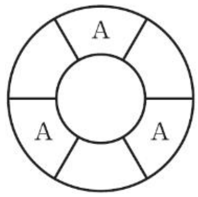
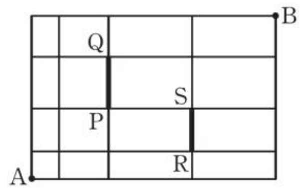
1) [정답] ③
집합 A, B는 집합 A의 원소 중 3의 배수를 제외한 원소의 집합이다.
집합 A의 원소의 개수는 백의 자리에는 0을 제외한 3개의 숫자가 모두
올 수 있고, 십의 자리와 일의 자리에는 0, 1, 2, 3이 모두 올 수 있으므로
$3\times4\times4=48$이다.
반면 집합 $A\cap B$의 원소의 개수는 각 자리에 오는 숫자의 합이 3의 배수
인 경우이므로
(i) 세 자리의 숫자가 모두 같은 경우 : 111, 222, 333의 3가지 (ii) 세 자리의 숫자가 모두 3의 배수인 경우 : 0 또는 3으로 이 루어진 수이므로 $1\times2\times2=4$ (가지)
(iii) (0, 1, 2) 또는 (1, 2, 3)으로 만들 수 있는 경우 :
$2\times2!+3!=10$ (가지)
그런데 (i), (ii)에서 333이 중복되므로 집합 $A\cap B$의 원소의 개수는
$3+4+10-1=16$
따라서 집합 $A-B$의 원소의 개수는 $48-16=32$
2) [정답] ③
6명의 위원이 3가지 경우 중 한 가지씩을 택할 때 나올 수 있는 경우의 수는
${}_3\Pi_6=3^6$
갑이 통과의 경우를 택할 때 나올 수 있는 경우의 수는
${}_3\Pi_5=3^5$
따라서 갑이 통과의 경우를 택하지 않았을 때, 나올 수 있는 경우의 수는
$$\begin{aligned}3^6-3^5&=3^5(3-1)\\&=2\times3^5\\&=486\end{aligned}$$
3) [정답] ②
모든 깃발을 5번씩 사용하여 만들 수 있는 신호는
${}_3\Pi_5=3^5=243$ (가지)
이 중 노란색 깃발을 4번 사용하여 만든 신호는 $5\times2=10$ (가지)이고,
5번 사용하여 만든 신호는 한 가지이다.
마찬가지로 파란색 깃발을 4번 사용하여 만든 신호는 $5\times2=10$ (가지)
이고, 5번 사용하여 만든 신호는 한 가지이다.
따라서 조건을 만족시키도록 만들 수 있는 신호의 종류는
$243-11\times2=221$ (가지)
4) [정답] ④
여학생들을 먼저 앉히고 그 사이에 남학생들을 앉히면 남학생들은 이웃하
지 않도록 배치할 수 있으므로
$$\begin{aligned}a&=5!\times{}_6P_3\\&=120\times(6\times5\times4)\\&=14400\end{aligned}$$
남학생 사이에 여학생이 두 명씩 앉는 방법의 수는 여학생들을 먼저 앉히고 이웃한 여학생 두 명을 한 묶음으로 생각하여 여학생 세 묶음 사이에 남학생을 배치하면 되므로
$$\begin{aligned}b&=5!\times3!\times2\\&=120\times6\times2\\&=1440\end{aligned}$$
$\therefore \dfrac{a}{b}=\dfrac{14400}{1440}=10$
[다른 풀이]
b의 경우는 남학생을 먼저 앉히고, 여학생을 앉히는 방법으로 생각할 수 있다.
그러므로 $(3-1)!\times6!=1440$
5) [정답] ①
서로 다른 7가지 색을 모두 사용하여 칠하는 방법의 수는 가운데 작은 원을 먼저 칠하고, 주변의 색을 원순열의 방법으로 칠하는 수와 같다.
$a=7\times5!=840$
빨간색 3번, 노란색 2번, 파란색과 보라색을 1번씩만 사용하려면 작은 원은 나머지 6부분의 영역과 모두 인접하고 있으므로 파란색과 보라색 중 한 색을 칠해야 한다.



작은 원 주변의 6개의 영역이 구분되기 위해서는 그림에서 A라 표시된 세 영역에 빨간색을 칠하고, 나머지 세 영역에 나머지 색들을 칠한다.
즉, $b=2$ $\therefore a+b=842$
6) [정답] ③
(i) 5개의 숫자를 모두 사용하여 다섯 자리의 자연수를 만드는 경우
같은 것이 2개, 2개, 1개씩 있을 때, 일렬로 나열하는 방법의 수는
$\dfrac{5!}{2!2!1!}=\dfrac{5!}{2!2!}=\dfrac{5\times4\times3}{2\times1}=30$
0이 만의 자리에 왔을 때, 일렬로 나열하는 방법의 수는
$\dfrac{4!}{2!2!}=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$
$\therefore a=30-6=24$
(ii) 4개의 숫자만을 사용하여 네 자리의 자연수를 만드는 경우
① (0, 1, 1, 2) 또는 (0, 1, 2, 2)인 경우 : (i)과 같은 방법으로
$\dfrac{4!}{2!}-\dfrac{3!}{2!}=12-3=9$
② (1, 1, 2, 2)인 경우 : $\dfrac{4!}{2!2!}=6$
$\therefore b=9\times2+6=24$
(i), (ii)에 의하여 $a+b=24+24=48$
7) [정답] 40



A지점에서 B지점까지 이동하는 방법의 수는 가로 4번과 세로 4번을 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로
$\dfrac{8!}{4!4!}=\dfrac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$
P지점과 Q지점을 통과하여 이동하는 방법의 수는 A지점에서 P지점까지 이동하는 방법의 수 $\dfrac{4!}{2!2!}$과 Q지점에

서 B 지점으로 이동하는 방법의 수 $\frac{3!}{2!}$ 을 곱한 값이므로

$\frac{4!}{2!2!}\times\frac{3!}{2!}=6\times3=18$

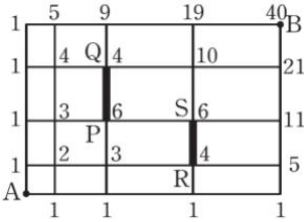
R 지점과 S 지점을 통과하여 이동하는 방법의 수는 A 지점에서 R 지점까지 이동하는 방법의 수 $\frac{4!}{3!}$ 과 S 지점에서 B 지점으로 이동하는 방법의 수 $\frac{3!}{2!}$ 을 곱한 값이므로

$\frac{4!}{3!}\times\frac{3!}{2!}=4\times3=12$

따라서 A 지점에서 B 지점까지 최단거리로 이동하는 방법의 수는

$70-18-12=40$

[다른 풀이]
그림과 같이 각 지점에 이르는 경로의 수를 세어 구할 수도 있다.



8) [정답] ⑤
을이 8 개의 계단을 올라가기 위해서는 4 번 비긴 경우 또는 2 번 이기고 1 번 비긴 경우이다.

을이 4 번 비긴 경우는 갑이 20 개의 계단을 올라갔으므로 갑이 4 번 이기고 4 번 비긴 경우이고, 을이 2 번 이기고 1 번 비긴 경우는 갑이 2 번 지고 1 번 비기고 6 번 이긴 경우이다.

(i) 갑이 4 번 이기고 4 번 비기는 경우
이 경우에 마지막에 갑이 이겨야 하므로 마지막은 고정을 시키 고 경우의 수를 구한다. 그러므로

$\frac{7!}{4!3!}=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

(ii) 갑이 2 번 지고 1 번 비기고 6 번 이긴 경우
이 경우에도 마지막에 갑이 이겨야 하므로 마지막은 고정을 시키 고 경우의 수를 구한다. 그러므로

$\frac{8!}{2!5!}=\frac{8\times7\times6}{2}=168$

따라서 구하는 경우의 수는

$35+168=203$

9) [정답] ③
두 명의 학생을 A, B 로 놓으면 볼펜 8 자루를 두 학생에게 나누어 주는
방법의 수는

${}_2\Pi_8=2^8=256$

이 중 한 학생에게만 볼펜을 모두 주는 방법의 수는 2 가지이므로 구하는
방법의 수는

$256-2=254$

[오답 피하기]
경우의 수 문제에서 순열, 중복순열 조합, 중복조합 중 어느 것을 사용할
지가 중요하다. 중복이 허용되는지, 일렬로 나열하는 경우인지 잘 고려하여
적합한 공식을 택하여 사용한다.

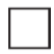
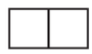
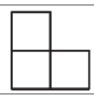
10) [정답] ②
ㄱ. 깃발꽂이에 7 개의 깃발을 꽂는 방법의 수는 원순열이므로
$(7-1)!=720$ (참)

ㄴ. 특정한 두 깃발이 이웃하도록 꽂는 방법의 수는 이웃하는 2 개의 깃발을 1 개로 볼 때, 원순열의 수는 $5!$ 이고 깃발 2 개가 자리바꿈하는 경우의 수는 2 이므로 구하는 경우의 수는 $5!\times2=240$ (참)

ㄷ. 특정한 세 깃발이 이웃하도록 꽂는 방법의 수는 이웃하는 3 개의 깃발을 1 개로 볼 때, 원순열의 수는 $4!$ 이고 깃발 3 개가 자리바꿈하는 경우의 수는 $3!$ 이므로 구하는 경우의 수는 $4!\times3!=144$ (거짓)

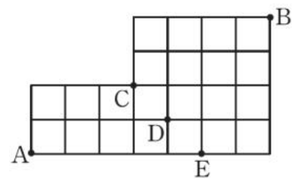
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

11) [정답]
위에서 내려다본 면의 개수를 기준으로 쌓기나무로 만든 입체도형을 분류
하면 다음과 같다.

면의 개수	위에서 본 모양	경우의 수
1		3
2		$\frac{{}_3P_2}{2}=3$
3		$\frac{3!}{2}=3$
		$3!=6$
합계		15

따라서 나타날 수 있는 모든 경우의 수는 15 이다.

12) [정답] ②



A 지점에서 C 지점으로 이동하는 방법의 수는

$\frac{5!}{3!2!}=10$

C 지점에서 B 지점으로 이동하는 방법의 수는

$\frac{6!}{4!2!}=15$

$\therefore l=10\times15=150$

A 지점에서 D 지점으로 이동하는 방법의 수는

$\frac{5!}{4!1!}=5$

D 지점에서 B 지점으로 이동하는 방법의 수는

$\frac{6!}{3!3!}=20$

$\therefore m=5\times20=100$

A 지점에서 E 지점으로 이동하는 방법의 수는 1, E 지점에서 B 지점으로
이동하는 방법의 수는 $\frac{6!}{2!4!}=15$

$n=1\times15=15$

$\therefore l-m+n=150-100+15$

$=65$

13) [정답] ⑤

처음 두 곳을 제외하고 나머지 네 곳을 A, B 중 한 사람만 들르거나 모두

들르지 않았으므로 ' A 만 들름. B 만 들름, A 와 B 모두 들르지 않음 '이라는 3 가지 경우 중 한 가지씩의 경우가 각각의 가게에 나타낸다.

따라서 구하는 경우의 수는

${}_3\Pi_4=3^4=81$

14) [정답] ①

1 이상 3 이하의 자연수 중 4 개의 수를 더하여 10 이 나오는 경우의 수는 $2+2+3+3$ 이거나 $1+3+3+3$ 뿐이다.

2, 2, 3, 3 을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!2!}=6$

1, 3, 3, 3 을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

따라서 집합 A 의 원소의 개수는

$6+4=10$

15) [정답] ③

남녀 학생을 짝짓는 방법의 수는 남학생을 고정하고 여학생을 순서대로

늘어놓는 방법의 수와 같으므로 $5!$

짝지은 5 쌍을 식탁에 앉히는 방법의 수는 $4!$

5 쌍은 남녀가 서로 바꾸어 앉을 때마다 둘러앉는 방법이 달라지므로

$2\times2\times2\times2\times2=2^5$

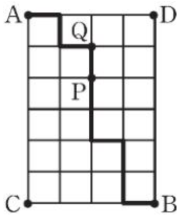
따라서 구하는 방법의 수는

$5!\times4!\times2^5$

16) [정답] 45

갑의 이동 속도에 비해서 을과 병의 이동 속도가 2 배 빠르므로 세 사람이

만나는 지점은 그림의 P 지점과 Q 지점 사이가 된다.



병이 P 지점까지 이동하는 방법의 수는 가로로 2 칸, 세로로 4 칸을 이동

하는 것이므로

$\frac{6!}{4!2!}=15$

Q 지점에서 D 지점으로 이동하는 방법의 수는 가로로 2 칸, 세로로 1 칸

이동을 하는 것이므로

$\frac{3!}{2!}=3$

따라서 구하는 방법의 수는

$15\times3=45$

17) [정답] ①

(i) 1, 3, 5 를 모두 사용하는 경우

나머지 두 자리는 2 와 4 를 중복 사용하여 만든다. 일의 자리부터

만의 자리까지 다섯 자리 중 세 자리를 택하여 차례대로 1, 3, 5 를 대응시키는 방법의 수는

${}_5P_3=5\times4\times3=60$

나머지 두 자리에 2 와 4 를 중복을 허용하여 대응시키는 방법의 수는

${}_2\Pi_2=2^2=4$

$\therefore 60\times4=240$

(ii) 1, 3, 5 중 2 개만 사용하는 경우

1, 3, 5 중 두 수를 선택하는 방법의 수는

${}_3C_2=3$

다섯 자리 중 두 자리를 택하여 선택된 2 개의 숫자를 차례대로 대응시키는 방법의 수는

${}_5P_2=5\times4=20$

나머지 세 자리에 2 와 4 를 중복을 허용하여 대응시키는 방법의 수는

${}_2\Pi_3=2^3=8$

$\therefore 3\times20\times8=480$

(iii) 1, 3, 5 중 1 개만 사용하는 경우

1, 3, 5 중 한 수를 선택하는 방법의 수는

${}_3C_1=3$

다섯 자리 중 한 자리를 택하는 방법의 수

${}_5P_1=5$

나머지 네 자리에 2 와 4 를 중복을 허용하여 각 자리에 대응시키는 방법의 수는

${}_2\Pi_4=2^4=16$

$\therefore 3\times5\times16=240$

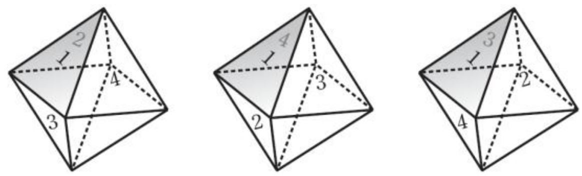
(iv) 1, 3, 5 를 모두 사용하지 않는 경우

${}_2\Pi_5=2^5=32$

따라서 구하는 수는

$240+480+240+32=992$

18) [정답] ①



정팔면체에 1 부터 8 까지의 자연수를 한 면에 하나씩 적는 방법의 수는 원순열의 수를 이용하여 구할 수 있다. 즉, 한 수를 하나의 면에 고정한 후 나머지 7 개의 수가 차례대로 각 면에 적혀 있는 방법의 수 $7!$ 을 구한다. 그런데 그림에서와 같이 먼저 고정한 면을 기준으로 120° 만큼씩 회전하면 같은 정팔면체가 생기므로 3 으로 나누어 준다.

$\therefore a=\frac{7!}{3}=7\times6\times5\times4\times2=1680$

또 1 과 2 가 인접하는 두 면에 적혀 있는 정팔면체의 수는 3 부터 8 까지 나머지 6 개의 숫자가 차례대로 각 면에 적혀 있는 방법의 수와 같으므로

$b=6!=720$

$\therefore a-b=1680-720=960$

19) [정답] ④

(i) 흰 돌 3 개를 더 놓는 경우

${}_7C_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2}=35$

(ii) 흰 돌 4 개와 검은 돌 1 개를 더 놓는 경우

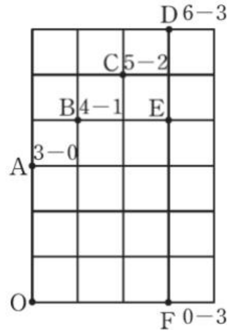
돌이 놓일 5 곳을 정하고 이 곳에 돌을 놓는 방법의 수를 생각한다.

${}_7C_5\times\frac{5!}{4!1!}=\frac{7\times6}{2}\times5=105$

(iii) 흰 돌 5 개와 검은 돌 2 개를 더 놓는 경우

돌 7 개를 놓을 순서로 생각한다.

$$\frac{7!}{5!2!}=\frac{7\times6}{2}=21$$
따라서 구하는 수는
$35+105+21=161$
20) [정답] 27
갑팀과 을팀의 게임 결과를 그림으로 표현할 수 있다.



처음에 점 O 에 있는 점 P 가 갑팀이 승리하면 위쪽 방향으로, 을팀이 승리하면 오른쪽 방향으로 움직인다고 하자.
만일 점 P 가 점 A 에 도착하면 갑팀이 3 승으로 우승하는 것을 의미하고, 점 B 에 도착하면 4 승 1 패로 우승하는 것을 의미한다.
갑팀이 6 승 3 패로 우승하는 것은 점 E 를 거쳐 점 D 로 가는 것과 동일하다.
그러므로 구하는 경우의 수는 점 A 와 B 를 거치지 않고 점 E 에 도착한 후 점 D 로 가는 최단 경로의 수와 같다.
점 E 에 도착한 후 점 D 로 가는 최단 경로의 수와 같다.
점 E 로 가는 모든 경로의 수는 $\frac{7!}{3!4!}=35$ 인데 그 중에서 점 A 를 거쳐 가는 경로의 수는 $1\times\frac{4!}{3!1!}=4$ 이고, 점 B 를 거쳐 가는 경로의 수는 $\frac{5!}{4!1!}\times1=5$ 이며, 점 A 와 점 B 를 모두 거쳐 가는 경로의 수는 $1\times\frac{2!}{1!1!}\times1=2$ 이다.
또한 갑팀이 세 번 연속 지면 을팀이 이기게 되므로 점 F 를 지나 점 D 로 가는 경우 한 가지도 빼야 한다.
따라서 구하는 경우의 수는
$35-4-5+2-1=27$
21) [정답] ③
3 권의 시집을 4 명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 방법의 수는 서로 다른 4 개 중에서 중복을 허락하여 3 개를 뽑는 방법의 수와 같으므로

$${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$$

5 권의 수필집을 4 명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 방법의 수는 서로 다른 4 개 중에서 중복을 허락하여 5 개를 뽑는 방법의 수와 같으므로

$${}_4H_5={}_{4+5-1}C_5={}_8C_5={}_8C_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$$

따라서 똑같은 시집 3 권과 똑같은 수필집 5 권을 4 명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 방법의 수는
$20\times56=1120$
22) [정답] ②
빨간 공 3 개를 서로 다른 3 개의 상자에 남김없이 나누어 넣는 방법의 수는

$${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2}=10$$

파란 공 4 개를 서로 다른 3 개의 상자에 남김없이 나누어 넣는 방법의 수는

$${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_5C_2=\frac{6\times5}{2}=15$$

따라서 구하는 방법의 수는
$10\times15=150$
23) [정답] 320
서로 다른 2 개의 공을 서로 다른 4 개의 상자에 나누어 넣는 방법의 수는

$${}_4\Pi_2=4^2=16$$

서로 구별이 안 되는 3 개의 구슬을 서로 다른 4 개의 상자에 나누어 넣는 방법의 수는

$${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$$

따라서 구하는 방법의 수는
$16\times20=320$
24) [정답] ④
집합 B 는 집합 A 의 원소 중에서 중복을 허락하여 5 개를 택하여 모두 곱한 값들을 원소로 하는 집합이다.
따라서 집합 B 의 원소 중 $35(=5\times7)$ 의 배수인 것의 개수는 집합 A 의 원소 중에서 중복을 허락하여 5 개를 택하는 방법 중에서 5 와 7 을 적어도 하나씩 택하는 방법의 수와 같다.
(ⅰ) 2, 3, 5, 7, 11, 13 중에서 5 와 7 을 각각 한 개씩 택하는 방법의 수는
1 가지
(ⅱ) 2, 3, 5, 7, 11, 13 중에서 중복을 허락하여 나머지 $3(5-2)$ 개를 택하는 방법의 수는

$${}_6H_3={}_{6+3-1}C_3={}_8C_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 집합 B 의 원소 중 35 의 배수인 것의 개수는
$1\times56=56$
25) [정답] 15
우선 3 명의 어린이에게 사탕을 2 개씩 나누어 주는 방법의 수는 1 가지이다.
나머지 $4(=10-3\times2)$ 개의 사탕을 3 명의 어린이에게 남김없이 나누어 주는 방법의 수는 서로 다른 3 개 중에서 중복을 허락하여 4 개를 뽑는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$$

따라서 구하는 방법의 수는
$1\times15=15$
[다른 풀이]
3 명의 어린이를 A, B, C 라 하고, 이들 세 명이 받은 사탕의 개수를 각각 a, b, c 라 하면 구하는 방법의 수는
$a+b+c=10$ (a, b, c 는 2 이상의 정수)
을 만족시키는 a, b, c 의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수와 같다.

$a=a'+2,\ b=b'+2,\ c=c'+2$ 라 하면

$a'+b'+c'=4$ ($a',\ b',\ c'$ 은 0 이상의 정수)

이므로 구하는 방법의 수는

${}_3H_4=15$

26) [정답] 66

(가)에서 $a'=a-1,\ c'=c+1$ 이라 하면 $a',\ b,\ c'$ 은 음이 아닌 정수이다.

(나)에서 $a+b+c=(a'+1)+b+(c'-1)=10$ 이므로

$a'+b+c'=10$ (단, $a',\ b,\ c'$ 은 음이 아닌 정수)

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 서로 다른 3 개에서 중복을 허락하여 10 개를 뽑는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_{10}={}_{3+10-1}C_{10}={}_{12}C_2$$
$$=\frac{12\times11}{2\times1}=66$$

27) [정답] ③

$\left(\sqrt{x}-\dfrac{2}{x}\right)^9$ 의 전개식의 일반항은

$${}_9C_r(\sqrt{x})^{9-r}\left(-\frac{2}{x}\right)^r={}_9C_r\times(-2)^r\times x^{\frac{9-r}{2}}\times x^{-r}$$
$$={}_9C_r\times(-2)^r\times x^{\frac{9-3r}{2}}$$

따라서 상수항은 $\dfrac{9-3r}{2}=0$, 즉 $r=3$ 일 때이므로 구하는 상수항은

$${}_9C_3\times(-2)^3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}\times(-8)=-672$$

28) [정답] ②

$\left(\dfrac{x}{2}+3\right)^5$ 의 전개식의 일반항은 ${}_5C_r\left(\dfrac{r}{2}\right)^r3^{5-r}$ 이므로

x^2 항은 $r=2$ 일 때이다.

따라서 $\left(\dfrac{x}{2}+3\right)^5$ 의 전개식에서 x^2 의 계수는

$${}_5C_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times3^3=\frac{135}{2}$$

따라서 $2x\left(\dfrac{x}{2}+3\right)^5$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는

$$2\times\frac{135}{2}=135$$

29) [정답] 10

$(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$ 이므로

$$(x+y)^5(x^2-xy+y)^5=\{(x+y)(x^2-xy+y^2)\}^5$$
$$=(x^3+y^3)^5$$

$(x^3+y^3)^5$ 의 전개식의 일반항은 ${}_5C_r(x^3)^r(y^3)^{5-r}$ 이므로

x^6y^9 항은 $r=2$ 일 때이다.

따라서 주어진 식의 전개식에서 x^6y^9 의 계수는

${}_5C_2=10$

30) [정답] ③

${}_{21}C_1+{}_{21}C_3+{}_{21}C_5+\cdots+{}_{21}C_{21}=2^{21-1}=2^{20}$ 이므로

$$N=\sum_{r=1}^{10}{}_{21}C_{2r+1}={}_{21}C_3+{}_{21}C_5+\cdots+{}_{21}C_{21}$$
$$=2^{20}-{}_{21}C_1=2^{20}-21$$

$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 일 때, 2^n 의 일의 자리의 숫자를 차례로 나열하면

$2,\ 4,\ 8,\ 6,\ 2,\ 4,\ 8,\ 6,\ \cdots$

과 같이 2, 4, 8, 6 이 반복되므로 2^{20} 의 일의 자리의 숫자는 6 이다.

따라서 $2^{20}-21$ 의 일의 자리의 숫자는 $6-1=5$ 이다.

31) [정답] ③

$${}_{15}C_1+{}_{15}C_3+{}_{15}C_5+\cdots+{}_{15}C_{15}=\frac{2^{15}}{2}=2^{14},$$

$${}_{2n}C_0+{}_{2n}C_2+{}_{2n}C_4+\cdots+{}_{2n}C_{2n}=\frac{2^{2n}}{2}=2^{2n-1}$$ 이므로

$$\frac{{}_{15}C_1+{}_{15}C_3+{}_{15}C_5+\cdots+{}_{15}C_{15}}{{}_{2n}C_0+{}_{2n}C_2+{}_{2n}C_4+\cdots+{}_{2n}C_{2n}}=\frac{2^{14}}{2^{2n-1}}=32$$

$\therefore 2^{14-(2n-1)}=2^{15-2n}=2^5$

따라서 $15-2n=5$ 이므로

$n=5$

32) [정답] ①

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}{}_{2n}C_{2k-1}$$
$$={}_{2n}C_1+{}_{2n}C_3+{}_{2n}C_5+\cdots+{}_{2n}C_{2n-1}=\frac{2^n}{2}$$

이므로 $a_n=2^{2n-1}$

$$\therefore \log_2 a_n=\log_2 2^{2n-1}$$
$$=2n-1\ (\text{단, } n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10}\log_2 a_n=\sum_{n=1}^{10}(2n-1)$$
$$=2\times\frac{10\times11}{2}-10$$
$$=110-10=100$$

33) [정답] ④

택한 5 개의 숫자 중 1, 2, 3 의 개수를 각각

$a,\ b,\ c\ (a\geq0,\ b\geq0,\ c\geq0)$ 라 하자.

(i) 4 가 택해지지 않은 경우

$a+b+c=5$ 를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$ 의 개수는

${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

(ii) 4 가 한 개 택해지는 경우

$a+b+c=4$ 를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$ 의 개수는

${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$21+15=36$

34) [정답] ⑤

3 명에게 주스 4 병을 남김없이 나누어 주는 방법의 수는

$${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$$

3 명에게 생수 2 병을 남김없이 나누어 주는 방법의 수는

$${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=\frac{4\times3}{2}=6$$

3 명에게 우유 1 병을 나누어 주는 방법의 수는

${}_3H_1={}_{3+1-1}C_1={}_3C_1=3$

따라서 구하는 방법의 수는

$15\times6\times3=270$

35) [정답] ①
다항식 $(x+a)^7$ 의 전개식에서 x^4 항은

${}_7C_3 x^4 a^3 = 35a^3x^4$

이므로 $35a^3 = 280,\ a^3 = 8$

$\therefore a = 2$

따라서 다항식 $(x+2)^7$ 의 전개식에서 x^5 항은

${}_7C_2 x^5 2^2 = 84x^5$

이므로 x^5 의 계수는 84 이다.

36) [정답] ⑤
구하는 방법의 수는 서로 다른 5 개에서 중복을 허락하여 4 개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$$\therefore {}_5H_4 = {}_{5+4-1}C_4 = {}_8C_4 = \frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1} = 70$$

37) [정답] ①
구하는 득표 결과의 수는 서로 다른 3 명의 후보자 중에서 중복을 허락하여 8 명을 뽑는 중복조합의 수와 같다.

$$\therefore {}_3H_8 = {}_{3+8-1}C_8 = {}_{10}C_2 = \frac{10\times9}{2\times1} = 45$$

38) [정답] 55
$(a+b+c)^9$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 $a,\ b,\ c$ 중에서 중복을 허락하여 9 개를 뽑는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_9 = {}_{3+9-1}C_9 = {}_{11}C_2 = \frac{11\times10}{2\times1} = 55$$

[오답 피하기]

예를 들어 $a^3b^3c^3,\ b^3c^3a^3,\ ab^3c^2a^2c$ 와 같은 항들은 모두 동류항이므로 서로 다는 것으로 세면 안 된다.

39) [정답] ④
$(2x+a)^5$ 의 전개식에서 x^3 항은

${}_5C_3(2x)^3a^2 = 80a^2x^3$

이므로 계수는 $80a^2$ 이다.

따라서 $80a^2 = 20$ 에서 $a^2 = \frac{1}{4}$

$\therefore a = \frac{1}{2}\ (\because a > 0)$

40) [정답] 165
네 자리의 자연수의 천, 백, 십, 일의 자리의 숫자를 각각 $a,\ b,\ c,\ d$ 라 하면

$a+b+c+d = 9 \quad \cdots\cdots$ ㉠

($a,\ b,\ c,\ d$ 는 $a \geq 1,\ b \geq 0,\ c \geq 0,\ d \geq 0$ 인 정수)

가 성립해야 한다.

따라서 구하는 네 자리의 자연수의 개수는 방정식 ㉠을 만족시키는 $a,\ b,\ c,\ d$ 의 순서쌍의 개수와 같다.

$a' = a-1$ 이라 하면 a' 은 음이 아닌 정수이므로

$a+b+c+d = (a'+1)+b+c+d = 9$

$\therefore a'+b+c+d = 8 \quad \cdots\cdots$ ㉡

$(a',\ b,\ c,\ d)$ 의 개수는

$${}_4H_8 = {}_{4+8-1}C_8 = {}_{11}C_3 = \frac{11\times10\times9}{3\times2\times1} = 165$$

따라서 구하는 자연수의 개수는 165 이다.

41) [정답] 84
$a = 10k+10,\ b = 10l+10,\ c = 10m+10,\ d = 10n+10$
($k,\ l,\ m,\ n$ 은 음이 아닌 정수)으로 놓으면

$a+b+c+d = 100$ 은 다음과 같다.

$(10k+10)+(10l+10)+(10m+10)+(10n+10) = 100$

$\therefore k+l+m+n = 6 \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 만족시키는 음이 아닌 정수 $k,\ l,\ m,\ n$ 의 순서쌍 $(k,\ l,\ m,\ n)$ 의 개수는

$${}_4H_6 = {}_{4+6-1}C_6 = {}_9C_3 = \frac{9\times8\times7}{3\times2\times1} = 84$$

42) [정답] ①
집합 A 의 원소인 서로 다른 7 개의 자연수 중에서 중복을 허락하여 뽑은 3 개를 더하여 만든 수가 모두 다를 때, 집합 B 의 원소의 개수가 최대이다.

따라서 구하는 최댓값은

$${}_7H_3 = {}_{7+3-1}C_3 = {}_9C_3 = \frac{9\times8\times7}{3\times2\times1} = 84$$

[오답 피하기]

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ 이면 $1+3+7 = 2+4+5$ 와 같이 세 수의 합이 서로 같은 경우가 생기므로 집합 B 의 원소의 개수는 ${}_7H_3$ 보다 작다.

[참고]

집합 A 의 원소 중에서 중복을 허락하여 3 개를 뽑아 더하여 만든 수가 서로 다른 예 :

$A = \{1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243,\ 729\}$

43) [정답] ②
$x^3+x = t$ 라 하면 $3x^2+1 = \frac{dt}{dx}$ 이므로

$$\int(3x^2+1)(x^3+x)^9dx = \int t^9dt = \frac{1}{10}t^{10}+C$$

$$= \frac{1}{10}(x^3+x)^{10}+C$$ (단, C 는 적분상수)

이때 $(x^3+x)^{10}$ 의 전개식의 일반항은

${}_{10}C_r(x^3)^rx^{10-r} = {}_{10}C_rx^{2r+10}$ 이므로 x^{16} 의 계수는 $r=3$ 일 때

$${}_{10}C_3 = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 120$$

따라서 $\frac{1}{10}(x^3+x)^{10}$ 의 전개식에서 x^{16} 의 계수는

$\frac{1}{10}\times120 = 12$

[다른 풀이]

$(3x^2+1)(x^3+x)^9$ 의 전개식에서 x^{15} 의 계수를 구해 보자.

(ⅰ) $(x^3+x)^9 = x^9(x^2+1)^9$ 의 전개식에서 x^{13} 의 계수는

${}_9C_2 = \frac{9\times8}{2\times1} = 36$

이므로 $3x^2(x^3+x)^9$ 의 전개식에서 x^{15} 의 계수는

$3\times36 = 108$

(ⅱ) $(x^3+x)^9 = x^9(x^2+1)^9$ 의 전개식에서 x^{15} 의 계수는

${}_9C_3 = \frac{9\times8\times7}{3\times2\times1} = 84$

(ⅰ), (ⅱ)에서 x^{15} 의 계수는 $108+84 = 192$ 이다.

$$\int 192x^{15}dx = 192\times\frac{1}{16}x^{16}+C$$
$$=12x^{16}+C\text{(단, } C\text{는 적분상수)}$$
이므로 구하는 x^{16} 의 계수는 12 이다.

44) [정답] 120

$a_0 = b^6 = 8$ 이므로

$b = 8^{\frac{1}{6}} = (2^3)^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ ($\because b>0$)

등식 $(ax+b)^6 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_6x^6$ 은 x 에 대한 항등식이므로 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$(a\times 1+b)^6 = a_0+a_1+a_2+\cdots+a_6$

이때 $\sum_{r=0}^{6} a_r = (a+b)^6 = (a+\sqrt{2})^6 = 0$ 이므로

$a = -\sqrt{2}$

따라서 $(ax+b)^6 = (-\sqrt{2})^6(x-a)^6 = 8(x-1)^6$ 의 전개식의 일반항은

$8{}_6C_r x^r(-1)^{6-r}$

이므로 $a_r = 8{}_6C_r(-1)^{6-r}$

따라서 $r=2$ 또는 $r=4$ 일 때 a_r 는 최대이므로 구하는 최댓값은

$a_2 = a_4 = 8\times{}_6C_2\times(-1)^4$

$= 8\times\frac{6\times 5}{2\times 1}\times 1 = 120$

[참고]

다항식 $f(x)$ 의 전개식에서 상수항을 포함한 모든 항의 계수의 총합은 $f(1)$ 의 값과 같다.

45) [정답] ②

각 조리전문가가 3 개의 제품 중 맛이 좋다고 생각하는 2 개의 제품을 선택하는 방법의 수는 각 조리전문가가 3 개의 제품 중 가장 맛이 없다고 생각하는 1 개의 제품을 선택하는 방법의 수와 같다. 8 명의 전문가가 제 제품 A, B, C 중 가장 맛이 없다고 생각한 제품의 수를 각각 x, y, z 라 하면

$x+y+z=8$ ($x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$)

이때 세 정수 x, y, z 의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$ 의 개수는

$${}_3H_8 = {}_{10}C_2 = \frac{10\times 9}{2\times 1} = 45$$

[오답 피하기]

8 명의 전문가가 세 제품 A, B, C 중 맛이 좋다고 생각하는 2 개의 제품을 선택할 때 선택한 제품의 수를 각각 x, y, z 라 하면

$x+y+z=16$ ($x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$) ……㉠

이 성립하지만 구하는 평가 결과의 수는 ${}_3H_{16}$ 이 아니다.

왜냐하면 ㉠에는 $x=16$, $y=0$, $z=0$ 과 같이 한 사람이 한 제품에 두 개의 스티커를 모두 붙인 경우도 포함되기 때문이다.

46) [정답] 495

$a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)-f(1)$, $a_3 = f(3)-f(2)$,

$f_4 = f(4)-f(3)$, $a_5 = 15-f(4)$ 라 하자.

구하는 함수 f 의 개수는 방정식

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=15$ ……㉠

의 정수인 해 중에서

$a_1\ge 1$, $a_2\ge 1$, $a_3\ge 2$, $a_4\ge 3$, $a_5\ge 0$

을 만족시키는 해의 개수와 같다.

$a_1-1=b_1$, $a_2-1=b_2$, $a_3-2=b_3$, $a_4-3=b_4$, $a_5=b_5$

라 하면 b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 는 모두 0 이상의 정수이고, ㉠은

$(b_1+1)+(b_2+1)+(b_3+2)+(b_4+3)+b_5=15$, 즉

$b_1+b_2+b_3+b_4+b_5=8$ ……㉡

고 같다.

따라서 함수 f 의 개수는 ㉡을 만족시키는 0 이상의 정수 b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 의 순서쌍 (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)의 개수와 같으므로

$${}_5H_8 = {}_{12}C_4 = 12\times 11\times 10\times\frac{9}{4\times 3\times 2\times 1} = 495$$

[다른 풀이]

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ 와 $11=(15-4)$ 개의 $\square$ 를 일렬로 나열한 다음, 맨 왼쪽부터 차례로 1, 2, 3, $\cdots$, 15 와 대응시키기로 하면 주어진 조건을 만족시키기 위해서는 다음과 같이 나열하면 된다.

(i) $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ 를 이 순서대로 왼쪽부터 차례로 나열한다.,

(ii) $f(2)$ 와 $f(3)$ 사이에는 한 개의 $\square$ 를 나열하고, $f(3)$ 과 $f(4)$ 사이에는 두 개의 $\square$ 를 나열한다.

$f(1)$ $f(2)$ $\square$ $f(3)$ $\square$ $\square$ $f(4)$

(iii) $f(1)$ 의 왼쪽, $f(1)$ 과 $f(2)$ 사이, $f(2)$ 와 $f(3)$ 사이, $f(3)$ 과 $f(4)$ 사이, $f(4)$ 의 오른쪽에 있는 5 개의 자리 ($\vee$) 중에서 중복을 허락하여 8 개를 택하고 그 자리에 $\square$ 를 나열한다.

$\vee f(1) \vee$ $f(2)\vee$ $\square$ $f(3)\vee$ $\square$ $\square$ $f(4)\vee$

(i), (ii), (iii)에서 나열하는 방법의 수는 각각 1, 1, ${}_5H_8$ 이므로 구하는 함수의 개수는

$1\times 1\times{}_5H_8 = 495$

47) [정답] 35

세 개의 자연수 2, 3, 5 중에서 중복을 허락하여 5 개를 택하여 모두 곱한 값은

$2^a\times 3^b\times 5^c$

($a+b+c=5$, a, b, c 는 음이 아닌 정수) ……㉠

꼴이므로 집합 A 의 원소들은 모두 ㉠와 같은 꼴이다.

그러므로 집합 A 의 원소의 개수는

$${}_3H_5 = {}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_2 = \frac{7\times 6}{2\times 1} = 21$$

이때 a, b, c 의 21 개의 순서쌍을 각각 $(a_k,\ b_k,\ c_k)$ ($k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 21$) 라 하면

$a_k+b_k+c_k=5$ 이므로

$(a_1+b_1+c_1)+(a_2+b_2+c+2)+\cdots+(a_{21}+b_{21}+c_{21})$
$=5\times 21=105$
이때
$a_1+a_2+\cdots+a_{21}=b_1+b_2+\cdots+b_{21}$
$=c_1+c_2+\cdots+c_{21}$
이므로
$a_1+a_2+\cdots+a_{21}=b_1+b_2+\cdots+b_{21}$
$=c_1+c_2+\cdots+c_{21}$
$=\dfrac{105}{3}=35$
따라서 A 의 모든 원소들의 곱 T 는
$T=(2^{a_1}\times 3^{b_1}\times 5^{c_1})\times(2^{a_2}\times 3^{b_2}\times 5^{c_2})\times\cdots\times(2^{a_{21}}\times 3^{b_{21}}\times 5^{c_{21}})$
$=2^{a_1+a_2+\cdots+a_{21}}\times 3^{b_1+b_2+\cdots+b_{21}}\times 5^{c_1+c_2+\cdots+c_{21}}$
$=2^{35}\times 3^{35}\times 5^{35}$
$=(2\times 3\times 5)^{35}=30^{35}$
$\therefore \log_{30}30^{35}=35$

[다른 풀이]
위의 풀이에서 집합 A 의 원소는
$2^a\times 3^b\times 5^c$ ($a+b+c=5$, a, b, c 는 음이 아닌 정수)
꼴이고, 집합 A 의 원소의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_5=21$ 이다.
이때 이 21 개의 원소들을 모두 곱한 값을
$2^l\times 3^m\times 5^n$ (l, m, n 은 자연수)
이라 할 때, l 의 값을 구해 보자.
집합 A 의 원소 중ㅇ서 $a=k$ ($k=0$, 1, 2, $\cdots$, 5) 인 원소의
개수를 $f(k)$ 라 하면 $f(k)$ 는 $b+c=5-k$ 인 음이 아닌 정수 b, c 의 순서쌍 $(b,\ c)$ 의 개수와 같으므로
$f(k)={}_2\mathrm{H}_{5-k}={}_{6-k}\mathrm{C}_{5-k}={}_{6-k}\mathrm{C}_1=6-k$
$\therefore l=0\times f(0)+1\times f(1)+2\times f(2)+\cdots+5\times f(5)$
$=0\times 6+1\times 5+2\times 4+3\times 3+4\times 2+5\times 1$
$=0+5+8+9+8+5=0$
마찬가지 방법으로 $m=n=l=35$ 임을 알 수 있다.
$(2\times 3\times 5)^{35}=30^{35}$ 이므로
$\log_{30}T=35$

48) [정답] ③
$\left(7x+\dfrac{1}{49}\right)^{14}$ 의 전개식의 일반항은
${}_{14}\mathrm{C}_r(7x)^r\left(\dfrac{1}{7^2}\right)^{14-r}$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,14)$
이므로 x^r 의 계수는
${}_{14}\mathrm{C}_r6^{3r-28}$
(ⅰ) $r=0$, 7, 14 일 때, ${}_{14}\mathrm{C}_r$ 는 7 의 배수가 아닌 정수이다.
따라서 ${}_{14}\mathrm{C}_r7^{3r-28}$ 의 값이 정수이려면 7^{3r-28} 의 값이 정수이어야 하므로 $3r-28\geq 0$, 즉, $r\geq 10$ 이어야 한다.
$\therefore r=14$
(ⅱ) $r\neq 0$, 7, 14 일 때, ${}_{14}\mathrm{C}_r$ 는 7 의 배수이고 7^2 의 배수가 아니다.
따라서 ${}_{14}\mathrm{C}_r7^{3r-28}$ 의 값이 정수이려면
$3r-28\geq -1$, 즉 $r\geq 9$ 이어야 한다.
$\therefore r=9$, 10, 11, 12, 13
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 계수가 정수인 항의 개수는
$1+5=6$

정답 및 풀이

49) [정답] ②
천의 자리에 오는 수는 홀수이어야 하므로 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 5의 3개, 일의 자리에 오는 수는 짝수이어야 하므로 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 4의 2개이다. 따라서 만의 자리, 백의 자리 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4, 5의 다섯 개의 숫자에서 중복을 허락하여 3개를 뽑는 순열의 수와 같으므로 구하는 다섯 자리의 자연수의 개수는
$3\times 2\times {}_5\Pi_3=3\times 2\times 5^3=750$

50) [정답] 48
(ⅰ) $f(a)$와 $f(b)$가 홀수이므로 순서쌍 $(f(a),\ f(b))$의 개수는 1, 3, 5, 7의 4개의 숫자에서 2개를 뽑는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_4\Pi_2$
(ⅱ) $f(c)$와 $f(d)$는 짝수이고 $f(c)<f(d)$이므로 순서쌍 $(f(c),\ f(d))$의 개수는 2, 4, 6의 3개의 숫자에서 2개를 뽑는 조합의 수와 같으므로 ${}_3\mathrm{C}_2$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 함수 f의 개수는
${}_4\Pi_2\times{}_3\mathrm{C}_2=4^2\times 3=16\times 3=48$

51) [정답] ⑤
(ⅰ) 천의 자리의 수가 1 또는 2일 때
백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 오는 수는 각각 1, 2, 3, 4의 4개의 숫자에서 3개를 뽑는 중복순열의 수와 같으므로
${}_4\Pi_3\times 2=4^3\times 2=128$
(ⅰ) 천의 자리의 수가 3일 때
① 백의 자리의 수가 1 또는 2 또는 3인 경우
십의 자리, 일의 자리에 오는 수는 각각 1, 2, 3, 4의 4개의 숫자에서 2개를 뽑는 중복순열의 수와 같으므로
${}_4\Pi_2\times 3=4^2\times 3=48$
② 백의 자리의 수가 4인 경우
십의 자리의 수가 1 또는 2 또는 3중의 3가지 중의 하나이고 일의 자리의 수는 각각 1, 2, 3, 4의 4가지 중의 하나인 경우의 수에서 3433, 3434의 2가지 경우의 수를 빼면 되므로 구하는 자연수의 개수는
$3\times 4-2=10$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 자연수의 개수는
$128+48+10=186$

52) [정답] ②
(ⅰ) $f(4)=1$일 때
조건 (나)에 의하여 $f(1)=f(2)=f(3)=1$이고, 조건

(다)에 의하여 $f(5)$, $f(6)$의 값은 각각
2, 3, 4, 5, 6의 5가지 중 하나이므로 구하는 함수
f의 개수는 $1\times{}_5\Pi_2=5^2=25$

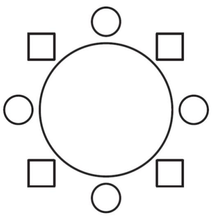
(ⅱ) $f(4)=3$일 때
조건 (나)에 의하여 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값은 각각
1, 2, 3의 3가지 중 하나이고, 조건 (다)에 의하여
$f(5)$, $f(6)$의 값은 각각 4, 5, 6의 3가지 중
하나이므로 구하는 함수 f의 개수는
${}_3\Pi_3\times{}_3\Pi_2=3^3\times3^2=243$

(ⅲ) $f(4)=5$일 때
조건 (나)에 의하여 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값은 각각
1, 2, 3, 4, 5의 5가지 중 하나이고, 조건 (다)에
의하여 $f(5)=(6)=6$이므로 구하는 함수 f의 개수는
${}_5\Pi_3\times1=5^3=125$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 함수의 개수는
$25+243+125=393$

53) [정답] 144

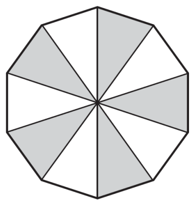
그림과 같이 어른 4명을 먼저
원탁의 ○자리에 앉히는 경우의
수는
$(4-1)!=3!$



어른 사이의 4개의 □ 자리에
어린이 3명을 앉히는 경우의 수는
${}_4P_3$
따라서 구하는 모든 경우의 수는
$3!\times{}_4P_3=6\times24=144$

54) [정답] ③

홀수끼리 이웃하지 않아야 하므로
그림에서 색칠한 삼각형에 홀수를
적고 나머지 삼각형에서 짝수를
적으면 된다. 따라서 색칠한 삼각형에
홀수를 적는 경우의 수는

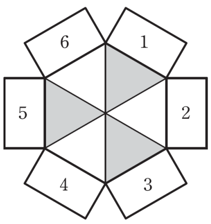


$\frac{5!}{5}=(5-1)!=4!=24$

홀수를 적은 후 짝수를 적는 경우의 수는 5!이므로 구하는
모든 경우의 수는
$4!\ \times5!=24\times120=2880$

55) [정답] ①

정삼각형의 영역에 칠할 2가지 색을
고르는 경우의 수는 ${}_8C_2$
정삼각형의 영역에 색칠한 후
나머지 6가지 색을 직사각형의
영역에 칠하는 경우의 수는 6가지
색을 일렬로 나열하는 경우의 수를
회전하였을 때 같은 것이 되는 경우의 수로 나누어 주면
된다.



회전에 의하여 같은 경우가 되는 경우는 영역 1에 칠한
색이 영역 3, 5의 영역으로 올 때 같은 경우가 되므로
3가지가 생긴다.
따라서 구하는 경우의 수는

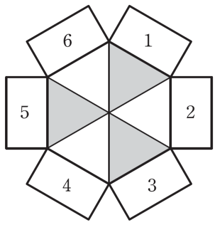
${}_8C_2\times6!\times\frac{1}{3}=\frac{8\times7}{2}\times6!\times\frac{1}{3}=\frac{8!}{6}$

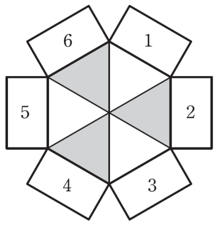
다른 풀이

(ⅰ) 정삼각형의 영역에 칠할 2가지 색을 고르는 경우의 수
는 ${}_8C_2$

(ⅱ) (ⅰ)에서 선택한 색을 제외한 나머지 6가지 색을 먼저
6개의 직사각형의 영역에 색칠하는 경우의 수는
$(6-1)!=5!$

이때 각각의 경우마다 정삼각형의 영역에 색을 칠하는
경우의 수가 2가지이므로 구하는 경우의 수는
${}_8C_2\times(6-1)!\times2=\frac{8\times7}{2}\times5!\times2=\frac{8!}{6}$





56) [정답] ⑤

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=12$를 만족시키는 경우는
$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값이 $\{1, 3, 4, 4\}$ 또는
$\{2, 2, 4, 4\}$ 또는 $\{2, 3, 3, 4\}$ 또는 $\{3, 3, 3, 3\}$ 중의
하나의 값을 갖는 경우이다.

(ⅰ) 1, 3, 4, 4를 일렬로 배열하는 겨우의 수는
$\frac{4!}{2!}=12$

(ⅱ) 2, 2, 4, 4를 일렬로 배열하는 겨우의 수는
$\frac{4!}{2!2!}=6$

(ⅲ) 2, 3, 3, 4를 일렬로 배열하는 겨우의 수는
$\frac{4!}{2!}=12$

(ⅳ) 3, 3, 3, 3를 일렬로 배열하는 겨우의 수는
$\frac{4!}{4!}=1$

(ⅰ) ~ (ⅳ)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는
$12+6+12+1=31$

57) [정답] ①

(ⅰ) 3개의 문자 i, o, o가 이웃하므로 3개의 문자를
하나로 보고 배열한 다음 자리를 바꾸는 경우의 수는
$\frac{3!}{2!}$

(ⅱ) g가 s보다 항상 왼쪽에 있도록 배열하는 경우는 이
두 문자를 모두 A로 놓고 배열하는 것과 같다.
따라서 i, o, o를 묶어서 B로 생각하면
A, A, B, h, h, h, c, l을 배열하는 경우의 수는
$\frac{8!}{2!3!}$

따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{8!}{2!3!} \times \frac{3!}{2!} = \frac{8!}{4}$$

다른 풀이

10개의 문자 h, i, g, h, s, c, h, o, o, l에서 i, o, o를 제외하고 g, s를 B로 놓은 7개의 문자
h, B, h, B, c, h, l을 그림과 같이 □의 자리에 배열하는 경우의 수는
$$\frac{7!}{3!2!}$$
○□○□○□○□○□○□○□○

이때 i, o, o를 한 문자 A로 보고 8개의 ○중 한 자리에 배열하는 경우의 수는
$$8 \times \frac{3!}{2!}$$
따라서 구하는 경우의 수는
$$\frac{7!}{3!2!} \times 8 \times \frac{3!}{2!} = \frac{8!}{4}$$

58) [정답] ④

빨간색 볼펜, 파란색 볼펜, 검은색 볼펜을 각각 A, B, C라 하면

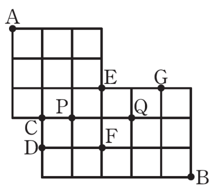
(ⅰ) 두 종류의 볼펜을 선택하는 경우
AAABBB, AAACCC, BBBCCC의 3가지 경우가 있고 각 경우마다 6명의 학생들에게 나누어 주는 경우의 수는
$$\frac{6!}{3!3!} = \frac{720}{6 \times 6} = 20$$

(ⅱ) 세 종류의 볼펜을 선택하는 경우
AAABBC, AAABCC, AABBBC, AABCCC, ABBBCC, ABBCCC인 경우 각 경우마다 6명의 학생들에게 나누어 주는 경우의 수는
$$\frac{6!}{2!3!} \times 6 = 360$$
AABBCC인 경우 이것을 6명의 학생들에게 나누어 주는 경우의 수는
$$\frac{6!}{2!2!2!} = 90$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는
$60 + 360 + 90 = 510$

59) [정답] ①

그림과 같이 다섯 지점 C, D, E, F, G 지점을 잡자.



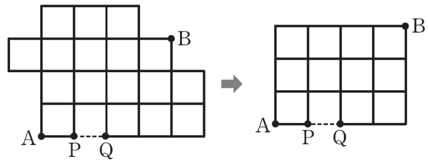
(ⅰ) A → C → D → B로 가는 경우의 수는
$$\frac{4!}{3!} \times 1 \times \frac{6!}{5!} = 4 \times 6 = 24$$

(ⅱ) A → E → F → B로 가는 경우의 수는
$$\frac{5!}{2!3!} \times 1 \times \frac{4!}{3!} = 10 \times 4 = 40$$

(ⅲ) A → E → G → B로 가는 경우의 수는
$$\frac{5!}{2!3!} \times 1 \times \frac{4!}{3!} = 10 \times 4 = 40$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는
$24 + 40 + 40 = 104$

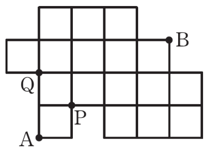
60) [정답] ②



[그림 1] [그림 2]

구하는 경우의 수는 [그림 2]의 A지점에서 출발하여 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수에서 A → P → Q → B로 가는 경우의 수를 뺀 것과 같다.
따라서 구하는 경우의 수는
$$\frac{7!}{4!3!} - \frac{5!}{2!\ 3!} = 35 - 10 = 25$$

다른 풀이



(ⅰ) A → P → B로 가는 경우의 수는
$$\frac{2!}{1!1!} \times \frac{5!}{3!2!} = 2 \times 10 = 20$$

(ⅱ) A → Q → B로 가는 경우의 수는
$$1 \times \frac{5!}{4!1!} = 5$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는
$20 + 5 = 25$

61) [정답] ③

순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 2, 3, 4의 3개의 자연수 중에서 중복을 허락하여 2개를 뽑는 조합의 수와 같으므로
$${}_3H_2 = {}_{3+2-1}C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$
순서상 $(c,\ d)$의 개수는 5, 6, 7, 8, 9의 5개의 자연수 중에서 중복을 허락하여 2개를 뽑는 조합의 수와 같으므로
$${}_5H_2 = {}_{5+2-1}C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$
따라서 구하는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는
$6 \times 15 = 90$

62) [정답] ③

학생 6명을 A, B, C, D, E, F라 하자.
이 중에서 다섯 명의 학생 A, B, C, D, E만 볼펜을 받는 경우의 수를 생각해보자. A, B, C, D, E의 다섯 명의 학생에게 볼펜을 한 개 씩 나누어 준 후 남은 4개를 다시 A, B, C, D, E의 다섯 명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수와 같으므로

${}_5H_4 = {}_{5+4-1}C_4 = {}_8C_4 = \dfrac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1} = 70$

볼펜을 받는 다섯 사람을 택하는 경우의 수는

${}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$

따라서 구하는 경우의 수는

${}_6C_5 \times {}_5H_4 = 6\times70 = 420$

63) [정답] ②

$A\times B\times C = 720 = 2^4\times3^2\times5$를 만족시키는 세 자연수

A, B, C는 $2^i3^j5^k$(i, j, k는 음이 아닌 정수)꼴이므로

$A = 2^{x_1}3^{y_1}5^{z_1}$, $B = 2^{x_2}3^{y_2}5^{z_2}$, $C = 2^{x_3}3^{y_3}5^{z_3}$이라 하면

$A\times B\times C = 2^{x_1+x_2+x_3}3^{y_1+y_2+y_3}5^{z_1+z_2+z_3} = 2^4\times3^2\times5$에서

$x_1+x_2+x_3=4$, $y_1+y_2+y_3=2$, $z_1+z_2+z_3=1$을

만족시키면 된다.

$x_1+x_2+x_3=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수

x_1, x_2, x_3의 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$의 개수는

${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$

$y_1+y_2+y_3=2$를 만족시키는 음이 아닌 정수

y_1, y_2, y_3의 순서쌍 $(y_1,\ y_2,\ y_3)$의 개수는 ${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$

$z_1+z_2+z_3=1$를 만족시키는 음이 아닌 정수

z_1, z_2, z_3의 순서쌍 $(z_1,\ z_2,\ z_3)$의 개수는

${}_3H_1 = {}_3C_1 = 3$

따라서 구하는 경우의 수는

${}_3H_4\times{}_3H_2\times{}_3H_1 = 15\times6\times3 = 270$

64) [정답] ③

조건 (가), (나)에서 $f(2)+f(3)$의 값이 3의 배수가 되는

순서쌍 $(f(2)+f(3))$은 $(2,\ 1)$, $(3,\ 3)$, $(4,\ 2)$의

3가지이다.

(ⅰ) $f(2)=2$, $f(3)=1$일 때, 조건 (나)에 의하여

$f(1)\ge f(2)=2\ge f(3)=f(4)=f(5)=1$이므로

$3\times1=3$

(ⅱ) $f(2)=3$, $f(3)=3$일 때, 조건 (나)에 의하여

$f(1)\ge f(2)=f(3)=3\ge f(4)\ge f(5)$이므로

$2\times{}_3H_2 = 2\times{}_4C_2 = 12$

(ⅲ) $f(2)=4$, $f(3)=2$일 때, 조건 (나)에 의하여

$f(1)=f(2)=4\ge f(3)=2\ge f(4)\ge f(5)$이므로

$1\times{}_2H_2 = 1\times{}_3C_2 = 3$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 함수 f의 개수는

$3+12+3=18$

65) [정답] ⑤

구하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는 $z'=z-2$로 놓으면

음이 아닌 정수 x, y, z'에 대하여 $x+y+z'=10$을

만족시키는 순서쌍 $(x,\ y,\ z')$의 개수와 같으므로

${}_3H_{10} = {}_{12}C_{10} = {}_{12}C_2 = \dfrac{12\times11}{2\times1} = 66$

66) [정답] ②

$x'=x+1$, $y'=y+1$, $z'=z-3$으로 놓으면

x', y', z'은 각각 음이 아닌 정수이다.

이것은 주어진 방정식에 대입하면

$(x'-1)+(y'-1)+(z'+3)=5$

$x'+y'+z'=4$ …… ㉠

따라서 구하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는 방정식 ㉠을

만족시키는 순서쌍 $(x',\ y',\ z')$의 개수와 같으므로

${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$

67) [정답] 192

조건 (가)를 만족시키는 함수 f의 개수는

1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개의 숫자에서 중복을 허락하여

5개를 뽑는 조합의 수와 같으므로

${}_6H_5 = {}_{10}C_5 = \dfrac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2\times1} = 252$

이중에서 $f(3)=3$을 만족시키는 함수 f의 개수는

${}_3H_2\times{}_4H_2 = {}_4C_2\times{}_5C_2 = 6\times10 = 60$

이므로 구하는 함수 f의 개수는

$252-60=192$

다른 풀이

$f(3)=1$인 경우 $1\times{}_6H_2 = {}_7C_2 = 21$

$f(3)=2$인 경우 ${}_2H_2\times{}_5H_2 = {}_3C_2\times{}_6C_2 = 3\times15 = 45$

$f(3)=4$인 경우 ${}_4H_2\times{}_3H_2 = {}_5C_2\times{}_4C_2 = 10\times6 = 60$

$f(3)=5$인 경우 ${}_5H_2\times{}_2H_2 = {}_6C_2\times{}_3C_2 = 15\times3 = 45$

$f(3)=6$인 경우 ${}_6H_2\times1 = {}_7C_2 = 21$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$21+45+60+45+21=192$

68) [정답] ③

$\left(2x+\dfrac{1}{2}\right)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r(2x)^{6-r}\left(\frac{1}{2}\right)^r = {}_6C_r2^{6-r}x^{6-r}2^{-r}$$
$$= {}_6C_r2^{6-2r}x^{6-r}$$

이때 x^3항은 $r=3$일 때이므로 x^3의 계수는

${}_6C_3 = \dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1} = 20$

69) [정답] ①

$\left(x^2-\dfrac{a}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r(x^2)^{5-r}\left(-\frac{a}{x}\right)^r = {}_5C_r(-a)^rx^{10-3r}$$

이때 x^4항은 $r=2$일 때이므로 x^4의 계수는

${}_5C_2(-a)^2 = 10a^2$

x항은 $r=3$일 때이므로 x의 계수는

${}_5C_3(-a)^3 = -10a^3$

x^4의 계수와 x의 계수가 같으므로

$10a^2 = -10a^3$, $a^2(a+1)=0$

$\therefore\ a=0$ 또는 $a=-1$

$a\ne0$이므로 $a=-1$

70) [정답] ①

$\left(x+\dfrac{a}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6C_rx^{6-r}\left(\frac{a}{x}\right)^r = {}_6C_ra^rx^{6-2r}$$

x^3항은 $3x\times{}_6C_2a^2x^2=45a^2x^3$이므로 x^3의 계수는 $45a^2$

x^4항은 $2\times{}_6C_1ax^4=12ax^4$이므로 x^4의 계수는 $12a$

$45a^2+12a=9,\ 15a^2+4a-3=0$

$(3a-1)(5a+3)=0$

$\therefore\ a=\frac{1}{3}$ 또는 $a=-\frac{3}{5}$

$a>0$이므로 $a=\frac{1}{3}$

71) [정답] 48

(ⅰ) $8^{10}=(10-2)^{10}$

$={}_{10}C_0(-2)^{10}+{}_{10}C_1 10(-2)^9+{}_{10}C_1 10^2(-2)^8+\cdots+{}_{10}C_9 10^9(-2)^1+{}_{10}C_{10}10^{10}$

이때

${}_{10}C_1 10(-2)^9+{}_{10}C_1 10^2(-2)^8+\cdots+{}_{10}C_{10}10^{10}$은

40으로 나누어떨어진다.

따라서 8^{10}을 40으로 나누었을 때의 나머지는

${}_{10}C_0(-2)^{10}=1024$를 40으로 나누었을 때의 나머지와

같으므로 구하는 나머지는 24이다.

(ⅱ) $12^{10}=(10+2)^{10}$

$={}_{10}C_0 2^{10}+{}_{10}C_1 10\cdot 2^9+{}_{10}C_2 10^2\cdot 2^8+\cdots+{}_{10}C_9 10^9\cdot 2+{}_{10}C_{10}10^{10}$

이때

${}_{10}C_1 10\cdot 2^9+{}_{10}C_2 10^2\cdot 2^8+\cdots+{}_{10}C_{10}10^{10}$은

40으로 나누어떨어진다.

따라서 12^{10}을 40으로 나누었을 때의 나머지는

${}_{10}C_0 2^{10}=1024$를 40으로 나누었을 때의 나머지와

같으므로 구하는 나머지는 24이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a=24,\ b=24$이므로

$a+b=24+24=48$

72) [정답] ①

$\sum_{k=1}^{n}{}_nC_k={}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n-1$

이므로 $2^n-1=5p$(p는 자연수) 꼴이어야 한다.

그런데 2^n의 일의 자리의 수는 $2,4,8,6,2,4,8,6,\cdots$을 반복하므

로 2^n-1의 값이 5의 배수가 되는 경우는 2^n의 일의 자리의 수가

6일 때 이므로 $n=4m$(m은 자연수)이다.

$1\le n\le 30$이므로

$1\le 4m\le 30,\ \frac{1}{4}\le m\le\frac{15}{2}$

자연수 m은 $1,2,3,4,5,6,7$이므로 구하는 n의 값은

$4,8,\cdots,28$이다.

따라서 모든 n의 값의 합은

$\frac{7\times(4+28)}{2}=7\times 16=112$

73) [정답] ②

$(2x+1)^{10}={}_{10}C_0+{}_{10}C_1(2x)+{}_{10}C_2(2x)^2+\cdots+{}_{10}C_{10}(2x)^{10}$

$=1+2{}_{10}C_1x+2^2{}_{10}C_2x^2+2^3{}_{10}C_3x^3+\cdots+2^{10}{}_{10}C_{10}x^{10}$

이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$10(2x+1)^9\cdot 2$

$=2\cdot{}_{10}C_1+2\cdot 2^2{}_{10}C_2x+3\cdot 2^3{}_{10}C_3x^2+\cdots+10\cdot 2^{10}{}_{10}C_{10}x^9$

……㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$20\times 3^9=2{}_{10}C_1+2\cdot 2^2{}_{10}C_2+3\cdot 2^3{}_{10}C_3+\cdots+10\cdot 2^{10}{}_{10}C_{10}$

이므로 구하는 값은 20×3^9이다.

74) [정답] ③

$1+(x+1)+(x+1)^2+(x+1)^3+\cdots+(x+1)^{20}$

$=\frac{(x+1)^{21}-1}{(x+1)-1}=\frac{(x+1)^{21}-1}{x}$

따라서 $1+(x+1)+(x+1)^2+(x+1)^3+\cdots+(x+1)^{20}$의 전개식

에서 x^k의 계수는 $(x+1)^{21}$의 전개식에서 x^{k+1}의 계수와 같으므로

$a_k={}_{21}C_{k+1}$이다.

$\therefore\ \sum_{k=1}^{20}a_k=\sum_{k=1}^{20}{}_{21}C_{k+1}$

$={}_{21}C_2+{}_{21}C_3+{}_{21}C_4+{}_{21}C_5+\cdots+{}_{21}C_{21}$

$=({}_{21}C_0+{}_{21}C_1+{}_{21}C_2+{}_{21}C_3+{}_{21}C_4+{}_{21}C_5+\cdots+{}_{21}C_{21})$

$-{}_{21}C_0-{}_{21}C_1$

$=2^{21}-1-21$

$=2^{21}-22$

75) 답 ④

[해설]

$\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 일반항은

${}_6C_r(2x^2)^{6-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_6C_r2^{6-r}\times(-1)^r\times x^{12-2r}\times x^{-r}$

$={}_6C_r2^{6-r}\times(-1)^r\times x^{12-3r}$

따라서 상수항은 $12-3r=0$, 즉 $r=4$일 때이므로 구하는 상수항은

${}_6C_42^{6-4}\times(-1)^4={}_6C_2\times 2^2\times 1=60$

76) 답 ①

[해설]

$\left(2x+\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 일반항은

${}_6C_r(2x)^{6-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_6C_r\times 2^{6-r}\times x^{6-2r}$

따라서 $x^2\left(2x+\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 x^4의 계수는

$6-2r+2=4$에서 $r=2$일 때이므로

${}_6C_2\times 2^4=\frac{6\times 5}{2\times 1}\times 16=240$

77) 답 ④

[해설]

$\left(ax^2-\frac{1}{2x}\right)^7$의 전개식에서 일반항은

$${}_7\mathrm{C}_r(ax^2)^{7-r}\left(-\frac{1}{2x}\right)^r={}_7\mathrm{C}_r\times a^{7-r}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^r\times x^{14-3r}$$

이때 x^2의 계수는 $14-3r=2$에서 $r=4$일 때이므로

$${}_7\mathrm{C}_4\times a^{7-4}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^4={}_7\mathrm{C}_3\times a^3\times\frac{1}{16}$$

$$=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}\times a^3\times\frac{1}{16}=140$$

$a^3=64\quad\therefore\ a=4$

따라서 양수 a의 값은 4이다.

78) 답 ②

[해설]

${}_n\mathrm{C}_0=1,\ {}_n\mathrm{C}_n=1$이고

${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}+{}_n\mathrm{C}_n=2^n$

이므로

${}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}=2^n-2$

따라서 주어진 부등식은

$127<2^n-2<1023,\ 129<2^n<1025$

$2^7=128,\ 2^8=256,\ {}^9=512,\ 2^{10}=1024,\ 2^{11}=2048$이 므로

$n=8$ 또는 $n=9$ 또는 $n=9$

따라서 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은

$8+9+10=27$

79) 답 127

[해설]

${}_8\mathrm{C}_0+{}_8\mathrm{C}_2+{}_8\mathrm{C}_4+{}_8\mathrm{C}_6+{}_8\mathrm{C}_8=2^7$이므로

${}_8\mathrm{C}_2+{}_8\mathrm{C}_4+{}_8\mathrm{C}_6+{}_8\mathrm{C}_8=2^7-{}_8\mathrm{C}_0$

${}_8\mathrm{C}_0=1$이므로 ${}_8\mathrm{C}_2+{}_8\mathrm{C}_4+{}_8\mathrm{C}_6+{}_8\mathrm{C}_8=128-1=127$

[다른 풀이]

$${}_8\mathrm{C}_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28$$

$${}_8\mathrm{C}_4=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$$

${}_8\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_2=28$

${}_8\mathrm{C}_8=1$

따라서 ${}_8\mathrm{C}_2+{}_8\mathrm{C}_4+{}_8\mathrm{C}_6+{}_8\mathrm{C}_8=28+70+28+1=127$

80) 답 ②

[해설]

서로 다른 색깔의 색연필 10자루에서 6자루 이상을 택하는 경우의 수는

${}_{10}\mathrm{C}_6+{}_{10}\mathrm{C}_7+{}_{10}\mathrm{C}_8+{}_{10}\mathrm{C}_9+{}_{10}\mathrm{C}_{10}$

${}_{10}\mathrm{C}_6+{}_{10}\mathrm{C}_7+{}_{10}\mathrm{C}_8+{}_{10}\mathrm{C}_9+{}_{10}\mathrm{C}_{10}=k$로 놓으면

${}_{10}\mathrm{C}_4+{}_{10}\mathrm{C}_3+{}_{10}\mathrm{C}_{2+}{}_{10}\mathrm{C}_1+{}_{10}\mathrm{C}_0=k$

${}_{10}\mathrm{C}_0+{}_{10}\mathrm{C}_1+{}_{10}\mathrm{C}_{2+}\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_{10}=2^{10}$이므로

$k+{}_{10}\mathrm{C}_5+k=2^{10}$

$2k=2^{10}-{}_{10}\mathrm{C}_5$

$$k=2^9-\frac{{}_{10}\mathrm{C}_5}{2}=2^9-\frac{\dfrac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2\times1}}{2}$$

$=512-126=386$

81) 답 ③

[해설]

서로 다른 연필 5개를 같은 종류의 필통 3개에 빈 필통이 없도록 나누어 넣는 경우의 수는 원소의 개수가 5인 집합을 공집합이 아닌 3개의 부분집합으로 분할하는 경우의 수와 같으므로 $S(5,\ 3)$이다.

따라서 서로 다른 연필 5개를 (3개, 1개, 1개), (2개, 2개, 1개)로 분할하는 두 가지 경우가 있다.

(ⅰ) (3개, 1개, 1개)로 분할하는 경우

$${}_5\mathrm{C}_3\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1\times\frac{1}{2!}=10$$

(ⅱ) (2개, 2개, 1개)로 분할하는 경우

$${}_5\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2\times{}_1\mathrm{C}_1\times\frac{1}{2!}=15$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해 $10+15=25$

82) 답 ③

[해설]

$S(5,\ 4)$는 원소의 개수가 5인 집합을 공집합이 아니면서 서로소인 4개의 부분집합으로 분할하는 경우의 수이다.

4개의 부분집합 중 어느 한 부분집합의 원소의 개수는 2이고 나머지 부분집합의 원소의 개수는 모두 1이다.

5개의 원소 중 2개를 택하여 원소의 개수가 2인 부분집합을 만들고 나머지 3개의 원소를 각각 1개씩 나누어 부분집합을 만들면 되므로 구하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

83) 답 ②

[해설]

집합 A의 원소의 개수가 6이므로 집합 A를 공집합이 아닌 두 개 이상의 부분집합으로 분할할 때, 원소의 개수가 모두 다른 경우는 다음과 같이 3가지이다.

(ⅰ) 두 부분집합의 원소의 개수가 $(5,\ 1)$인 경우

${}_6\mathrm{C}_5\times{}_1\mathrm{C}_1={}_6\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1=6$

(ⅱ) 두 부분집합의 원소의 개수가 $(4,\ 2)$인 경우

${}_6\mathrm{C}_4\times{}_2\mathrm{C}_2={}_6\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_2=15$

(ⅲ) 세 부분집합의 원소의 개수가 $(3,\ 2,\ 1)$인 경우

${}_6\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_2\times{}_1\mathrm{C}_1={}_6\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1=60$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$6+15+60=81$

84) 답 ③

[해설]

같은 종류의 공 8개를 같은 종류의 상자 3개에 빈 상자가 없도록 나누어 넣는 경우의 수는 자연수 8을 3개의 자연수로 분할하는 경우의 수와 같으므로 $P(8,\ 3)$이다.

자연수 8을 3개의 자연수로 분할하면

$8=6+1+1$

$=5+2+1$

$=4+3+1$

$=4+2+2$

$=3+3+2$

따라서 구하는 경우의 수는

$P(8,\ 3)=5$

85) 답 ③

[해설]

자연수 7을 2개의 자연수로 분할하면

$7=6+1=5+2=4+3$

그러므로 $P(7,\ 2)=3$

또 자연수 7을 4개의 자연수로 분할하면

$7=4+1+1+1=3+2+1+1=2+2+2+1$

그러므로 $P(7,\ 4)=3$

따라서

$P(7,\ 2)+P(7,\ 4)=3+3=6$

86) 답 ④

[해설]

$10=4+6$이므로 숫자 4를 포함하는 자연수 10의 분할은 자연수 6의 각 분할에 숫자 4를 더한 것과 같다.

$6=6$

$=5+1=4+2=3+3$

$=4+1+1=3+2+1=2+2+2$

$=3+1+1+1=2+2+1+1$

$=2+1+1+1+1$

$=1+1+1+1+1+1$

이므로 숫자 4를 포함하는 자연수 10의 분할의 수는
$1+3+3+2+1+1=11$
87) 답 ②
[해설]
$_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+\cdots+{}_{11}C_{11}=2^{11}$ …… ㉠
$_nC_r={}_nC_{n-r}$에서
$_{11}C_0={}_{11}C_{11}$
$_{11}C_1={}_{11}C_{10}$
$_{11}C_2={}_{11}C_9$
$_{11}C_3={}_{11}C_8$
$_{11}C_4={}_{11}C_7$
$_{11}C_5={}_{11}C_6$
이므로 ㉠
$2({}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+{}_{11}C_3+{}_{11}C_4+{}_{11}C_5)=2^{11}$
$_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+{}_{11}C_3+{}_{11}C_4+{}_{11}C_5=2^{10}$
$\log_2({}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+{}_{11}C_3+{}_{11}C_4+{}_{11}C_5)=\log_2 2^{10}=10$
88) 답 ④
[해설]
$_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로
제1행의 모든 수의 합은
$_1C_0+{}_1C_1=2^1$
제2행의 모든 수의 합은
$_2C_0+{}_2C_1+{}_2C_2=2^2$
제3행의 모든 수의 합은
$_3C_0+{}_3C_1+{}_3C_2+{}_3C_3=2^3$
⋮
제10행의 모든 수의 합은
$_{10}C_0+{}_{10}C_1+{}_{10}C_2+\cdots+{}_{10}C_{10}=2^{10}$
따라서 구하는 모든 수의 합은 등비수열의 합이므로
$2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{10}=\dfrac{2(2^{10}-1)}{2-1}=2^{11}-2$
89) 답 ④
[해설]
이항정리에 의하여
$(1+x)^6={}_6C_0+{}_6C_1x+{}_6C_2x^2+\cdots+{}_6C_6x^6$ …… ㉠
㉠의 양변에 $x=7$을 대입하면
$_6C_0+7\times{}_6C_1+7^2\times{}_6C_2+\cdots+7^6\times{}_6C_6$
$=(1+7)^6=(2^3)^6=2^{18}$
90) 답 ③
[해설]
$S(4,\ 2)$는 원소의 개수가 4인 집합을 공집합이 아닌 2개의 부분집합으로 분할하는 경우의 수이므로 다음 2가지 경우이다.
(ⅰ) 두 부분집합의 원소의 개수가 $(2,\ 2)$인 경우
$_4C_2\times{}_2C_2\times\dfrac{1}{2!}=3$
(ⅱ) 두 부분집합의 원소의 개수가 $(3,\ 1)$인 경우
$_4C_3\times{}_1C_1=4$
(ⅰ), (ⅱ)에서
$S(4,\ 2)=3+4=7$
이때 $S(3,\ 1)=1$이므로 $7=n\times1$
즉, $n=7$
91) 답 ②
[해설]
서로 다른 연필 5개를 3개의 묶음으로 분할하는 경우의 수는 $S(5,\ 3)$과 같으므로 다음과 같이 두 가지 경우가 있다.
(ⅰ) (3개, 1개, 1개)로 분할하는 경우
$_5C_3\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\dfrac{1}{2!}={}_5C_2=10$
(ⅱ) (2개, 2개, 1개)로 분할하는 경우
$_5C_2\times{}_5C_2\times{}_1C_1\times\dfrac{1}{2!}={}_5C_2\times{}_3C_1\times\dfrac{1}{2}$
$=\dfrac{5\times4}{2\times1}\times3\times\dfrac{1}{2}=15$
(ⅰ), (ⅱ)에서
$S(5,\ 3)=10+15=25$
이 각각에 대하여 3명에게 나누어 주는 경우의 수는 $3!$
따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해
$25\times3!=25\times6=150$
92) 답 ③
[해설]
자연수 770을 소인수분해하면
$770=2\times5\times7\times11$
따라서 구하는 경우의 수는 집합 $\{2,\ 5,\ 7,\ 11\}$을 공집합이 아니면서 서로소인 2개의 부분집합으로 분할하는 경우의 수 $S(4,\ 2)$와 같다.
따라서
(ⅰ) 두 부분집합의 원소의 개수가 $(3,\ 1)$인 경우
$_4C_3\times{}_1C_1=4$
(ⅱ) 두 부분집합의 원소의 개수가 $(2,\ 2)$인 경우
$_4C_2\times{}_2C_2\times\dfrac{1}{2!}=3$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는
$S(4,\ 2)=4+3=7$
93) 답 ③
[해설]
구하는 경우의 수는 자연수 8을 세 개의 자연수로 분할하는 경우의 수 $P(8,\ 3)$과 같다.
$8=6+1+1$
$=5+2+1$
$=4+3+1$
$=4+2+2$
$=3+3+2$
이므로
$P(8,\ 3)=5$
94) 답 ②
[해설]
$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^5$의 전개식에서 일반항은
$_5C_rx^{5-r}\left(\dfrac{1}{x}\right)^r={}_5C_rx^{5-2r}$ …… ㉠
이때 $(2+x+x^2)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^5$의 전개식에서 x항은 2와 ㉠의 x항, x와 ㉠의 상수항, x^2과 ㉠의 $\dfrac{1}{x}$항이 곱해질 때 나타난다.
$5-2r=1$에서 $r=2$이므로
$_5C_2x=10x$
$5-2r=0$을 만족시키는 정수 r는 존재하지 않는다.
$5-2r=-1$에서 $r=3$이므로
$_5C_3x^{-1}=\dfrac{10}{x}$
즉, $(2+x+x^2)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^5$의 전개식에서 x항은
$2\times10x+x^2\times\dfrac{10}{x}=30x$
따라서 x의 계수는 30이다.
95) 답 ④
[해설]
$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^n$의 전개식에서 일반항은
$_nC_rx^{n-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r={}_nC_r(-1)^rx^{n-2r}$

$n-2r=3$ $(n=3,\ 4,\ 5)$에서

$n=4$일 때, x^3항은 존재하지 않는다.

$n=3,\ 5$일 때, $n-2r=3$을 만족시키는 r의 값은 각각 0, 1 이므로 x^3의 계수는

$${}_3C_0\times(-1)^0+{}_5C_1\times(-1)^1=1-5=-4$$

96) 답 ⑤

[해설]

$$11^{13}=(1+10)^{13}$$
$$={}_{13}C_0+{}_{13}C_1 10+{}_{13}C_2 10^2+{}_{13}C_3 10^3+\cdots+{}_{13}C_{13}10^{13}$$
$$=1+130+7800+286000+\cdots+10^{13}$$

따라서 일의 자리의 수는 1, 십의 자리의 수는 3, 백의 자리의 수는 9이므로

$a=1,\ b=3,\ c=9$

즉, $a+b+c=13$

97) 답 ③

[해설]

빈 가방이 1개 이하가 되도록 넣는 경우는 빈 가방이 없거나 1개 이다.

(ⅰ) 빈 가방이 없는 경우

같은 종류의 수학 교과서 7권을 같은 종류의 빈 가방 5개에 넣는 경우의 수는 $P(7,\ 5)$이므로

$$7=3+1+1+1+1=2+2+1+1+1$$

에서

$$P(7,\ 5)=2$$

(ⅱ) 빈 가방이 1개인 경우

같은 종류의 수학 교과서 7권을 같은 종류의 빈 가방 4개에 넣는 경우의 수는 $P(7,\ 4)$이므로

$$7=4+1+1+1=3+2+1+1=2+2+2+1$$

에서

$$P(7,\ 4)=3$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$2+3=5$

98) 답 260

A종류의 같은 접시 3개와 B종류의 접시 1개에 빈 접시가 없도록 담아야 하므로 B종류의 접시에 사탕이 놓인 개수에 따라 다음과 같이 3가지로 나눌 수 있다.

(ⅰ) B종류의 접시에 사탕이 1개 놓인 경우

A종류의 같은 접시 3개에 서로 다른 사탕 (3개, 1개, 1개) 또는 (2개, 2개, 1개)를 담아야 하므로 구하는 경우 의 수는

$${}_6C_1\times\left({}_5C_3\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}+{}_5C_2\times{}_3C_2\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}\right)$$
$$=6\times(10+15)=150$$

(ⅱ) B종류의 접시에 사탕이 2개 놓인 경우

A종류의 같은 접시 3개에 서로 다른 사탕 (2개, 1개, 1개)를 담아야 하므로 구하는 경우의 수는

$${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}=90$$

(ⅲ) B종류의 접시에 사탕이 3개 놓인 경우

A종류의 같은 접시 3개에 서로 다른 사탕 (1개, 1개, 1개)를 담아야 하므로 구하는 경우의 수는

$${}_6C_3\times{}_3C_1\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{3!}=20$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$150+90+20=260$

99) 답 ④

[해설]

$f(x-1)=1+x+x^2+\cdots+x^{10}$에서

$x-1=t$로 놓으면

$f(t)=1+(t+1)+(t+1)^2+\cdots+(t+1)^{10}$

이때 t^7이 나오는 식은

$(1+t)^7,\ (1+t)^8,\ (1+t)^9,\ (1+t)^{10}$ …… ㉠

㉠의 각 식에서 t^7의 계수를 각각 구하면

${}_7C_7,\ {}_8C_7,\ {}_9C_7,\ {}_{10}C_7$

따라서 $f(t)$에서 t^7의 계수 a_7의 값은

$a_7={}_7C_7+{}_8C_7+{}_9C_7+{}_{10}C_7$

이때

${}_7C_7=1,\ {}_8C_7={}_8C_1=8,$

$${}_9C_7={}_9C_2=\frac{9\times8}{2\times1}=36$$

$${}_{10}C_7={}_{10}C_3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$$

이므로 $a_7=1+8+36+120=165$

[다른 풀이]

$f(x-1)=1+x+x^2+\cdots+x^{10}$에서

$x-1=t$로 놓으면

$f(t)=1+(t+1)+(t+1)^2+\cdots+(t+1)^{10}$ …… ㉠

㉠의 우변은 첫째항이 1, 공비가 $t+1$, 항의 개수가 11인 등비수열의 첫째항부터 제11항까지의 합이므로

$$\frac{(t+1)^{11}-1}{(t+1)-1}=\frac{(t+1)^{11}-1}{t} \quad \cdots\cdots ㉡$$

따라서 $f(t)$에서 t^7의 계수 a_7은 ㉡의 $(t+11)^{11}$의 전개식에서 t^8의 계수와 같으므로

$$a_7={}_{11}C_8={}_{11}C_3=\frac{11\times10\times9}{3\times2\times1}=165$$

100) 답 ①

[해설]

x^2의 계수는

$$2\times{}_2C_2+3\times{}_3C_2+4\times{}_4C_2+\cdots+8\times{}_8C_2$$
$$=\sum_{k=2}^{8}(k\times{}_kC_2)=\sum_{k=2}^{8}\left\{k\times\frac{k(k-1)}{2}\right\}$$
$$=\sum_{k=2}^{8}\frac{k^3-k^2}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{8}(k^3-k^2)$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{8\times9}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\times\frac{8\times9\times17}{6}$$
$$=648-102=546$$

[다른 풀이]

$$f(x)=(1+x)+2(1+x)^2+3(1+x)^3+4(1+x)^4+\cdots+8(1+x)^8 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이라 하면

$$(x+1)f(x)=(1+x)^2+2(1+x)^3+3(1+x)^4+4(1+x)^5+\cdots+7(1+x)^8+8(1+x)^9 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠－㉡에서

$$-xf(x)=(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+(1+x)^4+\cdots+(1+x)^8-8(1+x)^9$$
$$=\frac{(1+x)\{(1+x)^8-1\}}{x}-8(1+x)^9$$

$$f(x)=-\frac{(1+x)^9-(1+x)\}}{x}+\frac{8(1+x)^9}{x} \quad \cdots\cdots ㉢$$

따라서 $(1+x)+2(1+x)^2+3(1+x)^3+4(1+x)^4+\cdots+8(1+x)^8$의 전개식에서 x^2의 계수는 ㉢의 $-(1+x)^9$의 전개식에서 x^4의 계수와 $8(1+x)^9$의 전개식에서 x^3의 계수의 합과 같으므로

$$-{}_9C_4+8\times{}_9C_3=-\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}+8\times\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}$$
$$=\frac{9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}(-6+32)=546$$

101) 답 6

x의 계수를 구하면

$_{m}C_1 + {_n}C_1 = m+n$

이므로 $m+n=12$

또, x^2의 계수는

$_{m}C_2 + {_n}C_2$

$= \frac{1}{2}\{m(m-1)+n(n-1)\}$

$= \frac{1}{2}\{m^2+n^2-(m+n)\}$

$= \frac{1}{2}(m^2+n^2-12)$

이 식에 $n=12-m$을 대입하면

$\frac{1}{2}\{m^2+(12-m)^2-12\}$

$= \frac{1}{2}(m^2+m^2-24m+144-12)$

$= m^2-12m+66$

$= (m-6)^2+30$

따라서 x^2의 계수가 최소가 되는 m의 값은 6이다.

102) 답 ③

[해설]

4개의 층 중 3개의 층을 택하는 경우의 수는

$_4C_3 + {_4}C_1 = 4$

6명을 3개의 조로 1명 이상씩 분할하는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) (4명, 1명, 1명) 으로 분할하는 경우의 수는

$_6C_4 \times {_2}C_1 \times {_1}C_1 \times \frac{1}{2!} = 15$

(ⅱ) (3명, 2명, 1명) 으로 분할하는 경우의 수는

$_6C_3 \times {_3}C_2 \times {_1}C_1 = 60$

(ⅲ) (2명, 2명, 2명)으로 분할하는 경우의 수는

$_6C_2 \times {_4}C_2 \times {_2}C_2 \times \frac{1}{3!} = 15$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 분할하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$15+60+15=90$

3개의 조를 3개의 층에 분배하는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$4\times 90\times 6=2160$

103) **정답** 80

5개의 함숫값의 곱이 2이므로 함숫값이 음수인 것의 개수는 0또는 2또는 4이다.

(i) 함숫값이 음수인 것의 개수가 0인 경우

$2=1\times1\times1\times1\times2$이므로 함수 f의 개수는 $\frac{5!}{4!}=5$

(ii) 함숫값이 음수인 것의 개수가 2인 경우

$2=(-1)\times(-1)\times1\times1\times2$이므로 함수 f의 개수는

$\frac{5!}{2!2!}=30$

$2=(-1)\times(-2)\times1\times1\times2$이므로 함수 f의 개수는

$\frac{5!}{3!}=20$

(iii) 함숫값이 음수인 것의 개수가 4인 경우

$2=(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)\times2$이므로 함수 f의 개수는

$\frac{5!}{4!}=5$

$3=(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-2)\times1$이므로 함수 f의 개수는

$\frac{5!}{3!}=20$

(i), (ii), (iii)에서 함수 f의 개수는 합의 법칙에 의하여

$5+30+20+5+20=80$

104) **정답** ①

진달래와 복숭아나무 2그루를 같은 나무 A라 생각하자.

살구나무 2그루와 A, A, A를 일렬로 심는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!}=20$

가운데 A의 자리에 진달래를 심고 첫 번째와 세 번째 A 자리에 다른 복숭아나무를 심는 경우의 수는 2!이므로 구하는 경우의 수는 $20\times2!=40$

105) **정답** ③

먼저 빨강, 파람, 노랑, 초록의 4가지 색을 모두 한 번씩 사용하여 작은 원의 내부의 4개의 영역 각각에 한 가지씩 칠하는 경우의 수는 $(4-1)!=3!=6$

다음으로 작은 원의 내부의 4개의 영역 각각에 주황, 보라, 분홍, 연두의 4가지 색을 모두 한 번식 사용하여 한 가지씩 칠하는 경우의 수는 서로 다른 4개를 일렬로 나열하는 수와 같으므로 $4!=24$

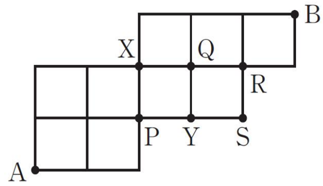
따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$6\times24=144$

106) **정답** ⑤

정사각형의 한 변의 길이를 1이라 하면 두 지점 A, B사이의 거리는 8이므로 두 사람이 최단거리로 이동하여 도로망의 중간에서 만나기 위해서는 각각 4의 거리를 이동해야 한다.

즉, 두 사람은 다음 그림의 X지점 또는 Y지점에서 만나야 한다.



(ⅰ) X지점에서 만나는 경우

$A\to X$로 이동하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!2!}=6$

$B\to X$로 이동하는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$

이므로 곱의 법칙에 의하여 $6\times4=24$

(ⅱ) Y지점에서 만나는 경우

$A\to P\to Y$로 이동하는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}\times1=3$

$B\to Q\to Y$ 또는 $B\to R\to S\to Y$로 이동하는 경우의 수는

$\left(\frac{3!}{2!}\times1\right)+(2!\times1\times1)=5$

이므로 곱의 법칙에 의하여 $3 \times 5 = 15$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여 $24 + 15 = 39$

107) 정답 ②

특수문자가 1개 또는 2개 포함된 경우로 나누어 생각하자.

(ⅰ) 특수문자가 1개인 경우

사용할 특수문자 1개를 선택하는 경우의 수는 2이고, 선택된

특수문자를 일렬로 나열된 4개의 자리 중 한 곳에 놓는 경우의 수는 4이므로 특수문자 1개를 선택하여 놓는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 2×4 4개의 수에서 중복을 허락하여 3개를 선택한 후 나머지 3개의 자리에 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_4\Pi_3$ 따라서 특수문자가 1개인 암호의 개수는

$(2 \times 4) \times {}_4\Pi_3 = 2 \times 4 \times 4^3 = 512$

(ⅱ) 특수문자가 2개인 경우

4개의 자리 중 2곳을 선택하여 특수문자 2개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_4P_2 = 4 \times 3$

4개의 수에서 중복을 허락하여 2개를 선택한 후 나머지 2개의 자리에 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_4\Pi_2$

따라서 특수문자가 2개인 암호의 개수는

$(4 \times 3) \times {}_4\Pi_2 = 4 \times 3 \times 4^2 = 192$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 암호의 개수는 합의 법칙에 의하여 $512 + 192 = 704$

108) 정답 ①

먼저 노란색 접시 2개와 파란색 접시 3개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{5!}{3!\,2!}$이고, 이들의 원형의 테이블에 배열하면 회전하여 일치하는 것이 5가지씩 있으므로 원형의 테이블에 접시를 배열하는 경우의 수는 $\dfrac{5!}{3!\,2!} \times \dfrac{1}{5} = 2$

이제 배열된 접시에 사과 2개와 배 3개를 나누어 담는 경우의 수는 $\dfrac{5!}{2!\,3!} = 10$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $2 \times 10 = 20$

109) 정답 32

점 P가 시계 방향으로 움직인 횟수를 a, 시계 반대 방향으로 움직인 횟수를 b라 하면 $a + b = 6$ $(0 \leq a \leq 6,\ 0 \leq b \leq 6)$

점 P가 꼭짓점 A의 위치에서 꼭짓점 C로 이동하려면 $|a-b| = 2$ 또는 $|a-b| = 6$

(ⅰ) $|a-b| = 2$인 경우

$a - b = 2$일 때, $a = 4,\ b = 2$

$a - b = -2$일 때, $a = 2,\ b = 4$

위와 같이 이동하는 경우의 수는 각각 6개 중 같은 것이 4개, 2개씩 있는 순열의 수와 같으므로 $2 \times \dfrac{6!}{4!2!} = 30$

(ⅱ) $|a-b| = 6$인 경우

$a - b = 6$일 때, $a = 6,\ b = 0$

$a - b = -6$일 때, $a = 0,\ b = 6$

위와 같이 이동하는 경우의 수는 각각 6개의 같은 것을 나열하는 순열의 수와 같으므로 $2 \times 1 = 2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여 $30 + 2 = 32$

110) 정답 ②

검은 돌 5개를 일렬로 나열한 후 검은 돌 사이와 양 끝의 6

개의 공간 (∨ 표시된 곳) 중에서 3개를 선택하여 흰 돌을 하나씩 나열하면 된다.

∨ ● ∨ ● ∨ ● ∨ ● ∨ ● ∨

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 6개에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_6C_3 = \dfrac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$

111) 정답 ④

비빔밥 1개를 포함시킨 것으로 생각하면 나머지 음식들은 서로 다른 4종류의 음식 중에서 5개를 주문하면 된다.

이 경우의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허락하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_5 = {}_{4+5-1}C_5 = {}_8C_5 = {}_8C_3 = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$

112) 정답 ③

1, 2, 3, 4, 5가 적혀 있는 5종류의 공 중에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 경우의 수는

${}_5H_4 = {}_{5+4-1}C_4 = {}_8C_4 = \dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$

홀수 1, 3, 5가 적혀 있는 3종류의 공 중에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 경우의 수는

${}_3H_4 = {}_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = \dfrac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$

따라서 구하는 경우의 수는 $70 - 15 = 55$

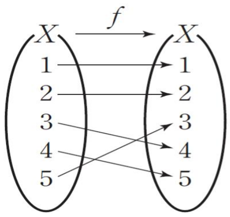
113) 정답답. 20

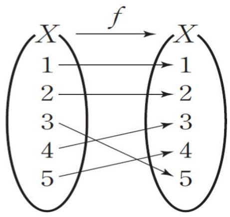
$f(x) = x$를 만족시키는 x가 2개이므로 정의역의 5개의 숫자 중 $f(x) = x$를 만족시키는 x를 2개 택하여 자기 자신에게 대응시키면 된다. 이때 이 경우의 수는 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_5C_2 = \dfrac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$

위의 10가지의 경우 중의 하나인 $f(1) = 1,\ f(2) = 2$인 경우를 생각하면 집합 X의 나머지 원소인 3, 4, 5가

$f(x) \neq x$를 만족시키는 일대일 대응은 다음의 2가지이다.





$f(x)=x$를 만족시키는 x의 개수가 2인 10가지의 각 경우도 위와 마찬가지로 일대일 대응이 2가씩 있으므로 구하는 함수 f의 개수는 곱의 법칙에 의하여 $10 \times 2 = 20$

114) **정답** ①

$1 \leq a < b \leq c \leq 9$에서 a는 b보다 작은 수이므로

$a' = a+1$로 놓으면 $2 \leq a' \leq b \leq c \leq 9$

이때 구하는 자연수는 2에서 9까지의 8개의 수에서 중복을 허락하여 3개를 택한 후 작은 수부터 같거나 큰 수의 순서로

늘어놓은 다음 백의 자리의 수는 1을 뺀 수로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 세 자리 자연수의 개수는 서로 다른 8개에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_8\mathrm{H}_3 = {}_{8+3-1}\mathrm{C}_3 = {}_{10}\mathrm{C}_3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

115) **정답** ⑤

x, y, z중 적어도 하나는 0이 아니므로

$x+y+z+3w=6$에서 $w<2$이다.

(i) $w=0$일 때

방정식 $x+y+z=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_6 = {}_{3+6-1}\mathrm{C}_6 = {}_8\mathrm{C}_6 = {}_8\mathrm{C}_2 = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$$

(ii) $w=1$일 때

방정식 $x+y+z=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_3 = {}_{3+3-1}\mathrm{C}_3 = {}_5\mathrm{C}_3 = {}_5\mathrm{C}_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$28+10=38$

116) **정답** ③

4가지 색 중 3가지 색을 택하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_3 = {}_4\mathrm{C}_1 = 4$ …… ㉠

택해진 3가지 색의 꽃 중에서 5송이를 택하고 이를 원탁의 꽃병에 꽂는 경우의 수는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) 색깔별 꽃의 개수가 3, 1, 1인 경우

3송이가 같은 색인 꽃을 정하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1 = 3$

이들 5송이의 꽃을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{3!} = 20$인데

원탁에 나열하면 같은 경우가 5가지씩 있으므로 이런 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $3 \times \left(20 \times \frac{1}{5}\right) = 12$

(ii) 색깔별 꽃의 개수가 2, 2, 1인 경우

2송이가 같은 색인 꽃을 2종류 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_2 = {}_3\mathrm{C}_1 = 3$

이들 5송이의 꽃을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!\,2!} = 30$인데 원탁에 나열하면 같은 경우가 5가지씩 있으므로 이런 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$3 \times \left(30 \times \frac{1}{5}\right) = 18$

㉠과 (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$4 \times (12+18) = 120$

117) **정답** ①

서로 다른 4종류의 과일이 각각 5개씩 있다고 하면 이 중에서 5개의 과일을 택하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 중

복을 허락하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4\mathrm{H}_5 = {}_{4+5-1}\mathrm{C}_5 = {}_8\mathrm{C}_5 = {}_8\mathrm{C}_3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

그런데 서로 다른 4종류의 과일이 각각 4개씩뿐이므로 위의 56가지 경우 중 한 종류의 과일만으로 5개를 구매하는 4가지의 경우는 일어날 수 없다.

따라서 구하는 경우의 수는 $56-4=52$

118) **정답** ③

네 자연수 x_1, y_1, x_2, y_2에 대하여 $x_1+y_1+x_2+y_2=12$이므로 음이 아닌 x_1', y_1', x_2', y_2'에 대하여

$x_1 = x_1'+1$, $y_1 = y_1'+1$, $x_2 = x_2'+1$, $y_2 = y_2'+1$로 놓으면

$x_1'+y_1'+x_2'+y_2' = 8$

위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1', y_1', x_2', y_2'의

모든 순서쌍 $(x_1',\ y_1',\ x_2',\ y_2')$의 개수는 서로 다른 4개에서

중복을 허락하여 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4\mathrm{H}_8 = {}_{4+8-1}\mathrm{C}_8 = {}_{11}\mathrm{C}_8 = {}_{11}\mathrm{C}_3 = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} = 165$$

따라서 방정식 $x_1+y_1+x_2+y_2=12$를 만족시키는 자연수의 모든 순서쌍 $(x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2)$의 개수는 165이다.

한편, 두 점 A와 B가 일치하는 경우, 즉

$(x_1,\ y_1)=(x_2,\ y_2)$인 경우는 방정식 $x_1+y_1=6$을 만족시키는 경우이고 그 경우의 수는 방정식 $x_1{}'+y_1{}'=4$를 만족시키는 음이 아닌 $x_1{}',\ y_1{}'$의 모든 순서쌍 $(x_1{}',\ y_1{}')$의 개수, 즉, 서로 다른 2개에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2\mathrm{H}_4={}_{2+4-1}\mathrm{C}_4={}_5\mathrm{C}_4={}_5\mathrm{C}_1=5$

따라서 조건을 만족시키는 서로 다른 두 점 A, B를 정하는 경우의 수는 $165-5=160$

119) **정답** 52

물리Ⅰ, 화학Ⅰ, 생물Ⅰ, 지구과학Ⅰ을 과학Ⅰ교과군, 물리Ⅱ,
화학Ⅱ, 생물Ⅱ, 지구과학Ⅱ를 과학Ⅱ 교과군이라 하고, 다음
세 가지 경우로 나누어 생각하자.

(ⅰ) 과학Ⅰ교과군에서 3과목을 선택하는 경우

서로 다른 4개에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_1=4$

(ⅱ) 과학Ⅰ교과군에서 2과목, 과학Ⅱ 교과군에서 1과목을 선택하는 경우

서로 다른 4개에서 2개를 택하는 조합의 수마다 서로 다른 4개에서 1개를 택하는 조합의 수가 대응되므로 곱의 법칙에 의하여 ${}_4\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1=\dfrac{4\times3}{2\times1}\times4=24$

(ⅲ) 과학Ⅰ교과군에서 1과목, 과학Ⅱ 교과군에서 2과목을 선택하는 경우

서로 다른 4개에서 1개를 택하는 조합의 수마다 서로 다른 4 개에서 2개를 택하는 조합의 수가 대응되므로 곱의 법칙에 의하여 ${}_4\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2=4\times\dfrac{4\times3}{2\times1}=24$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 합의 법칙에 의하여 $4+24+24=52$

120) **정답** 32

조건 (나)에서 $a=a'd,\ b=b'd,\ c=c'd$ (($a',\ b',\ c'$은 자연수)라 하면 조건 (가)에서 $(a'+b'+c'+1)=d=20$이므로 d는 20의 2 이상의 약수이다. 이때 $20=2^2\times5$이고, $a'+b'+c'+1\geq4$이므로 d가 될 수 있는 값은 2, 4, 5이다.

(ⅰ) $d=2$일 때,

$a=2a',\ b=2b',\ c=2c'$이므로 주어진 방정식은

$2a'+2b'+2c'+2=20$에서 $a'+b'+c'=9$

이때 $a',\ b',\ c'$은 자연수이므로

$a'=x+1,\ b'=y+1,\ c'=z+1$

($x,\ y,\ z$는 음이 아닌 정수)라 하면 $x+y+z=6$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_6={}_8\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_2=\dfrac{8\times7}{2\times1}=28$

(ⅱ) $d=4$일 때

$a=4a',\ b=4b',\ c=4c'$이므로 주어진 방정식은

$4a'+4b'+4c'+4=20$에서 $a'+b'+c'=4$

이때 $a',\ b',\ c'$은 자연수이므로

$a'=x+1,\ b'=y+1,\ c'=z+1$

($x,\ y,\ z$는 음이 아닌 정수)라 하면 $x+y+z=1$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 1개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_1={}_3\mathrm{C}_1=3$

(ⅲ) $d=5$일 때

$a=5a',\ b=5b',\ c=5c'$이므로 주어진 방정식은

$5a'+5b'+5c'+5=20$에서 $a'+b'+c'=3$

이때 $a',\ b',\ c'$은 자연수이므로 구하는 순서쌍의 개수는 1이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 $28+3+1=32$

121) **정답** ④

집합 A의 원소의 개수가 8이므로 집합 A를 공집합이 아닌
3 개의 서로소인 부분집합으로 분할할 때, 부분집합의 원소
의 개수가 모두 다른 경우는 세 부분집합의 원소의 개수가
각각 5, 2, 1 또는 4, 3, 1 인 경우이다.

(1) 원소의 개수가 각각 5, 2, 1 인 3 개의 서로소인 부분집합
으로 분할하는 경우

${}_8\mathrm{C}_5+{}_3\mathrm{C}_2+{}_1\mathrm{C}_1={}_8\mathrm{C}_3+{}_3\mathrm{C}_1+{}_1\mathrm{C}_1=56\times3\times1=168$

(ii) 원소의 개수가 각각 4, 3, 1 인 3 개의 서로소인 부분집합
으로 분할하는 경우

${}_8\mathrm{C}_4+{}_4\mathrm{C}_3+{}_1\mathrm{C}_1={}_8\mathrm{C}_4+{}_4\mathrm{C}_1+{}_1\mathrm{C}_1=70\times4\times1=280$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $168+280=448$

122) **정답** ⑤

(i) 1 부와 2 부에 공연할 팀의 수가 각각 4, 2 인 경우

원소가 6 개인 집합을 원소의 개수가 각각 4, 2 인 2 개의 서로소인 부분집합으로 분할하는 경우와 같으므로 이때의 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_4\times{}_2\mathrm{C}_2={}_6\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_2=15\times1=15$

(ii) 1 부와 2 부에 공연할 팀의 수가 각각 3, 3 인 경우

원소가 6 개인 집합을 원소의 개수가 각각 3, 3 인 2 개의 서로소인 부분집합으로 분할한 후 두 팀을 1 부와 2 부에 배치하는 경우와 같으므로 이때의 경우의 수는

$_6C_3 \times _3C_3 \times \frac{1}{2!} \times 2! = 20 \times 1 \times \frac{1}{2} \times 2 = 20$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $15+20=35$

123) **정답** ④

ㄱ. 자연수 6 을 4 개의 자연수의 합으로 나타내면

$6=3+1+1+1=2+2+1+1$ 이므로

$P(6,\ 4)=2$ (참)

ㄴ. 자연수 6 을 3 개의 자연수의 합으로 나타내면

$6=4+1+1=3+2+1=2+2+2$ 이므로

$P(6,\ 3)=3$

이때 $P(6,\ 4)=2$ 이므로 $P(6,\ 3)>P(6,\ 4)$ (거짓)

ㄷ. 자연수 6 을 3 개의 자연수로 분할하는 수는 서로 같은 종류의 공 6 개를 서로 같은 종류의 주머니 3 개에 빈 주머니가 없도록 넣는 경우의 수와 같다.

이때 3 개의 주머니에 각각 1 개의 공을 넣은 후, 남은 3 개의 공을 1 개의 주머니에 모두 넣거나 2 개의 주머니에만 각각 1 개 이상씩 넣거나 3 개의 주머니에 각각 1 개씩 넣는 경우의 수로 생각하면 되므로

$P(6,\ 3)=P(3,\ 1)+P(3,\ 2)+P(3,\ 3)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

124) **정답** ②

조건 (가)에서 각 필통에 볼펜을 1 자루 이상 넣는 경우의 수

는 원소가 4 개인 집합을 공집합이 아닌 3 개의 서로소인 부

분집합으로 분할하는 경우의 수인 $S(4,\ 3)$ 과 같다.

원소가 4 개인 집합을 공집합이 아닌 3 개의 서로소인 부분집

합으로 분할하는 경우는 3 개의 부분집합의 원소의 개수가

각각 2, 1, 1 이므로 이때의 경우의 수는

$_4C_2 \times _2C_1 \times _1C_1 \times \frac{1}{2!} = 6 \times 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 6$

조건 (나)에서 각 필통에 지우개를 1 개 이상 넣는 경우는 자

연수 6 을 3 개의 자연수로 분할하는 경우와 같다.

자연수 6 을 3 개의 자연수로 분할하면

$6=4+1+1=3+2+1=2+2+2$ 이다.

서로 다른 종류의 볼펜 4 자루를 조건 (가)를 만족시키도록 같은 종류의 필통 3 개에 넣은 다음 지우개를 각 필통에 4 개, 1 개, 1 개 넣는 경우의 수는 $6 \times \frac{3!}{2!} = 18$

서로 다른 종류의 볼펜 4 자루를 조건 (가)를 만족시키도록 같은 종류의 필통 3 개에 넣은 다음 지우개를 각 필통에 3 개,

2 개, 1 개 넣는 경우의 수는 $6 \times 3! = 36$

서로 다른 종류의 볼펜 4 자루를 조건 (가)를 만족시키도록

같은 종류의 필통 3 개에 넣은 다음 지우개를 각 필통에 2 개,

2 개, 2 개 넣는 경우의 수는 $6 \times 1 = 6$

따라서 구하는 경우의 수는 $18+36+6=60$

125) **정답** ⑤

$\left(2x^2+\frac{1}{x}\right)^n$ 전개식의 일반항은

$_nC_r\left(2x^2\right)^{n-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r = {}_nC_r\,2^{n-r}x^{2n-3r}$

이므로 상수항이 존재하려면 $2n-3r=0$, 즉 $2n=3r$ …… ㉠

이어야 한다. 이때 2 와 3 은 서로소이므로 n 은 3 의 배수이고 r 는 2 의 배수이다.

㉠을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 3 이다.

$n=3$ 일 때 $r=2$ 이므로 이때의 상수항은

$_3C_2 \times 2^{3-2} = 3 \times 2 = 6$

따라서 $a=3,\ b=6$ 이므로 $a+b=9$

126) **정답** ④

$S(17,\ 1)$ 은 원소가 17 개인 집합을 1 개의 집합으로 분할하는 경우의 수이므로 $S(17,\ 1)=1$

$S(17,\ 2)$ 는 원소가 17 개인 집합을 공집합이 아닌 2 개의 서

로소인 부분집합으로 분할하는 경우의 수이므로

$S(17,\ 2)$

$= {}_{17}C_{16} \times {}_1C_1 + {}_{17}C_{15} \times {}_2C_2 + {}_{17}C_{14} \times {}_3C_3 + \cdots + {}_{17}C_9 \times {}_8C_8$

$= {}_{17}C_1 + {}_{17}C_2 + {}_{17}C_3 + \cdots + {}_{17}C_8$

$= \left({}_{17}C_1 + {}_{17}C_2 + {}_{17}C_3 + \cdots + {}_{17}C_8\right) - {}_{17}C_0 = 2^{16}-1$

따라서 $a=S(17,\ 1)+S(17,\ 2)=1+(2^{16}-1)=2^{16}$ 이므로

$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{2^{16}} = 2^{\frac{16}{n}}$ 이다. $2^{\frac{16}{n}}$ 이 자연수가 되어야 하므로 n 은 16 의 양의 약수이어야 한다.

이때 $n \ge 2$ 이므로 조건을 만족시키는 n 은 2, 4, 8, 16 이고,

그 개수는 4 이다.

127) ④

[해설]

{출제의도}

주어진 조건을 만족시키는 경우의 수를 곱의 법칙을 이용하여 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

{풀이}

셔츠와 바지의 색은 서로 다르게 정하므로 인형 A에게 셔츠와 바지를 입히는 경우의 수는

$3\times3\times2\times1=18$

한 인형에게 입힌 셔츠와 바지는 다른 인형에게 입히지 않으므로 인형 B에게 셔츠와 바지를 입히는 경우의 수는

$2\times2\times2\times1=8$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$18\times8=144$

128) ④

[해설]

1부에서 현대 무용, 고전 무용, 현악기 순으로 3팀이 공연하는 경

우의 수는
$3\times2\times3=18$
2부에서 현대 무용, 고전 무용, 현악기, 현악기, 현대 무용 순으로 5팀이 공연하는 경우의 수는
$2\times1\times2\times1\times1=4$
따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$18\times4=72$
{다른 풀이}
현대 무용, 고전 무용, 현악기 각 팀을 팀별로 배열하는 경우의 수와 같으므로
$3!\times2!\times3\neq6\times2\times6=72$
129) ⑤
[해설]
(ⅰ) $c=1$인 경우
등식 $2a+b=13$을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(3,\ 7)$, $(4,\ 5)$, $(5,\ 3)$의 3개이다.
(ⅱ) $c=2$인 경우
등식 $2a+b=16$을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(5,\ 6)$, $(6,\ 4)$의 2개이다.
(ⅲ) $c=3$인 경우
등식 $2a+b=19$를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(6,\ 7)$, $(7,\ 5)$의 2개이다.
(ⅳ) $c\geq4$인 경우
등식 $2a+b=10+3c$에서
$4\leq2a+b\leq20$이고 $10+3c\geq22$이므로 $2a+b=10+3c$를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는 없다.
(ⅰ), (ⅳ)에서 구하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 합의 법칙에 의하여
$3+2+2=7$
130) ⑤
[해설]
다음의 경우로 나누어 구하여 보면

1교시	2교시	3교시
국어	수학	영어
수학	영어	국어

1교시	2교시	3교시
국어	영어	수학
	수학	영어
수학	영어	국어

1교시	2교시	3교시
국어	영어	수학
수학	영어	국어
	국어	영어

1교시	2교시	3교시
영어	국어	수학
수학	ㄲ어	영어
	영어	국어

따라서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여
$2+3+3+3=11$
131) ①
[해설]
1행의 2열, 3열, 4열에 숫자 2, 3, 4를 써넣는 경우의 수는
$3\times2\times1=6$
1행의 2열, 3열, 4열에 차례로 2, 3, 4를 써넣는 경우 2행 1열과 2행 2열에 차례로 3, 4 또는 4, 3을 써넣어야 한다.
이 중에서 2행 1열과 2행 2열에 차례로 3, 4를 써넣는 경우 2행 4열에는 1을 써넣을 수 없으므로 2행 3열에 1, 2행 4열에 2를 써넣어야 한다.
이때 3행 4열에 써넣을 수 있는 숫자는 3으로 정해지게 되고, 3행 3열과 4행 3열에 차례로 2, 4 또는 4, 2를 써넣어야 한다.
이때 각각마다 3행과 4행의 1열, 2열에 숫자를 써넣는 경우는 [그림 1], [그림 2]와 같은 2가지이다.

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

[그림 1]

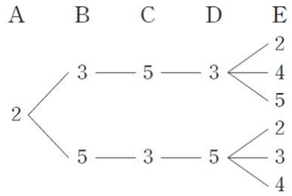
1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

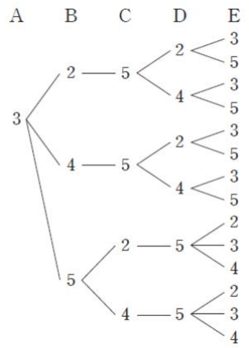
[그림 2]

한편, 2행 1열과 2행 2열에 차례로 4, 3을 써넣는 경우 2행 4열에는 1을 써넣을 수 없으므로 2행 3열에 1, 2행 4열에 2를 써넣어야 한다.
이때 3행 4열에 써넣을 수 있는 숫자는 3으로 정해지게 되고, 3행과 4행의 1열, 2열, 3열에 숫자를 써넣는 경우는 [그림 3]과 같은 1가지밖에 없다.

1	2	3	4
4	3	1	2
2	1	4	3
3	4	2	1

[그림 3]

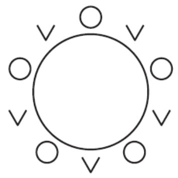
따라서 구하는 경우의 수는 $6\times(2+1)=18$
132) ④
[해설]
문제의 조건을 만족시키는 경우를 나타내면 다음과 같다.
(ⅰ) 영역 A에 2가 적혀 있는 카드를 놓는 경우


영역 A에 4가 적혀 있는 카드를 놓는 경우도 마찬가지이므로 구하는 경우의 수는
$2\times(3+3)=12$
(ⅱ) 영역 A에 3이 적혀 있는 카드를 놓는 경우


영역 A에 5가 적혀 있는 카드를 놓는 경우도 마찬가지이므로 구하
는 경우의 수는 $2\times(2+2+2+2+3+3)=28$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여 $12+28=40$
133) 60
[해설]
{출제의도}
순열의 수를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.
{풀이}
5종류의 체험 프로그램을 각각 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$라 하자.
A, B가 같이 a를 선택하고 네 종류 $b,\ c,\ d,\ e$ 중 서로 다른 1개씩을 각각 선택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{P}_2$이다.
A, B가 같이 b 또는 c 또는 d 또는 e를 선택하는 경우도 마찬가지이므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$5\times{}_4\mathrm{P}_2=5\times4\times3=60$
134) ①
[해설]

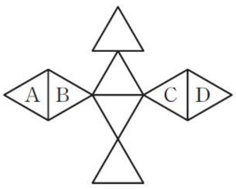
1000보다 크고 6000보다 작은 짝수 중 각 자리의 수가 모두 다른 자연수의 개수를 구하므로 천의 자리에는 1, 2, 3, 4, 5 중의 하나가 들어갈 수 있고, 일의 자리에는 0, 2, 4, 6, 8 중 천의 자리의 수와 다른 수가 들어가면 된다.
(ⅰ) 천의 자리의 수가 2 또는 4인 경우
일의 자리에 올 수 있는 수는 4가지이고, 백의 자리와 십의 자리의 수는 8개의 수 중 2개를 택하여 나열한다.
따라서 이 경우의 자연수의 개수는
$2\times4\times{}_3\mathrm{P}_2=2\times4\times8\times7=448$
(ⅱ) 천의 자리의 수가 1 또는 3 또는 5인 경우
일의 자리에 올 수 있는 수는 5가지이고, 백의 자리와 십의 자리의 수는 8개의 수 중 2개를 택하여 나열한다.
따라서 이 경우의 자연수의 개수는
$3\times5\times{}_3\mathrm{P}_2=3\times5\times8\times7=840$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 자연수의 개수는
$448+840=1288$
135) 3
[해설]
남학생끼리는 같은 줄에 서로 이웃하여 앉지 않으면서 여학생끼리도 같은 줄에 서로 이웃하여 앉지 않도록 남학생 8명이 앉을 좌석을 정하는 방법은 다음과 같이 3가지가 있다.

이때 남학생을 정해진 8개의 좌석에 앉히는 경우의 수는 $8!$이고, 여학생을 비어 있는 7개의 좌석에 앉히는 경우의 수는 $7!$이다.
따라서 구하는 경우의 수는 $a=3\times7!\times8!$이므로
$\dfrac{a}{7!\times8!}=\dfrac{3\times7!\times8!}{7!\times8!}=3$
136) ④
[해설]
(ⅰ) $f(2)$, $f(4)$의 값이 소수 3, 5, 7에 대응되는 경우
함수 f 가 일대일함수가 되도록 $f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하여 일렬로 배열하는 순열의 수와 같으므로 ${}_3\mathrm{P}_2=3\times2=6$
그 각각에 대하여 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값은 2, 4, 6, 8 중 3개의 원소에 대응되어야 한다.
함수 f 가 일대일함수가 되도록 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하여 일렬로 배열하는 순열의 수와 같으므로 ${}_4\mathrm{P}_3=4\times3\times2=24$
따라서 이 경우의 함수 F 의 개수는
$6\times24=144$
(ⅱ) $f(2)=2$인 경우
$f(4)$의 값은 3, 5, 7 중 1개에 대응되어야 하므로 3가지
그 각각에 대하여 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값은 4, 6, 8 중 3개의 원소에 대응되어야 한다.
함수 f가 일대일함수가 되도록 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하여 일렬로 배열하는 순열의 수와 같으므로 ${}_3\mathrm{P}_3=3\neq6$
따라서 이 경우의 함수 f 의 개수는
$3\times6=18$
(ⅲ) $f(4)=2$인 경우
(ⅱ)와 마찬가지 방법으로 이 경우의 함수 f의 개수는
$3\times6=18$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 함수 f 의 개수는
$144+2\times18=144+36=180$
137) ②
[해설]
{출제의도}
원순열의 성질을 포함하고 있는 문제를 해결할 수 있는지를 묻는 문제이다.
{풀이}
가운데 부분에 칠할 색을 택하는 경우의 수는 7
남은 6가지 색 중 원과 삼각형이 겹쳐진 세 곳에 칠할 색을 택하는 경우의 수는
${}_6C_3=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$
3가지 색을 원과 삼각형이 겹쳐진 세 곳에 칠하는 경우의 수는
$(3-1)!=2$
남은 3가지 색을 바깥 원에 칠하는 경우의 수는
$3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$7\times20\times2\times6=1680$
{다른 풀이}
7개의 영역에 서로 다른 7가지 색을 모두 사용하여 칠하는 경우의 수는
$7!$
회전하였을 때 같은 것이 3가지씩 있으므로 구하는 경우의 수는
$\dfrac{7!}{3}=1680$
138) ④
[해설]



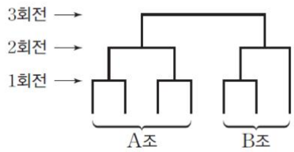
그림과 같이 어른 5명을 먼저 원탁의 ○자리에 앉히는 경우의 수는
$5-1\neq4\neq24$
어른 사이의 5개의 ∨자리에 어린이 3명을 앉히는 경우의 수는
${}_5\mathrm{P}_3=5\times4\times3=60$
따라서 구하는 경우의 수는
$24\times60=1440$
139) ③
[해설]
빨간색 깃발과 파란색 깃발을 묶어서 1개로 볼 때, 깃발 6개를 원형으로 배열하는 경우의 수는
$(6-1)\neq5\neq120$
이때 빨간색 깃발과 파란색 깃발이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2이다.
따라서 구하는 경우의 수는
$120\times=240$
140) 30
[해설]
3으로 나누었을 때 나머지가 k인 수의 집합을 $A(k)$라 하면 $A(0)=\{3,\ 6\}$, $A(1)=\{4,\ 7\}$, $A(2)=\{5,\ 8\}$이다.
4명의 학생이 들고 있는 카드에 적혀 있는 수의 합이 3의 배수가 되는 경우는 다음과 같다.
(ⅰ) 집합 $A(0)$에 속하는 원소 2개와 두 집합 $A(1)$, $A(2)$에 속하는 원소 각각 1개씩으로 이루어진 경우
집합 $A(1)$, $A(2)$에서 각각 1개의 원소를 택하는 경우의 수는
$2\times2=4$
이 각각마다 4개의 수를 원형으로 배열하는 경우의 수는
$(4-1)!=3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$4\times6=24$
(ⅱ) 집합 $A(1)$에 속하는 원소 2개와 집합 $A(2)$에 속하는 원소 2개로 이루어진 경우
구하는 경우의 수는
$(4-1)!=3!=6$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는
$24+6=30$
141) ⑤
[해설]
{출제의도}
중복순열을 이용하여 네 자리의 자연수를 만들 수 있는지를 묻는 문제이다.
{풀이}
1, 2, 3을 중복 사용하여 만든 네 자리의 자연수의 개수는
${}_3\Pi_4=3^4=81$
1, 3만을 중복 사용하여 만든 네 자리의 자연수의 개수는
${}_2\Pi_4=2^4=16$

2, 3만을 중복 사용하여 만든 네 자리의 자연수의 개수는
$_2\Pi_4 = 2^4 = 16$
3만을 중복 사용하여 만든 네 자리의 자연수의 개수는
$_1\Pi_4 = 1^4 = 1$
따라서 구하는 네 자리의 자연수의 개수는
$81-(16+16-1)=50$
142) ④
[해설]
네 자리의 자연수에서 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4 이다.
또 백의 자리, 십의 자리에는 5개의 숫자 중 하나가 올 수 있고, 일의 자리에는 0, 2, 4가 올 수 있다.
따라서 구하는 짝수의 개수는
$4\times{}_5\Pi_2\times 3 = 4\times 5^2\times 3 = 300$
143) ⑤
[해설]
좌우 대칭이 아닌 모양이 되려면 그림에서 A와 D 또는 B와 C가 서로 다른 색이어야 한다.



8개의 정삼각형 안에 빨간색 또는 파란색을 칠하는 모든 경우의 수는
$_2\Pi_8 = 2^8$
좌우 대칭이 되도록 색칠하는 경우는 A와 B에 빨간색 또는 파란색을 칠한 후 D와 C에 각각 A와 B에 칠한 색과 같은 색을 칠하고, A, B, C, D를 제외한 4개의 정삼각형에 빨간색 또는 파란색을 칠하면 되므로
좌우 대칭이 되도록 색칠하는 경우의 수는
$_2\Pi_2\times{}_2\Pi_4 = 2^2\times 2^4 = 2^6$
따라서 구하는 경우의 수는
$2^8-2^6=256-64=192$
144) ⑤
[해설]
(ⅰ) 1과 2를 모두 포함하는 경우
3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는
$_4\Pi_2 = 4^2 = 16$
∨□∨□∨
∨로 표시된 3곳 중에서 2곳을 택하여 1과 2를 배열하는 경우의 수는
$_3P_2 = 3\times 2 = 6$
∨로 표시된 3곳 중에서 1곳을 택하여 1과 2를 이웃하여 배열한 후 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는
$3\times 2 = 6$
따라서 이 경우의 자연수의 개수는
$16\times(6+6)=16\times 12=192$
(ⅱ) 1과 2 중에서 1개만 포함하는 경우
3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는
$_4\Pi_3 = 4^3 = 64$
∨□∨□∨□∨
∨로 표시된 4곳 중에서 1곳을 택하여 1 또는 2를 배열하는 경우의 수는
$4\times 2 = 8$
따라서 이 경우의 자연수의 개수는
$64\times 8 = 512$
(ⅲ) 1과 2 모두 포함하지 않는 경우
이 경우의 자연수의 개수는 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 4개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로
$_4\Pi_4 = 4^4 = 256$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 자연수의 개수는
$192+512+256=960$
145) ②
[해설]
$f(1)\times f(3)$이 홀수이므로 $f(1)$, $f(3)$은 모두 홀수이다.
이때 함수 f의 치역의 원소의 개수가 3인 경우는 다음과 같다.
(ⅰ) $f(1)=f(3)$인 경우
$f(1)=f(3)=1$인 경우 $f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 2, 3, 4, 5 중 서로 다른 두 수를 택하여 일렬로 배열하는 순열의 수와 같으므로
$_4P_2 = 4\times 3 = 12$
마찬가지 방법으로 $f(1)=f(3)=3$ 또는 $f(1)=f(3)=5$인 경우 $f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수도 각각 12이다.
따라서 이 경우의 함수 f 의 개수는
$3\times 12 = 36$
(ⅱ) $f(1)\neq f(3)$인 경우
$f(1)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 3, 5 중 서로 다른 두 수를 택하는 순열의 수와 같으므로
$_3P_2 = 3\times 2 = 6$
이때 $f(2)=f(4)$인 경우 $f(2)$, $f(4)$의 값은 $f(1)$, $f(3)$의 값이 아닌 나머지 3개의 값 중 하나에 대응하여야 하므로 경우의 수는 3
또한 $f(2)\neq f(4)$인 경우 $f(2)$, $f(4)$의 값 중 하나는 $f(1)$ 또는 $f(3)$의 값과 같아야 하고 다른 하나는 $f(1)$, $f(3)$의 값이 아닌 나머지 3개의 값 중 하나에 대응하여야 하므로 경우의 수는
$2\times 2\times 3 = 12$
따라서 이 경우의 함수 f의 개수는
$6\times(3+12)=90$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 함수 f의 개수는
$36+90=126$
146) ①
[해설]
{출제의도}
같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.
{풀이}
현수막 B는 2곳 이상 설치해야 하므로 현수막 B를 2곳, 3곳, 4곳에 설치하는 경우로 나누어 경우의 수를 구하면 다음과 같다.
(ⅰ) A는 1곳, B는 2곳, C는 2곳에 설치하는 경우의 수는
$\dfrac{5!}{2!2!}=30$
(ⅱ) A는 1곳, B는 3곳, C는 1곳에 설치하는 경우의 수는
$\dfrac{5!}{3!}=20$
(ⅲ) A는 1곳, B는 4곳에 설치하는 경우의 수는
$\dfrac{5!}{4!}=5$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는
$30+20+5=55$
147) ⑤
[해설]
빨간색, 파란색, 노란색의 색연필을 각각 R, B, Y라 하면
(ⅰ) 두 종류의 색연필을 선택하는 경우
RRBB, RRYY, BBYY의 3가지 경우가 있고 각 경우마다 4명의 학생들에게 나누어 주는 경우의 수는
$\dfrac{4!}{2!2!}=\dfrac{24}{2\times 2}=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$3\times 6 = 18$
Û세 종류의 색연필을 선택하는 경우
RRBY, RBBY, RBYY의 3가지 경우가 있고 각 경우마다 4명의 학생들에게 나누어 주는 경우의 수는
$\dfrac{4!}{2!}=\dfrac{24}{2}=12$
따라서 구하는 경우의 수는

$3\times12=36$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는
$18+36=54$
148) ⑤
[해설]
금요일에 4명이 운동 경기를 관람하는 경우의 수는
$\frac{4!}{2!}=12$
이 각각에 대하여 토요일에 4명이 운동 경기를 관람하는 경우의 수는 다음과 같다.
(ⅰ) 4명의 학생이 야구와 핸드볼의 두 종목을 관람하는 경우의 수는
$\frac{4!}{2!2!}=6$
(ⅱ) 4명의 학생이 세 종목을 관람하는 경우는
(야구, 야구, 핸드볼, 아이스하키), (야구, 핸드볼, 핸드볼, 아이스하키)의 2가지가 있으므로 구하는 경우의 수는
$2\times\frac{4!}{2!}=24$
따라서 구하는 경우의 수는
$12\times(6+24)=360$
149) ①
[해설]
7과목을 국어, 수학, a, b, c, d, e라 하면 a, b, c, d, e 중 한 과목을 택하는 경우의 수는 5
이때 a를 택했다고 하면 국어, 수학, a의 공부할 요일을 정할 때 수학을 국어보다 먼저 공부해야 하므로 경우의 수는
$\frac{3!}{2!}=3$
나머지 4과목의 공부할 요일을 정하는 경우의 수는
${}_4P_4=4\neq24$
따라서 구하는 경우의 수는
$5\times3\times24=360$
150) ②
[해설]
{출제의도}
조건에 맞추어 경우를 나누고 각 경우에 조합을 활용하여 문제를 해결할 수 있는지를 묻는 문제이다.
{풀이}
조건 (가)에 따라 b가 연속할 수 없으므로
$\boxed{㉠}$ a □ a □ a □ a □ a □ a □ a □ a □
에서 에 조건 (나)를 만족시키면서 b를 넣는 방법의 수를 구한다.
그러므로 $\boxed{㉠}$에 b를 넣는 경우와 넣지 않는 경우로 나누어 각각의 경우를 구한다.
(ⅰ) $\boxed{㉠}$에 b를 넣는 경우
조건 (나)에 의해서 마지막은 a가 되어야 한다.
그러므로 7개의 □칸 중에 b를 넣을 3칸을 선택하는 조합의 수만큼 문자열이 생긴다.
즉, ${}_7C_3=35$
(ⅱ) $\boxed{㉠}$에 b를 넣지 않는 경우
조건 (나)에 영향을 받지 않으므로 8개의 칸 중에 b를 넣을 4칸을 선택하는 조합의 수만큼 문자열이 생긴다.
즉, ${}_8C_4=70$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 문자열의 개수는
$35+70=105$
151) ⑤
[해설]
1학년 5팀 중에서 2팀이 결선에 오르는 경우의 수는
${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$
2학년 4팀 중에서 2팀이 결선에 오르는 경우의 수는
${}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$
3학년 3팀 중에서 1팀이 결선에 오르는 경우의 수는
${}_3C_1=3$
따라서 구하는 경우의 수는
$10\times6\times3=180$
152) ④
[해설]
서로 다른 4개의 상자를 A, B, C, D라 하자.
10개의 탁구공을 서로 다른 4개의 상자 A, B, C, D에 적어도 1개 이상씩 넣는 경우의 수는
1□1□1□1□1□1□1□1□1□1
에서 9개의 □ 중에서 3개를 선택하는 경우의 수와 같다.
예를 들어
1□1□1□1□1□1□1□1□1□1
↑ ↑ ↑
인 경우는 4개의 상자 A, B, C, D에 차례대로 1개, 2개, 6개, 1개를 넣은 경우와 같고,
1□1□1□1□1□1□1□1□1□1
↑ ↑ ↑
인 경우는 4개의 상자 A, B, C, D에 차례대로 4개, 1개, 3개, 2개를 넣은 경우와 같다.
그러므로 10개의 탁구공을 서로 다른 4개의 상자에 적어도 1개 이상씩 넣는 경우의 수는
${}_9C_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$
한편, 10개의 탁구공을 1개의 상자에만 7개를 넣는 경우는 (7, 1, 1, 1), (1, 7, 1, 1), (1, 1, 7, 1), (1, 1, 1, 7)의 4가지이고, 10개의 탁구공을 1개의 상자에만 6개를 넣는 경우는 서로 다른 4개의 상자에 6개, 2개, 1개, 1개를 넣은 경우이므로
$\frac{4!}{2!}=12$(가지)
따라서 구하는 경우의 수는
$84-(4+12)=68$
{다른 풀이}
같은 색의 탁구공 10개를 5 이하의 개수로 서로 다른 4개의 상자에 빈 상자가 없도록 나누어 넣는 경우는 다음과 같다.
(5개, 3개, 1개, 1개)인 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$
(5개, 2개, 2개, 1개)인 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$
(4개, 4개, 1개, 1개)인 경우의 수는 $\frac{4!}{2!2!}=6$
(4개, 3개, 2개, 1개)인 경우의 수는 $4\neq24$
(4개, 2개, 2개, 2개)인 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$
(3개, 3개, 3개, 1개)인 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$
(3개, 3개, 2개, 2개)인 경우의 수는 $\frac{4!}{2!2!}=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$12+12+6+24+4+4+6=68$
153) ②
[해설]
짝수가 적혀 있는 카드 2장과 홀수가 적혀 있는 카드 2장을 동시에 뽑는 경우의 수는
${}_3C_2\times{}_3C_2=3\times2=9$
(ⅰ) 짝수 2개를 다음 3개의 ∨ 자리 중 1개에 배열하는 경우
∨홀∨홀∨
예를 들어 2, 3, 4, 5를 뽑은 경우 2453, 5243, 5324이므로 경우의 수는 ${}_3C_1=3$
(ⅱ) 짝수 2개를 다음 3개의 ∨ 자리 중 2개에 배열하는 경우
∨홀∨홀∨
예를 들어 2, 3, 4, 5를 뽑은 경우 2543, 2534, 5234이므로 경우의 수는 ${}_3C_1=3$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 네 자리의 자연수의 개수는
$9\times(3+3)=54$
154) ③
[해설]
경주, 평창, 제주도를 각각 3명, 2명, 2명이 선택하여야 하고 A와 B는 서로 다른 장소를 선택하여야 하므로 다음 각 경우로 나

눌 수 있다.
(ⅰ) A, B 두 명 중 한 명이 경주를 선택한 경우
A가 경주를 선택하면 B는 평창이나 제주도 중 한 곳을 선택하고 이 각각에 대하여 A와 B를 제외한 5명의 학생이 (경주, 평창, 제주도) 또는 (경주, 제주도, 평창)을 각각 2명, 1명, 2명이 선택하면 되므로
$$2\times{}_5C_2\times{}_3C_1\times{}_2C_2=2\times\frac{5\times4}{2}\times3\times1=60$$
마찬가지 방법으로 B가 경주를 선택한 경우의 수도 60이므로 A, B 두 명 중 한 명이 경주를 선택한 경우의 수는
$2\times60=120$
(ⅱ) A가 평창, B가 제주도 또는 A가 제주도, B가 평창을 선택한 경우
(경주, 평창, 제주도)를 각각 3명, 1명, 1명이 선택하면 되므로
$$2\times{}_5C_3\times{}_2C_1\times{}_1C_1=2\times\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}\times2\times1=40$$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는
$120+40=160$
155) ④
[해설]
A, B가 5개의 운동 종목 중 같은 종목 2개를 택하는 경우의 수는
$${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$
이때 A, B가 남은 3개의 운동 종목 중 각각 1개를 택하는 경우의 수는
${}_3P_2=3\times2=6$따라서 구하는 경우의 수는
$10\times6=60$
156) 120
[해설]
(ⅰ) A, B, C를 포함한 8명의 운동 동아리 회원 중에서 체육 대회에 농구 선수로 참가할 5명의 선수를 뽑을 때 A와 B는 반드시 포함되어야 하므로 A와 B를 제외한 6명의 회원 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는
$${}_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$$
(ⅱ) A, B, C를 포함한 8명의 운동 동아리 회원 중에서 체육 대회에 배구 선수로 참가할 6명의 선수를 뽑을 때 A는 포함되지 않고 C는 반드시 포함되어야 하므로 A와 C를 제외한 6명의 회원 중에서 5명을 뽑는 경우의 수는
${}_6C_5={}_6C_1=6$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는
$20\times6=120$
157) ①
[해설]
(ⅰ) 7이 2개인 경우
∨□∨□∨□∨□∨
□의 자리에 1, 2, 3, 4, 5, 6 중 4개를 택하여 일렬로 배열하고 나머지 ∨의 자리 5개 중 2개에 7을 배열하는 경우의 수와 같으므로
${}_6P_4\times{}_5C_2=360\times10=3600$
(ⅱ) 7이 3개인 경우
∨□∨□∨□∨
□의 자리에 1, 2, 3, 4, 5, 6 중 3개를 택하여 일렬로 배열하고 나머지 ∨의 자리 4개 중 3개에 7을 배열하는 경우의 수와 같으므로
${}_6P_3\times{}_4C_3=120\times4=480$
(ⅲ) 7이 4개인 경우
7끼리 서로 이웃하는 경우가 반드시 있다.
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 여섯 자리의 자연수의 개수는
$3600+480=4080$
158) ④
[해설]
(ⅰ) 특수 문자를 1개 포함하는 경우
${}_4C_1\times{}_6C_3\times4!=4\times20\times24=1920$
(ⅱ) 특수 문자를 2개 포함하는 경우
${}_4C_2\times{}_6C_2\times4!=6\times15\times24=2160$
(ⅲ) 특수 문자를 3개 포함하는 경우
${}_4C_3\times{}_6C_1\times4!=4\times6\times24=576$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 암호의 개수는
$1920+2160+576=4656$
{다른 풀이}
숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6과 특수 문자 #, $, *, !의 10개에서 4개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수에서 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 4개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수와 특수 문자 4개를 일렬로 배열하는 경우의 수를 빼면 되므로
${}_{10}P_4-{}_6P_4-{}_4P_4=5040-360-24=4656$
159) ②
[해설]
1회전은 같은 학년끼리 치르므로 부전승으로 오르는 팀은 1학년 팀을 배정해야 한다.
그러므로 이 경우의 수는 3이다.


(ⅰ) B조에 1학년 2팀을 배정하는 경우
2학년 4팀을 2팀씩 나누어 A조에 배정하면 되므로 이 경우의 수는
$$(3\times{}_2C_2)\times\left({}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}\right)=9$$
(ⅱ) A조에 1학년 2팀을 배정하는 경우
2학년 4팀 중에서 2팀을 택하여 B조에 배정하면 되므로 이 경우의 수는
$(3\times{}_4C_2)\times({}_2C_2\times{}_2C_2)=18$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는
$9+18=27$
160) ③
[해설]
{출제의도}
중복조합을 활용하여 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.
{풀이}
(ⅰ) $w=1$일 때,
주어진 방정식은 $x+y+z=9$이고,
$x=x'+1,\ y=y'+1,\ z=z'+1$로 놓으면
$x'+y'+z'=6$
구하는 순서쌍의 개수는 $x'+y'+z'=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x',\ y',\ z'$의 모든 순서쌍 $(x',\ y',\ z')$의 개수와 같으므로
$${}_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28$$
(ⅱ) $w=2$일 때,
주어진 방정식은 $x+y+z=4$이고,
$x=x'+1,\ y=y'+1,\ z=z'+1$로 놓으면
$x'+y'+z'=1$
구하는 순서쌍의 개수는 $x'+y'+z'=1$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x',\ y',\ z'$의 모든 순서쌍 $(x',\ y',\ z')$의 개수와 같으므로
${}_3H_1={}_{3+1-1}C_1={}_3C_1=3$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 순서쌍의 개수는 합의 법칙에 의하여 $28+3=31$
161) ①
[해설]
부등식 $a\le b\le5<c<d\le10$을 다음과 같이 2가지 경우로 나누어 생각하자.
(ⅰ) $a\le b\le5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 0, 1, 2, 3, 4, 5의 6개의 수 중에서 중복을 허락하여 2개를 뽑는 경우의 수와 같으므로
$${}_6H_2={}_{6+2-1}C_2={}_7C_2=\frac{7\times6}{2\times1}=21$$
(ⅱ) $5<c<d\le10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $c,\ d$의 순서쌍 $(c,\ d)$의 개수는 6, 7, 8, 9, 10의 5개의 수 중에서 2개를

뽑는 조합의 수와 같으므로

${}_5C_2=10$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

$21\times10=210$

162) 27

[해설]

$x+y+z=10\ (x\geq1,\ y\geq1,\ z\geq1)$

$x=x'+1,\ y=y'+1,\ z=z'+1$이라 하면

$x'+y'+z'=7\ (x'\geq0,\ y'\geq0,\ z'\geq0)$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x',\ y',\ z'$의 모든 순서쌍 $(x',\ y',\ z')$의 개수는

${}_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=\dfrac{9\times8}{2\times1}=36$

한편, $x\leq6,\ y\leq6,\ z\leq6$이므로 $x'\leq5,\ y'\leq5,\ z'\leq5$이어야 한다.

따라서 $x',\ y',\ z'$의 값 중 어느 하나라도 6 이상인 경우를 구해보면 x'이 6 이상인 경우는 순서쌍 $(x',\ y',\ z')$이 $(7,\ 0,\ 0),\ (6,\ 1,\ 0),\ (6,\ 0,\ 1)$인 경우의 3가지이고, $y',\ z'$이 6 이상인 경우도 마찬가지이므로

$3\times3=9$

따라서 구하는 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는

$36-9=27$

163) ③

[해설]

(ⅰ) $f(3)=1$일 때

$f(1)=f(2)=1$이고, $f(4),\ f(5)$가 대응하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5 중 중복을 허락하여 2개를 뽑는 경우의 수와 같으므로

$1\times{}_5H_2={}_{5+2-1}C_2={}_6C_2=15$

(ⅱ) $f(3)=3$일 때

$f(1),\ f(2)$가 대응하는 경우의 수는 1, 2, 3 중 중복을 허락하여 2개를 뽑는 경우의 수와 같고, $f(4),\ f(5)$가 대응하는 경우의 수는 3, 4, 5 중 중복을 허락하여 2개를 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_3H_2\times{}_3H_2={}_{3+2-1}C_2\times{}_{3+2-1}C_2={}_4C_2\times{}_4C_2=6\times6=36$

(ⅲ) $f(3)=5$일 때

$f(1),\ f(2)$가 대응하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5 중 중복을 허락하여 2개를 뽑는 경우의 수와 같고, $f(4)=f(5)=5$이므로

${}_5H_2\times1={}_{5+2-1}C_2={}_6C_2=15$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 함수 f의 개수는

$15+36+15=66$

164) ④

[해설]

(ⅰ) $2\leq a\leq b\leq c\leq6$인 경우

주어진 조건을 만족시키는 자연수 $a,\ b,\ c$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 2, 3, 4, 5, 6의 5개의 숫자 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_5H_3={}_{5+3-1}C_3={}_7C_3=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

(ⅱ) $1\leq b\leq a\leq c<8$인 경우

주어진 조건을 만족시키는 자연수 $a,\ b,\ c$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 7 이하의 자연수 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_7H_3={}_{7+3-1}C_3={}_9C_3=\dfrac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$

Ü $2\leq a=b\leq c\leq6$인 경우

주어진 조건을 만족시키는 자연수 $a,\ b,\ c$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 2, 3, 4, 5, 6의 5개의 숫자 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_5H_2={}_{5+2-1}C_2={}_6C_2=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$35+84-15=104$

165) ③

[해설]

만들어질 수 있는 스티커 집계표의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 12개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_{12}={}_{3+12-1}C_{12}={}_{14}C_{12}={}_{14}C_2=\dfrac{14\times13}{2}=91$

166) ③

[해설]

각 주머니에 넣는 공의 개수를 $x,\ y,\ z,\ w$라 하면 적어도 한 개 이상의 공을 넣어야 하므로

$x+y+z+w=9\ (x\geq1,\ y\geq1,\ z\geq1,\ w\geq1)$

$x=x'+1,\ y=y'+1,\ z=z'+1,\ w=w'+1$이라 하면

$x'+y'+z'+w'=5\ (x'\geq0,\ y'\geq0,\ z'\geq0,\ w'\geq0)$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x',\ y',\ z',\ w'$의 모든 순서쌍 $(x',\ y',\ z',\ w')$의 개수는

${}_4H_5={}_{4+5-1}C_5={}_3C_5={}_3C_3=\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$

이때 각 주머니에 넣는 공의 개수의 최댓값은 4이므로

$x'\leq3,\ y'\leq3,\ z'\leq3,\ w'\leq3$

따라서 $x',\ y',\ z',\ w'$ 값 중 어느 하나라도 4 이상인 경우는 제외해야 한다.

x'이 4 이상인 경우의 순서쌍 $(x',\ y',\ z',\ w')$은

$(4,\ 1,\ 0,\ 0),\ (4,\ 0,\ 1,\ 0),\ (4,\ 0,\ 0,\ 1),\ (5,\ 0,\ 0,\ 0)$의 4가지이고,

$y',\ z',\ w'$의 경우도 마찬가지이므로

$4\times4=16$따라서 각 주머니에 4개 이하의 공이 들어가도록 넣는 경우의 수는

$56-16=40$

{다른 풀이}

같은 종류의 공 9개를 4 이하의 개수로 서로 다른 4개의 주머니에 빈 주머니가 없도록 나누어 넣는 경우는 다음과 같다.

(4개, 3개, 1개, 1개)인 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!}=12$

(4개, 2개, 2개, 1개)인 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!}=12$

(3개, 3개, 2개, 1개)인 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!}=12$

(3개, 2개, 2개, 2개)인 경우의 수는 $\dfrac{4!}{3!}=4$

따라서 구하는 경우의 수는

$12+12+12+4=40$

167) ③

[해설]

$$\begin{aligned}10&=7+1+1+1\\&=6+2+1+1\\&=5+3+1+1=5+2+2+1\\&=4+4+1+1=4+3+2+1=4+2+2+2\\&=3+3+3+1=3+3+2+2\end{aligned}$$

따라서 구하는 경우의 수는

$P(10,\ 4)=1+1+2+3+2=9$

168) ①

[해설]

$n(S)=5$이므로

(ⅰ) 집합 S를 원소가 1개, 1개, 1개, 1개, 1개인 서로소인 부분집합으로 분할하는 경우의 수는 1

(ⅱ) 집합 S를 원소가 1개, 1개, 1개, 2개인 서로소인 부분집합으로 분할하는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$

(ⅲ) 집합 S를 원소가 1개, 1개, 3개인 서로소인 부분집합으로 분할하는 경우의 수는 ${}_5C_3=10$

(ⅳ) 집합 S를 원소가 1개, 2개, 2개인 서로소인 부분집합으로 분할하는 경우의 수는

$5\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\dfrac{1}{2!}=15$

(ⅴ) 집합 S를 원소가 1개, 4개인 서로소인 부분집합으로 분할하는 경우의 수는 ${}_5C_1=5$

(vi) 집합 S를 원소가 2개, 3개인 서로소인 부분집합으로 분할하는 경우의 수는 ${}_5C_2 = 10$

(i)~(vi)에서 집합 S를 공집합이 아닌 서로소인 부분집합으로 분할하는 경우의 수는

$1+10+10+15+5+10=51$

169) ②

[해설]

빈 상자가 2개 이하가 되도록 넣는 경우는 빈 상자가 없거나 1개 또는 2개일 때이다.

(i) 빈 상자가 없는 경우

같은 종류의 가방 7개를 같은 종류의 빈 상자 6개에 넣는 경우의 수는 $P(7,\ 6)$이므로

$7=2+1+1+1+1+1$에서 $P(7,\ 6)=1$

(ii) 빈 상자가 1개인 경우

같은 종류의 가방 7개를 같은 종류의 빈 상자 5개에 넣는 경우의 수는 $P(7,\ 5)$이므로

$7=3+1+1+1+1=2+2+1+1+1$에서 $P(7,\ 5)=2$

(iii) 빈 상자가 2개인 경우

같은 종류의 가방 7개를 같은 종류의 빈 상자 4개에 넣는 경우의 수는 $P(7,\ 4)$이므로

$7=4+1+1+1=3+2+1+1=2+2+2+1$에 서 $P(7,\ 4)=3$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$1+2+3=6$

170) 90

[해설]

{출제 의도}

서로 다른 종류의 물건 n개를 같은 종류의 상자 k개에 넣을 때, 빈 상자가 없도록 남김없이 나누어 넣는 경우의 수는 원소의 개수가 n인 집합을 공집합이 아닌 k개의 서로소인 부분집합으로 분할하는 경우의 수 S(n, k)와 같음을 이용하여 분할의 수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

{풀이}

서로 다른 종류의 공 6개를 같은 종류의 상자 3개에 빈 상자가 없도록 남김없이 나누어 넣는 경우의 수는 원소의 개수가 6인 집합을 공집합이 아닌 3개의 서로소인 부분집합으로 분할하는 경우의 수와 같다.

(i) (4개, 1개, 1개)로 분할하는 경우의 수는

${}_6C_4\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\dfrac{1}{2!}=15$

(ii) (3개, 2개, 1개)로 분할하는 경우의 수는

${}_6C_3\times{}_3C_2\times{}_1C_1=60$

(iii) (2개, 2개, 2개)로 분할하는 경우의 수는

${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\dfrac{1}{3!}=15$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$15+60+15=90$

171) ⑤

[해설]

8명을 3개의 팀으로 나눌 때, 각 팀의 인원이 모두 달라야 하므로 (1명, 2명, 5명) 또는 (1명, 3명, 4명)으로 나누어야 한다.

(i) 8명을 1명, 2명, 5명으로 나누는 경우

원소의 개수가 8인 집합을 원소의 개수가 각각 1, 2, 5인 세 부분집합으로 분할하는 경우의 수와 같으므로

${}_8C_1\times{}_7C_2\times{}_5C_5=8\times21\times1=168$

(ii) 8명을 1명, 3명, 4명으로 나누는 경우

원소의 개수가 8인 집합을 원소의 개수가 각각 1, 3, 4인 세 부분집합으로 분할하는 경우의 수와 같으므로

${}_8C_1\times{}_7C_3\times{}_4C_4=8\times35\times1=280$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$168+280=448$

172) ①

[해설]

여학생 3명이 같은 조에 포함되려면 남학생 6명을 (1명, 5명) 또는 (2명, 4명)의 2개 조로 나누어 남학생 수가 적은 조에 여학생 3명을 포함시키면 된다.

(i) 남학생 6명을 1명, 5명으로 나누는 경우의 수는

${}_6C_1\times{}_5C_5=6$

(ii) 남학생 6명을 2명, 4명으로 나누는 경우의 수는

${}_6C_2\times{}_4C_4=15$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$6+15=21$

173) 150

[해설]

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$를 3개의 부분집합으로 분할할 때, 부분집합의 원소의 개수에 따라 나누면 다음 두 가지이다.

(i) 원소의 개수가 각각 1, 1, 3인 경우

${}_5C_1\times{}_4C_1\times{}_3C_3\times\dfrac{1}{2!}=5\times4\times1\times\dfrac{1}{2}=10$

(ii) 원소의 개수가 각각 1, 2, 2인 경우

${}_5C_1\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\dfrac{1}{2!}=5\times6\times1\times\dfrac{1}{2}=15$

(i), (ii)에서 집합 X를 3개의 부분집합으로 분할하는 경우의 수는

$10+15=25$

이때 분할된 3개의 부분집합을 집합 Y의 세 원소 1, 2, 3에 하나씩 대응시키는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 함수의 개수는

$25\times6=150$

174) ②

[해설]

{출제 의도}

자연수의 분할 중에서 특정한 조건을 만족시키는 분할의 수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

{풀이}

(i) 6을 2개의 자연수로 분할하는 방법

$6=5+1$

$=4+2$

$=3+3$

이므로 $P(6,2)=3$

(ii) 6을 4개의 자연수로 분할하는 방법

$6=3+1+1+1$

$=2+2+1+1$

이므로 $P(6,\ 4)=2$

(iii) 6을 6개의 자연수로 분할하는 방법

$6=1+1+1+1+1+1$

이므로 $P(6,\ 6)=1$

따라서 자연수 6을 짝수 개의 자연수로 분할하는 방법의 수는

$3+2+1=6$

175) ②

[해설]

같은 종류의 초콜릿 8개를 같은 종류의 봉지 4개에 빈 봉지가 없도록 남김없이 나누어 넣는 경우의 수는 자연수 8을 4개의 자연수로 분할하는 경우의 수와 같으므로 $P(8,\ 4)$이다.

자연수 8을 4개의 자연수로 분할하면

$8=5+1+1+1$

$=4+2+1+1$

$=3+3+1+1$

$=3+2+2+1$

$=2+2+2+2$

따라서 구하는 방법의 수는

$P(8,\ 4)=5$

176) ③

[해설]

$9=7+1+1$

$=5+3+1$

$=3+3+3$

$=5+1+1+1+1$

$=3+3+1+1+1$

$=3+1+1+1+1+1+1$

$=1+1+1+1+1+1+1+1+1$

따라서 구하는 방법의 수는 7이다.

177) 9

[해설]

주어진 조건에서 $a+b+c+d=10$, $a\le b\le c\le d$이므로 구하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 자연수 10을 4개의 자연수로 분할하는 방법의 수 $P(10,\ 4)$와 같다.

$10=7+1+1+1$

$=6+2+1+1$
$=5+3+1+1$
$=5+2+2+1$
$=4+4+1+1$
$=4+3+2+1$
$=4+2+2+2$
$=3+3+3+1$
$=3+3+2+2$
이므로 $P(10,\ 4)=9$
따라서 구하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 9이다.
178) ④
[해설]
{출제의도}
이항정리를 이용하여 다항식의 전개식에서 특정한 항의 계수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.
{풀이}
$\left(x+\frac{1}{3x}\right)^6$의 전개식의 일반항은
${}_6C_r x^{6-r}\left(\frac{1}{3x}\right)^r={}_6C_r\left(\frac{1}{3}\right)^r x^{6-2r}$이다.
x^2항은 $6-2r=2$에서 $r=2$일 때이므로
x^2의 계수는
${}_6C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2=15\times\frac{1}{9}=\frac{5}{3}$
179) ③
[해설]
$\left(2x-\frac{1}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은
${}_5\mathrm{C}_r(2\mathrm{x})^{5-\mathrm{r}}\left(-\frac{1}{\mathrm{x}}\right)^{\mathrm{r}}={}_5\mathrm{C}_r(-1)^{\mathrm{r}}2^{5-\mathrm{r}}\mathrm{x}^{5-2\mathrm{r}}$이다.
z항은 $5-2r=1$에서 $r=2$일 때이므로 x의 계수는
${}_5\mathrm{C}_2(-1)^2 2^3=80$
180) ①
[해설]
$(x-1)^n$의 전개식의 일반항은
${}_n\mathrm{C}_r(-1)^{\mathrm{n-r}}={}_\mathrm{n}\mathrm{C}_r(-1)^{\mathrm{n-r}}\mathrm{x}^\mathrm{r}$이다.
x^2항은 $r=2$일 때이므로 x^2의 계수는
${}_n\mathrm{C}_2(-1)^{\mathrm{n}-2}=\frac{\mathrm{n(n-1)}}{2}\times(-1)^{\mathrm{n}-2}=45$
$(-1)^{n-2}=1$이고 $\frac{n(n-1)}{2}=45$이어야 하므로 $n=10$
따라서 x^3은 $r=3$일 때이므로 x^3의 계수는
${}_{10}\mathrm{C}_3(-1)^7=-\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=-120$
181) ④
[해설]
$(x+a)^5$의 전개식에서 x^3항은
${}_5\mathrm{C}_3a^2x^3=10a^2x^3$이므로
$\int(x+a)^5dx$의 전개식에서 x^4항은 $\frac{10}{4}a^2x^4$이다.
따라서 $\frac{10}{4}a^2=10$에서 $a^2=4$
$a>0$이므로 $a=2$
$(2x-1)^5$의 전개식에서 x^3항은
${}_5\mathrm{C}_3(2x)^3(-1)^2=10\times8\times x^3=80x^3$이므로
$\frac{d}{dx}(2x-1)^5$의 전개식에서 x^2항은 $240x^2$이다.
따라서 구하는 x^2의 계수는 240이다.
182) ②
[해설]
다항식 $(2x+1)^n$의 전개식에서 x^2항은
${}_n\mathrm{C}_2(2x)^2 1^{n-2}=4{}_n\mathrm{C}_2x^2$이므로
x^2의 계수는 $4\times\frac{n(n-1)}{2}=2n(n-1)$
따라서

$$\sum_{n=2}^{10}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=2}^{10}\frac{1}{2n(n-1)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{10}\frac{1}{n(n-1)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{10}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{10}\right)=\frac{9}{20}$$

183) 682
[해설]
{출제의도}
이항계수의 성질을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.
{풀이}
이항계수의 성질에 의하여
${}_{2k}C_1+{}_{2k}C_3+{}_{2k}C_5+\cdots+{}_{2k}C_{2k-1}=2^{2k-1}$

$$f(n)=\sum_{k=1}^{n}2^{2k-1}=\sum_{k=1}^{n}\left(2\times4^{k-1}\right)$$
$$=\frac{2(4^n-1)}{4-1}=\frac{2}{3}(4^n-1)$$

따라서 $f(5)=\frac{2}{3}(4^5-1)=682$
{참고}
이항정리에 의하여
$(x+1)^{2k}=\sum_{r=0}^{2k}{}_{2k}C_rx^r,\ (x-1)^{2k}=\sum_{r=0}^{2k}{}_{2k}C_rx^r(-1)^{2k-r}$
이므로 $x=1$을 대입하면
$2^{2k}=\sum_{r=0}^{2k}{}_{2k}C_r,\ 0=\sum_{r=0}^{2k}(-1)^{2k-r}{}_{2k}C_r$
변끼리 빼면

$$2^{2k}=\sum_{r=0}^{2k}{}_{2k}C_r-\sum_{r=0}^{2k}(-1)^{2k-r}{}_{2k}C_r$$
$$=\sum_{r=0}^{2k}\left\{{}_{2k}C_r-(-1)^{2k-r}{}_{2k}C_r\right\}$$
$$=\sum_{i=1}^{k}2{}_{2k}C_{2i-1}$$
$$=2\left({}_{2k}C_1+{}_{2k}C_3+{}_{2k}C_5+\cdots+{}_{2k}C_{2k-1}\right)$$

따라서 ${}_{2k}C_1+{}_{2k}C_3+{}_{2k}C_5+\cdots+{}_{2k}C_{2k-1}=2^{2k-1}$
184) ⑤
[해설]
집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 12\}$이므로 집합 A의 부분집합 중 원소가 n개인 것의 개수는 ${}_{12}\mathrm{C}_n$ $(0\le\mathrm{n}\le12)$이다.
이때 $f(n)={}_{12}\mathrm{C}_n$이라 하면 집합 A의 부분집합 중 원소의 개수가 홀수인 것의 개수는
$f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+f(9)+f(11)$
$={}_{12}\mathrm{C}_1+{}_{12}\mathrm{C}_3+{}_{12}\mathrm{C}_5+{}_{12}\mathrm{C}_7+{}_{12}\mathrm{C}_9+{}_{12}\mathrm{C}_{11}$
$=2^{12-1}=2^{11}=2048$
185) ②
[해설]
$n(B)=k$ $(1\le k\le10)$일 때, 집합 B의 개수는 ${}_{10}\mathrm{C}_k$이고 그 각각에 대하여 $A\subset B$를 만족시키는 집합 A의 개수는 2^k-1이므로 두 부분집합 A, B의 경우의 수는

$\sum_{k=1}^{10} {}_{10}C_k(2^k-1)$이다.
이때 ${}_{10}C_0(2^0-1)=1\times 0=0$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} {}_{10}C_k(2^k-1) &= \sum_{k=0}^{10} {}_{10}C_k(2^k-1)\\ &= \sum_{k=0}^{10} {}_{10}C_k 2^k - \sum_{k=0}^{10} {}_{10}C_k\\ &= (2+1)^{10}-(1+1)^{10}\\ &= 3^{10}-2^{10}\end{aligned}$$

186) ④
[해설]

$$\begin{aligned}f(k) &= {}_{k-1}C_1 \times {}_{10-k}C_2\\ &= (k-1)\times\frac{(10-k)(10-k-1)}{2}\\ &= \frac{1}{2}(k-1)(k-9)(k-10)\end{aligned}$$

1부터 10까지의 자연수 중에서 선택한 서로 다른 4개의 수 중에서 두 번째로 작은 수가 k이므로
$2 \le k \le 8$이다.

$f(3)=\frac{1}{2}\times 2\times(-6)\times(-7)=42$

$f(4)=\frac{1}{2}\times 3\times(-5)\times(-6)=45$

$f(5)=\frac{1}{2}\times 4\times(-4)\times(-5)=40$

$f(6)=\frac{1}{2}\times 5\times(-3)\times(-4)=30$

$f(7)=\frac{1}{2}\times 6\times(-2)\times(-3)=18$

$f(8)=\frac{1}{2}\times 7\times(-1)\times(-2)=7$

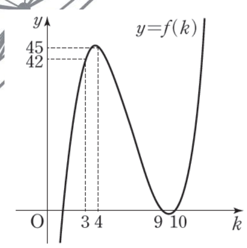
따라서 $f(k)$의 최댓값은 45이다.
{다른 풀이}

$$\begin{aligned}f(k) &= {}_{k-1}C_1 \times {}_{10-k}C_2\\ &= (k-1)\times\frac{(10-k)(10-k-1)}{2}\\ &= \frac{1}{2}(k-1)(k-9)(k-10)\\ &= \frac{1}{2}k^3-10k^2+\frac{109}{2}k-45\end{aligned}$$

$f'(k)=\frac{3}{2}k^2-20k+\frac{109}{2}$이므로
$f'(k)=0$에서 $3k^2-40k+109=0$
$k=\frac{20\pm\sqrt{73}}{3}$이므로 $k=3.\times\times\times$ 또는 $k=9.\times\times\times$
함수 $f(k)$는 $3<k<4$에서 극댓값이 존재하고,

$f(3)=\frac{1}{2}\times 2\times(-6)\times(-7)=42$

$f(4)=\frac{1}{2}\times 3\times(-5)\times(-6)=45$



따라서 $2 \le k \le 8$에서 $f(k)$의 최댓값은 $f(4)=45$이다.