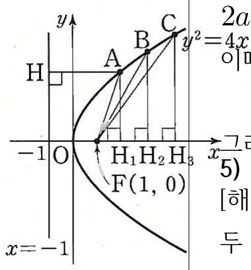
1) 답 ①

[해설]

$y^2=4x=4\times1\times x$이므로 이 포물선의 초점은 $\mathrm{F}(1,\ 0)$, 준선의 방정식은 $x=-1$이다.

점 A에서 준선에 내린 수선의 발을 H라고 하면 포물선의 정의에 의하여



$\overline{\mathrm{AH}}=2+\overline{\mathrm{FH_1}}=3$이므로 $\overline{\mathrm{FH_1}}=1$

같은 방법으로 $\overline{\mathrm{FH_2}}=2,\ \overline{\mathrm{FH_3}}=3$이므로 세 직각삼각형 $\mathrm{AFH_1}$, $\mathrm{BFH_2}$, $\mathrm{CFH_3}$에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AH_1}}=2\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{BH_2}}=2\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{CH_3}}=4$이다.

따라서

$S_1=\dfrac{1}{2}\times1\times2\sqrt{2}=\sqrt{2},\ S_2=\dfrac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3},\ S_3=\dfrac{1}{2}\times3\times4=6$

이므로 $S_1^2+S_2^2+S_3^2=2+12+36=50$

2) 답 125

[해설]

$x^2=ay=4\times\dfrac{a}{4}\times y$이므로 이 포물선의 준선의 방정식은 $y=-\dfrac{a}{4}$이다.

즉, $-\dfrac{a}{4}=-2$이므로 $a=8$

포물선 $x^2=8y$가 점 $(6,\ k)$를 지나므로

$6^2=8k$

$k=\dfrac{9}{2}$

따라서 $10(a+k)=10\left(8+\dfrac{9}{2}\right)=10\times\dfrac{25}{2}=125$이다.

3) 답 ③

[해설]

포물선 $(y-1)^2=a(x+3)$ ……㉠

은 포물선 $y^2=ax$를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $y^2=ax=4\times\dfrac{a}{4}\times x$의 초점의 좌표는

$\left(\dfrac{a}{4},\ 0\right)$

이므로 포물선 ㉠의 초점의 좌표는

$\left(\dfrac{a}{4}-3,\ 1\right)$

포물선 $(x+2)^2=-8(y-b)$ ……㉡

는 포물선 $x^2=-8y$ 를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $x^2=-8y=4\times(-2)\times y$의 초점의 좌표는 $(0,\ -2)$ 이므로 포물선 ㉡의 초점의 좌표는

$(-2,\ -2+b)$

두 포물선 ㉠, ㉡의 초점이 일치하므로

$\dfrac{a}{4}-3=-2,\ 1=-2+b$

$a=4,\ b=3$

따라서 $a+b=7$

4) 답 ⑤

[해설]

두 초점이 $\mathrm{F}(2\sqrt{3},\ 0)$, $\mathrm{F}'(-2\sqrt{3},\ 0)$인 타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$이라고 하자.

삼각형 $\mathrm{AF'B}$가 정삼각형이므로

$\overline{\mathrm{AF'}}=\dfrac{\overline{\mathrm{FF'}}}{\cos\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=8,\ \overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{FF'}}\times\tan\dfrac{\pi}{6}=4\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=4$

따라서 타원의 장축의 길이는

$2a=\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{AF'}}=4+8=12$ 이므로 $a=6$

이때 $b^2=a^2-(2\sqrt{3})^2=36-12=24$이고 $b>0$이므로 $b=2\sqrt{6}$

그러므로 타원의 단축의 길이는 $2b=4\sqrt{6}$ 이다.

5) 답 ④

[해설]

두 점 $\mathrm{F}(3,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-3,\ 0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=14$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 두 초점이 F, F′이고 장축의 길이가 14인 타원이다.

이 타원이 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$

이라고 하면

$a^2-b^2=3^2$ ……㉠

$2a=14$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a^2=49,\ b^2=40$이므로 타원의 방정식은

$\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{40}=1$

이다. 이 도형이 점 $(3,\ k)$를 지나므로

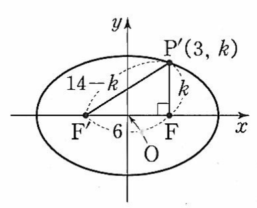
$\dfrac{9}{49}+\dfrac{k^2}{40}=1$

$k^2=\dfrac{40^2}{49}$

k는 양수이므로

$k=\dfrac{40}{7}$

[다른 풀이]



좌표가 $(3,\ k)$인 점을 P′이라고 하면 그림과 같이 삼각형 $\mathrm{P'F'F}$는 직각삼각형이고 $\overline{\mathrm{P'F}}=k,\ \overline{\mathrm{P'F'}}=14-k,\ \overline{\mathrm{FF'}}=6$ 이므로 피타고라스 정리에 의하여

$k^2+6^2=(14-k)^2$

$k^2+6^2=k^2-28k+196$

$28k=160$

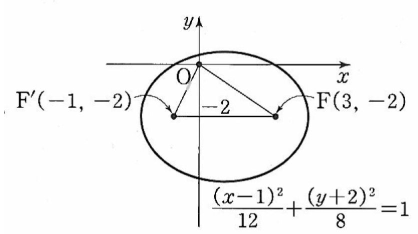
따라서 $k=\dfrac{40}{7}$

6) 답 ③

[해설]

타원 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{8}=1$의 두 초점의 좌표를 $(c,\ 0)$, $(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라고 하면 $c^2=12-8=4=2^2$에서 $c=2$이므로 두 초점의 좌표는 $(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$이다.

타원 $\dfrac{(x-1)^2}{12}+\dfrac{(y+2)^2}{8}=1$은 타원 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{8}=1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 타원 $\dfrac{(x-1)^2}{12}+\dfrac{(y+2)^2}{8}=1$의 두 초점을 $\mathrm{F}(3,\ -2)$, $\mathrm{F}'(-1,\ -2)$이라고 하자.



따라서 삼각형 $\mathrm{OF'F}$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 4\times 2=4$

7) 답 ⑤

[해설]

쌍곡선 $\frac{x^2}{2a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$에서

두 초점의 좌표는 $(\sqrt{2a^2+a^2},\ 0)$, $(-\sqrt{2a^2+a^2},\ 0)$, 즉 $(\sqrt{3}a,\ 0)$, $(-\sqrt{3}a,\ 0)$이고 두 꼭짓점의 좌표는 $(\sqrt{2}a,\ 0)$, $(-\sqrt{2}a,\ 0)$이므로 두 원 C_1, C_2의 넓이는 각각 $3a^2\pi$, $2a^2\pi$이다. 이때 두 원 C_1, C_2의 넓이의 차가 4π이므로

$3a^2\pi-2a^2\pi=a^2\pi=4\pi$에서 $a^2=4$

$a>0$이므로 $a=2$

따라서 쌍곡선의 주축의 길이는 $2\sqrt{2}a=4\sqrt{2}$이다.

8) 답 ⑤

[해설]

두 초점이 $\mathrm{F}(0,\ 2)$, $\mathrm{F'}(0,\ -2)$이고 점 $\mathrm{A}(\sqrt{3},\ 2\sqrt{3})$을 지나는 쌍곡선의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=-1$ $(a>0,\ b>0)$이라고 하면

$a^2+b^2=2^2=4$

$b^2=4-a^2$

쌍곡선이 점 $\mathrm{A}(\sqrt{3},\ 2\sqrt{3})$을 지나므로

$\frac{3}{a^2}-\frac{12}{b^2}=-1$ ……㉠

㉠에서 $3b^2-12a^2=-a^2b^2$

이 식에 $b^2=4-a^2$을 대입하면

$3(4-a^2)-12a^2=-a^2(4-a^2)$

$a^4+11a^2-12=0$

$(a^2+12)(a^2-1)=0$

$a^2+12\neq 0$이므로

$a^2=1$

이때 $b^2=4-a^2=3$이므로 구하는 쌍곡선의 방정식은

$x^2-\frac{y^2}{3}=-1$

따라서 주축의 길이 l은 $l=2b$이므로

$l^2=4b^2=12$

9) 답 ②

[해설]

쌍곡선 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$의 두 초점의 좌표를

$\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라고 하면

$c^2=12+4=16$이므로

$\mathrm{F}(4,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-4,\ 0)$이고

$\overline{\mathrm{FF'}}=8$

$\overline{\mathrm{PF}}:\overline{\mathrm{PF'}}=3:2$이므로

$\overline{\mathrm{PF}}=3k$, $\overline{\mathrm{PF'}}=2k$ $(k>0)$

라고 하자.

쌍곡선의 주축의 길이가 $2\times\sqrt{12}=4\sqrt{3}$이므로

$\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}=4\sqrt{3}$에서

$3k-2k=4\sqrt{3}$

$k=4\sqrt{3}$

즉, $\overline{\mathrm{PF}}=12\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{PF'}}=8\sqrt{3}$

이때 삼각형 $\mathrm{PFF'}$의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{FF'}}=12\sqrt{3}+8\sqrt{3}+8$

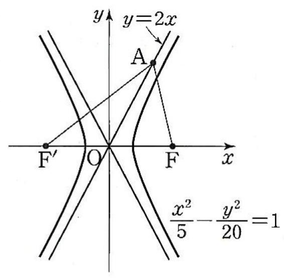
$=8+20\sqrt{3}$

따라서 $p=8$, $q=20$이므로 $p+q=28$

10) 답 ⑤

[해설]

쌍곡선 $4x^2-y^2=20$에서 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$이므로 쌍곡선의 두 초점을 $\mathrm{F'}(-\sqrt{5+20},\ 0)$, $\mathrm{F}(\sqrt{5+20},\ 0)$, 즉 $\mathrm{F'}(-5,\ 0)$, $\mathrm{F}(5,\ 0)$이라고 하면



$\overline{\mathrm{F'F}}=10$

이때 점근선의 방정식은

$y=\pm\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}x=\pm 2x$이므로 기울기가 양수인 점근선의 방정식은 $y=2x$이고, 점 $\mathrm{A}(3,\ k)$는 이 점근선 위에 있으므로 $k=6$이다.

따라서 삼각형 $\mathrm{AF'F}$의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{F'F}}\times 6=\frac{1}{2}\times 10\times 6=30$

11) 답 ④

[해설]

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{9}=1$의 점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{3}{2}x$이고 a는 양수이므로 $\frac{3}{a}=\frac{3}{2}$

즉, $a=2$

따라서 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}=2\times 2=4$이고 $\overline{\mathrm{PF'}}=5$이므로

$\overline{\mathrm{PF}}=4+\overline{\mathrm{PF'}}=4+5=9$

12) 답 ②

[해설]

두 직선 $y=2x-3$, $y=-2x+5$의 교점의 좌표는

$(2,\ 1)$이고 원점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$은 직선 $y=2x-3$의 윗부분과 직선 $y=-2x+5$의 아랫부분에 있으므로 쌍곡선의 방정식을

$\frac{(x-2)^2}{a^2}-\frac{(y-1)^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ ……㉠

이라고 하면

$\frac{b}{a}=2$에서 $b=2a$

쌍곡선 ㉠이 원점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$을 지나므로

$\frac{(0-2)^2}{a^2}-\frac{(0-1)^2}{(2a)^2}=1$

$\frac{4}{a^2}-\frac{1}{4a^2}=1$

$\frac{15}{4a^2}=1$, $a^2=\frac{15}{4}$

$b=2a$이므로 $b^2=4a^2=15$

따라서 ㉠의 두 초점의 좌표를

$(c+2,\ 1)$, $(-c+2,\ 1)$ $(c>0)$

이라고 하면

$c=\sqrt{a^2+b^2}$

$=\sqrt{\frac{15}{4}+15}$

$=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

이므로 두 초점의 사이의 거리는 $5\sqrt{3}$이다.

[다른 풀이]

두 직선 $y=2x-3$, $y=-2x+5$의 교점의 좌표가 $(2,\ 1)$이므로 주어진 쌍곡선을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 두 직선 $y=2x$, $y=-2x$를 점근선으로 하고 점 $(-2,\ -1)$을 지나는 쌍곡선이 되며 두 초점 사이의 거리는 변하지 않는다. 평행이동한 쌍곡선의 방정식을

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ ……㉠

이라고 하면 $\dfrac{b}{a}=2$에서 $b=2a$

쌍곡선 ㉠이 점 $(-2,\ -1)$을 지나므로

$\dfrac{4}{a^2}-\dfrac{1}{(2a)^2}=1$에서 $a^2=\dfrac{15}{4}$

$b=2a$이므로 $b^2=4a^2=15$

따라서 쌍곡선 ㉠의 두 초점의 좌표를

$(c,\ 0)$, $(-c,\ 0)\ (c>0)$이라고 하면

$c^2=a^2+b^2=\dfrac{15}{4}+15=\dfrac{75}{4}$에서 $c=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

이므로 두 초점 사이의 거리는 $5\sqrt{3}$이다.

13) 답 ③

[해설]

$y^2+6y-4x+17=0$에서

$(y+3)^2=4(x-2)$

이 곡선은 초점이 $(1,\ 0)$인 포물선 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 포물선이므로 구하는 초점의 좌표는 $\mathrm{F}(3,\ -3)$이다.

따라서 $a=3$, $b=-3$이므로 $ab=-9$

14) 답 ④

[해설]

$\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에서 직선 $x=4$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{\mathrm{PH}}=|4-x|$

$\overline{\mathrm{PF}}:\overline{\mathrm{PH}}=1:2$이므로

$\overline{\mathrm{PH}}=2\overline{\mathrm{PF}}$

$|4-x|=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$16-8x+x^2=4(x^2-2x+1)+4y^2$

$3x^2+4y^2=12$

$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

15) 답 ①

[해설]

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$에서 두 초점 F, F′과 네 꼭짓점 A, B, C, D의 좌표는

$\mathrm{F}(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$, $\mathrm{F'}(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$

$\mathrm{A}(0,\ b)$, $\mathrm{B}(-a,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ -b)$, $\mathrm{D}(a,\ 0)$

이고

$\overline{\mathrm{AF}}=\sqrt{(a^2-b^2)+b^2}=a$

이때 사각형 AF′CF는 넓이가 12인 정사각형이므로

$a^2=12$

$a>0$이므로 $a=2\sqrt{3}$

또한 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{AF}}\sin 45^\circ=2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{6}$이므로

$b=\sqrt{6}$

따라서 $\overline{\mathrm{BD}}=2a=4\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{AC}}=2b=2\sqrt{6}$이므로 사각형 ABCD의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BD}}\times\overline{\mathrm{AC}}=\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times2\sqrt{6}$

$=12\sqrt{2}$

16) 답 ①

[해설]

쌍곡선의 두 점근선의 방정식이 $y=2x$, $y=-2x$이고 두 초점이 x축 위에 있으므로 주어진 쌍곡선의 방정식을

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{4a^2}=1\ (a>0)$

이라고 하자. 점 $(2,\ 2\sqrt{2})$가 이 쌍곡선 위의 점이므로

$\dfrac{4}{a^2}-\dfrac{8}{4a^2}=1$, $\dfrac{2}{a^2}=1$

$a^2=2$

따라서 주어진 쌍곡선의 방정식은

$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{8}=1$

이므로 구하는 주축의 길이는 $2\sqrt{2}$이다.

17) 답 ⑤

[해설]

$3x^2-2y^2-6x-a+10=0$에서

$3(x^2-2x+1)-2y^2=a-7$

$3(x-1)^2-2y^2=a-7$ ……㉠

이때 ㉠이 y축에 평행한 주축을 갖는 쌍곡선이므로

$a-7<0$

$a<7$

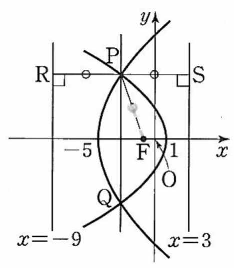
따라서 구하는 정수 a의 최댓값은 6이다.

18) 답 ③

[해설]

그림과 같이 두 포물선의 준선의 방정식은 각각

$x=-9$, $x=3$



위의 그림과 같이 두 포물선이 만나는 두 점을 각각 P, Q라고 하자. 점 P를 지나고 x축에 평행한 직선이 두 준선과 만나는 점을 각각 R, S라고 하면

$\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{RP}}=\overline{\mathrm{PS}}$

즉, 점 P는 선분 RS의 중점이므로 점 P의 x좌표는

$\dfrac{-9+3}{2}=-3$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $x=-3$이다.

다른풀이

점 $\mathrm{F}(-1,\ 0)$을 초점으로 하고 점 $(-5,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 포물선의 방정식은

$y^2=16(x+5)$ ……㉠

점 $\mathrm{F}(-1,\ 0)$을 초점으로 하고 점 $(1,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 포물선의 방정식은

$y^2=-8(x-1)$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $16(x+5)=-8(x-1)$, 즉 $x=-3$이므로

두 점 P, Q의 x좌표는 모두 -3이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은 $x=-3$이다.

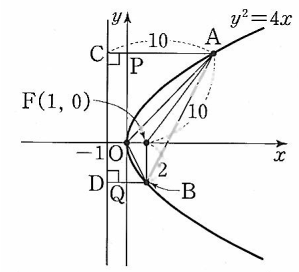
19) 답 ③

[해설]

포물선 $y^2=4x$의 초점은 $\mathrm{F}(1,\ 0)$이고 준선의 방정식은

$x=-1$이다.

포물선 위의 두 점 A, B에서 준선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 각각 C, D라고 하면



$\overline{AC}=\overline{AF}=10$이므로 점 A의 x좌표는 9이다.

즉, A(9, 6)

$\overline{BD}=\overline{BF}=2$이므로 점 B의 x좌표는 1이다.

즉, B(1, -2)

두 직선 AC와 BD가 y축과 만나는 점을 각각 P, Q라고 하면 삼각형 AOB의 넓이 S는

$S=$(사각형 APQB의 넓이)$-$(삼각형 APO의 넓이)

$-$(삼각형 OQB의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times(9+1)\times8-\frac{1}{2}\times9\times6-\frac{1}{2}\times1\times2$

$=40-27-1=12$

20) 답 ④

[해설]

타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 위의 점 P와 두 초점 F, F′에서 타원의 정의에 의하여

$\overline{PF}+\overline{PF'}=10$ ……㉠

원 C 위의 점 Q에 대하여 $\overline{FQ}\geq\overline{PF}-\overline{PQ}=\overline{PF}-\overline{PF'}$이고 선분 FQ의 길이의 최솟값이 4이므로

$\overline{PF}-\overline{PF'}=4$ ……㉡

㉠$-$㉡을 하면

$2\overline{PF'}=6$

$\overline{PF'}=3$

따라서 구하는 원 C의 넓이는 9π이다.

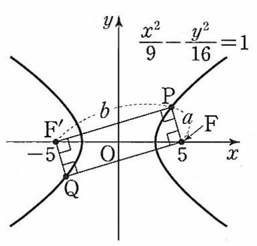
21) 답 ⑤

[해설]

쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$의 두 초점은

F$(\sqrt{9+16},\ 0)$, F′$(-\sqrt{9+16},\ 0)$

즉, F(5, 0), F′(-5, 0)



직사각형 PF′QF에서 $\overline{PF}=a$, $\overline{PF'}=b$로 놓으면 점 P가 제 1사분면 위에 있으므로 $b>a$이고 쌍곡선의 정의에 의하여 $b-a=6$, 즉 $b=a+6$이다.

이때 삼각형 PF′F는 $\angle FPF'=90^\circ$인 직각삼각형이고 $\overline{FF'}=10$이므로

$a^2+b^2=a^2+(a+6)^2=10^2$

$a^2+6a-32=0$

따라서 $a=-3+\sqrt{41}$, $b=3+\sqrt{41}$이므로

직사각형 PF′QF의 둘레의 길이는

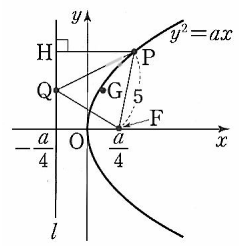
$2(a+b)=2\times2\sqrt{41}=4\sqrt{41}$

22) 답 ③

[해설]

$y^2=ax=4\times\frac{a}{4}x$이므로 이 포물선의 초점 F의 좌표는 $\left(\frac{a}{4},\ 0\right)$

준선 l의 방정식은 $x=-\frac{a}{4}$



점 P에서 준선 l에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{PH}=\overline{PF}=5$이므로 점 P의 x좌표는 $5-\frac{a}{4}$이다.

따라서 점 P의 좌표를 P$\left(5-\frac{a}{4},\ y_1\right)$, 점 Q의 좌표를 Q$\left(-\frac{a}{4},\ y_2\right)$라고 하자. (단, $y_1>0$)

삼각형 PQF의 무게중심 G의 좌표가 $(1,\ \sqrt{6})$이므로

$\frac{5-\frac{a}{4}+\left(-\frac{a}{4}\right)+\frac{a}{4}}{3}=1,\ \frac{y_1+y_2+0}{3}=\sqrt{6}$

$5-\frac{a}{4}=3,\ y_1+y_2=3\sqrt{6}$

즉, $a=8,\ y_1+y_2=3\sqrt{6}$

따라서 포물선의 방정식은 $y^2=8x$이고 초점 F와 점 P는 각각 F(2, 0), P$(3,\ 2\sqrt{6})$이므로

$y_1=2\sqrt{6},\ y_2=\sqrt{6}$

즉, 점 Q의 좌표는 $(-2,\ \sqrt{6})$

따라서 $\overline{QF}=\sqrt{(2+2)^2+(0-\sqrt{6})^2}=\sqrt{22}$

23) 답 ②

[해설]

장축의 길이가 $2\sqrt{3}$, 단축의 길이가 2, 중심이 원점이고 점 A(0, -1)을 지나는 타원의 방정식은

$\frac{x^2}{(\sqrt{3})^2}+\frac{y^2}{1^2}=1$

즉, $\frac{x^2}{3}+y^2=1$

점 P$(a,\ b)$가 타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 위의 점이므로

$\frac{a^2}{3}+b^2=1$

$a^2=3(1-b^2)$

점 P가 제 1사분면 위의 점이므로

$0<b<1$

$\overline{AP}^2=a^2+(b+1)^2$

$=3(1-b^2)+(b+1)^2$

$=-2b^2+2b+4$

$=-2\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$

따라서 $b=\frac{1}{2}$일 때, 선분 AP의 길이의 최댓값은

$\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$이다.

24) 답 ①

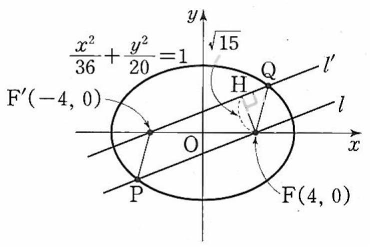
[해설]

타원 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$의 두 초점은

$F'(-\sqrt{36-20},\ 0)$, $F(\sqrt{36-20},\ 0)$

즉, $F'(-4,\ 0)$, $F(4,\ 0)$

점 F에서 직선 l'에 내린 수선의 발을 H라고 하면 평행한 두 직선 l, l' 사이의 거리가 $\sqrt{15}$이므로 $\overline{FH}=\sqrt{15}$



직각삼각형 $F'FH$에서

$\overline{FF'}=8$, $\overline{FH}=\sqrt{15}$

이므로

$\overline{F'H}=\sqrt{64-15}=\sqrt{49}=7$

이때 타원 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$의 장축의 길이는 $2\times6=12$이므로

$\overline{HQ}=p$, $\overline{QF}=q$라고 하면 타원의 정의에 의하여

$\overline{F'Q}+\overline{QF}=\overline{F'H}+\overline{HQ}+\overline{QF}=7+p+q=12$

$p+q=5$ ……㉠

또한 직각삼각형 FHQ에서

$q^2-p^2=15$

즉, $(q+p)(q-p)=15$

$5(q-p)=15$

$q-p=3$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=1$, $q=4$

$\overline{QF}=q=4$

점 P와 점 Q는 서로 원점에 대하여 대칭이므로 $\overline{PF'}=4$

따라서 $\overline{PF'}+\overline{QF}=8$

25) 답 ③

[해설]

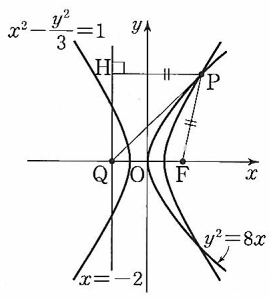
쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$의 두 초점의 좌표는

$(-\sqrt{1+3},\ 0)$, $(\sqrt{1+3},\ 0)$

즉, $(-2,\ 0)$, $(2,\ 0)$이므로

점 $Q(-2,\ 0)$은 쌍곡선의 한 초점이다.

또한 $y^2=4\times2x$에서 이 포물선의 초점의 좌표는 $(2,\ 0)$, 준선의 방정식은 $x=-2$이다.



따라서 $F(2,\ 0)$으로 놓으면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PH}=\overline{PF}$

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PQ}-\overline{PF}=2\times1=2$

따라서 $\overline{PQ}-\overline{PH}=2$

26) 답 ④

[해설]

두 쌍곡선은 각각 원점에 대하여 대칭이므로 두 쌍곡선의 교점인 P, Q도 원점에 대하여 대칭이다.

즉, $\overline{PG}=\overline{QG'}$, $\overline{PF}=\overline{QF'}$

주어진 두 쌍곡선의 주축의 길이가 모두 2이므로

(ⅰ) $\overline{PG}=k$라고 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{QG}=\overline{QG'}+2$이므로

$\overline{PG}\times\overline{QG}=\overline{QG'}\times\overline{QG}=k(k+2)=8$

$k^2+2k-8=0$, $(k+4)(k-2)=0$

$k>0$ 이므로 $k=2$

(ⅱ) $\overline{PF}=l$이라고 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{QF}=\overline{QF'}+2$이므로

$\overline{PF}\times\overline{QF}=\overline{QF'}\times\overline{QF}=l(l+2)=4$

$l^2+2l-4=0$

$l>0$이므로 $l=-1+\sqrt{5}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 사각형 PGQF의 둘레의 길이는

$\overline{PG}+\overline{QG}+\overline{PF}+\overline{QF}=k+(k+2)+l+(l+2)$

$=2k+2l+4$

$=2\times2+2(-1+\sqrt{5})+4$

$=6+2\sqrt{5}$

27) 답 ④

[해설]

$x^2-3xy+y^2=5$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{d}{dx}(x^2)-\dfrac{d}{dx}(3xy)+\dfrac{d}{dx}(y^2)=\dfrac{d}{dx}(5)$

$2x-\left(3y+3x\dfrac{dy}{dx}\right)+2y\dfrac{dy}{dx}=0$

$(2y-3x)\dfrac{dy}{dx}=3y-2x$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3y-2x}{2y-3x}$ (단, $2y\neq3x$)

따라서 점 $(1,\ -1)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{3y-2x}{2y-3x}$에 $x=1$, $y=-1$을 대입한 값과 같으므로 $\dfrac{-3-2}{-2-3}=1$이다.

28) 답 ④

[해설]

$ax^2+\sqrt{y}=b$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2ax+\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\dfrac{dy}{dx}=0$ (단, $y\neq0$)

$\dfrac{dy}{dx}=-4ax\sqrt{y}$

점 $(1,\ 4)$에서의 접선의 기울기가 -2이므로

$-4a\sqrt{4}=-2$에서

$a=\dfrac{1}{4}$

또 점 $(1,\ 4)$가 곡선 $ax^2+\sqrt{y}=b$ 위의 점이므로

$a+2=b$

$b=\dfrac{1}{4}+2=\dfrac{9}{4}$

따라서 $a+b=\dfrac{1}{4}+\dfrac{9}{4}=\dfrac{5}{2}$

29) 답 ②

[해설]

$x^2-2y^2=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x-4y\dfrac{dy}{dx}=0$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{2y}$ (단, $y\neq0$)

따라서 점 $(3,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{3}{2\times2}=\dfrac{3}{4}$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-2=\dfrac{3}{4}(x-3)$

즉, $3x-4y-1=0$

따라서 $a=3$, $b=-4$이므로

$a+b=-1$

30) 답 ②

[해설]

$y^2=8x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2y\dfrac{dy}{dx}=8$, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4}{y}$ (단, $y\neq 0$)

따라서 점 $\mathrm{P}(2,\ 4)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{4}{4}=1$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-4=1\times(x-2)$, 즉 $y=x+2$

따라서 점 Q의 좌표는 $(-2,\ 0)$이다.

한편, $y^2=8x=4\times 2x$이므로 이 포물선의 초점 F의 좌표는 $(2,\ 0)$이다.

따라서 삼각형 PQF의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times(2+2)\times 4=8$이다.

31) 답 ④

[해설]

$y^2=12x=4\times 3x$이므로 이 포물선 위의 점 $(3,\ -6)$에서의 접선의 방정식은

$-6y=2\times 3(x+3)$

즉, $y=-x-3$

이 직선이 점 $(a,\ 2)$를 지나므로

$2=-a-3$

$a=-5$

32) 답 ③

[해설]

$x^2=8y=4\times 2y$이므로 이 포물선 위의 점 $\left(2,\ \dfrac{1}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$2x=2\times 2\left(y+\dfrac{1}{2}\right)$

즉, $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$

따라서 이 직선에 평행하고 점 $(-4,\ 2)$를 지나는 직선 l의 방정식은

$y-2=\dfrac{1}{2}(x+4)$

즉, $x-2y+8=0$

한편, 포물선 $x^2=8y$의 초점의 좌표는 $(0,\ 2)$이다.

그러므로 점 $(0,\ 2)$와 직선 $x-2y+8=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|0-4+8|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

33) 답 ②

[해설]

$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{2x}{9}+\dfrac{2y}{4}\dfrac{dy}{dx}=0$, $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{4x}{9y}$ (단, $y\neq 0$)

따라서 점 $\mathrm{A}\left(-\sqrt{5},\ \dfrac{4}{3}\right)$에서의 접선의 기울기는

$-\dfrac{4\times(-\sqrt{5})}{9\times\dfrac{4}{3}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-\dfrac{4}{3}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}(x+\sqrt{5})$, 즉 $y=\dfrac{\sqrt{5}}{3}x+3$

따라서 이 직선이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각 $\left(-\dfrac{9}{\sqrt{5}},\ 0\right)$, $(0,\ 3)$이므로 구하는 삼각형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{9}{\sqrt{5}}\times 3=\dfrac{27\sqrt{5}}{10}$

34) 답 ③

[해설]

점 $(2,\ -1)$이 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1\quad\cdots\cdots㉠$

타원 위의 점 $(2,\ -1)$에서의 접선의 방정식은

$\dfrac{2x}{a^2}+\dfrac{-y}{b^2}=1$

즉, $y=\dfrac{2b^2}{a^2}x-b^2$

이 접선의 기울기가 1이므로

$\dfrac{2b^2}{a^2}=1$

$a^2=2b^2\quad\cdots\cdots㉡$

㉡을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{2}{b^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$

$b^2=3$

이것을 ㉡에 대입하면 $a^2=6$

따라서 두 초점의 좌표는 $(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$, $(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$

즉, $(-\sqrt{3},\ 0)$, $(\sqrt{3},\ 0)$이므로 두 초점 사이의 거리는 $2\sqrt{3}$이다.

35) 답 ①

[해설]

$5x^2-y^2=10$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$10x-2y\dfrac{dy}{dx}=0$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{5x}{y}$ (단, $y\neq 0$)

따라서 쌍곡선 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{5a}{b}$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-b=\dfrac{5a}{b}(x-a)$

$y=\dfrac{5a}{b}x-\dfrac{5a^2-b^2}{b}\quad\cdots\cdots㉠$

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 쌍곡선 위의 점이므로

$5a^2-b^2=10\quad\cdots\cdots㉡$

㉡을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=\dfrac{5a}{b}x-\dfrac{10}{b}\quad\cdots\cdots㉢$

따라서 이 직선이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각 $\left(\dfrac{2}{a},\ 0\right)$, $\left(0,\ -\dfrac{10}{b}\right)$

이다. $a>0$, $b>0$이고 직선 ㉢과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 3이므로

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{a}\times\dfrac{10}{b}=3$에서

$ab=\dfrac{10}{3}$

36) 답 ⑤

[해설]

$x^2+y^2-2x-3y-4=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x+2y\dfrac{dy}{dx}-2-3\dfrac{dy}{dx}=0$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2x+2}{2y-3}$ (단, $2y-3\neq 0$)

따라서 점 $(2,\ -1)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{-2\times2+2}{2\times(-1)-3}=\frac{2}{5}$$
이므로 구하는 접선의 방정식은
$$y-(-1)=\frac{2}{5}(x-2)$$
$$2x-5y-9=0$$
따라서 $a=-5$, $b=-9$이므로
$$ab=45$$
37) 답 ③
[해설]
포물선 $y^2=10x$는 x축에 대하여 대칭이므로 기울기가 1인 접선의 접점의 좌표를 $\left(\frac{t^2}{10},\ t\right)$ $(t>0)$라고 하자.
$y^2=10x$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$$2y\frac{dy}{dx}=10$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{5}{y}\ (\text{단, } y\neq0)$$
접선의 기울기가 1이므로
$$\frac{5}{y}=1$$
$$y=5$$
즉, $t=5$이므로 접점의 좌표는 $\left(\frac{5}{2},\ 5\right)$이다.
따라서 구하는 접선의 방정식은
$$y-5=1\times\left(x-\frac{5}{2}\right)$$
$$y=x+\frac{5}{2}$$
이 직선이 점 $(a,\ 4)$를 지나므로
$$4=a+\frac{5}{2}$$
$$a=\frac{3}{2}$$
38) 답 ④
[해설]
$2x^2+y^2=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$$4x+2y\frac{dy}{dx}=0$$
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{y}\ (\text{단, } y\neq0)$$
따라서 타원 $2x^2+y^2=1$과 직선 $y=3x$의 교점의 좌표를 $(a,\ 3a)$라고 하면 $a\neq0$이므로 교점에서의 타원의 접선의 기울기는
$$-\frac{2a}{3a}=-\frac{2}{3}$$
39) 답 ④
[해설]
포물선 $y^2=8x$와 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{36}=1$이 만나는 점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$로 놓으면 두 곡선 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 각각
$$y_1y=2\times2(x+x_1),\quad \frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{36}=1$$
이때 두 접선이 서로 수직이므로 기울기의 곱은 -1이다.
$y_1\neq0$이므로 $\frac{4}{y_1}\times\left(-\frac{36}{a^2}\times\frac{x_1}{y_1}\right)=-1$
$$\frac{144}{a^2}\times\frac{x_1}{{y_1}^2}=1\quad\cdots\cdots㉠$$
한편, $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$은 포물선 $y^2=8x$ 위의 점이므로
$${y_1}^2=8x_1\quad\cdots\cdots㉡$$
㉡을 ㉠에 대입하면
$$\frac{144}{a^2}\times\frac{x_1}{8x_1}=1$$
$$a^2=18$$
따라서 타원 $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{36}=1$의 두 초점의 좌표는
$$(0,\ -\sqrt{36-18}),\ (0,\ \sqrt{36-18})$$
즉, $(0,\ -3\sqrt{2})$, $(0,\ 3\sqrt{2})$
이므로 두 초점 사이의 거리는 $6\sqrt{2}$이다.
40) 답 15
[해설]
쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점의 좌표가 $(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$이므로
$$a^2+b^2=9\quad\cdots\cdots㉠$$
점 $\mathrm{P}(4,\ k)$가 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로
$$\frac{16}{a^2}-\frac{k^2}{b^2}=1\quad\cdots\cdots㉡$$
쌍곡선 위의 점 $\mathrm{P}(4,\ k)$에서의 접선의 방정식은 $\frac{4x}{a^2}-\frac{ky}{b^2}=1$이고 이 직선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로
$$\frac{4}{a^2}=1,\ a^2=4$$
이것을 ㉠에 대입하면 $b^2=5$
$a^2=4$, $b^2=5$를 ㉡에 대입하면
$$\frac{16}{4}-\frac{k^2}{5}=1,\ \frac{k^2}{5}=3$$
따라서 $k^2=15$

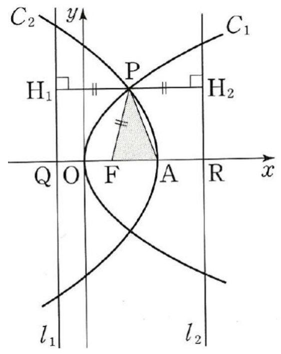
정답 및 해설

41) 정답 ③
포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PF}}$이고, 직각삼각형 FPR에서 $\overline{\mathrm{PR}}=2\overline{\mathrm{FP}}$이므로 $\cos(\angle\mathrm{FPR})=\frac{1}{2}$에서 $\angle\mathrm{FPR}=60°$이다.
따라서 삼각형 FPQ는 정삼각형이다.
포물선 $y^2=8x$의 초점 F의 좌표는 $(2,\ 0)$이고, 준선 l의 방정식은 $x=-2$이므로 준선 l과 x축의 교점을 H라 하면 $\overline{\mathrm{FH}}=4$이고, $\overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{FH}}=8$이다.
점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$로 놓으면
$\overline{\mathrm{PQ}}=x_1-(-2)=8$에서 $x_1=6$
${y_1}^2=8\times6=48$에서 $y_1=4\sqrt{3}$ $(\because\ y_1>0)$
따라서 점 Q의 좌표는 $(-2,\ 4\sqrt{3})$이므로
$$\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{(-2)^2+(4\sqrt{3})^2}=2\sqrt{13}$$

[다른 풀이]
준선 l과 x축의 교점을 H라 하면 $\overline{\mathrm{FH}}=4$이고, 삼각형 FPQ는 정삼각형이므로
$$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QF}}=2\overline{\mathrm{FH}}=8$$
삼각형 QHF에서 $\overline{\mathrm{QH}}=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$이므로 $\overline{\mathrm{OH}}=2$이므로 삼각형 QHO에서
$$\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{(-2)^2+(4\sqrt{3})^2}=2\sqrt{13}$$

42) **정답** ⑤

두 포물선 C_1, C_2의 준선을 각각 l_1, l_2라 하고 점 P에서 l_1, l_2에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라 하자



점 F의 좌표가 $(3,\ 0)$이므로 준선 l_1의 방정식 $x=-3$이다.

점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면

$\overline{\mathrm{PH_1}}=\overline{\mathrm{PF}}=8$에서

$x_1-(-3)=8$

$\therefore\ x_1=5$

포물선 C_1의 방정식은 $y^2=12x$이므로

${y_1}^2=12x_1=60$에서

$y_1=2\sqrt{15}\ (\because\ y_1>0)$

$\overline{\mathrm{FA}}=k$라 하고, 준선 l_1, l_2와 x축의 교점을 각각 Q, R라 하면

$\overline{\mathrm{AR}}=\overline{\mathrm{FA}}=k$이므로

$\overline{\mathrm{QR}}=6+2k$

한편

$\overline{\mathrm{H_1H_2}}=\overline{\mathrm{H_1P}}+\overline{\mathrm{PH_2}}$

$=8+8$

$=16$

이므로 $6+2k=16$에서

$k=5$

따라서 구하는 삼각형 PFA의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times5\times2\sqrt{15}=5\sqrt{15}$

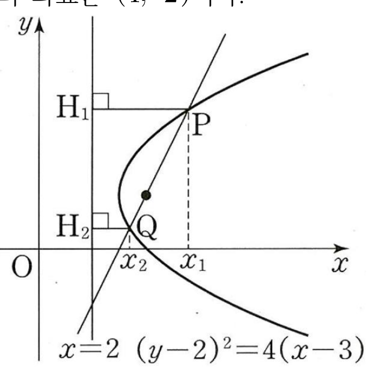
43) **정답** ③

$y^2=4(x+y-4)$에서

$y^2=4x+4y-16$, $y^2-4y+4=4x-12$,

$(y-2)^2=4(x-3)$이므로 주어진 포물선은 곡선 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다. 포물선 $y^2=4x$의 초점의 좌표가 $(1,\ 0)$이므로 포물선 $(y-2)^2=4(x-3)$의 초점의 좌표는 $(4,\ 2)$이다.

점 $(4,\ 2)$를 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은 $y-2=2(x-4)$, 즉 $y=2x-6$이므로 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하면 x_1, x_2는 이차방정식 $(2x-8)^2=4(x-3)$, 즉 $x^2-9x+19=0$의 두 근이다.



따라서 근과 계수와의 관계에 의하여 $x_1+x_2=9$이다.

포물선 $(y-2)^2=4(x-3)$의 준선의 방정식이 $x=2$이므로 두 점 P, Q에서 준선 $x=2$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라 하면

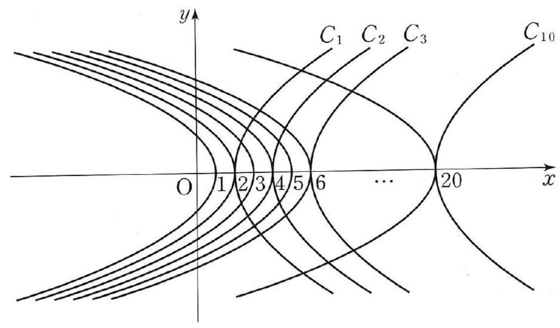
$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PH_1}}+\overline{\mathrm{QH_2}}=(x_1-2)+(x_2-2)$

$=x_1+x_2-4=9-4=5$

44) **정답** ①

포물선 C_n : $y^2=8(x-2n)$은 포물선 $y^2=8x$를 x축의 방향으로 $2n$만큼 평행이동한 것이므로 꼭짓점의 좌표는 $(2n,\ 0)$이다.

포물선 $y^2=-4(x-k)$ (k는 자연수)는 포물선 $y^2=-4x$를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이므로 꼭짓점의 좌표는 $(k,\ 0)$이다.



그림에서

$a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=2$, $a_4=3$, $a_5=4$, $\cdots$, $a_{20}=19$

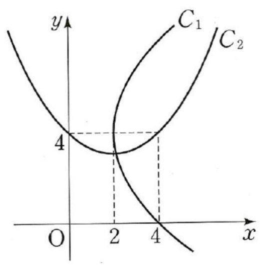
이므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{20}a_k=0+1+2+3+\cdots+19$

$=\dfrac{19\times20}{2}$

$=190$

45) **정답** 10



포물선 C_1은 포물선 $y^2=8x$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 포물선 C_1의 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ 4)$이고 초점의 좌표는 $(4,\ 4)$이다.

또 포물선 C_2는 포물선 $x^2=4py$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 m만큼 평행이동한 것이므로 포물선 C_2의 초점의 좌표는 $(2,\ p+m)$이다.

$\therefore\ p+m=4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

점 $(4,\ 4)$가 포물선 C_2 위에 있으므로

$4=4p(4-m)$에서

$p(4-m)=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠에서 $p=4-m$이고, 이를 ㉡에 대입하면

$p^2=1$

$\therefore\ p=1\ (\because\ p>0)$

㉠에서 $m=3$

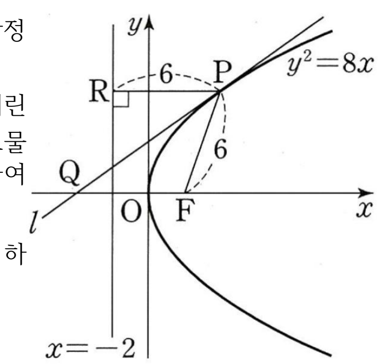
$\therefore\ p^2+m^2=1+9=10$

46) **정답** ⑤

포물선 $y^2=8x$의 준선의 방정식은 $x=-2$이고,

점 P에서 준선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 R라 하면 포물선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{PF}}=6$이다.



점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면

$x_1=6-2=4$

${y_1}^2=8\times4=32$

$\therefore\ y_1=4\sqrt{2}\ (\because\ y_1>0)$

따라서 점 $\mathrm{P}(4,\ 4\sqrt{2})$에서의 접선 l의 방정식은

$4\sqrt{2}y=4(x+4)$, 즉 $x-\sqrt{2}y+4=0$

이므로 점 Q의 좌표는 $(-4,\ 0)$이고,

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{8^2+(4\sqrt{2})^2}=4\sqrt{6}$

$\overline{\mathrm{QF}}=2-(-4)=6$

따라서 삼각형 PQF에서

$$\cos(\angle\mathrm{PQF})=\frac{(4\sqrt{6})^2+6^2-6^2}{2\times4\sqrt{6}\times6}=\frac{96}{48\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

47) **정답** ②

점 P의 좌표는 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 점 P에서의 접선의 방정식은

$y_1y=2(x+x_1)$

이므로 점 A의 좌표는 $(-x_1,\ 0)$이다.

초점 F의 좌표는 $(1,\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{AF}}=1-(-x_1)$

$=1+x_1$

$\overline{\mathrm{AP}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{FH}}$이고, $\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{FB}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=2\overline{\mathrm{FH}}=2\sqrt{6}$

$\overline{\mathrm{AP}}^2=(2x_1)^2+{y_1}^2=(2\sqrt{6})^2$이고,

${y_1}^2=4x_1$이므로

$4{x_1}^2+4x_1=24$에서

${x_1}^2+x_1-6=0$

$(x_1+3)(x_1-2)=0$

$x_1>0$이므로

$x_1=2$

${y_1}^2=4x_1=8$에서

$y_1=2\sqrt{2}\ (\because\ y_1>0)$

$\overline{\mathrm{AF}}=3$이므로 삼각형 PAF의 넓이는

$\frac{1}{2}\times3\times2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

48) **정답** ②

포물선 $y^2=4px$에서 $p=-2$이므로 주어진 포물선의 방정식은

$y^2=-8x$

이다. 포물선이 점 $(a,\ 6)$을 지나므로

$36==-8a$에서

$a=-\frac{9}{2}$

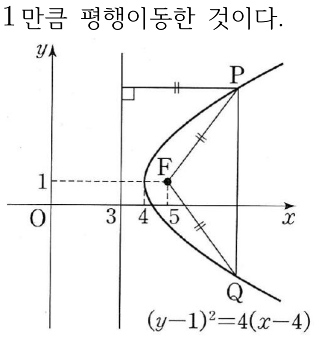
49) **정답** ⑤

$y^2-4x-2y+17=0$에서

$y^2-2y+1=4x-16$

$(y-1)^2=4(x-4)$

이므로 주어진 포물선은 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.



따라서 주어진 포물선의 준선의 방정식은 $x=3$이고,

포물선의 정의에 의하여 두 점 P, Q에서 준선에 이르는 거리가 5이므로 두 점 P, Q의 x좌표는 모두 8이다.

$(y-1)^2=4(x-4)$에서 $x=8$일 때,

$(y-1)^2=16$

$\therefore\ y=5$ 또는 $y=-3$

두 점 P, Q의 좌표를 각각 $\mathrm{P}(8,\ 5)$, $\mathrm{Q}(8,\ -3)$으로 놓으면 구하는 삼각형 POQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\{5-(-3)\}\times8=32$

50) **정답** ③

포물선 $x^2=8y+8=8(y+1)$은 포물선 $x^2=8y$를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 준선의 방정식은 $y=-3$이다.

따라서 두 직선 $y=-3$, $y=x-4$의 교점의 x좌표는

$-3=x-4$에서

$x=1$

51) **정답** ④

두 점A, B의 좌표는 각각 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 4)$이다.

직선 CD는 기울기가 2이고 포물선 $y^2=6x$에 접하므로 직선 CD의 방정식은

$$y=2x+\frac{\frac{3}{2}}{2}=2x+\frac{3}{4}$$

따라서 C의 좌표는 $\left(-\frac{3}{8},\ 0\right)$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=-\frac{3}{8}-(-2)$

$=\frac{13}{8}$

이고 구하는 평행사변형 ACDB의 넓이는

$\frac{13}{8}\times4=\frac{13}{2}$

52) **정답** ⑤

점 B의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 점 B에서의 접선의 방정식은 $y_1y=2(x+x_1)$이고 접선이 점 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$을 지나므로

$0=2(-2+x_1)$에서

$x_1=2$

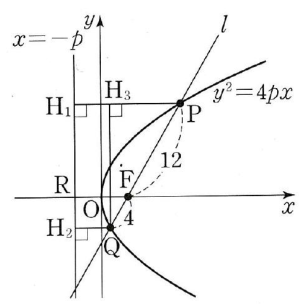
${y_1}^2=4x_1=4\times2=8$에서

$y_1=2\sqrt{2}\ (\because\ y_1>0)$

따라서 점 B의 좌표는 $(2,\ 2\sqrt{2})$이므로

$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$

53) **정답** ③



직선 $x=-p$는 포물선 $y^2=4px$의 준선이므로 포물선의 정의에 의해

$\overline{\mathrm{PH_1}}=\overline{\mathrm{PF}}=12$,

$\overline{\mathrm{QH_2}}=\overline{\mathrm{QF}}=4$

준선 $x=-p$와 x축의 교점을 R라 하고, 점 Q에서 선분 $\mathrm{PH_1}$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_3}$이라 하면

$\overline{\mathrm{H_1H_3}}=4$, $\overline{\mathrm{H_3P}}=8$이므로

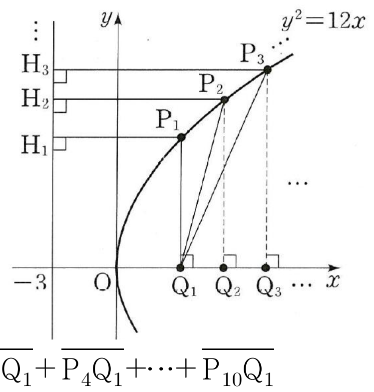
$\overline{\mathrm{FR}}=4+8\times\frac{1}{4}=6$

점 F의 좌표가 $(p,\ 0)$이므로

$\overline{FR}=2p$
$2p=6$에서
$p=3$
점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$ $(y_1>0)$이라 하면
$\overline{PH_1}=x_1+3=12$에서
$x_1=9$
${y_1}^2=12\times 9=108$에서
$y_1=6\sqrt{3}$ $(\because\ y_1>0)$
점 Q의 좌표를 $(x_2,\ y_2)$ $(y_2<0)$라 하면
$\overline{QH_2}=x_2+3=4$에서
$x_2=1$
${y_2}^2=12\times 1=12$에서
$y_2=-2\sqrt{3}$ $(\because\ y_2<0)$
$\therefore\ \overline{H_1H_2}=y_1-y_2$
$=6\sqrt{3}-(-2\sqrt{3})$
$=8\sqrt{3}$

[다른 풀이]
점 Q에서 선분 H_1P에 내린 수선의 발을 H_3이라 하면
$\overline{H_1H_2}=\overline{QH_3}$
삼각형 PH_3Q에서
$\overline{PH_3}=\overline{PH_1}-\overline{H_1H_3}$
$=\overline{PH_1}-\overline{H_2Q}$
$=\overline{PF}-\overline{FQ}$
$=12-4=8$
$\overline{PQ}=12+4=16$
$\therefore\ \overline{QH_3}=\sqrt{16^2-8^2}=\sqrt{192}=8\sqrt{3}$

54) 정답 144
점 P_1의 y좌표가 6이므로 x좌표가 a라 하면
$6^2=12a$에서
$a=3$
따라서 점 P_1의 좌표는 $(3,\ 6)$, 점 Q_1의 좌표는 $(3,\ 0)$이므로 $x_1=3$이고
$x_n=3+(n-1)\times 2=2n+1$ $(n\geq 1)$
한편 점 $Q_1(3,\ 0)$은 포물선 $y^2=12x$의 초점이고 준선의 방정식은 $x=-3$이므로 점 P_n에서 내린 수선의 발을 H_n이라 하면 포물선의 정의에 의하여
$\overline{P_nQ_1}=\overline{P_nH_n}$
$=x_n+3$
$=2n+4$



$\therefore\ \overline{P_2Q_1}+\overline{P_3Q_1}+\overline{P_4Q_1}+\cdots+\overline{P_{10}Q_1}$
$=8+10+12+\cdots+24$
$=\dfrac{9(8+24)}{2}$
$=144$

55) 정답 ④
점 $A(-2,\ 4)$에서 포물선 $y^2=8x$에 그은 접선의 기울기를 m이라 하며 접선의 방정식은 $y=mx+\dfrac{2}{m}$이고 접선이 점 A를 지나므로
$4=-2m+\dfrac{2}{m}$
$m^2+2m-1=0$ $\cdots\cdots$ ㉠
이차방정식 ㉠의 두 근을 $m_1,\ m_2$라 하면 근과 계수와의 관계에 의하여
$m_1\times m_2=-1$
이므로 두 접선은 수직이다.
따라서 삼각형 BAC는 직각삼각형이고 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{AB}\times\overline{AC}=\overline{BC}\times\overline{AH}$ $\cdots\cdots$ ㉡
이차방정식 ㉠의 두 근은 $-1\pm\sqrt{2}$이므로 접선의 방정식은
$y=(-1+\sqrt{2})x+\dfrac{2}{-1+\sqrt{2}}$ 또는
$y=(-1-\sqrt{2})x+\dfrac{2}{-1-\sqrt{2}}$
$x=0$일 때,
$y=2+2\sqrt{2}$ 또는 $y=2-2\sqrt{2}$
$B(0,\ 2+2\sqrt{2})$, $C(0,\ 2-2\sqrt{2})$라 하면
$\overline{BC}=(2+2\sqrt{2})-(2-2\sqrt{2})$
$=4\sqrt{2}$
$\overline{AH}=2$이므로 ㉡에서
$\overline{AB}\times\overline{AC}=4\sqrt{2}\times 2=8\sqrt{2}$

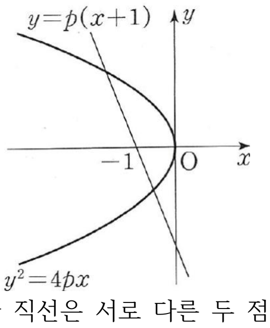
56) 정답 ④
포물선 $y^2=-4p(x-a)$는 포물선 $y^2=-4px$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이므로 점 P의 x좌표를 x_1이라 하면 두 곡선 $y^2=4px$, $y^2=-4p(x-a)$는 직선 $x=x_1$에 대하여 대칭이다.
따라서 두 접선 $l,\ m$도 직선 $x=x_1$에 대하여 대칭이고, $l\perp m$이므로 직선 $l,\ m$의 기울기는 각각 $1,\ -1$이다.
포물선 $y^2=4px$의 기울기 1인 접선 l의 방정식은 $y=x+p$이므로 점 P의 좌표를 구하면
$(x+p)^2=4px$
$x^2-2px+p^2=0$
$(x-p)^2=0$
$\therefore\ x=p$
$y=x+p=p+p=2p$
따라서 점 P의 좌표는 $(p,\ 2p)$이므로 직선 OP기울기는 $\dfrac{2p}{p}=2$이다.

57) 정답 ②
두 점 P, Q의 x좌표를 각각 $x_1,\ x_2$라 하면 $x_1,\ x_2$는 이차방정식
$\{2(x-p)\}^2=4px$
즉 $x^2-3px+p^2=0$의 두 근이다.
따라서 근과 계수와의 관계에 의하여
$x_1+x_2=3p$
점 A는 선분 PQ의 중점이므로 점 A의 x좌표는
$\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{3p}{2}$
이고, 점 A의 y좌표는 $2\left(\dfrac{3}{2}p-p\right)=p$이다.
$\overline{AB}=3$이므로 $p=3$
포물선 $y^2=4px$의 초점을 $F(p,\ 0)$이라 하면 직선

$y=2(x-p)$는 점 F를 지난다.
두 점 P, Q에서 포물선 $y^2=4px$의 준선 $x=-p$에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면 포물선의 정의에 의하여
$\overline{PF}=\overline{PH_1}=x_1+p$
$\overline{QF}=\overline{QH_2}=x_2+p$
$\therefore\ \overline{PQ}=\overline{PF}+\overline{QF}$
$=(x_1+p)+(x_2+p)$
$=x_1+x_2+2p$
$=5p\ (\because\ x_1+x_2=3p)$
$=5\times3$
$=15$

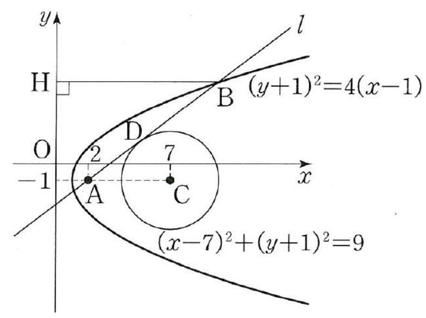
[다른 풀이]
두 점 P, Q의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하면 x_1, x_2는 이차방정식
$\{2(x-p)\}^2=4px$
즉 $x^2-3px+p^2=0$의 두 근이다.
따라서 근과 계수와의 관계에 의하여
$x_1+x_2=3p$
점 A는 선분 PQ의 중점이므로 점 A의 x좌표는
$\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{3p}{2}$
이다. 또 $\overline{AB}=3$이므로 점 A의 y좌표는 3이고,
$3=2(x-p)$에서 $x=\dfrac{3}{2}+p$이므로 점 A의 x좌표는 $\dfrac{3}{2}+p$이다.
$\dfrac{3}{2}p=\dfrac{3}{2}+p$에서 $p=3$
세 점 P Q, A에서 포물선 $y^2=4px$의 준선 $x=-p$에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2, H라 하면
$\overline{AH}=\dfrac{3}{2}+p+p=\dfrac{3}{2}+3+3=\dfrac{15}{2}$이고 직선 $y=2(x-p)$가 포물선의 초점 $F(p,\ 0)$을 지나므로
$\overline{PQ}=\overline{PF}+\overline{QF}=\overline{PH_1}+\overline{QH_2}$
$=2\overline{AH}=2\times\dfrac{15}{2}=15$

58) **정답** ⑤
ㄱ. $p=1$이면
$y^2=4x,\ y=x+1$에서
$(x+1)^2=4x,\ (x-1)^2=0$
$\therefore\ x=1$
그러므로 포물선과 직선은 점 $(1,\ 2)$에서 접한다. (참)
ㄴ. 포물선 $y^2=4px$의 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ 0)$이고 직선 $y=p(x+1)$은 p의 값에 관계없이 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로 $p<0$일 때 포물선과 직선은 그림과 같다.



그러므로 포물선과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다. (참)
[다른 풀이]
두 방정식 $y^2=4px,\ y=p(x+1)$에서
$p^2(x+1)^2=4px$
$px^2+2px+p=4x$
$px^2+2(p-2)x+p=0$ …… ㉠
이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=(p-2)^2-p^2$
$=-4p+4>0\ (\because\ p<0)$
따라서 포물선과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다. (참)
ㄷ. 포물선 $y^2=4px$에 접하고 기울기가 p인 접선의 방정식은
$y=px+\dfrac{p}{p}$
즉 $y=px+1$
그러므로 포물선은 $y^2=4px$ 위의 점과 직선 $y=px+p$사이의 거리의 최솟값은 평행한 두 작선 $y=px+1,\ y=px+p$ 사이의 거리와 같고, 이는 점 $(0,\ p)$와 직선 $px-y+1=0$ 사이의 거리와 같다.
$f(p)=\dfrac{|-p+1|}{\sqrt{p^2+1}}=\dfrac{p-1}{\sqrt{p^2+1}}\ (\because\ p>1)$
이므로
$\lim\limits_{p\to\infty}f(p)=\lim\limits_{p\to\infty}\dfrac{p-1}{\sqrt{p^2+1}}$
$=\lim\limits_{p\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{p}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{p^2}}}$
$=1$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

59) **정답** 10
포물선 $(y+1)^2=4(x-1)$은 포물선 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 포물선 $(y+1)^2=4(x-1)$의 초점은 $A(2,\ -1)$이고 준선은 y축$(x=0)$이다.
원 $(x-7)^2+(y+1)^2=9$의 중심 C의 좌표는 $(7,\ -1)$이므로
$\overline{AC}=5$
직선 l과 원의 접점을 D라 하면
$\overline{CD}=3$
$\therefore\ \overline{AD}=\sqrt{5^2-3^2}=4$



점 B의 좌표를 $(p,\ q)$라 하고 $\overline{BD}=a$라 하자.
점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{BH}=\overline{AB}$이므로
$p=4+a$ …… ㉠
삼각형 BDC에서
$\overline{BC}^2=3^2+a^2$이므로
$(p-7)^2+(q+1)^2=9+a^2$ …… ㉡
점 B는 포물선 위의 점이므로
$(q+1)^2=4(p-1)$ …… ㉢
㉠, ㉢을 ㉡에 대입하면
$(p-7)^2+4(p-1)=9+(p-4)^2$
$p^2-10p+45=p^2-8p+25$
$2p=20$
$\therefore\ p=10$

$\therefore\ \overline{AB}=p=10$

[다른 풀이]

직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은

$y+1=m(x-2)$

즉, $mx-y-2m-1=0$

원의 중심 $C(7,\ -1)$에서 직선 l에 이르는 거리가 3이므로

$\dfrac{|5m|}{\sqrt{m^2+1}}=3$

양변을 제곱하여 정리하면

$25m^2=9(m^2+1)$

$m^2=\dfrac{9}{16}$

$\therefore\ m=\dfrac{3}{4}\ (\because\ m>0)$

따라서 직선 l의방정식은 $y+1=\dfrac{3}{4}(x-2)$이고 포물선 $(y+1)^2=4(x-1)$과의 교점의 좌표를 구하면

$\dfrac{9}{16}(x-2)^2=4(x-1)$

$9x^2-100x+100=0$

$(x-10)(9x-10)=0$

$\therefore\ x=\dfrac{10}{9}$ 또는 $x=10$

따라서 점 B의 좌표는 $(10,\ 5)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{8^2+6^2}=10$

정답 및 해설

60) **정답** ②

$\overline{PF'}=a$, $\overline{PR}=b$라 하면

$\overline{PQ}=\overline{PF}=b$이고,

$\overline{QF'}=\overline{PF'}-\overline{PQ}=a-b$이다.

타원의 장축의 길이가 $2\times4=8$이므로

타원의 정의에 의하여

$a+b=8$ ……㉠

$\overline{PQ}-\overline{QF'}=1$이므로

$b-(a-b)=2b-a=1$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$a=5,\ b=3$

따라서 $\overline{OF}=\overline{PF}=3$이므로 두 초점의 좌표는 $F(3,\ 0)$, $F'(-3,\ 0)$이다.

$16-k=3^2$이므로

$k=16-9=7$

61) **정답** 56

$\overline{F'R}=\dfrac{16}{3}$, $\overline{RF}=\dfrac{8}{3}$이고

$\overline{PR}\,/\!/\,\overline{QF}$이므로 $\overline{F'P}:\overline{PQ}=\overline{F'R}:\overline{RF}=2:1$

$\overline{PQ}=\overline{PF}$이므로 $\overline{F'P}:\overline{PF}=2:1$

$\overline{F'P}=2k$, $\overline{PF}=k\ (k\neq0)$로 놓으면 삼각형 $PF'F$에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle PF'F)=\dfrac{4k^2+8^2-k^2}{2\times2k\times8}=\dfrac{7}{8}$

$3k^2+64=28k$

$3k^2-28k+64=0$

$(k-4)(3k-16)=0$

$\therefore\ k=4$ 또는 $k=\dfrac{16}{3}$

$\overline{F'P}\leq8$이므로 $2k\leq8$에서 $k\leq4\quad\therefore\ k=4$

타원의 정의에 의하여

$\overline{F'P}+\overline{PF}=2k+k=2a$이므로

$2a=12\qquad\therefore\ a=6$

두 초점의 좌표가 $(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$이므로

$a^2-b^2=4^2$에서

$b^2=a^2-4=6^2-4^2=20$

$\therefore\ a^2+b^2=36+20=56$

62) **정답** ①

타원 $\dfrac{(x-m)^2}{a^2}+\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=1$의 다른 한 초점을 F_2라 하면

$\overline{B_1F_1}=\overline{B_1F_2}=5$

$\overline{B_1F_1}+\overline{B_1F_2}=10$

타원의 장축의 길이는 10이므로

$2a=10$에서 $a=5$

$\overline{CA_1}=5$, $\overline{F_1A_1}=1$이므로 $\overline{CF_1}=4$

삼각형 B_1CF_1에서 $\overline{B_1C}=\sqrt{5^2-4^2}=3$이므로 타원의 단축의 길이는 6이고, $2b=6$에서 $b=3$

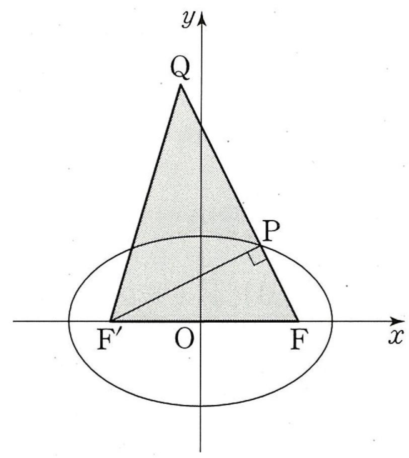
초점F_1의 좌표는 $(0,\ 1)$, 중심C의 좌표는 $(-4,\ 1)$이므로 타원 $\dfrac{(x-m)^2}{a^2}+\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=1$은 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$을 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서, $m=-4$, $n=1$이므로

$ab+mn=5\times3+(-4)\times1=11$

63) **정답** ②

타원 C의 중심을 H라 하자.



정삼각형F_1PF_2의 한 변의 길이를 k라 하면

$\overline{F_1H}=\dfrac{k}{2}$이고 타원의 정의에 의하여 $\overline{AH}=\overline{PF_1}=k$이므로 $\overline{AF_1}=\dfrac{k}{2}$

따라서,

$$\begin{aligned}\overline{AF_1}+\overline{F_1P}+\overline{PF_2}+\overline{F_2B}&=\frac{k}{2}+k+k+\frac{k}{2}\\&=3k\end{aligned}$$

이므로 $3k=12$에서 $k=4$

장축의 길이는 $2a=2k=8$이므로 $a=4$

삼각형 PHF_1에서 $\overline{PH}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$이므로

단축의 길이는 $2b=2\overline{PH}=2\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$, $b=2\sqrt{3}$

$\therefore\ a^2+b^2=4^2+(2\sqrt{3})^2=28$

64) **정답** ③

타원의 장축의 길이가 $2\sqrt{8}=4\sqrt{2}$이므로 $\overline{PF}+\overline{PF'}=4\sqrt{2}$

$\overline{PF}=3\sqrt{2}$이므로 $\overline{PF'}=2$

타원의 두 초점의 좌표를 각각 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)\ (c>0)$이라 하면

$c^2 = 8-4=4$에서 $c=2$이므로 $\overline{FF'}=4$

삼각형 PF$'$F에서 $\overline{PF'}^2+\overline{F'F}^2=(\sqrt{2})^2+4^2=18$,

$\overline{PF}^2=(3\sqrt{2})^2=18$이므로 $\overline{PF'}^2+\overline{F'F}^2=\overline{PF}^2$

따라서 $\angle PF'F=90°$이므로 점 P의 좌표는 $(-2,\ \sqrt{2})$이다.

점 P에서의 접선의 방정식은 $\dfrac{-2x}{8}+\dfrac{\sqrt{2}\,y}{4}=1$,

즉, $-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{\sqrt{2}}{4}y=1$이므로 $y=0$일 때, $x=-4$

따라서 점 Q의 좌표는 $(-4,\ 0)$이고, $\overline{QF'}=-2-(-4)=2$ 이므로

구하는 삼각형 PQF$'$의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times 2\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$

65) **정답** ⑤

점P$(2,\ 4)$가 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{16}{b^2}=1$ ……㉠

포물선 $y^2=8x$ 위의 점P$(2,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

$4y=4(x+2)$

즉, $y=x+2$이고 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점P에서의 접선의 방정식은

$\dfrac{2x}{a^2}+\dfrac{4y}{b^2}=1$ 즉, $y=-\dfrac{b^2}{2a^2}x+\dfrac{b^2}{4}$

두 접선이 서로 수직이므로 $-\dfrac{b^2}{2a^2}=-1$에서 $b^2=2a^2$

㉠에 대입하면 $\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{16}{2a^2}=1$, $\dfrac{12}{a^2}=1$

$\therefore a^2=12$

$b^2=2a^2=24$

따라서 타원의 방정식은 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{24}=1$이고 두 초점의 좌표를 $(0,\ c)$, $(0,\ -c)$ $(c>0)$라 하면

$c^2=24-12=12$에서 $c=2\sqrt{3}$

따라서 두 초점 사이의 거리는

$2c=2\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

<다른풀이>

$y^2=8x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2y\dfrac{dy}{dx}=8$, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4}{y}$ $(y\neq 0)$

따라서 포물선 $y^2=8x$ 위의 점P$(2,\ 4)$에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{4}{4}=1$

점 P에서의 타원의 접선과 포물선의 접선이 서로 수직이므로

타원의 접선의 기울기는 -1이다.

점 P$(2,\ 4)$를 지나고 기울기가 -1인 접선의 방정식은

$y=-x+6$ ……㉠

타원 위의 점 P$(2,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

$\dfrac{2x}{a^2}+\dfrac{4y}{b^2}=1$

즉, $y=-\dfrac{b^2}{2a^2}x+\dfrac{b^2}{4}$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$\dfrac{b^2}{2a^2}=1$, $\dfrac{b^2}{4}=6$

$\therefore a^2=12$, $b^2=24$

따라서 타원의 방정식은 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{24}=1$이고

두 초점의 좌표는 $(0,\ -2\sqrt{3})$, $(0,\ 2\sqrt{3})$이므로 두 초점 사이의

거리는 $4\sqrt{3}$ 이다.

66) **정답** ③

타원의 중심이 원점이고, 두 초점이 x축 위에 놓이므로 타원의 방정식을

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$로 놓으면

$\overline{PF}+\overline{PF'}=2a$

$\overline{PF}+\overline{PF'}=\sqrt{1^2+3^2}+\sqrt{9^2+3^2}$

$=\sqrt{10}+3\sqrt{10}$

$=4\sqrt{10}$

따라서 $2a=4\sqrt{10}$ 에서 $a=2\sqrt{10}$

$a^2-b^2=4^2$이므로 $b^2=(2\sqrt{10})^2-4^2=24$

$b>0$이므로 $b=2\sqrt{6}$

따라서 구하는 단축의 길이는 $2b=2\times 2\sqrt{6}=4\sqrt{6}$

67) **정답** ②

타원의 방정식을 정리하면

$(x-2)^2+5(y+1)^2=5$, $\dfrac{(x-2)^2}{5}+(y+1)^2=1$이고,

이 타원은 타원 $\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

타원 $\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$의 초점의 좌표는 $(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$이므로 주어진

타원의 초점의 좌표는 $(4,\ -1)$, $(0,\ -1)$이다.

$F_1(4,\ -1)$, $F_2(0,\ -1)$이라 하면

$\overline{OF_2}=1$, $\overline{F_1F_2}=4$, $\angle OF_2F_1=90°$이므로 삼각형OF_1F_2의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 1\times 4=2$

68) **정답** ④

타원 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$에 접하고 기울기가 1인 접선의 방정식은

$y=x\pm\sqrt{12\times 1+4}$

$=x\pm 4$

$y=x+k$에서 $k>0$이므로

$k=4$

타원의 두 초점의 좌표를 각각 $F_1(-2\sqrt{2},\ 0)$, $F_2(2\sqrt{2},\ 0)$이라 하면

점 F_1과 직선 $x-y+4=0$ 사이의 거리는

$a=\dfrac{|-2\sqrt{2}+4|}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$=2\sqrt{2}-2$

점 F_2와 직선 $x-y+4=0$ 사이의 거리는

$b=\dfrac{|2\sqrt{2}+4|}{\sqrt{2}}$

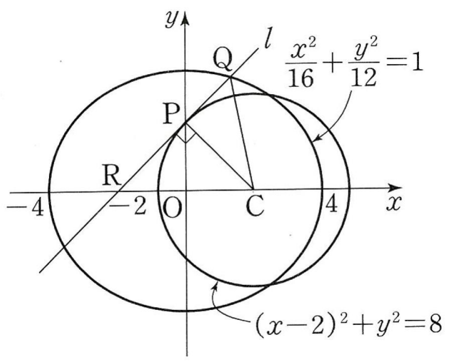
$=\dfrac{4+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$=2\sqrt{2}+2$

$\therefore a+b=(2\sqrt{2}-2)+(2\sqrt{2}+2)=4\sqrt{2}$

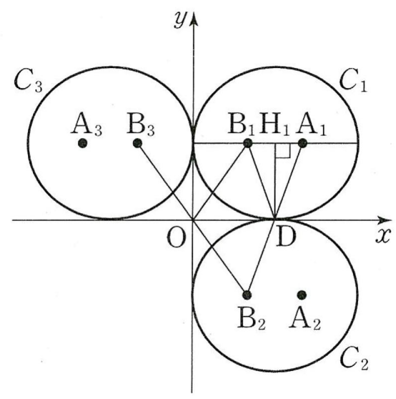
69) **정답** ⑤

타원 $3x^2+y^2=13$ 위의 점 $(2,\ -1)$에서의 접선의 방정식은
$3\times2\times x+(-1)\times y=13$
즉, $6x-y=13$
접선이 점 $(3, a)$를 지나므로
$18-a=13$
$\therefore\ a=5$
70) **정답** 17
$\overline{\mathrm{PF_2}}=k$라 하면
$\overline{\mathrm{PF_1}}+\overline{\mathrm{PF_2}}=20$이므로 $\overline{\mathrm{PF_1}}=20-k$
$\overline{\mathrm{PF_1}}-\overline{\mathrm{PF_3}}=3$이므로
$\overline{\mathrm{PF_3}}=\overline{\mathrm{PF_1}}-3$
$=(20-k)-3$
$=17-k$
따라서 타원 C_2의 장축의 길이는
$\overline{\mathrm{PF_2}}+\overline{\mathrm{PF_3}}=k+(17-k)$
$=17$
71) **정답** ③



$l\perp\overline{\mathrm{CP}}$이고 $\overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{OP}}=2$, $\angle\mathrm{OPC}=45°$이므로 직선 l과 x축의
교점을 R라 하면 점 R의 좌표는 $(2, 0)$이고 $\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{PC}}=2\sqrt{2}$이다.
한편 타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$의 초점의 좌표를 $(c, 0)$, $(-c, 0)$ $(c>0)$이라
하면 $c^2=16-12=4$에서 $c=2$이므로 두 점 C, R는 타원의 초점이다.
따라서 타원의 정의에 의하여
$\overline{\mathrm{QR}}+\overline{\mathrm{QC}}=2\times4=8$이므로 삼각형 PCQ의 둘레의 길이는
$\overline{\mathrm{QP}}+\overline{\mathrm{PC}}+\overline{\mathrm{CQ}}=\overline{\mathrm{QP}}+\overline{\mathrm{PR}}+\overline{\mathrm{CQ}}$
$=\overline{\mathrm{QR}}+\overline{\mathrm{QC}}$
$=8$
72) **정답** ④
초점의 좌표를 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$ $(c>0)$이라 하면
$c^2=48-12=36$에서 $c=6$이므로 $\overline{\mathrm{F'F}}=12$이고,
$\overline{\mathrm{FQ}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{F'F}}=6$
따라서 점 Q의 좌표는 $(12, 0)$이다. 점P의 좌표를 (a, b)라 하면
점 P에서의 접선의 방정식은 $\dfrac{ax}{48}+\dfrac{by}{12}=1$이고,
$y=0$일 때, $x=\dfrac{48}{a}$이므로
$\dfrac{48}{a}=12$에서 $a=4$
점 $\mathrm{P}(4,\ b)$는 타원 $\dfrac{x^2}{48}+\dfrac{y^2}{12}=1$ 위의 점이므로 $\dfrac{1}{3}+\dfrac{b^2}{12}=1$에서
$b^2=8$, $b>0$이므로 $b=2\sqrt{2}$

따라서 삼각형 PF′F의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times12\times2\sqrt{2}=12\sqrt{2}$
73) **정답** ③
타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$이라 하자.
두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이가 각각 a, b이므로 어두운 부분의 넓이는
$a^2\pi-b^2\pi=64\pi$
$a^2-b^2=64$ ……㉠
따라서 타원의 두 초점의 좌표를 $\mathrm{F_1}(c, 0)$, $\mathrm{F_2}(-c, 0)$ $(c>0)$이라 하면
$c^2=a^2-b^2=64$에서 $c=8$
두 점 $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{D_1}$의 좌표는 각각 $\mathrm{A_1}(a, 0)$, $\mathrm{D_1}(b, 0)$이고 점 $\mathrm{F_1}(8, 0)$이
선분 $\mathrm{A_1D_1}$의 중점이므로
$\dfrac{a+b}{2}=8$에서
$a+b=16$ ……㉡
㉠에서
$(a+b)(a-b)=64$
$16(a-b)=64$
$a-b=4$ ……㉢
㉡, ㉢에서
$a=10$, $b=6$
따라서 원 C_2의 넓이는
$b^2\pi=6^2\times\pi=36\pi$
74) **정답** ④

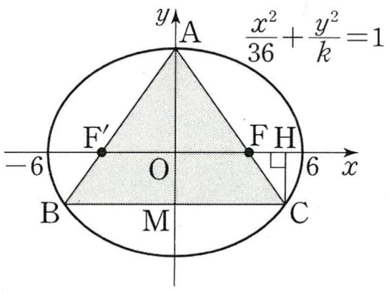


$\overline{\mathrm{A_1B_1}}=2$이고 장축의 길이가 6이므로 초점 $\mathrm{B_1}$의 x좌표는 2이다.
선분$\mathrm{A_1B_2}$가 x축과 만나는 점을 D라 하면 점 D는 두 타원 C_1, C_2
의 꼭짓점이므로 점 D의 좌표는 $(3,\ 0)$이다.
타원의 정의에 의하여
$\overline{\mathrm{DA_1}}+\overline{\mathrm{DB_1}}=6$이고, $\overline{\mathrm{DA_1}}=\overline{\mathrm{DB_1}}$이므로 $\overline{\mathrm{DB_1}}=3$
점 D에서 선분$\mathrm{A_1B_1}$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_1}$이라 하면
$\overline{\mathrm{B_1H_1}}=1$이므로
$\overline{\mathrm{DH_1}}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$
따라서 점 $\mathrm{B_1}$의 좌표는 $(2,\ 2\sqrt{2})$
$\overline{\mathrm{A_1B_2}}=\overline{\mathrm{DB_2}}+\overline{\mathrm{DA_1}}$
$=\overline{\mathrm{DB_1}}+\overline{\mathrm{DA_1}}$
$=6$,
$\overline{\mathrm{B_2B_3}}=2\overline{\mathrm{OB_2}}$
$=2\overline{\mathrm{OB_1}}$
$=2\sqrt{2^2+(2\sqrt{2})^2}$
$=4\sqrt{3}$

이므로

$$\overline{A_1B_2}^2+\overline{B_2B_3}^2=6^2+(4\sqrt{3})^2$$
$$=36+48$$
$$=84$$

75) **정답** ③



$k=b^2$ $(b>0)$이라 하자.
두 초점의 좌표를 각각 $F(c,0)$, $F'(-c,0)$ $(c>0)$이라 하면
$36-b^2=c^2$ ……㉠
꼭짓점A의 좌표는 $(0,b)$이고 y축과 선분BC의 교점을 M이라 하면
$\overline{AO}:\overline{OM}=2:1$
점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 AOF와 삼각형 CHF는 서로 닮음이고 닮음비가 $2:1$이므로
$\overline{FH}=\frac{c}{2}$, $\overline{CH}=\frac{b}{2}$
따라서 점 C의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}c,\ -\frac{1}{2}b\right)$이다.
점 C는 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$$\frac{\frac{9}{4}c^2}{36}+\frac{\frac{1}{4}b^2}{b^2}=1$$
$$\frac{c^2}{16}+\frac{1}{4}=1$$

$c>0$이므로
$c=2\sqrt{3}$
㉠에서

$$b^2=36-c^2$$
$$=36-12$$
$$=24$$

$\therefore b=2\sqrt{6}$ $(\because b>0)$
$\overline{BC}=2\times\frac{3}{2}c=3c=6\sqrt{3}$
$\overline{AM}=\frac{3}{2}b=3\sqrt{6}$
이므로 구하는 삼각형ABC의 넓이는
$\frac{1}{2}\times6\sqrt{3}\times3\sqrt{6}=27\sqrt{2}$

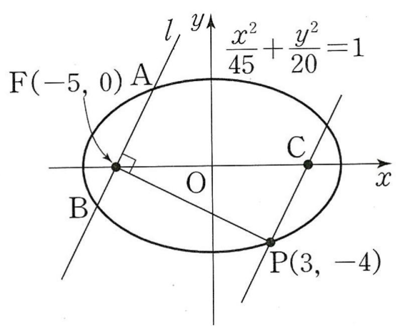
<다른풀이1>
원점 O가 삼각형 ABC이 무게중심으로
$\overline{AF}:\overline{FC}=2:1$
즉, $\overline{AC}=\frac{3}{2}\overline{AF}$이다.
초점 F의 좌표는 $(\sqrt{36-k},0)$이고 꼭짓점 A의 좌표는 $(0,\sqrt{k})$이므로 점C의 좌표는 $\left(\frac{3\sqrt{36-k}}{2},\ -\frac{\sqrt{k}}{2}\right)$이다.
점 C는 타원 위의 점이므로

$$\frac{1}{36}\times\frac{9}{4}(36-k)+\frac{1}{k}\times\frac{k}{4}=1$$
$$\frac{9}{4}-\frac{k}{16}+\frac{1}{4}=1$$
$$\frac{k}{16}=\frac{3}{2}$$

$\therefore k=24$
따라서 $A(0,2\sqrt{6})$, $B(-3\sqrt{3},-\sqrt{6})$, $C(3\sqrt{3},-\sqrt{6})$이므로
삼각형ABC의 넓이는
$\frac{1}{2}\times6\sqrt{3}\times3\sqrt{6}=27\sqrt{2}$

<다른풀이2>
원점 O가 삼각형ABC의 무게중심으로
$\overline{AF}:\overline{FC}=2:1$
$\overline{AF}=\overline{AF'}=6$이므로 $\overline{FC}=3$
점C는 타원 위의 점이므로 타원의 정의에 의해
$\overline{FC}+\overline{F'C}=12$ $\therefore \overline{F'C}=9$
따라서 $\overline{AC}=\overline{F'C}$이므로 삼각형 CAF'은 이등변삼각형이다.
점 C에서 선분AF'에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AF'}=3$이므로
$\overline{CH}=\sqrt{9^2-3^2}=6\sqrt{2}$
따라서 삼각형ABC의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CH}=\frac{1}{2}\times9\times6\sqrt{2}=27\sqrt{2}$

76) **정답** ③



점 F를 지나는 직선과 점 P 사이의 거리가 최대인 경우는 점 F를
지나는 직선이 직선PF와 수직일 때이다.
직선PF의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로 직선 l의 기울기는 2이다.
따라서 점 $P(3,-4)$를 지나고 직선 l에 평행한 직선의 방정식은
$y+4=2(x-3)$
즉, $y=2x-10$이고 직선이 x축과 만나는 점C의 좌표는 $(5,0)$이다.
따라서 점 C는 타원 $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$의 초점이고 타원의 장축의 길이는 $2\times\sqrt{45}=6\sqrt{5}$이므로
$\overline{AF}+\overline{AC}=6\sqrt{5}$
$\overline{BF}+\overline{BC}=6\sqrt{5}$
그러므로 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=(\overline{AF}+\overline{AC})+(\overline{BF}+\overline{BC})$$
$$=6\sqrt{5}+6\sqrt{5}$$
$$=12\sqrt{5}$$

77) **정답** 500
두 점 F, Q의 좌표는 각각 $F(p,0)$, $Q(-p,0)$이고 점 Q가 선분 $F'F$의 중점이므로 점 F'의 좌표는 $(-3p,0)$이다.
$\overline{PF}=k$라 하면 포물선의 정의에 의하여
$\overline{PH}=k$이고, $\overline{F'Q}=2p$, $\overline{QR}=k$이므로
삼각형$PF'R$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(2p+k)\times4\sqrt{5}=38\sqrt{5}$

$2p+k=19$ ……㉠

타원의 장축의 길이가 30이므로

$\overline{PF'}+\overline{PF}=30$에서

$\overline{PF'}=30-k$

직각삼각형$PF'R$에서

$\overline{PF'}^2=\overline{F'R}^2+\overline{PR}^2$이므로

$(30-k)^2=(2p+k)^2+(4\sqrt{5})^2$

㉠에서 $2p+k=19$이므로

$(30-k)^2=361+80=441$

$30-k=21$

$\therefore k=9$

㉠에서 $p=5$

따라서 주어진 타원을 x축의 방향으로 5만큼 평행이동한

타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$이라 하면

$2a=30$에서 $a=15$이고

두 초점의 좌표가 $(10, 0)$, $(-10, 0)$이므로

$a^2-b^2=10^2$에서

$b^2=15^2-10^2=125$

$b>0$이므로

$b=5\sqrt{5}$

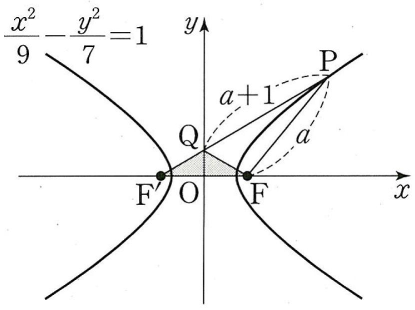
따라서 주어진 타원의 단축의 길이 m은

$m=2b=2\times5\sqrt{5}=10\sqrt{5}$

$\therefore m^2=500$

정답 및 해설

78) **정답** ③



쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$의 주축의 길이가 $2\times3=6$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{PF'}-\overline{PF}=6$ ……㉠

$\overline{PQ}-\overline{PF}=1$이므로

$\overline{PF}=a$로 놓으면 $\overline{PQ}=a+1$

$\overline{PF'}=\overline{PQ}+\overline{QF'}$이므로 ㉠에 대입하면

$\overline{PQ}+\overline{QF'}-\overline{PF}=6$

$(a+1)+\overline{QF'}-a=6$

$\therefore \overline{QF'}=5$

쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$의 두 초점 F, F′의 좌표를 각각 $(c, 0)$, $(-c, 0)$ $(c>0)$으로 놓으면

$c^2=9+7=16$에서 $c=4$이므로 $\overline{F'O}=4$

따라서 삼각형$QF'O$에서 $\overline{OQ}=\sqrt{5^2-4^2}=3$이므로 구하는 삼각형 $QF'F$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times8\times3=12$

79) **정답** ④

쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$의 주축의 길이가 $2\times4=8$이므로

$\overline{PF_1}-\overline{PF_2}=8$ ……㉠

쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$의 주축의 길이가 $2\times3=6$이므로

$\overline{QG_2}-\overline{QG_1}=6$ ……㉡

㉠, ㉡의 변끼리 더하면

$\overline{PF_1}-\overline{PF_2}+\overline{QG_2}-\overline{QG_1}=14$

$(\overline{PF_1}-\overline{QG_1})+(\overline{QG_2}-\overline{PF_2})=14$

$\overline{PF_1}-\overline{QG_1}=5$이므로

$\overline{QG_2}-\overline{PF_2}=14-5=9$

80) **정답** ③

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 꼭짓점의 좌표가 $(a, 0)$, $(-a, 0)$이고,

점근선의 방정식이 $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$이므로

$P(a, b)$, $Q(-a, b)$, $R(-a, -b)$, $S(a, -b)$이다.

$\overline{PQ}=2a$, $\overline{PS}=2b$이고 $2\times2a=2b$이므로 $b=2a$ ……㉠

직사각형$PQRS$의 외접원의 반지름의 길이는 $\overline{OP}=\sqrt{a^2+b^2}$이므로

외접원의 넓이는 $(a^2+b^2)\pi=20\pi$에서

$a^2+b^2=20$

㉠에 대입하면

$a^2+4a^2=20$, $a^2=4$ $\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$b=4$

$\therefore a+b=2+4=6$

81) **정답** ①

쌍곡선 C_1의 초점의 좌표는 $(4, 0)$, $(-4, 0)$이고 점근선의 방정식은 $y=\pm x$이다.

또 쌍곡선C_2는 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{a^2}=1$을 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 것이므로 중심의 좌표는 $(m, 0)$이고 점근선의 방정식은 $y=\pm a(x-m)$이다.

(i) 점$(4, 0)$이 쌍곡선 C_2의 중심인 경우

$m=4$이므로 쌍곡선 C_2의 점근선의 방정식은

$y=\pm a(x-4)$

점근선이 점$(3, 3)$을 지나고 $a>0$이므로 직선

$y=-a(x-4)$가 점$(3, 3)$을 지나고

$3=-a\times(-1)$에서

$a=3$

$\therefore a+m=7$

(ii) 점$(-4, 0)$이 쌍곡선 C_2의 중심인 경우

$m=-4$이므로 쌍곡선 C_2의 점근선의 방정식은

$y=\pm a(x+4)$

점근선이 점$(3, 3)$을 지나고 $a>0$이므로 직선

$y=a(x+4)$가 점$(3, 3)$을 지나고

$3=7a$에서

$a=\frac{3}{7}$

$\therefore a+m=-\frac{25}{7}$

(i), (ii)에 의하여 $a+m$의 최댓값과 최솟값의 곱은

$7\times\left(-\frac{25}{7}\right)=-25$

82) **정답** ④

쌍곡선 $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1$에 접하고 기울기가 1인 접선의 방정식은

$y=x\pm\sqrt{10\times1-6}=x\pm2$

이므로 두 접선 l_1, l_2의 방정식을 각각 $y=x-2$, $y=x+2$라 하자.

$y=x-2$를 $\dfrac{x^2}{10}-\dfrac{y^2}{6}=1$에 대입하여 정리하면

$3x^2-5(x-2)^2=30$, $x^2-10x+25=0$

$(x-5)^2=0$ $\therefore\ x=5$

$y=x-2=5-2=3$이므로 접점 P의 좌표는 $(5,\ 3)$이고 두 점 P, Q는 원점에 대하여 대칭이므로 점 Q의 좌표는 $(-5,\ -3)$이다.

쌍곡선의 두 초점의 좌표는 $\mathrm{F}(4,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-4,\ 0)$이므로 구하는 사각형$\mathrm{PF'QF}$의 넓이는

$2\times\dfrac{1}{2}\times8\times3=24$

[참고]

$y=x+2$를 $\dfrac{x^2}{10}-\dfrac{y^2}{6}=1$에 대입하여 정리하면

$3x^2-5(x+2)^2=30$, $x^2+10x+25=0$,

$(x+5)^2=0$ $\therefore\ x=-5$

$y=x+2=-5+2=-3$이므로 접점 Q의 좌표는 $(-5,\ -3)$이다.

83) **정답** ③

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{k}=1$의 주축의 길이가 4이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=4$이고 $\overline{\mathrm{PF'}}=6$이므로 $\overline{\mathrm{PF}}=2$

삼각형 $\mathrm{PF'F}$에서 $\angle\mathrm{F'PF}$의 크기를 이등분하는 직선 l이 변 $\mathrm{F'F}$와 만나는 점을 Q라 하면

$\overline{\mathrm{PF'}}:\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{F'Q}}:\overline{\mathrm{QF}}$이므로 $\overline{\mathrm{F'Q}}:\overline{\mathrm{QF}}=3:1$

따라서 두 초점의 좌표가 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$이므로

점 Q의 좌표는 $\left(\dfrac{c}{2},\ 0\right)$이다.

한편 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{k}=1$의 접선 l의 기울기가 2이므로

접선 l의 방정식은

$y=2x-\sqrt{4\times4-k}$

$=2x-\sqrt{16-k}$

$y=0$일 때, $x=\dfrac{\sqrt{16-k}}{2}$이므로

$\dfrac{c}{2}=\dfrac{\sqrt{16-k}}{2}$에서 $c=\sqrt{16-k}$

쌍곡선의 방정식에서 $c^2=4+k$이므로

$(\sqrt{16-k})^2=4+k$

$16-k=4+k$

$\therefore\ k=6$

84) **정답** ③

점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$이 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$의 초점이므로

$c^2=4+5=9$에서 $c=3$ $(\therefore\ c>0)$

쌍곡선 위의 점$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$\dfrac{x_1x}{4}-\dfrac{y_1y}{5}=1$이고

$y=0$일 때 $x=\dfrac{4}{x_1}$이므로 점 R의 좌표는 $\left(\dfrac{4}{x_1},\ 0\right)$이다.

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{OR}}=\overline{\mathrm{FH}}$이므로

$\dfrac{4}{x_1}=x_1-3$, $x_1^2-3x_1-4=0$

$(x_1+1)(x_1-4)=0$ $\therefore\ x_1=4$ $(\because\ x_1>3)$

$\dfrac{x_1^2}{4}-\dfrac{y_1^2}{5}=1$이므로 $x_1=4$를 대입하면

$y_1^2=15$ $\therefore\ y_1=\sqrt{15}$ $(\because\ y_1>0)$

$\overline{\mathrm{PQ}}=x_1=4$, $\overline{\mathrm{RF}}=3-\dfrac{4}{x_1}=2$이므로 구하는 사다리꼴PQRF의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times(4+2)\times\sqrt{15}=3\sqrt{15}$

85) **정답** 13

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(2\sqrt{2},\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$\dfrac{2\sqrt{2}x}{4}-\dfrac{2y}{4}=1$,

즉 $y=\sqrt{2}x-2$이므로 점 A의 좌표는 $(\sqrt{2},\ 0)$이다.

쌍곡선의 주축의 길이가 $2\times2=4$이므로

$\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{QF'}}=4$

$\overline{\mathrm{QF'}}=1$이므로 $\overline{\mathrm{QF}}=5$

쌍곡선의 두 초점의 좌표가 $\mathrm{F}(2\sqrt{2},\ 0)$, $\mathrm{F}'(-2\sqrt{2},\ 0)$이므로

삼각형$\mathrm{QF'F}$에서 $\overline{\mathrm{F'F}}=4\sqrt{2}$이고 $\angle\mathrm{QF'F}=\theta$라 하면

$\cos\theta=\dfrac{1^2+(4\sqrt{2})^2-5^2}{2\times1\times4\sqrt{2}}$

$=\dfrac{8}{8\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

삼각형$\mathrm{QF'A}$에서 $\overline{\mathrm{F'A}}=\sqrt{2}-(-2\sqrt{2})=3\sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{QA}}^2=1^2+(3\sqrt{2})^2-2\times1\times3\sqrt{2}\times\cos\theta$

$=1+18-6\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$=13$

86) **정답** ③

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{4^2+3^2}-3$

$=5-3$

$=2$

이므로 쌍곡선의 주축의 길이가 2이다.

쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$이라 하면

$2a=2$에서 $a=1$

$a^2+b^2=2^2$에서 $b^2=4-1=3$

따라서 쌍곡선의 방정식은 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$이고 점 $\mathrm{Q}(k,\ 6)$은 쌍곡선 위의 점이므로

$k^2-\dfrac{36}{3}=1$에서 $k^2=13$

$k>0$이므로 $k=\sqrt{13}$

[다른풀이]

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{4^2+3^2}-3$

$=5-3$

$=2$

이므로 쌍곡선의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{QF'}}-\overline{\mathrm{QF}}=2$이다. 즉,

$\sqrt{(k+2)^2+36}-\sqrt{(k-2)^2+36}=2$

$\sqrt{k^2+4k+40}=2+\sqrt{k^2-4k+40}$

양변을 제곱하면

$k^2+4k+40=4+4\sqrt{k^2-4k+40}+k^2-4k+40$

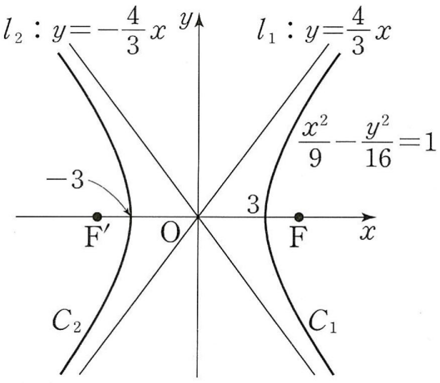
$2k-1=\sqrt{k^2-4k+40}$
다시 양변을 제곱하면
$4k^2-4k+1=k^2-4k+40$
$3k^2=39$, $k^2=13$
$k>0$이므로 $k=\sqrt{13}$
87) **정답** ②
방정식 $x^2-3y^2-6x-12y=0$을 정리하면
$(x-3)^2-3(y+2)^2=-3$
$\frac{(x-3)^2}{3}-(y+2)^2=-1$
이므로 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{3}-y^2=-1$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.
쌍곡선 $\frac{x^2}{3}-y^2=-1$의 초점의 좌표는 $(0,\ 2)$, $(0,\ -2)$이므로 주어진 쌍곡선의 두 초점의 좌표는 $(3,\ 0)$, $(3,\ -4)$이다.
따라서 $\mathrm{F}(3,\ 0)$, $\mathrm{F'}(3,\ -4)$로 놓으면
$\overline{\mathrm{OF}}+\overline{\mathrm{OF'}}=3+\sqrt{3^2+(-4)^2}$
$=3+5$
$=8$
88) **정답** ①
쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 꼭짓점은 $(a,\ 0)$, $(-a,\ 0)$이고, 직선 $y=2x-4$가 점 $(2,\ 0)$을 지나므로 $a=2$이다.
직선 $y=2x-4$와 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이 점 A 이외의 점에서 만나지 않으므로 직선 $y=2x-4$는 쌍곡선의 점근선 $y=\frac{b}{a}x$와 평행하다.
따라서 $\frac{b}{a}=2$에서 $b=2a=4$이므로 $ab=2\times4=8$
89) **정답** ①
쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{6}=1$ 위의 점$(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은
$\frac{ax}{2}-\frac{by}{6}=1$
$y=0$일 때, $x=\frac{2}{a}$
$x=0$일 때, $y=-\frac{6}{b}$
이므로 접선이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각$\left(\frac{2}{a},\ 0\right)$, $\left(0,\ -\frac{6}{b}\right)$이다.
따라서 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{2}{a}\times\frac{6}{b}=\frac{6}{ab}$
이므로 $\frac{6}{ab}=4$에서
$ab=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$
90) **정답** ②
쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$의 점근선 중 기울기가 음수인 직선 l의 방정식은 $y=-\frac{1}{2}x$이므로 직선 l에 수직인 직선의 기울기는 2이다.
따라서 기울기가 2인 쌍곡선의 접선의 방정식은
$y=2x\pm\sqrt{4\times4-1}$
$=2x\pm\sqrt{15}$
이므로 두 접선 사이의 거리는 직선 $2x-y-\sqrt{15}=0$위의 점 $(0,\ -\sqrt{15})$와 직선 $2x-y+15=0$ 사이의 거리와 같다.
따라서 구하는 거리는
$\frac{|0+\sqrt{15}+\sqrt{15}|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{5}}=2\sqrt{3}$
91) **정답** ④
쌍곡선 $\frac{x^2}{k}-\frac{y^2}{9}=1$의 점근선의 방정식은
$y=\pm\frac{3}{\sqrt{k}}x$이므로 $\frac{3}{\sqrt{k}}=\frac{1}{3}$에서
$\sqrt{k}=9$
$\therefore\ k=81$
따라서 쌍곡선 $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{9}=1$의 주축의 길이는 $2\times9=18$
$\overline{\mathrm{PF_1}}<\overline{\mathrm{PF_2}}$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여
$\overline{\mathrm{PF_2}}-\overline{\mathrm{PF_1}}=18$
$\overline{\mathrm{PF_1}}=5$이므로 $\overline{\mathrm{PF_2}}=5+18=23$
92) **정답** ②
쌍곡선 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{30}=1$의 두 초점의 좌표는 $(6,\ 0)$, $(-6,\ 0)$이므로
$\overline{\mathrm{FF'}}=12$
점P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 삼각형 $\mathrm{PF'F}$의 넓이는
$\frac{1}{2}\times12\times b=30\sqrt{2}$ $\quad\therefore\ b=5\sqrt{2}$
점$(a,\ b)$는 쌍곡선의 위의 점이므로 $\frac{a^2}{6}-\frac{y^2}{30}=1$
$b=5\sqrt{2}$를 대입하면
$\frac{a^2}{6}-\frac{5}{3}=1$
$\frac{a^2}{6}=\frac{8}{3}$
$a^2=16$
$\therefore\ a=4\quad(\because\ a>0)$
따라서 점$\mathrm{P}(4,\ 5\sqrt{2})$에서의 접선의 방정식은
$\frac{4x}{6}-\frac{5\sqrt{2}y}{30}=1$, 즉 $y=2\sqrt{2}x-3\sqrt{2}$
이므로 접선이 x축과 만나는 점의 좌표는 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$이고 접선의 기울기는 $2\sqrt{2}$이다.
쌍곡선 $\frac{(x-m)^2}{4}-\frac{y^2}{n}=1$의 점근선은 쌍곡선의 중심 $(m,\ 0)$을 지나므로 $m=\frac{3}{2}$
쌍곡선 $\frac{(x-m)^2}{4}-\frac{y^2}{n}=1$의 점근선의 기울기는 $\pm\frac{\sqrt{n}}{2}$이므로 $\frac{\sqrt{n}}{2}=2\sqrt{2}$에서 $\sqrt{n}=4\sqrt{2}$
$\therefore\ n=32$
$\therefore\ mn=\frac{3}{2}\times32=48$
93) **정답** ③
쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$의 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$이고

점근선은 $l_1 : y=\frac{4}{3}x$, $l_2 : y=-\frac{4}{3}x$이다.

또 쌍곡선은 두 곡선을

$C_1 : \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1 \ (x \geq 3)$

$C_2 : \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1 \ (x \leq -3)$로 구분하자



ㄱ. 직선 $y=\frac{4}{3}(x-k)$는 점근선 $y=\frac{4}{3}x$를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이므로 곡선 C_1 또는 곡선 C_2와 한 점에서 만나며 두 곡선 C_1, C_2와 동시에 만나지는 않는다. 즉, 쌍곡선과 한 점에서 만난다. (참)

ㄴ. 점$(1,\ 0)$에서 곡선 C_2에 접선을 그으려면 점근선과 만나게 되므로 접선을 그을 수 없다.
또 점$(1,\ 0)$에서 곡선C_1에 두 개의 접선을 그을 수 있다.
그러므로 점$(1, 0)$에서 쌍곡선을 그을 수 있는 접선은 2개이다.(거짓)

ㄷ. (i) $a>0$일 때,, 점$(0,\ a)$에서 곡선C_1에 그은 접선의 기울기가 m_1이면 접선이 점근선 l_2와 제4사분면에서 만나므로

$m_1 < -\frac{4}{3}$

점$(0,\ a)$에서 곡선C_2에 그은 접선의 기울기가 m_2이면 접선이 점근선 l_1과 제3사분면에서 만나므로

$m_2 > \frac{4}{3}$

$\therefore\ |m_1| > \frac{4}{3}$, $|m_2| > \frac{4}{3}$

(ii) $a<0$일 때, (i)과 같은 방법으로 $|m| > \frac{4}{3}$이다.

(i), (ii)에 의하여 $|m| > \frac{4}{3}$ (참)

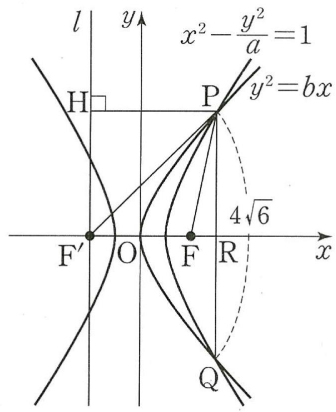
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

94) **정답** 11

쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{a}=1$의 두 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ 0)$, $(-1,\ 0)$이므로 주축의 길이는 2이다.

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF'}-\overline{PF}=2$이므로

$\overline{PF}=k$라 하면 $\overline{PF'}=k+2$



포물선 $y^2=bx$의 준선 l은 점 F′을 지나고, 점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{PH}=\overline{PF}=k$

두 점 P, Q는 x축에 대하여 대칭이므로 선분 PQ가 x축과 만나는 점을 R라 하면

$\overline{PR}=\overline{HF'}=2\sqrt{6}$

따라서 삼각형 PHF′에서

$(k+2)^2=k^2+(2\sqrt{6})^2$

$k^2+4k+4=k^2+24$

$\therefore\ k=5$

삼각형 PFR에서

$\overline{FR}=\sqrt{5^2-(2\sqrt{6})^2}=1$이므로

$\overline{F'F}=5-1=4$

따라서 점 F의 좌표는 $(2,\ 0)$이다.

점 $F(2,\ 0)$이 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{a}=1$의 초점이므로

$1+a=2^2$에서

$a=3$

점 $F(2,\ 0)$이 포물선 $y^2=bx$의 초점이므로

$b=4\times2=8$

$\therefore\ a+b=11$

95) **정답** ⑤

$\overline{PF_2}=\overline{QF_1}=a$, $\overline{PF_1}=\overline{QF_2}=b$라 하자.

타원의 장축의 길이는 $2\times5=10$이므로

$a+b=10$ ……㉠

쌍곡선의 주축의 길이는 $2\times3=6$이므로

$a-b=6$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a=8$, $b=2$

$\overline{PQ}=\alpha$, $\overline{F_1F_2}=\beta$라 하면

삼각형PQF_1에서

$\cos\theta=\frac{\alpha^2+64-4}{2\times\alpha\times8}=\frac{31}{32}$

$2\alpha^2+120=31\alpha$

$2\alpha^2-31\alpha+120=0$

삼각형QF_2F_1에서

$\angle QF_1F_2=\theta$이므로

$\cos\theta=\frac{\beta^2+64-4}{2\times\beta\times8}=\frac{31}{32}$

$2\beta^2+120=31\beta$

$2\beta^2-31\beta+120=0$

α, β는 이차방정식 $2x^2-31x+120=0$의 두 실근이고 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{31}{2}$

따라서 사다리꼴PQF_2F_1의 둘레의 길이는

$\alpha+\beta+2+2=\dfrac{31}{2}+4=\dfrac{39}{2}$

96) **정답** 6

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1$의 점근선의 방정식은

$y=\pm\dfrac{4}{2}x=\pm 2x$

이므로 두 직선 l_1, l_2의 방정식은 각각

$y=2x$, $y=-2x$이다.

직선 CF와 직선 l_1이 서로 수직이고 직선 l_1의 기울기가 2이므로 직선CF의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}$이다.

$c^2=4+16=20$에서 $c=2\sqrt{5}$이므로 점 F의 좌표는 $(2\sqrt{5},\ 0)$이고 직선 CF의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{2}(x-2\sqrt{5})$

$\ \ =-\dfrac{1}{2}x+\sqrt{5}$

따라서 점 C의 좌표는 $(0,\ \sqrt{5})$이고 점 F′의 좌표는 $(-2\sqrt{5},\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{CF'}}=\sqrt{20+5}=5$이다.

삼각형CF′Q의 둘레의 길이는

$s_1=\overline{\mathrm{CF'}}+\overline{\mathrm{F'Q}}+\overline{\mathrm{QC}}$

$\ \ =5+\overline{\mathrm{F'Q}}+\overline{\mathrm{QC}}$

삼각형COF의 둘레의 길이는

$s_2=\overline{\mathrm{CO}}+\overline{\mathrm{OF}}+\overline{\mathrm{FC}}$

$\ \ =\sqrt{5}+2\sqrt{5}+(\overline{\mathrm{FQ}}+\overline{\mathrm{QC}})$

$\therefore\ s_1-s_2=5-3\sqrt{5}+\overline{\mathrm{F'Q}}-\overline{\mathrm{FQ}}$ ……㉠

쌍곡선의 주축의 길이가 $2\times 2=4$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{F'Q}}-\overline{\mathrm{FQ}}=4$

따라서 ㉠에서

$s_1-s_2=5-3\sqrt{5}+4$

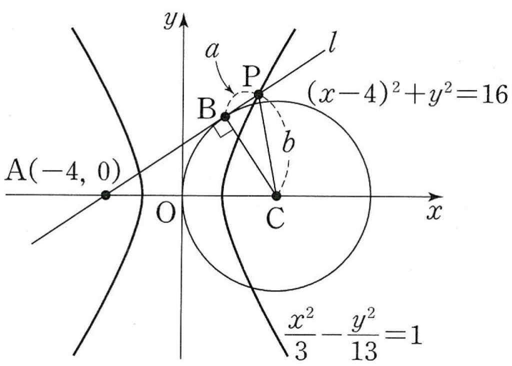
$\qquad\ =9-3\sqrt{5}$

$\therefore\ m+n=9+(-3)=6$

97) **정답** ①

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{13}=1$의 초점의 좌표는 $(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$이므로 원의 중심C$(4,\ 0)$과 점 A$(-4,\ 0)$은 쌍곡선의 두 초점이다.

$\overline{\mathrm{BP}}=a$, $\overline{\mathrm{PC}}=b$라 하자.



$\overline{\mathrm{AC}}=8$, $\overline{\mathrm{CB}}=4$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$

쌍곡선의 주축의 길이가 $2\sqrt{3}$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{PC}}=2\sqrt{3}$

$(4\sqrt{3}+a)-b=2\sqrt{3}$

$b-a=2\sqrt{3}$ ……㉠

직각삼각형 CPB에서

$b^2=a^2+4^2$이므로 $b^2-a^2=16$

$(b+a)(b-a)=16$

㉠을 대입하면

$(b+a)\times 2\sqrt{3}=16$

$b+a=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ ……㉡

㉠+㉡에서

$2b=\dfrac{14\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ b=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$

[다른풀이]

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{13}=1$의 두 초점은 A$(-4,\ 0)$, C$(4,\ 0)$이고, 주축의 길이가 $2\sqrt{3}$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PA}}-\overline{\mathrm{PC}}=2\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{PC}}=b$라 하면

$\overline{\mathrm{PA}}=b+2\sqrt{3}$

삼각형 BAC에서 $\overline{\mathrm{AC}}=8$, $\overline{\mathrm{BC}}=4$이므로

$\angle\mathrm{BAC}=\theta$라 하면

$\sin\theta=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$

$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

삼각형 PAC에서

$\overline{\mathrm{PC}}^2=\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-2\times\overline{\mathrm{PA}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\cos\theta$

$b^2=(b+2\sqrt{3})^2+8^2-2\times(b+2\sqrt{3})\times 8\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\ \ =b^2+4\sqrt{3}b+76-(8\sqrt{3}b+48)$

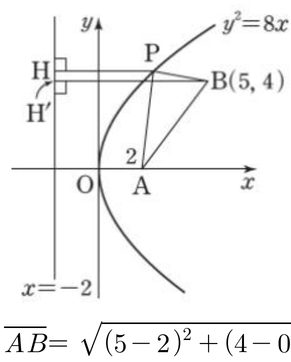
$4\sqrt{3}b=28$

$\therefore\ b=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$

98) 12

[해설]

포물선 $y^2=8x$의 초점의 좌표가 (2, 0)이므로 점 A는 이 포물선의 초점이고, 준선의 방정식은 $x=-2$이다.



$\overline{AB}=\sqrt{(5-2)^2+(4-0)^2}=\sqrt{9+16}=5$

점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면

포물선의 정의에 의하여 $\overline{AP}=\overline{PH}$

점 B에서 준선에 내린 수선의 발을 H'이라 할 때

$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{PH}+\overline{PB}$

$\qquad\geq\overline{BH'}$

따라서 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값이 $2+5=7$이므로 삼각형 ABP의 둘레의 길이의 최솟값은 $5+7=12$이다.

99) ④

[해설]

포물선 $y^2=6x$의 초점의 좌표는$F\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$이고, 준선의 방정식은

$x=-\dfrac{3}{2}$이다.

직선 $y=n$이 포물선 $y^2=6x$와 만나는 점의 좌표가 $P\left(\dfrac{n^2}{6},\ n\right)$이므로 포물선의 정의에 의하여

$$a_n=\frac{n^2}{6}+\frac{3}{2}$$

따라서

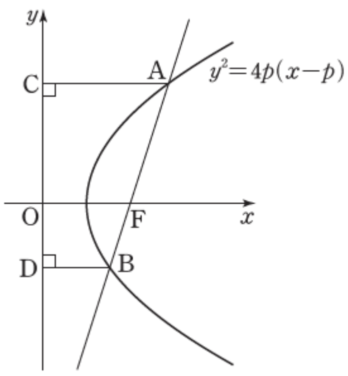
$$\sum_{n=1}^{8}a_n=\sum_{n=1}^{8}\left(\frac{n^2}{6}+\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{8\times9\times17}{6\times6}+\frac{3}{2}\times8=46$$

100) ③

[해설]

포물선 $y^2=4p(x-p)$의 초점의 좌표는 $F(2p,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=0$, 즉 y축이다.



포물선의 정의에 의하여 $\overline{AF}=\overline{AC}$, $\overline{BF}=\overline{BD}$

사각형 $ACDB$의 둘레의 길이는

$$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{AC}+\overline{BD}=\overline{AB}+\overline{CD}+(\overline{AF}+\overline{BF})$$

$$=\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{AB}$$

$$=2\overline{AB}+\overline{CD}$$

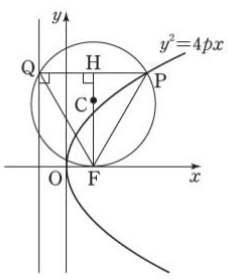
$2\overline{AB}+12=48$이므로 $\overline{AB}=18$

101) ④

[해설]

그림과 같이 원의 중심을 C, 점 F에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H

라 하자.



원이 x축과 접하므로 중심 C에서 x축에 내린 수선의 발이 F이다. 선분 PQ가 x축에 평행하므로 세 점 F, C, H는 한 직선 위에 있다.

따라서 $\overline{HF}\perp\overline{PQ}$이고 $\overline{QH}=\overline{PH}$이므로

$\overline{QF}=\overline{PF}$

포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF}=\overline{PQ}$이므로 삼각형 FPQ는 정삼각형이고, 점 C는 정삼각형 FPQ의 무게중심이다.

$\overline{CF}=2$이므로 $\overline{CH}=1$

삼각형 QCH에서 $\overline{QH}=\sqrt{3}$이므로

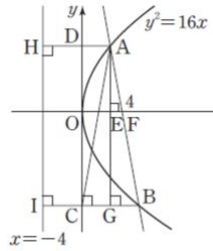
$\overline{PQ}=2\overline{QH}=2\sqrt{3}$

102) ③

[해설]

포물선 $y^2=16x$의 초점의 좌표는 $F(4,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-4$이다.

두 점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하고, 선분 AH와 y축의 교점을 D, 점 A에서 x축과 선분 BC에 내린 수선의 발을 각각 E, G라 하자.



$\overline{AB}=\overline{AC}$이므로 $\overline{CG}=\overline{GB}$

따라서 $\overline{CB}=2\overline{DA}$

포물선의 정의에 의하여

$\overline{AF}=\overline{HA}=4+\overline{DA}$

$\overline{BF}=\overline{IB}=4+2\overline{DA}$

삼각형 AEF와 삼각형 AGB가 서로 닮은 도형이므로

$\overline{AF}:\overline{EF}=\overline{AB}:\overline{GB}$

$(4+\overline{DA}):(4-\overline{DA})=(8+3\overline{DA}):\overline{DA}$

$4\overline{DA}+\overline{DA}^2=32+4\overline{DA}-3\overline{DA}^2$

$4\overline{DA}^2=32,\ \ \overline{DA}=2\sqrt{2}$

따라서

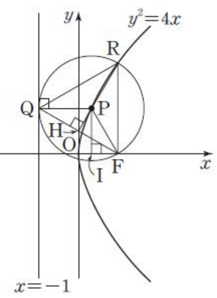
$\overline{BC}=2\overline{DA}=4\sqrt{2}$

103) 16

[해설]

포물선 $y^2=4x$의 초점의 좌표는 $F(1,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-1$이다.

그림과 같이 점 P에서 선분 QF에 내린 수선의 발을 H라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 I라 하자.



$\overline{PQ}=\overline{PR}$이고, 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PQ}=\overline{PF}$이므로 세 점 Q, F, R는 점 P를 중심으로 하는 원 위의 점이다.

$\angle FRQ=60°$이므로 원주각의 성질에 의하여

$\angle FPQ=120°$

$\angle FPI=120°-90°=30°$이므로 $\overline{IF}=\dfrac{1}{2}\overline{PF}$

$$\overline{QP}+\overline{IF}=\overline{PF}+\frac{1}{2}\overline{PF}=\frac{2}{3}\overline{PF}=2$$

따라서 $\overline{PF}=\dfrac{4}{3}$

삼각형 PHF에서 $\angle HFP=30°$이므로

$$\overline{HF}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{PF}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

따라서

$$k=\overline{QF}=2\overline{HF}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

이므로

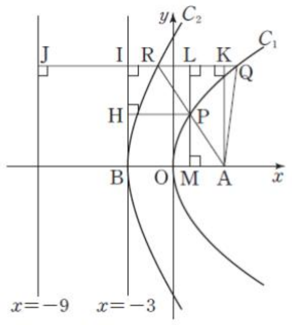
$$3k^2=3\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2=16$$

104) ③

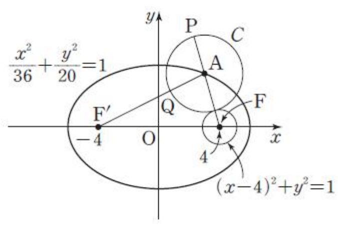
[해설]

포물선 C_1의 준선의 방정식은 $x=-3$이고, 포물선 C_2의 준선의 방정식은 $x=-9$이다.

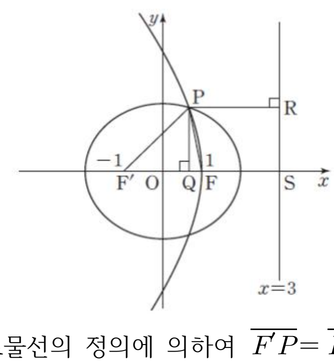
그림과 같이 두 점 P, Q에서 포물선 C_1의 준선에 내린 수선의 발을 각각 H, I, 점 R에서 포물선 C_2의 준선에 내린 수선의 발을 J라 하고, 두 점 A, P에서 직선 QR에 내린 수선의 발을 각각 K, L, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 M이라 하자.



포물선의 정의에 의하여
$\overline{PA}=\overline{PH}$, $\overline{QA}=\overline{QI}$, $\overline{RA}=\overline{RJ}$
$\angle PAM=\angle PRQ=60°$에서 $\overline{AM}=\dfrac{1}{2}\overline{PA}$이므로
$\overline{AB}=\overline{PH}+\overline{AM}$
$=\overline{PA}+\dfrac{1}{2}\overline{PA}$
$=\dfrac{3}{2}\overline{PA}=6$
즉, $\overline{PA}=4$
$\overline{RK}=\dfrac{1}{2}\overline{RA}$이므로
$\overline{JK}=\overline{JR}+\overline{RK}$
$=\overline{RA}+\dfrac{1}{2}\overline{RA}$
$=\dfrac{3}{2}\overline{RA}=12$
즉, $\overline{RA}=8$
$\overline{KA}=4\sqrt{3}$, $\overline{KI}=6$이므로 삼각형 AQK에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{QA}^2=\overline{KQ}^2+\overline{KA}^2$, $\overline{QA}^2=(\overline{QA}-6)^2+(4\sqrt{3})^2$
$\overline{QA}^2=\overline{QA}^2-12\overline{QA}+36+48$
즉, $\overline{QA}=7$
$\overline{PH}=\overline{PA}=4$이므로
$\overline{LQ}=\overline{QI}-\overline{IL}=\overline{QA}-\overline{PH}=7-4=3$이고, $\overline{PL}=2\sqrt{3}$
삼각형 LPQ에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{PQ}^2=\overline{PL}^2+\overline{LQ}^2=(2\sqrt{3})^2+3^2=21$
따라서 $\overline{PQ}=\sqrt{21}$
105) 6
[해설]
타원 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 장축의 길이는 $2\times3=6$이므로
타원의 정의에 의하여
$\overline{PF'}+\overline{PF}=6$
점 Q가 y축 위의 점이므로
$\overline{QF'}=\overline{QF}$
따라서 삼각형 PQF의 둘레의 길이는
$\overline{PF}+\overline{PQ}+\overline{QF}=\overline{PF}+\overline{PQ}+\overline{QF'}$
$=\overline{PF}+\overline{PF'}$
$=6$
106) ③
[해설]
타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$이라 하자.
타원의 장축의 길이가 10이므로 $2a=10$, $a=5$
사각형 $AF'BF$의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times2c\times2b=2bc$
초점의 좌표가 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)$이므로
$a^2-b^2=c^2$, $b^2+c^2=25$
산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$b^2+c^2\geq2\sqrt{b^2c^2}$ (단, 등호는 $b=c$일 때 성립)
$25\geq2bc$
따라서 사각형 $AF'BF$의 넓이의 최댓값은 25이다.
{참고}
사각형 $AF'BF$는 둘레의 길이가 일정하고 마름모이므로 정사각형일 때 넓이가 최대이다.
107) ③
[해설]
네 점 A, B, C, D의 좌표는
$A(-a,\ 0)$, $B(a,\ 0)$, $C(0,\ a)$, $D(0,\ -a)$
타원 $x^2+\dfrac{y^2}{2}=a^2$의 장축의 길이는 $2\times\sqrt{2}a=2\sqrt{2}a$이고,
초점의 좌표는 $(-a,\ 0)$, $(a,\ 0)$이다.
타원 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=a^2$의 장축의 길이는 $2\times\sqrt{2}a=2\sqrt{2}a$이고,
초점의 좌표는 $(0,\ a)$, $(0,\ -a)$이다.
타원의 정의에 의하여
$\overline{PA}+\overline{PB}=2\sqrt{2}a$, $\overline{PC}+\overline{PD}=2\sqrt{2}a$
$\overline{CA}+\overline{DB}=\overline{CA}+\overline{CB}=2\sqrt{2}a$
두 삼각형 PCA, PDB의 둘레의 길이의 합이 36이므로
$(\overline{PC}+\overline{CA}+\overline{AP})+(\overline{PD}+\overline{DB}+\overline{BP})=36$
$(\overline{PC}+\overline{PD})+(\overline{CA}+\overline{DB})+(\overline{AP}+\overline{BP})=36$
$2\sqrt{2}a\times3=36$이므로 $a=3\sqrt{2}$
108) 5
[해설]
타원 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$의 장축의 길이는 $2\times6=12$이므로 타원의 정의에 의하여 $\overline{AF'}+\overline{AF}=12$
타원의 두 초점의 좌표는 $F'(-4,\ 0)$, $F(4,\ 0)$이므로 원 $(x-4)^2+y^2=1$은 점 F를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이다.



선분 AF의 연장선이 원 C와 만나는 점 중 원 $(x-4)^2+y^2=1$과 만나지 않는 점을 P, 선분 AF'이 원 C와 만나는 점을 Q라 하자.
점 F와 원 C 위의 점 사이의 거리의 최댓값이 7이므로 $\overline{PF}=7$
점 F'과 원 C 위의 점 사이의 거리의 최솟값은 $\overline{F'Q}$이고,
$\overline{F'Q}+\overline{QA}+\overline{AF}=12$
따라서
$\overline{F'Q}=12-(\overline{QA}+\overline{AF})$
$=12-(\overline{PA}+\overline{AF})$
$=12-\overline{PF}$
$=12-7=5$
109) 4
[해설]
$\overline{F'F}=2$이므로 포물선의 준선의 방정식은 $x=3$이다.
점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 하고, 점 P를 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 $x=3$과 만나는 점을 R, 직선 $x=3$이 x축과 만나는 점을 S라 하자.



포물선의 정의에 의하여 $\overline{F'P}=\overline{PR}$
$\cos(\angle PF'F)=\dfrac{5}{7}$이므로

$\overline{F'Q}=\frac{5}{7}\overline{F'P}$

$\overline{F'S}=\overline{F'Q}+\overline{QS}$

$=\frac{5}{7}\overline{F'P}+\overline{F'P}$

$\frac{12}{7}\overline{F'P}=4$

즉, $\overline{F'P}=\frac{7}{3}$

$\overline{F'Q}=\frac{5}{7}\times\frac{7}{3}=\frac{5}{3}$이므로 삼각형 $PF'Q$에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{PQ}=\sqrt{\left(\frac{7}{3}\right)^2-\left(\frac{5}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

$\overline{QF}=\overline{FF'}-\overline{F'Q}=2-\frac{5}{3}=\frac{1}{3}$이므로 삼각형 FPQ에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{PF}=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{5}{3}$

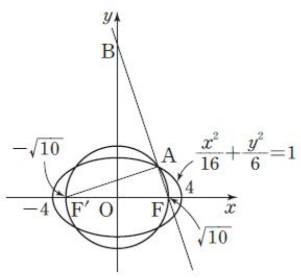
따라서 $\overline{PF}+\overline{F'P}=\frac{5}{3}+\frac{7}{3}=4$이므로 이 타원의 장축의 길이는 4이다.

110) ③

[해설]

타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{6}=1$의 장축의 길이는 $2\times4=8$이고, 초점의 좌표는

$F(\sqrt{10}\ ,0)$, $F'(-\sqrt{10},\ 0)$이다.



타원의 정의에 의하여 $\overline{AF}+\overline{AF'}=8$ ……㉠

점 A가 선분 FF'을 지름으로 하는 원 위의 점이므로

$\angle FAF'=90°$

삼각형 $AF'F$에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AF}^2+\overline{AF'}^2=40$

……㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{AF}^2+(8-AF)^2=40$

$2AF^2-16\overline{AF}+24=0$, $\overline{AF}^2-8\overline{AF}+12=0$

$(\overline{AF}-2)(\overline{AF}-6)=0$

$\overline{AF'}>\overline{AF}$이므로 $\overline{AF}=2$

삼각형 $F'FA$와 삼각형 BFO(O는 원점)가 서로 닮은 도형이므로

$\overline{F'F}:\overline{AF}=\overline{BF}:\overline{OF}$

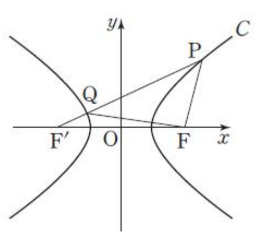
$2\sqrt{10}:2=\overline{BF}:\sqrt{10}$, $\overline{BF}=10$

따라서

$\overline{AB}=\overline{BF}-\overline{AF}=10-2=8$

111) 6

[해설]



쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{PF'}-\overline{PF}=4$, $\overline{QF}-\overline{QF'}=4$

$\overline{PQ}=\overline{PF'}-\overline{QF'}$

$=\overline{PF}+4-\overline{QF'}$

삼각형 FPQ의 둘레의 길이가 20이므로

$\overline{PF}+\overline{PQ}+\overline{QF}$

$=\overline{PF}+(\overline{PF}+4-\overline{QF'})+(\overline{QF'}+4)$

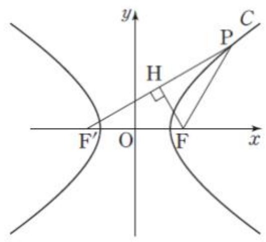
$=2\overline{PF}+8=20$

따라서 $\overline{PF}=6$

112) ⑤

[해설]

점 F에서 선분 PF'에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{F'F}=\overline{FP}$이므로 점 H는 선분 PF'의 중점이다.



$\angle FF'P=\angle FPF'=30°$이고 $\overline{F'F}=2c$이므로

$\overline{F'H}=\sqrt{3}c$, $\overline{PF'}=2\sqrt{3}C$, $\overline{PF}=2c$

이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{PF'}-\overline{PF}=2\sqrt{3}c-2c=2a$, $(\sqrt{3}-1)c=a$

따라서

$\frac{a}{c}=\sqrt{3}-1$

113) ③

[해설]

두 초점이 x축 위에 있으므로 구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$이라 하자.

타원 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$과 두 초점을 공유하므로

$a^2+b^2=6-2$, $a^2+b^2=4$ ……㉠

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 점근선의 방정식은

$y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$

조건 (나)에 의하여

$\frac{b}{a}\times\left(-\frac{b}{a}\right)=-1$

$b^2=a^2$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a^2=2$이므로 $a=\sqrt{2}$

따라서 쌍곡선의 주축의 길이는 $2\sqrt{2}$이다.

114) ③

[해설]

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF}-\overline{PF'}=2A$

$F(c,\ 0)$이라 하면

$c^2=a^a+5$, $(c-a)(c+a)=5$ ……㉠

$\overline{PF}=\overline{FF'}=2c$이므로 $2c-\overline{PF'}=2a$

반지름의 길이가 2이므로 $\overline{PF'}=2c-2a=2$

$c-a=1$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $c+a=5$ ……㉢

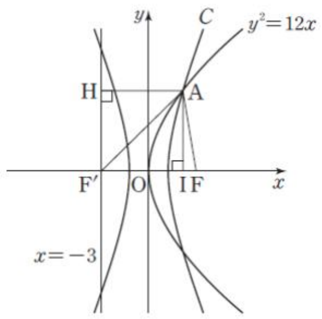
㉡, ㉢에서 $a=2$

115) ⑤

[해설]

포물선 $y^2=12x$의 초점의 좌표는 $F(3,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-3$이다.

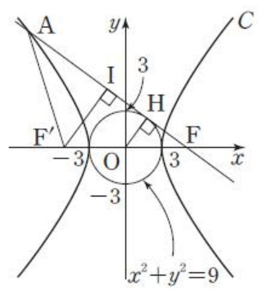
점 F를 한 초점으로 하고 중심이 원점인 쌍곡선을 C라 하자. 또 쌍곡선 C의 점 F가 아닌 초점을 F'이라 하고, 점 A에서 포물선의 준선과 x축에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하자.



포물선의 정의에 의하여 $\overline{AH}=\overline{AF}=5$,$\overline{F'F}=6$이고 $\overline{F'I}=\overline{AH}=5$이므로 $\overline{IF}=1$
삼각형 AIF에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{AI}=\sqrt{25-1}=2\sqrt{6}$
삼각형 $AF'I$에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{AF'}=\sqrt{(2\sqrt{6})^2+5^2}=7$
따라서 주축의 길이는
$\overline{AF'}-\overline{AF}=7-5=2$

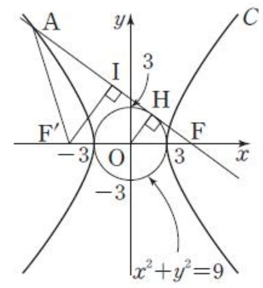
116) ③
[해설]
쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$의 주축의 길이는 $2\times2=4$이고, 두 초점의 좌표는
$F(4,\ 0)$, $F'(-4,\ 0)$이다.
쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{AF'}-\overline{AF}=4$
타원 C의 장축의 길이를 k라 하면 타원의 정의에 의하여
$\overline{AF'}+\overline{AF}=k$
$\overline{OA}=\overline{OF}=\overline{OF'}=4$이므로 세 점 A, F', F를 지나는 원의 중심이 원점 O이다.
따라서 $\angle FAF'=90°$이므로 삼각형 $AF'F$에서 파타고라스 정리에 의하여
$\overline{AF'}^2+\overline{AF}^2=8^2$
$(\overline{AF'}-\overline{AF})^2+(\overline{AF'}+\overline{AF})^2=2(\overline{AF'}^2+\overline{AF}^2)$이므로
따라서 $k=4\sqrt{7}$

117) ④
[해설]
그림과 같이 원점 O와 점 F'에서 직선 AF에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하자.



원 $x^2+y^2=9$가 x축과 만나는 두 점의 좌표는 (-3, 0), (3, 0)이므로 쌍곡선 C의 주축의 길이는 6이다.
삼각형 FOH와 삼각형 $FF'I$는 서로 닮은 도형이고 닮음비가 $1:2$이다.
$\overline{OH}=3$이므로 $\overline{F'I}=6$이다.
쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{AF}-\overline{AF'}=6$
$\overline{AF'}=a$라 하면
$\overline{AF}=\overline{AF'}+6=a+6$
$\overline{AF'}=\overline{FF'}$에서 $\overline{AI}=\overline{IF}$이므로
$\overline{AI}=\dfrac{1}{2}\overline{AF}=\dfrac{a+6}{2}$
삼각형 $AF'I$에서 피타고라스 정리에 의하여
$\left(\dfrac{a+6}{2}\right)^2+6^2=a^2$
$a^2+12a+36+144=4a^2$
$a^2-4a-60=0,\ (a-10)(a+6)=0$
$a>0$이므로 $a=10$
$\overline{AF}=16$이므로 삼각형 $AF'F$의 둘레의 길이는
$16+10+10=36$

118) ④
[해설]
그림과 같이 원점 O와 점 F'에서 직선 AF에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하자.



원 $x^2+y^2=9$가 x축과 만나는 두 점의 좌표는 (-3, 0), (3, 0)이므로 쌍곡선 C의 주축의 길이는 6이다.
삼각형 FOH와 삼각형 $FF'I$는 서로 닮은 도형이고 닮음비가 $1:2$이다.
$\overline{OH}=3$이므로 $\overline{F'I}=6$이다.
쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{AF}-\overline{AF'}=6$
$\overline{AF'}=a$라 하면
$\overline{AF}=\overline{AF'}+6=a+6$
$\overline{AF'}=\overline{FF'}$에서 $\overline{AI}=\overline{IF}$이므로
$\overline{AI}=\dfrac{1}{2}\overline{AF}=\dfrac{a+6}{2}$
삼각형 $AF'I$에서 피타고라스 정리에 의하여
$\left(\dfrac{a+6}{2}\right)^2+6^2=a^2$
$a^2+12a+36+144=4a^2$
$a^2-4a-60=0,\ (a-10)(a+6)=0$
$a>0$이므로 $a=10$
$\overline{AF}=16$이므로 삼각형 $AF'F$의 둘레의 길이는
$16+10+10=36$