + \sin x \cosh - \cos x \sinh = 2\sin x \cosh$$

이므로

$$\frac{\sin(x+h) + \sin(x-h) - 2\sin x}{h^2} = \frac{2\sin x \cosh - 2\sin x}{h^2}$$

$$= -2\sin x \times \frac{1 - \cosh}{h^2}$$

$$= -2\sin x \times \frac{(1 - \cosh)(1 + \cosh)}{h^2(1 + \cosh)} = -2\sin x \times \frac{(1 - \cosh^2 h)}{h^2} \times \frac{1}{1 + \cosh}$$

$$= -2\sin x \times \frac{\sinh^2 h}{h^2} \times \frac{1}{1 + \cosh}$$

$$= -2\sin x \times \left(\frac{\sinh}{h} \right)^2 \times \frac{1}{1 + \cosh}$$

따라서

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) + \sin(x-h) - 2\sin x}{h^2}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ -2\sin x \times \left(\frac{\sinh}{h} \right)^2 \times \frac{1}{1 + \cosh} \right\}$$

$$= -2\sin x \times \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sinh}{h} \right)^2 \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cosh}$$

$$= -2\sin x \times 1^2 \times \frac{1}{1 + 1} = -\sin x \text{ 이므로 } f'(x) = -\cos x$$

$$\text{따라서 } f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos \frac{2\pi}{3} = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

98) **정답** ①

닫힌 구간 $[0, 2\pi]$ 에서 두 함수 $f(x) = \sin a \cos x + a$ 와

$g(x) = \cos a \sin x - a$ 의 그래프가 서로 만나려면

방정식 $\sin a \cos x + a = \cos a \sin x - a$

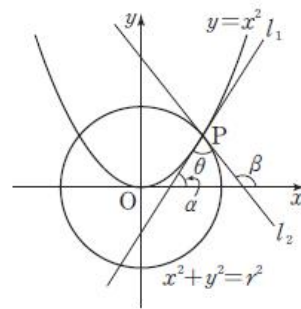
즉, $\cos a \sin x - \sin a \cos x = 2a$ $\sin(x-a) = 2a$ 의 해가 $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 존재해야 한다.

$-a \leq x-a \leq 2\pi-a$ 에서 $-1 \leq \sin(x-a) \leq 1$ 이므로

$$-1 \leq 2a \leq 1, \quad -\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$$

따라서 상수 a 의 최솟값은 $-\frac{1}{2}$ 이다.

99) **정답** ①



점 P의 좌표를 (a, a^2) ($a > 0$)이라 하고 두 직선 l_1, l_2 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β 라 하자.

$y = x^2$ 에서 $y' = 2x$ 이므로 직선 l_1 의 기울기는

$\tan \alpha = 2a$ 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 위의 점 (a, a^2) 에서의 접선의

방정식은 $ax + a^2y = r^2$ 이므로 직선 l_2 의 기울기는

$$\tan \beta = -\frac{1}{a}$$

이때 $\alpha + \theta = \beta$ 에서 $\theta = \beta - \alpha$ 이므로

$$\tan \theta = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha}$$

$$= \frac{\frac{1}{1 + \cosh} \cdot \frac{1}{a} - 2a}{1 + \left(-\frac{1}{a}\right) \times 2a} = \frac{\frac{1}{a} - 2a}{1 - 2} = \frac{1}{a} + 2a$$

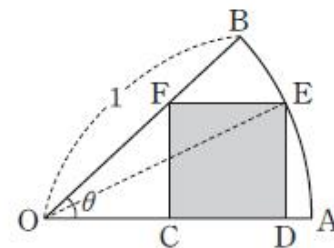
이때 $a > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균 사이의 관계에 의

$$\text{하여 } \frac{1}{a} + 2a \geq \sqrt{\frac{1}{a} \times 2a} = 2\sqrt{2}$$

(단, 등호는 $\frac{1}{a} = 2a$, 즉 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때 성립한다.) 이므로

$\tan \theta$ 의 최솟값은 $2\sqrt{2}$ 이다.

100) **정답** ④



정사각형 CDEF의 한 변의 길이를 x 라 하면 직각삼각형

$$OCF \text{에서 } \tan \theta = \frac{\overline{CF}}{\overline{OC}} = \frac{x}{\overline{OC}} \text{ 이므로 } \overline{OC} = x \cot \theta$$

이때 직각삼각형 ODE 에서 피타고라스 정리에 의하여

$$1^2 = (x \cot \theta + x)^2 + x^2 = x^2 \{ (1 + \cot \theta)^2 + 1 \} \text{이므로}$$

$$x^2 = \frac{1}{(1 + \cot \theta)^2 + 1} = \frac{1}{2 + 2 \cot \theta + \cot^2 \theta}$$

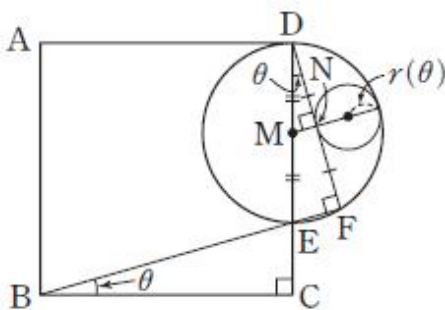
$$= \frac{\sin^2 \theta}{2 \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta}$$

따라서 정사각형 $CDEF$ 의 넓이는

$$S(\theta) = x^2 = \frac{\sin^2 \theta}{2 \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta} \text{이므로}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{\sin \theta}{\theta}\right)^2}{2 \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta} = \frac{1^2}{0 + 0 + 1^2} = 1$$

101) [정답] ④



$\angle BEC = \angle DEF = \frac{\pi}{2} - \theta$ 이므로 직각삼각형 DEF 에서

$\angle EDF = \theta$ 이다. $\overline{EC} = \tan \theta$ 이므로 $\overline{DE} = 1 - \tan \theta$ 이고, 선분 DE 의 중점을 M 이라 하면 $\overline{DM} = \frac{1 - \tan \theta}{2}$

직선 DF 가 작은 원과 접하는 점을 N 이라 하면 직각삼각형 DMN 에서 $\overline{MN} = \overline{DM} \times \sin \theta = \frac{1 - \tan \theta}{2} \times \sin \theta$ 이므로

$\overline{DM} = \overline{MN} + t(\theta)$ 에서

$$r(\theta) = \frac{1}{2}(\overline{DM} - \overline{MN}) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1 - \tan \theta}{2} - \frac{1 - \tan \theta}{2} \times \sin \theta \right) = \frac{(1 - \tan \theta)(1 - \sin \theta)}{4}$$

한편, $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}-} \frac{1 - \tan \theta}{\frac{\pi}{4} - \theta}$ 에서 $\frac{\pi}{4} - \theta = t$ 로 놓으면 $\theta \rightarrow \frac{\pi}{4} -$ 일

때, $t \rightarrow 0 +$ 이므로

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}-} \frac{1 - \tan \theta}{\frac{\pi}{4} - \theta} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \tan\left(\frac{\pi}{4} - t\right)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{1 - \tan t}{1 + \tan t}}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2 \tan t}{t(1 + \tan t)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\tan t}{t} \times \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2}{1 + \tan t} = 1 \times 2 = 2$$

따라서 $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}-} \frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4} - \theta}$

$$= \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}-} \frac{1 - \tan \theta}{\frac{\pi}{4} - \theta} \times \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}-} \frac{1 - \sin \theta}{4} = 2 \times \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{4} = \frac{1}{4}(2 - \sqrt{2})$$

102) [정답] ④



삼각함수로 이루어진 분수식의 극한에서 분모 또는 분자에 $1 - \cos x$ 가 있으면 분모, 분자에 $1 + \cos x$ 를 곱하여 정리한다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^4 + 2x^2}{1 - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2(x^2 + 1)(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2(x^2 + 1)(1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2(x^2 + 1)(1 + \cos x)}{\sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ 2 \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 (x^2 + 1)(1 + \cos x) \right\} \\ &= 2 \times 1^2 \times 1 \times 2 = 4 \end{aligned}$$

103) [정답] ⑤

해설

주어진 부등식에서 $\frac{2}{x^3}$ 를 각각의 변에 곱하면

$$\frac{\frac{2}{3}x \sin^2 \frac{x}{2}}{x^3} < \frac{x - \sin x}{x^3} < \frac{\frac{4}{3} \sin^2 \frac{x}{2} \tan \frac{x}{2}}{x^3}$$

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} < \frac{x - \sin x}{x^3} < \frac{1}{6} \cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \frac{\tan \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$$

이때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \left\{ \frac{1}{6} \cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \right\} &= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{6} \times 1^2 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left\{ \frac{1}{6} \cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \frac{\tan \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right\}$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\tan \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{6} \times 1^2 \times 1 = \frac{1}{6}$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

104) [정답] ④

해설

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = b \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)}{x} = b$$

가 성립해야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log_2(x+4) - 2}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log_2\left(1 + \frac{x}{4}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \log_2\left(1 + \frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \log_2\left\{\left(1 + \frac{x}{4}\right)^{\frac{4}{x}}\right\}^{\frac{1}{4}}$$

$$= \log_2 e^{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{4 \ln 2}$$

$$\therefore b = \frac{1}{4 \ln 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\cos x - \cos 3x}{ax}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -0} \frac{-2 \sin 2x \sin(-x)}{ax^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -0} \frac{2 \sin 2x \sin x}{ax^2}$$

$$= \frac{4}{a} \lim_{x \rightarrow -0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{\sin x}{x} \right)$$

$$= \frac{4}{a} \times 1 \times 1 = \frac{4}{a}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{4 \ln 2} = \frac{4}{a} \text{ 이므로}$$

$$a = 16 \ln 2$$

$$\therefore \frac{a}{b} = 64(\ln 2)^2$$

105) [정답] ③

해설

좌표평면 위의 두 직선 $x - 2ay + 1 = 0$, $x + 3ay - 1 = 0$ 의

기울기는 각각 $\frac{1}{2a}$, $-\frac{1}{3a}$ 이므로

$$\tan \theta(a) = \left| \frac{\frac{1}{2a} - \left(-\frac{1}{3a}\right)}{1 + \frac{1}{2a} \cdot \left(-\frac{1}{3a}\right)} \right| = \left| \frac{\frac{5}{6a}}{1 - \frac{1}{6a^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{5a}{6a^2 - 1} \right|$$

$$= \frac{5a}{6a^2 - 1} \quad (\because a > 1)$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} a \sin \theta(a)$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} a \tan \theta(a) \cos \theta(a)$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \left\{ \frac{5a}{6a^2 - 1} \cdot \cos \theta(a) \right\}$$

그런데 $a \rightarrow \infty$ 이면 $a \tan \theta(a) \rightarrow 0$ 이므로

$\theta(a) \rightarrow 0$

$$\therefore \lim_{a \rightarrow \infty} a \sin \theta(a)$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{5a}{6a^2 - 1} \cdot \lim_{a \rightarrow \infty} \cos \theta(a)$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{5}{6 - \frac{1}{a^2}} \cdot \lim_{\theta(a) \rightarrow 0} \cos \theta(a)$$

$$= \frac{5}{6} \times 1 = \frac{5}{6}$$

106) [정답] ①

해설

$\overline{BC} = \tan \theta$ 이므로

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan \theta = \frac{\tan \theta}{2}$$

또한, $\overline{AB'} = 1$, $\angle B'AB = 2\theta$ 이므로

$$\overline{AD} = \cos 2\theta, \quad \overline{B'D} = \sin 2\theta$$

$$\therefore g(\theta) = \frac{1}{2} \cos 2\theta \sin 2\theta = \frac{1}{4} \sin 4\theta$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{f(\theta)}{g(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\frac{\tan \theta}{2}}{\frac{1}{4} \sin 4\theta}$$

$$= 2 \lim_{\theta \rightarrow +0} \left(\frac{\tan \theta}{\theta} \cdot \frac{4\theta}{\sin 4\theta} \cdot \frac{1}{4} \right)$$

$$= 2 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

107) [정답] ②

ㄱ. $x = 0$ 일 때, $f(0)$ 이 정의되지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 연속이 아니다.

ㄴ. (i) $x = 0$ 일 때, $g(0) = 0$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow +0} g(x) = \lim_{x \rightarrow +0} x \cdot x = \lim_{x \rightarrow +0} x^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} g(x) = \lim_{x \rightarrow -0} x \cdot (-x) = \lim_{x \rightarrow -0} (-x^2) = 0$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 $x = 0$ 에서 연속이다.

ㄷ. (i) $x = 0$ 일 때, $h(0) = 1$

$$(ii) \quad 0 \leq \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1 \text{에서 } 0 \leq \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \text{이고}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} \left| x \sin \frac{1}{x} \right| = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) \neq h(0)$ 이므로 함수 $h(x)$ 는 $x = 0$ 에서 연속이 아니다.

따라서 $x = 0$ 에서 연속인 것은 ㄴ이다.

108) [정답] ②

함수 $f(x)$ 가 $x = \pi$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = b$ 가 성립해야 한다.

따라서 $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x + ax}{x - \pi} = b$ 에서 $x \rightarrow \pi$ 일 때,

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (\sin x + ax) = a\pi = 0 \quad \therefore a = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore b &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + t)}{t} \quad (\because x - \pi = t) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin t}{t} \right) = -1 \end{aligned}$$

$$\therefore a + b = 0 + (-1) = -1$$

109) [정답] ②

$f(x) = \pi \cos \frac{\pi}{2}x + 2x$ 로 놓으면 $f(x)$ 는 모든 실수에서 연속이다.

$$f(-2) = \pi \cos(-\pi) - 4 = -\pi - 4 < 0$$

$$f(-1) = \pi \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 2 = -2 < 0$$

$$f(0) = \pi \cos 0 = \pi > 0$$

$$f(1) = \pi \cos \frac{\pi}{2} + 2 = 2 > 0$$

$$f(2) = \pi \cos \pi + 4 = -\pi + 4 > 0$$

$$f(3) = \pi \cos \frac{3}{2}\pi + 6 = 6 > 0$$

따라서 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린 구간 $(-1, 0)$ 에서 오직 하나의 실근을 가진다.

110) [정답] ②

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sin 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{3x} - 1}{3x} \times \frac{2x}{\sin 2x} \times \frac{3x}{2x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 2x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2x} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^s - 1}{s} \times \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2x} \\ &= 1 \times 1 \times \frac{3}{2} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

111) [정답] ①

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sqrt{\tan 3x+1}-1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)(\sqrt{\tan 3x+1}+1)}{\tan 3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+2x)}{2x} \times \frac{3x}{\tan 3x} \times \frac{2x}{3x} \times (\sqrt{\tan 3x+1}+1) \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\tan 3x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x} \times \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{\tan 3x+1}+1) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\ln(1+s)}{s} \times \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\tan t} \times \frac{2}{3} \times 2 \\ &= 1 \times 1 \times \frac{2}{3} \times 2 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

112) [정답] ③

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)(1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)(1 + \cos x)}{\sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{x^2}{\sin^2 x} \times \frac{f(x)}{x^2} \times (1 + \cos x) \right\} \\ &= 4 \end{aligned}$$

에서 $x \rightarrow 0$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $f(x) = x^2(ax+b)$ ($a \neq 0$)로 놓을 수 있다.

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{x^2}{\sin^2 x} \times \frac{f(x)}{x^2} \times (1 + \cos x) \right\} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} \times \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x) \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \right)^2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} \times \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x) \\ &= 1^2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(ax+b)}{x^2} \times 2 \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} (ax+b) \\ &= 2b = 4 \\ \therefore b &= 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3 + 2x} = 3 \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(ax+b)}{x^3 + 2x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{x}}{1 + \frac{2}{x^2}} = 3$$

$$\therefore a = 3$$

따라서 $f(x) = x^2(3x+2)$ 이므로

$$f(1) = 5$$

113) [정답] ④

내접원과 선분 AC의 접점을 E라 하면

$$\overline{AE} = \frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}} \text{이므로}$$

$$\overline{BC} = \overline{AB} = \frac{\overline{AE}}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta \tan \frac{\theta}{2}}$$

또한 선분 AD의 연장선에 점 C에서 내린 수선의 발을 H라 하면

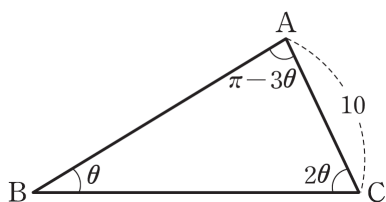
$$\overline{CH} = \overline{BC} \times \sin 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos \theta \tan \frac{\theta}{2}}$$

$$\overline{CD} = \frac{\overline{CH}}{\sin 3\theta} = \frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta \cos \theta \tan \frac{\theta}{2}}$$

$$\therefore S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{CD} \times \sin \theta$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos \theta \tan \frac{\theta}{2}} \times \frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta \cos \theta \tan \frac{\theta}{2}} \times \sin \theta \\
&= \frac{\sin^2 \theta}{\sin 3\theta \cos \theta \tan^2 \frac{\theta}{2}} \\
\therefore \lim_{\theta \rightarrow +0} \{\theta \times S(\theta)\} \\
&= \lim_{\theta \rightarrow +0} \left(\theta \times \frac{\sin^2 \theta}{\sin 3\theta \cos \theta \tan^2 \frac{\theta}{2}} \right) \\
&= \lim_{\theta \rightarrow +0} \left\{ \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 \times \left(\frac{\frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\theta}{2}} \right)^2 \times \frac{3\theta}{\sin 3\theta} \times \frac{1}{\cos \theta} \times \frac{4}{3} \right\} \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

114) [정답] 300



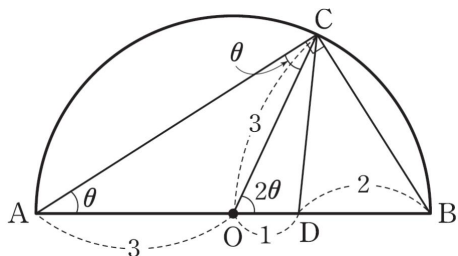
사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}
\frac{10}{\sin \theta} &= \frac{\overline{AB}}{\sin 2\theta} \\
\therefore \overline{AB} &= \frac{10 \sin 2\theta}{\sin \theta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S(\theta) &= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin(\pi - 3\theta) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{10 \sin 2\theta}{\sin \theta} \times 10 \times \sin 3\theta \\
&= \frac{50 \sin 2\theta \sin 3\theta}{\sin \theta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{S(\theta)}{\theta} &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{50 \sin 2\theta \sin 3\theta}{\theta \sin \theta} \\
&= 50 \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\sin 2\theta}{2\theta} \times \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\sin 3\theta}{3\theta} \times \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{6\theta}{\sin \theta} \\
&= 300 \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin t}{t} \times \lim_{s \rightarrow +0} \frac{\sin s}{s} \times \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\theta}{\sin \theta} \\
&= 300 \times 1 \times 1 \times 1 \\
&= 300
\end{aligned}$$

115) [정답] ②



$$\begin{aligned}
&\triangle COD \text{에서 코사인법칙에 의하여} \\
\overline{CD}^2 &= 3^2 + 1^2 - 2 \times 3 \times 1 \times \cos 2\theta \\
&= 10 - 6 \cos 2\theta
\end{aligned}$$

삼각형 ABC가 직각삼각형이므로

$$\begin{aligned}
\overline{AC} &= \overline{AB} \cos \theta \\
&= 6 \cos \theta \\
\therefore \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{9\overline{CD}^2 - \overline{AC}^2}{\theta^2} \\
&= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{9(10 - 6 \cos 2\theta) - (6 \cos \theta)^2}{\theta^2} \\
&= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{90 - 54 \cos 2\theta - 36 \cos^2 \theta}{\theta^2} \\
&= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{90 - 54 \cos 2\theta - 36 \times \frac{1 + \cos 2\theta}{2}}{\theta^2} \\
&= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{72 - 72 \cos 2\theta}{\theta^2} \\
&= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{72 - 72(1 - 2 \sin^2 \theta)}{\theta^2} \\
&= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{144 \sin^2 \theta}{\theta^2} \\
&= 144 \left(\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 \\
&= 144 \times 1^2 \\
&= 144
\end{aligned}$$

116) [정답] ①

$$\text{함수 } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x \tan 4x}{x^2} & (x \neq 0) \\ a & (x = 0) \end{cases} \text{ 이 } x=0 \text{에서 연속이}$$

되려면

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \text{ 이어야 한다.}$$

$$\begin{aligned}
\therefore a &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \tan 4x}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{\tan 4x}{4x} \times 8 \right) \\
&= 8 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x}{4x} \\
&= 8 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \times \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\tan s}{s} \\
&= 8 \times 1 \times 1 \\
&= 8
\end{aligned}$$

117) [정답] ②

함수 $f(x)$ 가 $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ 인 x 에서 연속이므로

$\cos x = 1$ 인 경우, 즉 $x = 0$ 에서 연속이어야 한다.

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 이 성립해야 한다.

$(1 - \cos x)f(x) = (e^{2x} - 1) \ln \left(1 + \frac{1}{2}x \right)$ 에서 $x \neq 0$ 인 경우

$$f(x) = \frac{(e^{2x} - 1) \ln \left(1 + \frac{1}{2}x \right)}{1 - \cos x}$$

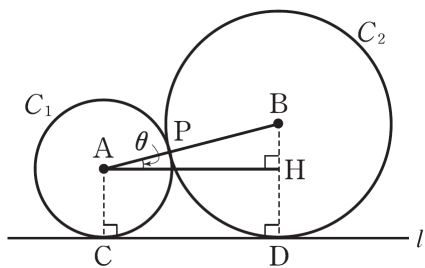
$$\begin{aligned}
\therefore f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1) \ln\left(1 + \frac{1}{2}x\right)}{1 - \cos x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1) \ln\left(1 + \frac{1}{2}x\right)(1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1) \ln\left(1 + \frac{1}{2}x\right)(1 + \cos x)}{\sin^2 x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{e^{2x} - 1}{2x} \times \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{2}x\right)}{\frac{1}{2}x} \times \frac{x^2}{\sin^2 x} \times (1 + \cos x) \right\} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{2}x\right)}{\frac{1}{2}x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} \times \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} \times \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + s)}{s}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\times \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \right)^2 \times \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x) \\
&= 1 \times 1 \times 1^2 \times 2 \\
&= 2
\end{aligned}$$

118) [정답] ②

그림과 같이 점 A에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\angle BAH = \theta$ 라 하자.



$\overline{PA} = t$, $\overline{PB} = 1 - t$ 이므로

$$\begin{aligned}
\overline{BH} &= \overline{BD} - \overline{HD} \\
&= \overline{BD} - \overline{AC} \\
&= \overline{PB} - \overline{PA} \\
&= (1 - t) - t \\
&= 1 - 2t
\end{aligned}$$

따라서 삼각형 BAH에서 $\sin \theta = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = 1 - 2t$ 이므로

$$\overline{PB} - \overline{PA} = 1 - 2t = \sin \theta$$

또 $\angle PAC = \frac{\pi}{2} + \theta$, $\angle PBD = \frac{\pi}{2} - \theta$ 이므로

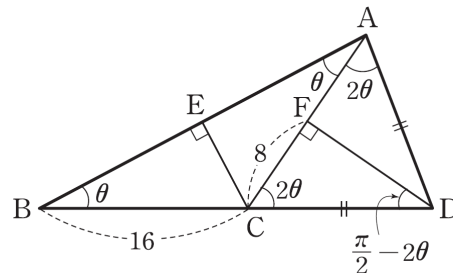
$$\begin{aligned}
\widehat{PD} - \widehat{PC} &= (1 - t) \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) - t \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \\
&= \frac{\pi}{2} (1 - 2t) - \theta
\end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2} \sin \theta - \theta$$

$t \rightarrow \frac{1}{2} - 0$ 일 때, $\theta \rightarrow +0$ 이므로

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \frac{1}{2} - 0} \frac{\widehat{PD} - \widehat{PC}}{\overline{PB} - \overline{PA}} &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\frac{\pi}{2} \sin \theta - \theta}{\sin \theta} \\
&= \lim_{\theta \rightarrow +0} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{\sin \theta} \right) \\
&= \frac{\pi}{2} - 1
\end{aligned}$$

119) [정답] 384



점 C에서 변 AB에 내린 수선의 발을 E라 하면

$$\overline{BE} = 16 \cos \theta, \quad \overline{AB} = 32 \cos \theta$$

$\angle ACB = \pi - 2\theta$ 이므로

$\angle ACD = 2\theta$

즉, $\angle ACD = \angle CAD = 2\theta$ 이므로 삼각형 ACD는 이등변삼각형이다.

점 D에서 변 AC에 내린 수선의 발을 F라 하면 $\overline{CF} = 8$ 이므로

$$\overline{CD} = \frac{8}{\cos 2\theta} = \overline{AD}$$

삼각형 ABD의 넓이가 $S(\theta)$ 이므로

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AD} \times \sin 3\theta$$

$$= \frac{1}{2} \times 32 \cos \theta \times \frac{8}{\cos 2\theta} \times \sin 3\theta$$

$$= \frac{128 \sin 3\theta \cos \theta}{\cos 2\theta}$$

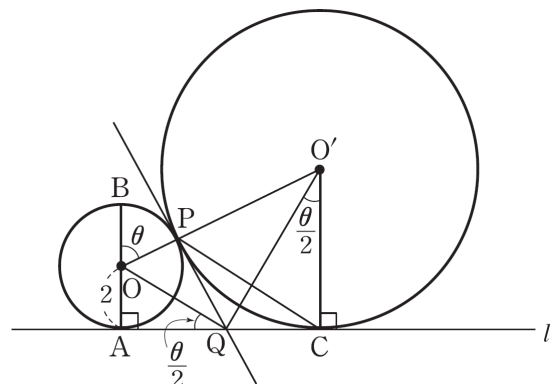
$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{S(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{128 \sin 3\theta \cos \theta}{\theta \cos 2\theta}$$

$$= 384 \times \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\sin 3\theta}{3\theta} \times \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\cos \theta}{\cos 2\theta}$$

$$= 384 \times 1 \times 1 = 384$$

120) [정답] 20

두 원 O , O' 과 점 P에서 동시에 접하는 직선이 직선 l 과 만나는 점을 Q라 하자.



원의 접선의 성질에 의하여 $\overline{AQ} = \overline{PQ} = \overline{CQ}$ 이므로 점 Q는 세 점 A, P, C를 지나는 원의 중심이다.

사각형 OAQP에서 $\angle OAQ = \angle OPQ = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\angle AQP = \theta$$

$$\therefore \angle AQO = \frac{\theta}{2}$$

$\overline{AO} = 2$ 이므로 직각삼각형 OAQ에서

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{2}{\overline{AQ}}$$

$$\therefore \overline{AQ} = \frac{2}{\tan \frac{\theta}{2}}$$

따라서 세 점 A, P, C를 지나는 원의 넓이 $T(\theta)$ 는

$$\begin{aligned} T(\theta) &= \pi \times \overline{AQ}^2 \\ &= \frac{4\pi}{\tan^2 \frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

$\angle PO'C = \theta$ 이므로

$$\angle QO'C = \frac{\theta}{2}$$

$\overline{CQ} = \overline{AQ} = \frac{2}{\tan \frac{\theta}{2}}$ 이므로 삼각형 O'QC에서

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{O'Q}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{O'Q} &= \frac{\overline{CQ}}{\tan \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{2}{\tan^2 \frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

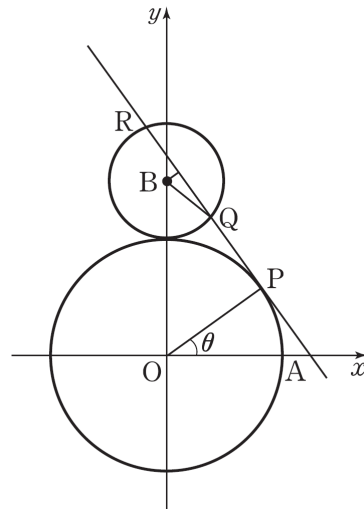
$\overline{O'P} = \overline{O'C}$ 이므로 삼각형 O'PC의 넓이는

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \frac{1}{2} \times \overline{O'C}^2 \times \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{\tan^4 \frac{\theta}{2}} \times \sin \theta \\ &= \frac{2 \sin \theta}{\tan^4 \frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore 10\pi \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\theta \times S(\theta)}{T(\theta)} &= 10\pi \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\theta \times \frac{2 \sin \theta}{\tan^4 \frac{\theta}{2}}}{\frac{4\pi}{\tan^2 \frac{\theta}{2}}} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{20\theta \sin \theta}{4 \tan^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{5 \times \frac{\sin \theta}{\theta}}{\frac{\tan^2 \frac{\theta}{2}}{\theta^2}} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{5 \times \frac{\sin \theta}{\theta}}{\frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} \times \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} \times \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{5 \times 1}{1 \times 1 \times \frac{1}{4}} \\ &= 20 \end{aligned}$$

121) [정답] ⑤



P($2\cos\theta, 2\sin\theta$)이므로 점 P에서의 접선의 방정식은 $2x\cos\theta + 2y\sin\theta = 4$, 즉 $x\cos\theta + y\sin\theta = 2$ 이다.

원 $x^2 + (y-3)^2 = 1$ 의 중심을 B(0, 3)이라 하고 점 B와 직선

$x\cos\theta + y\sin\theta = 2$ 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|3\sin\theta - 2|}{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}} = |3\sin\theta - 2| (\because \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1)$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{QR} &= 2\sqrt{\overline{BQ}^2 - d^2} = 2\sqrt{1^2 - (3\sin\theta - 2)^2} \\ &= 2\sqrt{-9\sin^2\theta + 12\sin\theta - 3} \\ &= 2\sqrt{3}\sqrt{(1-\sin\theta)(3\sin\theta-1)} \end{aligned}$$

$\frac{\pi}{2} - \theta = t$ 라 하면 $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$ 일 때 $t \rightarrow +0$ 이고,

$\sin\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \frac{\overline{QR}}{\frac{\pi}{2} - \theta} &= \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \frac{2\sqrt{3}\sqrt{(1-\sin\theta)(3\sin\theta-1)}}{\frac{\pi}{2} - \theta} \\ &= 2\sqrt{3} \lim_{t \rightarrow +0} \frac{2\sqrt{3}\sqrt{(1-\cos t)(3\cos t-1)}}{t} \end{aligned}$$

이때,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1-\cos t}{t^2} &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{(1-\cos t)(1+\cos t)}{t^2(1+\cos t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \left(\frac{1-\cos^2 t}{t^2} \times \frac{1}{1+\cos t} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1-\cos^2 t}{t^2} \times \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{1+\cos t} \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin^2 t}{t^2} \times \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{1+\cos t} \\ &= 1^2 \times \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\lim_{t \rightarrow +0} (3\cos t - 1) = 3 \times 1 - 1 = 2$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \frac{\overline{QR}}{\frac{\pi}{2} - \theta} &= 2\sqrt{3} \lim_{t \rightarrow +0} \frac{2\sqrt{3}\sqrt{(1-\cos t)(3\cos t-1)}}{t} \\ &= 2\sqrt{3} \lim_{t \rightarrow +0} \sqrt{\frac{1-\cos t}{t^2}} \times \lim_{t \rightarrow +0} \sqrt{3\cos t - 1} \end{aligned}$$

$$= 2\sqrt{3} \times \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$$

122) 60

[해설]

{출제의도}

밑면의 반지름의 길이와 모선의 길이가 주어진 원뿔의 옆면을 전개했을 때 생기는 부채꼴의 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

{풀이}

밑면의 반지름의 길이가 5이므로

밑면인 원의 둘레의 길이는 $2\pi \times 5 = 10\pi$ 이다.

부채꼴 OAB 의 중심각의 크기를 θ 라 하면 부채꼴의 반지름의 길이는 원뿔의 모선의 길이 12와 같으므로 부채꼴의 호의 길이는 12θ 이다. 밑면인 원의 둘레의 길이와 부채꼴의 호의 길이는 같으므로

$$12\theta = 10\pi \text{에서 } \theta = \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{따라서 부채꼴 } OAB \text{의 넓이는 } \frac{1}{2} \times 12^2 \times \frac{5\pi}{6} = 60\pi$$

이므로 a 의 값은 60이다

{다른 풀이}

밑면의 반지름의 길이가 5이므로

밑면인 원의 둘레의 길이는 $2\pi \times 5 = 10\pi$ 이다.

부채꼴 OAB 의 호 AB 의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로

$$\widehat{AB} = 10\pi$$

부채꼴 OAB 에서 $\widehat{OA} = 12$ 이므로 부채꼴 OAB 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 12 \times 10\pi = 60\pi \text{이다.}$$

123) 6

[해설]

부채꼴의 반지름의 길이를 r , 중심각의 크기를 θ , 호의 길이를 l , 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}r^2\theta \text{에서}$$

$$48\pi = \frac{1}{2}r^2 \times \frac{3\pi}{8}$$

$$r^2 = 16^2$$

$$r > 0 \text{이므로 } r = 16$$

$$\text{따라서 } l = r\theta = 16 \times \frac{3\pi}{8} = 6\pi \text{이므로}$$

$$k = 6$$

124) ③

[해설]

반지름의 길이가 r , 호의 길이가 l 인 부채꼴의 둘레의 길이가 12이므로

$$2r + l = 12 \text{에서 } l = -2r + 12$$

부채꼴의 넓이 S 는

$$S = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r(-2r + 12) = -r^2 + 6r$$

$$S + l = -r^2 + 6r + (-2r + 12) = -r^2 + 4r + 12 = -(r-2)^2 + 16$$

$$\frac{3}{2} < r < 6 \text{이므로 } S + l \text{은 } r = 2 \text{일 때 최댓값 } 16 \text{을 갖는다.}$$

$$\text{따라서 } a = 2, M = 16 \text{이므로 } a + M = 2 + 16 = 18$$

125) 153

[해설]

반지름의 길이가 줄어드는 부채꼴의 반지름의 길이를 r_n 이라 하자.

$$\text{반지름의 길이가 } \frac{100-n}{100} \text{배로 줄었으므로 } r_n = \frac{100-n}{100}r$$

두 부채꼴의 넓이는 같으므로

$$\frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r_n l_n$$

$$rl = \frac{100-n}{100}r l_n$$

$$\frac{l}{l_n} = \frac{100-n}{100}$$

$$\sum_{n=1}^{50} f(n) = \sum_{n=1}^{50} \frac{100-n}{100} = \frac{99+98+\cdots+50}{100} = \frac{50(99+50)}{100 \times 2}$$

$$= \frac{149}{4}$$

따라서 $p = 4, q = 149$ 이므로

$$p + q = 4 + 149 = 153$$

126) ③

[해설]

{출제 의도}

삼각함수의 정의와 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 양수 a 의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

{풀이}

$$\sin\theta - \sqrt{a}\cos\theta = -\frac{1}{2} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$\sin^2\theta - 2\sqrt{a}\sin\theta\cos\theta + a\cos^2\theta = \frac{1}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$$\sqrt{a}\sin\theta + \cos\theta = \frac{\sqrt{15}}{2} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$a\sin^2\theta + 2\sqrt{a}\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{15}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

두 식 $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 을 변끼리 더하면

$$(a+1)\sin^2\theta + (a+1)\cos^2\theta = \frac{1}{4} + \frac{15}{4}$$

$$(a+1)(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 4$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \text{이므로 } a+1 = 4$$

$$\text{따라서 } a = 3$$

127) ①

[해설]

$$\begin{aligned} & \left(\sin\theta - \frac{1}{\sin\theta}\right)^2 + \left(\cos\theta - \frac{1}{\cos\theta}\right)^2 - \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 \\ &= \sin^2\theta - 2 + \frac{1}{\sin^2\theta} + \cos^2\theta - 2 + \frac{1}{\cos^2\theta} - \left(\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} - 2 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right) \end{aligned}$$

$$= \sin^2\theta + \cos^2\theta + \frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - 2$$

$$= 1 + \frac{1 - \cos^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{1 - \sin^2\theta}{\cos^2\theta} - 2$$

$$= 1 + \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} - 2$$

$$= 1 + 1 + 1 - 2$$

$$= 1$$

{다른 풀이}

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta, 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \text{이므로}$$

$$\left(\sin\theta - \frac{1}{\sin\theta}\right)^2 + \left(\cos\theta - \frac{1}{\cos\theta}\right)^2 - \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2$$

$$= (\sin\theta - \csc\theta)^2 + (\cos\theta - \sec\theta)^2 - (\cot\theta - \tan\theta)^2$$

$$= \sin^2\theta - 2 + \csc^2\theta + \cos^2\theta - 2 + \sec^2\theta - (\cot^2\theta - 2 + \tan^2\theta)$$

$$= \sin^2\theta + \cos^2\theta + \csc^2\theta - \cot^2\theta + \sec^2\theta - \tan^2\theta - 2$$

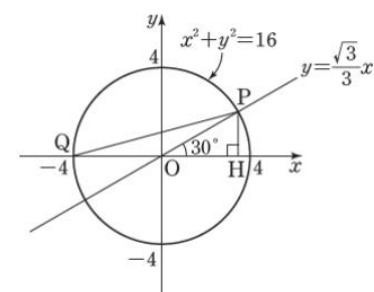
$$= 1 + 1 + 1 - 2$$

$$= 1$$

128) 14

[해설]

그림과 같이 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 와 x 축의 양의 방향이 이루는 각의 크기는 30° 이다.



원점 O 에 대하여

$$\overline{PH} = \overline{OP} \sin 30^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

$$\begin{aligned}\overline{OH} &= \overline{OP} \cos 30^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \\ \overline{QH} &= \overline{QO} + \overline{OH} = 4 + 2\sqrt{3} \text{ 이므로} \\ \tan(\angle PQH) &= \frac{\overline{PH}}{\overline{QH}} = \frac{2}{4 + 2\sqrt{3}} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3} \\ \cot(\angle PQH) &= \frac{1}{\tan(\angle PQH)} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} \\ \text{따라서} \\ \tan^2(\angle PQH) + \cot^2(\angle PQH) &= (2 - \sqrt{3})^2 + (2 + \sqrt{3})^2 \\ &= 4 - 4\sqrt{3} + 3 + 4 + 4\sqrt{3} + 3 \\ &= 14\end{aligned}$$

129) ②

[해설]

x 에 대한 이차방정식 $3x^2 + 4x - 8 = 0$ 의 두 실근이 $\csc\theta$, $\sec\theta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\csc\theta + \sec\theta = -\frac{4}{3} \quad \cdots \textcircled{A}$$

$$\csc\theta \sec\theta = -\frac{8}{3} \quad \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A} \text{에서 } \frac{1}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = -\frac{4}{3} \text{ 이므로}$$

$$\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\sin\theta \cos\theta} = -\frac{4}{3} \quad \cdots \textcircled{C}$$

$$\textcircled{B} \text{에서 } \frac{1}{\sin\theta \cos\theta} = -\frac{8}{3} \text{ 이므로}$$

$$\sin\theta \cos\theta = -\frac{3}{8} \quad \cdots \textcircled{D}$$

③, ④에서

$$\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{E}$$

$\sin\theta$, $\cos\theta$ 를 두 실근으로 하는 x 에 대한 이차방정식은

$$x^2 - (\sin\theta + \cos\theta)x + \sin\theta \cos\theta = 0$$

$$\textcircled{E}, \textcircled{D} \text{에 의하여 } x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{8} = 0$$

$$\text{따라서 } a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{3}{8} \text{ 이므로}$$

$$|a| + |b| = \left| -\frac{1}{2} \right| + \left| -\frac{3}{8} \right| = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

130) ⑤

[해설]

$$f(x) = 4\sin 2\pi x \text{의 주기는 } \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \text{이다.}$$

즉, 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+1) = f(x)$ 이다.

따라서

$$f\left(\frac{31}{6}\right) = f\left(5 + \frac{1}{6}\right) = f\left(\frac{1}{6}\right) = 4\sin \frac{\pi}{3} = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

131) 120

[해설]

함수 $y = \tan \frac{1}{2}x$ 의 주기가 2π 이므로 함수

$y = \tan \frac{1}{2}x$ ($0 \leq x < 3\pi$)의 그래프와 x 축 및 직선 $y = a$ 로 둘러싸인 부분의 넓이 8π 는 가로의 길이가 2π , 세로의 길이가 a 인 직사각형의 넓이와 같다.

즉, $2\pi \times a = 8\pi$ 에서 $a = 4$

따라서 $30a = 30 \times 4 = 120$

132) ③

[해설]

함수 $y = \cos kx$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이고, $\overline{CD} = 1$ 이므로

두 점 C , D 의 좌표는 각각 $C\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $D\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 이고

점 B 의 좌표는 $B\left(\frac{1}{2}, \cos \frac{k}{2}\right)$ 이다.

직사각형 $ACDB$ 의 넓이가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$1 \times \cos \frac{k}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{즉} \quad \cos \frac{k}{2} = \frac{1}{2}$$

$$0 < k < \pi \text{이므로 } \frac{k}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{따라서 } k = \frac{2\pi}{3}$$

133) ①

[해설]

{출제의도}

이차방정식이 중근을 가지도록 하는 조건에서 얻어진 삼각함수를 포함하고 있는 방정식의 실근을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

{풀이}

t 에 대한 이차방정식 $t^2 - (4\sin\theta)t - 4\sin\theta + 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 이 이차방정식이 중근을 가지므로

$$\frac{D}{4} = (-2\sin\theta)^2 - (-4\sin\theta + 3) = 0 \text{에서}$$

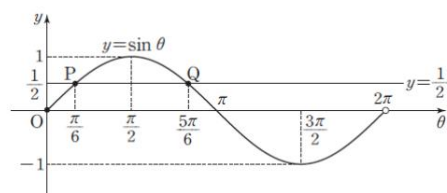
$$4\sin^2\theta + 4\sin\theta - 3 = 0$$

$$(2\sin\theta - 1)(2\sin\theta + 3) = 0$$

$$-1 \leq \sin\theta \leq 1 \text{이므로 } \sin\theta = \frac{1}{2}$$

함수 $y = \sin\theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$)의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 의 두 교

점을 P , Q 라 하면 방정식 $\sin\theta = \frac{1}{2}$ ($0 \leq \theta < 2\pi$)의 실근은 두 점 P , Q 의 θ 좌표와 같다.



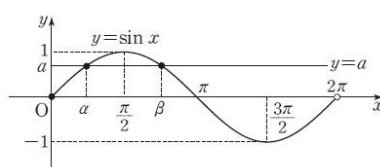
따라서 그림에서 두 점 P , Q 의 θ 좌표는 각각 $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\theta = \frac{5\pi}{6}$

이므로

$$\text{구하는 모든 실수 } \theta \text{의 값의 합은 } \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \pi \text{이다.}$$

134) 96

[해설]



그림과 같이 함수 $y = \sin x$ 의 그래프는 직선 $x = \frac{\pi}{2}$ 에 대하여 대

칭이므로 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 만나는 두 점의 x 좌표 α , β 에 대하여

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{즉} \quad \alpha + \beta = \pi \text{이므로 } \beta = \pi - \alpha \text{이다.}$$

$$\frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{(\pi - \alpha) - \alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \alpha \text{이므로}$$

$$\sin \frac{\beta - \alpha}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \alpha = \frac{1}{5}$$

$$\text{따라서 } a^2 = \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{5} \right)^2 = \frac{24}{25} \text{이므로}$$

$$100a^2 = 100 \times \frac{24}{25} = 96$$

135) ③

[해설]

$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $-1 < \sin\theta < 1$, 즉 $0 \leq \sin^2\theta < 1$ 이므로 급수

$\sum_{n=1}^{\infty} (\sin\theta)^{2n-1}$ 은 첫째항이 $\sin\theta$ 이고, 공비가 $\sin^2\theta$ 인 수렴하는 등비급수이다.

$$\text{즉, } \sum_{n=1}^{\infty} (\sin \theta)^{2n-1} = \frac{\sin \theta}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{3}{8}$$

$$8 \sin \theta = 3(1 - \sin^2 \theta)$$

$$3 \sin^2 \theta + 8 \sin \theta - 3 = 0$$

$$(3 \sin \theta - 1)(\sin \theta + 3) = 0$$

$$-1 < \sin \theta < 1 \text{ 이므로}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{3}$$

따라서

$$\cot^2 \theta = \csc^2 \theta - 1$$

$$= \frac{1}{\sin^2 \theta} - 1$$

$$= 9 - 1 = 8$$

136) 63

[해설]

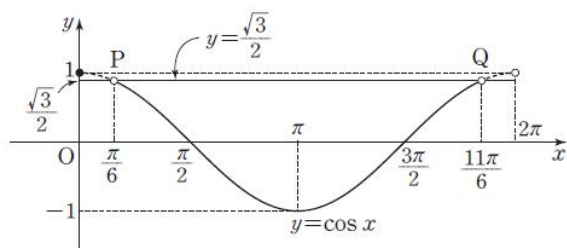
$$\cos \frac{(t-1)\pi}{6} < \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 에서 } x = \frac{(t-1)\pi}{6} \text{ 로 놓으면}$$

$$1 \leq t < 13 \text{ 이므로 } 0 \leq x < 2\pi$$

$$\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 에서 그림과 같이 함수 } y = \cos x \text{ 의 그래프와 직}$$

$$\text{선 } y = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 이 만나는 두 점을 } P, Q \text{ 라 하면 두 점 } P, Q$$

$$\text{의 } x \text{ 좌표는 각각 } \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \text{ 이다.}$$



$$\text{부등식 } \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 의 해는 함수 } y = \cos x \text{ 의 그래프가 직선}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 보다 아래쪽에 있는 } x \text{ 의 값의 범위이므로}$$

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}$$

$$x = \frac{(t-1)\pi}{6} \text{ 이므로}$$

$$\frac{\pi}{6} < \frac{(t-1)\pi}{6} < \frac{11\pi}{6}$$

$$2 < t < 12$$

따라서 자연수 t 의 값은 3, 4, 5, ..., 11이므로 조건을 만족시키는 모든 자연수 t 의 값의 합은

$$3 + 4 + 5 + \dots + 11 = 63$$

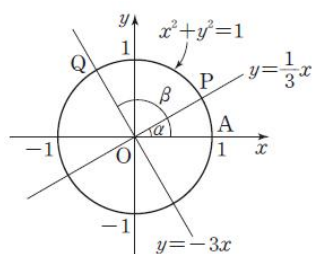
137) ③

[해설]

{출제 의도}

코사인함수의 덧셈정리를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

{풀이}



$$\text{직선 } y = \frac{1}{3}x \text{와 } x \text{ 축의 양의 방향이 이루는 각의 크기가 } \alpha \text{ 이므로}$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{3}$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ 이므로}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}, \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

직선 $y = -3x$ 와 x 축의 양의 방향이 이루는 각의 크기가 β 이므로

$$\tan \beta = -3$$

$$\frac{\pi}{2} < \beta < \pi \text{ 이므로 } \cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{10}}, \sin \beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

따라서

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$= \frac{3}{\sqrt{10}} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) - \frac{1}{\sqrt{10}} \times \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$= -\frac{3}{10} - \frac{3}{10}$$

$$= -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$$

$$= -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$$

138) ②

[해설]

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \text{ 에서 } 0 < \alpha + \beta < \pi \text{ 이므로}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$(\cos \alpha - \sin \alpha)(\sin \beta - \cos \beta)$$

$$= \cos \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta$$

$$= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta - (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)$$

$$= \sin(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$$

$$= \frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{-2 + 4}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

따라서 $a = 2, b = 15$ 이므로

$$a + b = 2 + 15 = 17$$

139) ③

[해설]

두 점 $P(\sin \alpha, \cos \alpha), Q(\cos \beta, \sin \beta)$ 사이의 거리가

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 이므로}$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{(\sin \alpha - \cos \beta)^2 + (\cos \alpha - \sin \beta)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 에서}$$

$$(\sin \alpha - \cos \beta)^2 + (\cos \alpha - \sin \beta)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta = \frac{1}{2}$$

$$2 - 2(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) = \frac{1}{2}$$

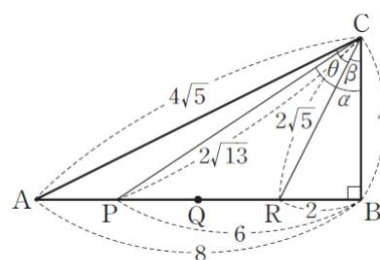
$$2 - 2 \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$$

$$\text{즉, } \sin(\alpha + \beta) = \frac{3}{4}$$

$$\text{따라서 } \cos^2(\alpha + \beta) = 1 - \sin^2(\alpha + \beta) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$$

140) ②

[해설]



직각삼각형 ABC 에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{(4\sqrt{5})^2 - 8^2} = \sqrt{80 - 64} = 4$$

$$\text{직각삼각형 } CPB \text{에서 } \overline{PB} = \frac{3}{4} \overline{AB} = \frac{3}{4} \times 8 = 6 \text{ 이므로 피타고라스}$$

스 정리에 의하여

$$\overline{CP} = \sqrt{\overline{PB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$\angle BCP = \alpha$ 로 놓으면

$$\sin \alpha = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}, \quad \cos \alpha = \frac{4}{2\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

직각삼각형 CRB 에서 $\overline{RB} = \frac{1}{4}\overline{AB} = \frac{1}{4} \times 8 = 2$ 이므로 피타고라

스 정리에 의하여

$$\overline{CR} = \sqrt{\overline{RB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$\angle BCR = \beta$ 로 놓으면

$$\sin \beta = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \cos \beta = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

따라서

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ &= \frac{2\sqrt{13}}{13} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{3\sqrt{13}}{13} \times \frac{\sqrt{5}}{5} \\ &= \frac{7\sqrt{65}}{65} \end{aligned}$$

141) ③

[해설]

$\sqrt{7} \tan \alpha \tan \beta + \tan \alpha + \tan \beta = \sqrt{7}$ 에서

$$\begin{aligned} \tan \alpha + \tan \beta &= \sqrt{7} - \sqrt{7} \tan \alpha \tan \beta \\ &= \sqrt{7}(1 - \tan \alpha \tan \beta) \end{aligned}$$

$1 - \tan \alpha \tan \beta \neq 0$ 이므로

$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \sqrt{7}$$

따라서 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \sqrt{7}$ 이므로

$$\sec^2(\alpha + \beta) = 1 + \tan^2(\alpha + \beta) = 1 + (\sqrt{7})^2 = 1 + 7 = 8$$

142) ②

[해설]

두 직선 $2x - y - 3 = 0$, $ax - y + 2 = 0$ 과 x 축의 양의 방향이

이르는 각의 크기를 각각 α , β 라 하면

$$\tan \alpha = 2, \quad \tan \beta = a$$

$a > 2$ 에서 $\alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ 이므로 두 직선이 이루는 예각의 크기 θ

에 대하여

$$\tan \theta = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} = \frac{a - 2}{1 + a \times 2} = \frac{a - 2}{1 + 2a} = \frac{3}{16}$$

$$16(a - 2) = 3(1 + 2a)$$

$$10a = 35$$

$$\text{따라서 } a = \frac{35}{10} = \frac{7}{2}$$

143) ④

[해설]

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{1 + \tan \beta}{1 - \tan \beta} = n$$

$$1 + \tan \beta = n(1 - \tan \beta)$$

$$(n + 1)\tan \beta = n - 1$$

$$\tan \beta = \frac{n - 1}{n + 1}$$

따라서 $f(n) = \frac{n - 1}{n + 1}$ 이므로

$$\sum_{n=2}^{\infty} \{f(n+1) - f(n)\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \{f(k+1) - f(k)\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} [\{f(3) - f(2)\} + \{f(4) - f(3)\} + \cdots + \{f(n+1) - f(n)\}]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \{f(n+1) - f(2)\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+2} - \frac{1}{3} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2}{3}$$

{다른 풀이}

$\alpha + \beta = \gamma$ 라 하면 $\tan \gamma = n$ 이고, $\beta = \gamma - \alpha$ 이므로

$$\tan \beta = \tan(\gamma - \alpha) = \frac{\tan \gamma - \tan \alpha}{1 + \tan \gamma \tan \alpha} = \frac{n - 1}{1 + n \times 1} = \frac{n - 1}{n + 1}$$

따라서 $f(n) = \frac{n - 1}{n + 1}$ 이므로

$$\sum_{n=2}^{\infty} \{f(n+1) - f(n)\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \{f(k+1) - f(k)\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} [\{f(3) - f(2)\} + \{f(4) - f(3)\} + \cdots + \{f(n+1) - f(n)\}]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \{f(n+1) - f(2)\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+2} - \frac{1}{3} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2}{3}$$

144) 9

[해설]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x^2 + 18x)}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(3x^2 + 18x)}{3x^2 + 18x} \times \frac{3x^2 + 18x}{2x} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x^2 + 18x)}{3x^2 + 18x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 18x}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x^2 + 18x)}{3x^2 + 18x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{2}x + 9 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x^2 + 18x)}{3x^2 + 18x} \text{에서 } 3x^2 + 18x = t \text{라 하면}$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x^2 + 18x)}{3x^2 + 18x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{2}x + 9 \right) = 9$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x^2 + 18x)}{2x} = 1 \times 9 = 9$$

145) ②

[해설]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^{3x} - 1)}{\sec 2x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^{3x} - 1)}{\frac{1}{\cos 2x} - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos 2x (e^{3x} - 1)}{1 - \cos 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos 2x (e^{3x} - 1)(1 + \cos 2x)}{1 - \cos^2 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos 2x (e^{3x} - 1)(1 + \cos 2x)}{\sin^2 2x}$$

$$= \frac{3}{4} \times \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 2x} \right)^2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} \times \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x (1 + \cos 2x))$$

$$= \frac{3}{4} \times 1^2 \times 1 \times 1 (1 + 1)$$

$$= \frac{3}{2}$$

146) ②

[해설]

$0 < \theta < \pi$ 인 실수 θ 에 대하여 $-1 < \cos \theta < 1$ 이므로 급수

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \theta \cos^n \theta$ 는 첫째항이 $\sin \theta \cos \theta$, 공비가 $\cos \theta$ 인 수렴하는 등비급수이다.

따라서 $f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\theta \cos^n\theta = \frac{\sin\theta \cos\theta}{1-\cos\theta}$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{\theta \rightarrow 0+} \{\theta \times f(\theta)\} &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\theta \sin\theta \cos\theta}{1-\cos\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left\{ \frac{\theta \sin\theta \cos\theta}{1-\cos^2\theta} \times (1+\cos\theta) \right\} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\theta \sin\theta}{\sin^2\theta} \times \lim_{\theta \rightarrow 0+} \{(1+\cos\theta)\cos\theta\} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\theta}{\sin\theta} \times \lim_{\theta \rightarrow 0+} \{(1+\cos\theta)\cos\theta\} \\ &= 1 \times (1+1) \times 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

147) ④

[해설]

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a-\cos 4x)}{x^2}$ 의 값이 존재하고 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} \sin(a-\cos 4x) = 0$$

함수 $\sin(a-\cos 4x)$ 는 연속함수이므로 $\sin(a-1) = 0$

$0 < a < \pi$ 이므로 $a = 1$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a-\cos 4x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1-\cos 4x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(1-\cos 4x)}{1-\cos 4x} \times \frac{1-\cos 4x}{x^2} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(1-\cos 4x)}{1-\cos 4x} \times \frac{1-\cos^2 4x}{x^2(1+\cos 4x)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(1-\cos 4x)}{1-\cos 4x} \times \frac{\sin^2 4x}{x^2(1+\cos 4x)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1-\cos 4x)}{1-\cos 4x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x}{x^2} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+\cos 4x} \\ &= 16 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1-\cos 4x)}{1-\cos 4x} \times \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} \right)^2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+\cos 4x} \\ &= 16 \times 1 \times 1^2 \times \frac{1}{1+1} = 8 = b\end{aligned}$$

따라서 $a = 1$, $b = 8$ 이므로

$$a+b = 1+8 = 9$$

{참고}

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1-\cos 4x)}{1-\cos 4x} \text{ 에서}$$

$1-\cos 4x = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1-\cos 4x)}{1-\cos 4x} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sin t}{t} = 1$$

148) ④

[해설]

함수 $f(x)$ 가 $x = 0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \text{ 에서}$$

$$\begin{aligned}a &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{4\sin x + \tan 5x}{3x} = \frac{4}{3} \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin x}{x} + \frac{5}{3} \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\tan 5x}{5x} \\ &= \frac{4}{3} \times 1 + \frac{5}{3} \times 1 = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = 3\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+bx)}{2x} = \frac{b}{2} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+bx)}{bx} = \frac{b}{2} \times 1 = \frac{b}{2}$$

$$\frac{b}{2} = 3 \text{ 이므로 } b = 6$$

따라서 $a = 3$, $b = 6$ 이므로

$$a+b = 3+6 = 9$$

149) ②

[해설]

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

조건 (가)에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\tan \frac{1}{2}x}$ 의 값이

존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + ax^2 + bx + c) = c = 0$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\tan \frac{1}{2}x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + ax^2 + bx}{\tan \frac{1}{2}x} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\frac{1}{2}x}{\tan \frac{1}{2}x} \times (x^2 + ax + b) \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x}{\tan \frac{1}{2}x} \times \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + ax + b) \\ &= 2 \times 1 \times b = 2b = 6\end{aligned}$$

따라서 $b = 3$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 3$ 이고, 조건 (나)에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 22 \text{ 이므로}$$

$$f'(1) = 3 + 2a + 3 = 22 \text{ 에서 } a = 8$$

따라서 $f(x) = x^3 + 8x^2 + 3x$ 이므로

$$f(1) = 1 + 8 + 3 = 12$$

150) ①

[해설]

$$\overline{OH} = \overline{OB} \cos \theta = 2 \cos \theta \text{ 이고,}$$

$$\overline{HB} = \overline{OB} \sin \theta = 2 \sin \theta \text{ 이므로}$$

$$f(\theta) = \overline{HA} = \overline{OA} - \overline{OH} = 2 - 2 \cos \theta = 2(1 - \cos \theta)$$

$$g(\theta) = \overline{HB} = 2 \sin \theta$$

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times 2^2 \times \theta - \frac{1}{2} \times (2 \cos \theta)^2 \times \theta$$

$$= 2\theta - 2\theta \cos^2 \theta = 2\theta(1 - \cos^2 \theta)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{f(\theta) \times g(\theta)}{S(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{2(1 - \cos \theta) \times 2 \sin \theta}{2\theta(1 - \cos^2 \theta)}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{2 \sin \theta}{\theta(1 + \cos \theta)}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\sin \theta}{\theta} \times \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{2}{1 + \cos \theta}$$

$$= 1 \times 1$$

$$= 1$$

151) ①

[해설]

$$\text{삼각형 } POH \text{ 에서 } \overline{OH} = \cos \theta, \overline{PH} = \sin \theta$$

$$\text{삼각형 } PHQ \text{ 에서 } \tan \frac{\theta}{2} = \frac{\overline{PH}}{\overline{HQ}} \text{ 이고, } \overline{PH} = \sin \theta \text{ 이므로}$$

$$\overline{HQ} = \frac{\sin \theta}{\tan \frac{\theta}{2}}$$

삼각형 PHQ 의 넓이 $S(\theta)$ 는

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{PH} \times \overline{HQ} = \frac{1}{2} \times \sin \theta \times \frac{\sin \theta}{\tan \frac{\theta}{2}} = \frac{\sin^2 \theta}{2 \tan \frac{\theta}{2}}$$

호 PR 의 길이 $L(\theta)$ 는

$$L(\theta) = 1 \times \theta = \theta$$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S(\theta)}{L(\theta)} &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\sin^2 \theta}{2\theta \tan \frac{\theta}{2}} = \left(\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 \times \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\theta}{2}} \\ &= 1^2 \times 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

152) ④

[해설]

마름모 $OABC$ 의 한 변의 길이가 1이므로 마름모 $OABC$ 의 넓이

$f(\theta)$ 는

$$f(\theta) = 2 \times \triangle OAC$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OC} \times \sin \theta$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin \theta$$

$$= \sin \theta$$

점 C 의 좌표는 $C(\cos \theta, \sin \theta)$ 이고 마름모 $OABC$ 의 두 대각선의 중점은 서로 같으므로 선분 AC 의 중점과 선분 OB 의 중점은 서로 같다.

점 B 의 좌표를 $B(a, b)$ 라 하면

$$\frac{a}{2} = \frac{\cos \theta + 1}{2}, \quad \frac{b}{2} = \frac{\sin \theta}{2} \text{에서}$$

$$a = \cos \theta + 1, \quad b = \sin \theta$$

즉, 점 B 의 좌표는 $B(\cos \theta + 1, \sin \theta)$ 이므로

$$g(\theta) = \overline{OB}^2 = (\cos \theta + 1)^2 + \sin^2 \theta = \cos^2 \theta + 2\cos \theta + 1 + \sin^2 \theta = 2 + 2\cos \theta$$

따라서

$$\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\theta \times g(\theta)}{f(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\theta \times (2 + 2\cos \theta)}{\sin \theta}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\theta}{\sin \theta} \times \lim_{\theta \rightarrow 0+} (2 + 2\cos \theta)$$

$$= 1 \times (2 + 2 \times 1) = 4$$

{다른 풀이1}

마름모 $OABC$ 의 한 변의 길이가 1이므로 마름모 $OABC$ 의 넓이 $f(\theta)$ 는

$$f(\theta) = 2 \times \triangle OAC$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OC} \times \sin \theta$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin \theta$$

$$= \sin \theta$$

두 대각선 OB, AC 가 만나는 점을 M 이라 하면 두 대각선 OB, AC 가 서로 수직이므로 삼각형 OAM 은

$$\angle OMA = \frac{\pi}{2} \text{인 직각삼각형이다.}$$

삼각형 OAM 에서

$$\overline{OM} = \overline{OA} \times \cos \frac{\theta}{2} = 1 \times \cos \frac{\theta}{2} = \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\text{이므로 } \overline{OB} = 2\overline{OM} = 2\cos \frac{\theta}{2} \text{이고,}$$

$$g(\theta) = \overline{OB}^2 = \left(2\cos \frac{\theta}{2}\right)^2 = 4\cos^2 \frac{\theta}{2} \text{이다.}$$

따라서

$$\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\theta \times g(\theta)}{f(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\theta \times 4\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin \theta}$$

$$= 4 \times \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\theta}{\sin \theta} \times \lim_{\theta \rightarrow 0+} \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$= 4 \times 1 \times 1^2 = 4$$

{다른 풀이 2}

점 C 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{CH} = \sin \theta$$

마름모 $OABC$ 의 넓이 $f(\theta)$ 는

$$f(\theta) = 2 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \sin \theta = \sin \theta$$

마름모의 대각선은 내각을 이등분하므로

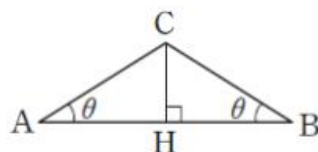
$$g(\theta) = \overline{OB}^2 = \left(\frac{\sin \theta}{\sin \frac{\theta}{2}}\right)^2$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\theta \times g(\theta)}{f(\theta)} &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\theta \times \left(\frac{\sin \theta}{\sin \frac{\theta}{2}}\right)^2}{\sin \theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\theta \sin \theta}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= 4 \times \left(\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}\right)^2 \times \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\sin \theta}{\theta} \\ &= 4 \times 1^2 \times 1 = 4 \end{aligned}$$

153) 100

[해설]



삼각형 ABC 는 이등변삼각형이고 $\angle CAB = \theta$ 이므로 $\angle ABC = \theta$ 이다.

점 C 에서 변 AB 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{AH} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

삼각형 AHC 에서 $\tan \theta = \frac{\overline{CH}}{2}$ 이므로

$$\overline{CH} = 2 \tan \theta$$

그러므로 삼각형 ABC 의 넓이 $S(\theta)$ 는

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CH} = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \tan \theta$$

$$= 4 \tan \theta$$

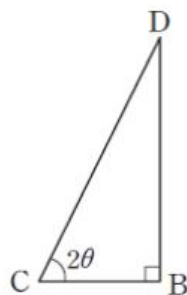
또한 $\angle BCD$ 는 삼각형 ABC 의 외각이므로

$$\angle BCD = \angle CAB + \angle ABC = \theta + \theta = 2\theta \text{이고}$$

$$\overline{BC} = \overline{AC} = \frac{2}{\cos \theta} \text{ 이므로}$$

$$\overline{BD} = \overline{BC} \times \tan 2\theta = \frac{2}{\cos \theta} \times \tan 2\theta = \frac{2 \tan 2\theta}{\cos \theta}$$

그러므로 삼각형 CBD 의 넓이 $T(\theta)$ 는



$$T(\theta) = \frac{1}{2} \overline{BC} \times \overline{BD}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{\cos \theta} \times \frac{2 \tan 2\theta}{\cos \theta}$$

$$= \frac{2 \tan 2\theta}{\cos^2 \theta}$$

따라서

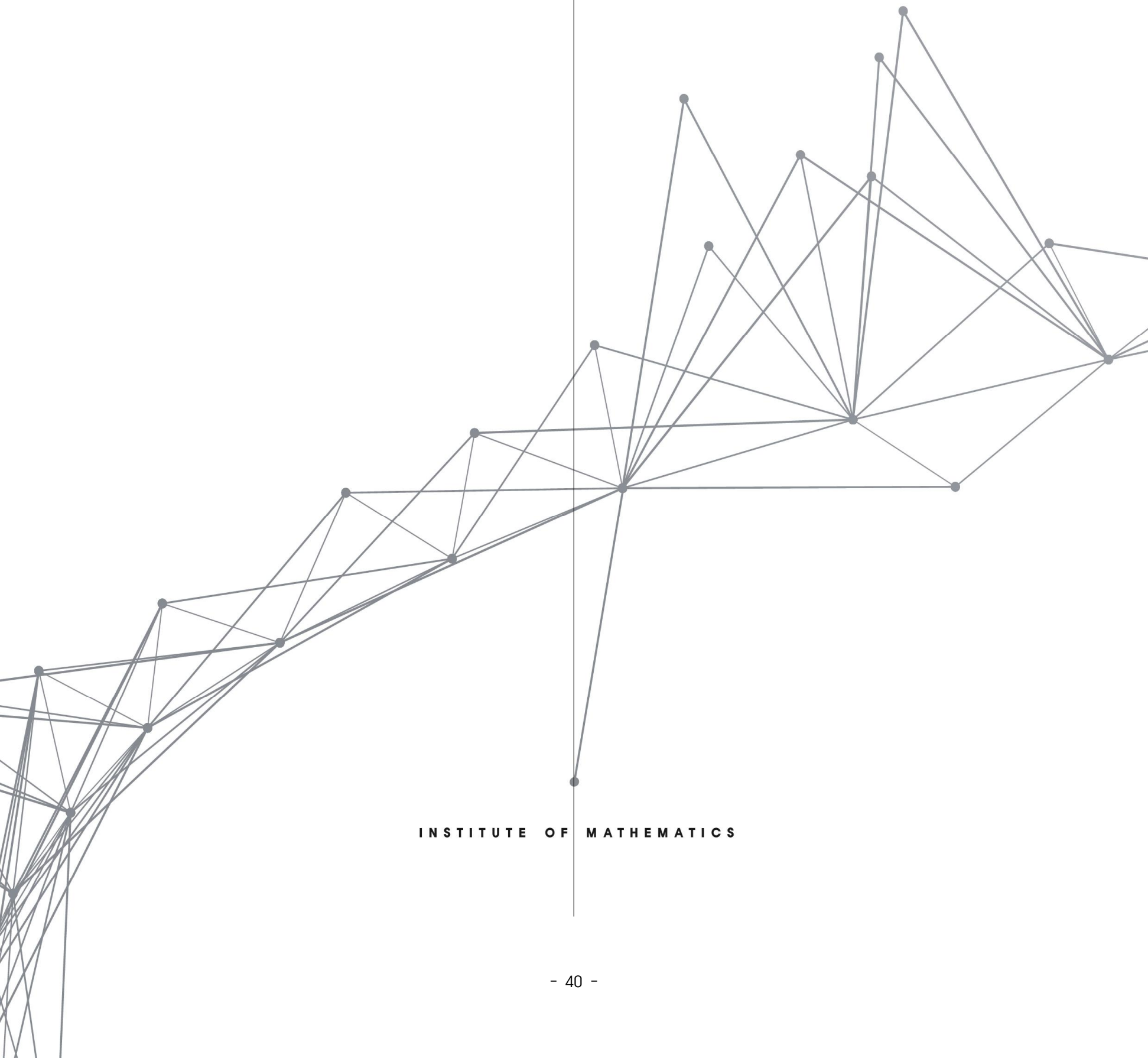
$$\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{T(\theta)}{S(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\frac{2 \tan 2\theta}{\cos^2 \theta}}{4 \tan \theta}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\tan 2\theta}{2 \tan \theta \cos^2 \theta}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\tan 2\theta}{2\theta} \times \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\theta}{\tan \theta} \times \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$= 1 \times 1 \times 1 = 1$$

즉, $p = 1$ 이므로
 $100p = 100 \times 1 = 100$



INSTITUTE OF MATHEMATICS