1) [정답] ③

$A(0,\ 1)$, $B(3,\ a^3)$, $C(3,\ 0)$이므로 $\overline{OA}=1$, $\overline{BC}=a^3$, $\overline{OC}=3$이다.

사각형 OCBA는 사다리꼴이므로 그 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\cdot(1+a^3)\cdot 3=\frac{3}{2}(1+a^3)$

이때 $S=2$에서

$\frac{3}{2}(1+a^3)=2$, $a^3=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$

$\therefore\ a=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

2) [정답] 15

$f(x)=a^x$이라 하면

$f\left(\frac{1}{2}\right)=a^{\frac{1}{2}}=3$에서 $a>0$이므로

$a=(a^{\frac{1}{2}})^2=3^2=9$

$f(k)=a^k=3\sqrt{3}$에서

$9^k=3\sqrt{3}$, $3^{2k}=3^{\frac{3}{2}}$, $2k=\frac{3}{2}$

$\therefore\ k=\frac{3}{4}$

따라서 $20k=20\times\frac{3}{4}=15$

3) [정답] ②

$f(a)f(b)f(c)$

$=\left(\frac{1}{4}\right)^a\times\left(\frac{1}{4}\right)^b\times\left(\frac{1}{4}\right)^c$

$=2^{-2a}\times 2^{-2b}\times 2^{-2c}$

$=2^{-2a-2b-2c}$

$=2^{-2(a+b+c)}$

$=2^4$

따라서 $-2(a+b+c)=4$에서

$a+b+c=-2$

4) [정답] 7

함수 $y=2^x+a$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=2^{x-b}+a$이고, 이 그래프가 점 $(1,\ 4)$를 지나므로

$4=2^{1-b}+a$ ······㉠

또, 함수 $y=2^x+a$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=2^{-x}+a$이고, 이 그래프가 점 $(1,\ 4)$를 지나므로

$4=2^{-1}+a$ $\therefore\ a=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

㉠에서 $4=2^{1-b}+\frac{7}{2}$, $2^{1-b}=\frac{1}{2}=2^{-1}$, $1-b=-1$ $\therefore$ $b=2$

따라서 $a=\frac{7}{2}$, $b=2$이므로 $ab=\frac{7}{2}\times 2=7$

5) [정답] 8

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-n=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-m}$

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-m}+n$ ······㉠

한편,

$y=4\left(\frac{1}{2^x}-\frac{3}{2}\right)=4\times\frac{1}{2^x}-6$

$=\frac{1}{2^{x-2}}-6$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}-6$ ······㉡

㉠, ㉡이 일치해야 하므로 $m=2$, $n=-6$이다.

$\therefore\ m-n=2-(-6)=8$

6) [정답] ⑤

함수 $y=4^x+a$의 그래프는 $y=4^x$의 그래프를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이므로 점근선은 직선 $y=a$이다.

$\therefore\ a=-3$

또한, $y=4^x-3$의 그래프가 점 $(2,\ b)$를 지나므로

$b=4^2-3=13$

$\therefore\ a+b=-3+13=10$

7) [정답] ⑤

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2x^2+4x+a}=2^{2x^2-4x-a}$에서 $f(x)=2x^2-4x-a$라 하면

$f(x)=2(x-1)^2-a-2$ $(-1\le x\le 4)$이므로

$x=1$일 때, $f(x)$의 최솟값은 $-a-2$,

$x=4$일 때, $f(x)$의 최댓값은 $-a+16$이다.

이때 주어진 함수의 최솟값이 8이므로 $2^{-a-2}=8=2^3$에서 $-a-2=3$

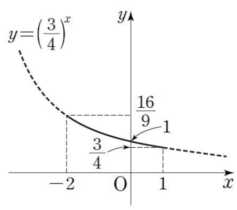
$\therefore\ a=-5$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 $2^{-a+16}=2^{5+16}=2^{21}$

8) [정답] ④

$y=2^{-2x}\cdot 3^x=\left(\frac{1}{4}\right)^x\cdot 3^x=\left(\frac{3}{4}\right)^x$

$-2\le x\le 1$에서 함수 $y=\left(\frac{3}{4}\right)^x$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $-2\le x\le 1$에서 함수 $y=\left(\frac{3}{4}\right)^x$은 $x=-2$일 때 최대이며 최댓값은

$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}=\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$

9) [정답] ⑤

$y=4^x-3\cdot 2^{x+1}+7$

$=(2^x)^2-6\cdot 2^x+7$ ······㉠

$2^x=t(t>0)$라 하면

$2^{-1}\le 2^x\le 2^2$에서 $\frac{1}{2}\le t\le 4$이고, ㉠에서

$y=t^2-6t+7$

$=(t-3)^2-2$ $\left(\frac{1}{2}\le t\le 4\right)$

따라서 y는 $t=\frac{1}{2}$일 때, 최대이며 최댓값은

$M=\left(\frac{1}{2}-3\right)^2-2=\frac{17}{4}$이고,

$t=3$일 때 최소이며 최솟값은 $m=-2$이다.

$\therefore\ M+m=\frac{17}{4}+(-2)=\frac{9}{4}$

10) [정답] ⑤

$2\sqrt[3]{4}=2\cdot 2^{\frac{2}{3}}=2^{1+\frac{2}{3}}=2^{\frac{5}{3}}$이므로 주어진 방정식은

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-\frac{8}{3}x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{3}}$이다.

$x^2-\frac{8}{3}x=-\frac{5}{3}$, $3x^2-8x+5=0$, $(3x-5)(x-1)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=\frac{5}{3}$

따라서 모든 실근의 합은 $1+\frac{5}{3}=\frac{8}{3}$

11) [정답] ③

$9^x=(3^2)^x=(3^x)^2$, $3^{x+1}=3\times 3^x$이므로

$3^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 주어진 지수방정식은

$t^2-12t+27=0$

$(t-3)(t-9)=0$

$\therefore\ t=3$ 또는 $t=9$

즉, $3^x=3$, $3^x=9=3^2$에서 $x=1$ 또는 $x=2$이다.

따라서 모든 실근의 합은 $1+2=3$

12) [정답] ⑤

$\frac{1}{9^{x-2}}=\left(\frac{1}{9}\right)^{x-2}=(3^{-2})^{x-2}=3^{4-2x}$이므로 주어진 부등식은

$3^{4-2x}>3^{x^2-4}$이다.

$4-2x>x^2-4$, $x^2+2x-8<0$

$(x-2)(x+4)<0$

$\therefore\ -4<x<2$

따라서 정수 x는 -3, -2, -1, 0, 1이고 그 개수는 5이다.

13) [정답] ⑤

$f(0)=2^b=3$ ……㉠

$f(2)=2^{2a+b}=2^{2a}\cdot 2^b=5$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$2^{2a}=\frac{5}{3}$

$\therefore\ f(-2)=2^{-2a+b}=(2^{2a})^{-1}\cdot 2^b$

$=\left(\frac{5}{3}\right)^{-1}\cdot 3=\frac{3}{5}\times 3=\frac{9}{5}$

14) [정답] 1

함수 $y=2^{x-a}+b$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이므로 점근선은 직선 $y=b$이다.

$\therefore\ b=-1$

함수 $y=2^{x-a}+b$의 그래프가 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$0=2^{-1-a}+b$에서 $2^{-1-a}=-b=1$

$-1-a=0$

$\therefore\ a=-1$

$\therefore\ ab=(-1)\cdot(-1)=1$

15) [정답] ③

$y=a^{x^2+4x}$에서 $f(x)=x^2+4x$라 하면

$f(x)=(x+2)^2-4$ $\quad(-3\le x\le 0)$이므로

$x=-2$일 때, $f(x)$의 최솟값은 -4

$x=0$일 때, $f(x)$의 최댓값은 0

따라서 $M=a^{-4}$, $\quad m=a^0=1$이다.

$\frac{M}{m}=\frac{a^{-4}}{1}=\frac{1}{a^4}=64$에서

$a^4=\frac{1}{64}=\frac{1}{2^6}$

$\therefore\ a=\left(\frac{1}{2^6}\right)^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

16) [정답] 4

$\sqrt{2^x}=t$ $\quad(t>0)$라 하면

$2^x=(\sqrt{2^x})^2=t^2$이므로 주어진 방정식은

$t^2+3t-28=0$, $(t-4)(t+7)=0$

$\therefore\ t=4$ $(\because\ \ t>0)$

$\sqrt{2^x}=4$에서 $2^x=16$, $\quad 2^x=2^4$

$\therefore\ x=4$

17) [정답] 140

$\frac{2}{2^{2x}}=2^{1-2x}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{16}}=(\sqrt[3]{2^4})^{-1}=2^{-\frac{4}{3}}$이므로

$2^{1-2x}\le 2^{-\frac{4}{3}}$에서

$1-2x\le-\frac{4}{3}$

$\therefore\ x\ge\frac{7}{6}$

따라서 x의 최솟값은 $m=\frac{7}{6}$

$\therefore\ 120m=120\times\frac{7}{6}=140$

18) [정답] ③

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여

$f(-x)f(x)=a^{-x}\cdot a^x=a^{-x+x}=a^0=f(0)$ (참)

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여

$f(3x)=a^{3x}=(a^x)^3=\{f(x)\}^3$ (참)

ㄷ. [반례] $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$일 때,

$f(2)f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2+\frac{1}{2}}$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}<\left(\frac{1}{2}\right)^2=f(2)$

$\therefore\ f(2)f\left(\frac{1}{2}\right)<f(2)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ이다.

19) [정답] 7

주어진 그래프는 x의 값이 증가하면 y값도 증가하므로

$4a>1$에서 $a>\frac{1}{4}$ ……㉠

$a^2-5>1$에서 $a^2-6>0$

$(a+\sqrt{6})(a-\sqrt{6})>0$

$\therefore\ a>\sqrt{6}$ 또는 $a<-\sqrt{6}$ ……㉡

주어진 그래프에서

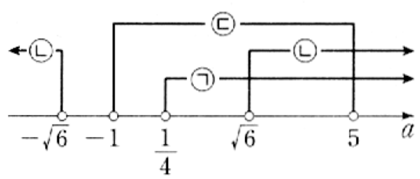
$x>0$일 때, $(4a)^x>(a^2-5)^x$

$x<0$일 때, $(4a)^x<(a^2-5)^x$이므로

$4a>a^2-5$, $a^2-4a-5<0$

$(a+1)(a-5)<0$

$\therefore\ -1<a<5$ ……㉢



㉠, ㉡, ㉢의 공통범위를 구하면 $\sqrt{6}<a<5$

따라서 자연수 a는 3, 4이고 그 합은 $3+4=7$

[오답 피하기]

지수함수 $y=a^x \quad (a>0,\ a\neq 1)$의 그래프의 개형으로부터 지수함수의 밑 a의 조건을 파악할 수 있어야 한다. 즉, $0<a<1$이면 지수함수의 그래프는 감소하는 모양의 그래프이고, $a>1$이면 지수함수의 그래프는 증가하는 모양의 그래프로 그려진다. 따라서 $4a>1,\ a^2-5>1$의 조건을 찾을 수 있어야 한다.

또한 두 지수함수 $y=a^x,\ y=b^x$ $(a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ b\neq 1)$의 그래프로부터 $a,\ b$의 대소 관계를 파악할 수 있다. 따라서 $a^2-5<4a$인 조건을 찾을 수 있어야 한다.

20) [정답] 16

$y=\left(\frac{1}{4}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}-1$

$=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2+2\left(\frac{1}{2}\right)^x-1 \qquad \cdots\cdots ㉠$

이때 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$라 하면

$-1\le x\le 2$이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^2\le\left(\frac{1}{2}\right)^x\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

$\therefore\ \frac{1}{4}\le t\le 2$

㉠에서

$y=t^2+2t-1=(t+1)^2-2$이므로

y는 $t=\left(\frac{1}{2}\right)^x=2$, 즉 $x=-1$일 때 최대이며 최댓값은

$M=2^2+2\cdot 2-1=7$

y는 $t=\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{4}$, 즉 $x=2$일 때 최소이며 최솟값은

$m=\left(\frac{1}{4}\right)^2+2\times\frac{1}{4}-1=-\frac{7}{16}$

$\therefore\ \left|\frac{M}{m}\right|=\left|\frac{7}{-\frac{7}{16}}\right|=|-16|=16$

21) [정답] 4

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-2\sqrt{31}\,t+16=0$

$\therefore\ t=\sqrt{31}-\sqrt{15}$ 또는 $t=\sqrt{31}+\sqrt{15}$

이때 $2^x=\sqrt{31}-\sqrt{15}$를 만족시키는 x를 α라 하면

$2^\alpha=\sqrt{31}-\sqrt{15}$

$2^x=\sqrt{31}+\sqrt{15}$를 만족시키는 x를 β라 하면

$2^\beta=\sqrt{31}+\sqrt{15}$이다.

$\therefore\ 2^{\alpha+\beta}=2^\alpha\cdot 2^\beta$

$=(\sqrt{31}-\sqrt{15})(\sqrt{31}+\sqrt{15})$

$=31-15=2^4$

$\therefore\ \alpha+\beta=4$

따라서 주어진 방정식의 모든 실근의 합은 4이다.

22) [정답] ②

점 $\mathrm{A}(a,\ 4^a)$이므로 $\mathrm{B}(4^a,\ 4^a)$, $\mathrm{C}(4^a,\ \sqrt{4^a})$이다.

점 C의 x좌표와 y좌표의 차가 90이상이고, $4^a>\sqrt{4^a}=2^a$이므로

$4^a-2^a\ge 90$

$(2^a)^2-2^a-90\ge 0$

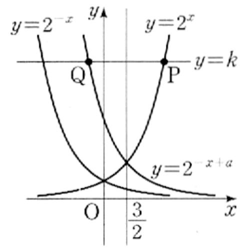
$(2^a+9)(2^a-10)\ge 0$

이때, $2^a+9>0$이므로 $2^a-10\ge 0$

따라서 $2^a\ge 10$을 만족시키는 자연수 a는 4, 5, 6, $\cdots$이므로 자연수 a의 최솟값은 4이다.

23) [정답] ⑤

$y=2^{-x+a}$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.



선분 PQ의 중점의 x좌표는 $\frac{a}{2}$이므로

$\frac{a}{2}=\frac{3}{2}$에서 $a=3$

따라서 방정식 $2^x+2^{-x+3}=9$에서

$2^x+\frac{8}{2^x}-9=0$

$2^x=t\ (t>0)$라 하면

$t+\frac{8}{t}-9=0,\ t^2-9t+8=0$

$(t-1)(t-8)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=8$

즉, $2^x=1$ 또는 $2^x=8$이므로 $x=0$ 또는 $x=3$이다.

따라서 모든 실근의 합은

$0+3=3$

24) [정답] ④

점 M의 x좌표는 방정식 $4^x=2^x+2$의 해와 같다.

$(2^x)^2-2^x-2=0$에서 $2^x=t\ (t>0)$라 하면

$t^2-t-2=0$, $(t-2)(t+1)=0$

$t=2\ (\because t>0)$

$2^x=2$에서 $x=1 \qquad \therefore \mathrm{M}(1,\ 4)$

점 P, Q를 각각 $\mathrm{P}(p,\ 4^p)$, $\mathrm{Q}(q,\ 2^q+2)$ (단, $p\neq 1,\ q\neq 1$)

라 하면 선분 PQ의 중점이 $\mathrm{M}(1,\ 4)$이므로

$\frac{p+q}{2}=1$에서 $q=2-p \qquad \cdots\cdots ㉠$

$\frac{4^p+2^q+2}{2}=4$에서 $4^p+2^q=6 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠을 ㉡에 대입하면

$4^p+2^{2-p}=6$, $(2^p)^2+\frac{4}{2^p}-6=0$

$2^p=s\ (s>0)$라 하면

$s^2+\frac{4}{s}-6=0$, $s^3-6s+4=0$

$(s-2)(s^2+2s-2)=0$

$s=2$ 또는 $s=-1+\sqrt{3}\ (\because s>0)$

$2^p=2$ 또는 $2^p=-1+\sqrt{3}$

이때 $p\neq 1$이므로 $2^p=-1+\sqrt{3}$이다.

25) [정답] ③

$x^{2x^2-2}\ge x^{-3x}$에서

(ⅰ) $0<x<1$일 때,

$2x^2-2\le -3x$

$(2x-1)(x+2)\le 0$

$-2\le x\le\frac{1}{2}$

$\therefore 0 < x \le \dfrac{1}{2}$

(ii) $x = 1$ 일 때, 부등식이 성립한다.

$\therefore x = 1$

(iii) $x > 1$ 일 때

$2x^2 - 2 \ge -3x$

$(2x-1)(x+2) \ge 0$

$x \le -2$ 또는 $x \ge \dfrac{1}{2}$

$\therefore x > 1$

(ⅰ), (ii), (iii) 에 의하여

$A = \left\{x \;\middle|\; 0 < x \le \dfrac{1}{2} \text{ 또는 } x \ge 1\right\}$

따라서 $\left\{x \;\middle|\; \dfrac{1}{4} < x < \dfrac{1}{2}\right\} \subset A$ 이다.

26) [정답] ④

이차함수 $f(x) = x^2 + px + q$ 의 그래프에서

$f(k) = f\left(\dfrac{k}{4}\right) = 0$ 이므로 이차방정식 $x^2 + px + q = 0$ 의

서로 다른 두 실근은 k, $\dfrac{k}{4}$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$q = k \times \dfrac{k}{4} = 4$ ……㉠

한편, $a^{2x} + pa^x + q = 0$ 에서 $a^x = t$ $(t > 0)$ 로 놓으면

$t^2 + pt + q = 0$ 이고, 이 t 에 대한 이차방정식이 두 실근을

가지므로 방정식 $a^{2x} + pa^x + q = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

방정식 $t^2 + pt + q = 0$ 의 두 근은 a^α, a^β 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a^\alpha \cdot a^\beta = q$, 즉 $a^{\alpha+\beta} = q$

$\alpha + \beta = 3$ 이므로 $a^3 = q$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a^3 = 4$

$\therefore a = \sqrt[3]{4}$

27) [정답] ②

넓이가 4인 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 2이므로 $\overline{AB} = \overline{BC} = 2$이다.

점 E의 좌표는 $(1,\ 0)$이고 점 B가 선분 EC의 중점이므로 점 B의 좌표는 $(3,\ 0)$이다.

따라서 점 A의 좌표는 $(3,\ 2)$이고, 점 A가 함수 $y = \log_a x$의 그래프 위에 있으므로

$2 = \log_a 3$, $a^2 = 3$

$\therefore a = \sqrt{3}$ $(\because a > 1)$

28) [정답] ④

함수 $f(x) = \log_a x$의 그래프가 점 $(4,\ 2)$를 지나므로

$\log_a 4 = 2$, $\log_a 2 = 1$

$\therefore a = 2$

이때 $\log_2 64 = \log_2 2^6 = 6$, $\log_2 128 = \log_2 2^7 = 7$이므로

$f(100) = \log_2 100 = 6.\times\times\times$

따라서 $f(100) < k$를 만족시키는 정수 k의 최솟값은 7이다.

29) [정답] ⑤

ㄱ. [반례] $a = 16$, $b = 27$이면

$\log_2 64 - \log_3 27 = 6 - 3 = 3 > 2$이지만

$a < b$이다.(거짓)

ㄴ. $a > 1$, $b > 1$이고 $2^{3a} = 3^b$이므로 $3a > b > 1$

$\log_b 3a > \log_b b = 1$

$\log_b 3 + \log_b a > 1$, $\log_b a > 1 - \log_b 3$

$\therefore \log_b a > \log_b \dfrac{b}{3}$(참)

ㄷ. $a < b < 1$이므로

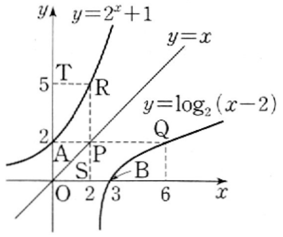
$\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b > -\log_a a = -1$

$\log_{\frac{1}{b}} a = -\log_b a < -\log_b b = -1$

$\therefore \log_{\frac{1}{a}} b > \log_{\frac{1}{b}} a$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

30) [정답] ②



점 A의 좌표는 $(0,\ 2)$이므로 직선 $y = x$위의 점 P의 좌표는 $(2,\ 2)$이고, 점 S의 좌표는 $(2,\ 0)$이다. 함수 $y = a^x + 1$의 그래프 위의 점 R의 좌표가 $(2,\ 5)$이므로

$a^2 + 1 = 5$ $\therefore a = 2$

이때 함수 $y = \log_2(x-2)$의 그래프는 $y = \log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 점 B,Q의 좌표는 각각 $(3,\ 0)$, $(6,\ 2)$이다.

따라서 $\overline{PS} = 2$, $\overline{SB} = 3 - 2 = 1$, $\overline{PQ} = 6 - 2 = 4$이므로 사각형 PSBQ의 넓이는

$\dfrac{1}{2} \times (1 + 4) \times 2 = 5$

31) [정답] ④

함수 $y = \log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y = \log_2(x - a) + b$

다시 이 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y = \log_2(x - a) + b$

$\therefore y = -\log_2(x - a) - b$

$= \log_{\frac{1}{2}}(x - a) + (-b)$

이 식이 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x - 2) + 1$과 일치하므로

$a = 2$, $b = -1$

$\therefore a + b = 2 + (-1) = 1$

32) [정답] 41

함수 $y = \log_2(16x + 40)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y = \log_2(16x + 40)$ ……㉠

다시 이 그래프를 직선 $y = x$에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 ㉠의 역함수이므로

$-x = \log_2(16y + 40)$

$16y + 40 = 2^{-x}$

$\therefore y = \dfrac{1}{16} \cdot 2^{-x} - \dfrac{5}{2}$

이 식이 $y = p \cdot 2^{-x} + q$와 일치하므로

$p = \dfrac{1}{16}$, $q = -\dfrac{5}{2}$

$\therefore 16(p - q) = 16\left(\dfrac{1}{16} + \dfrac{5}{2}\right) = 41$

33) [정답] ①

$y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)^2$에서 밑이 1보다 작으므로 $x = -\dfrac{1}{2}$에서 최댓값 M, $x = 7$에서 최솟값 m을 갖는다. 즉,

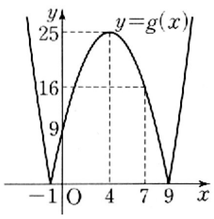
$M = f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{4} = \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = 2$

$m = f(7) = \log_{\frac{1}{2}} 64 = -\log_2 2^6 = -6$

$\therefore M + m = 2 + (-6) = -4$

34) [정답] ②

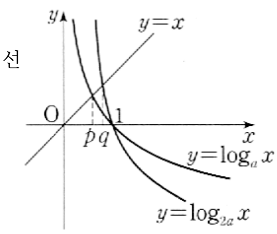
$f(x)=\log_{\frac{1}{5}}|(x+1)(x-9)|$에서 밑이 1보다 작은 $\dfrac{1}{5}$이므로 $0 \le x \le 7$에서 $|(x+1)(x-9)|$의 값이 최대일 때, $f(x)$는 최솟값을 갖는다.
$g(x)=|(x+1)(x-9)|$로 놓으면 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $0 \le x \le 7$에서 함수 $g(x)$의 최댓값은 $g(4)=25$이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은
$f(4)=\log_{\frac{1}{5}}25=-2$
35) [정답] ②
로그의 진수 조건에서
$2^x-1>0,\ 3-2^x>0$
$\therefore 1<2^x<3$

$$\begin{aligned}y&=\log_3(2^x-1)-\log_{\frac{1}{3}}(3-2^x)+2\\&=\log_3 9(2^x-1)(3-2^x)\\&=\log_3 9\{-(2^x-2)^2+1\}\end{aligned}$$

$f(x)=-(2^x-2)^2+1$로 놓으면 $f(x)$는 $2^x=2$를 만족시키는 $x=1$일 때, 최댓값 1을 갖는다.
즉, 함수 y는 밑이 1보다 크므로 $x=1$일 때 최댓값 $\log_3 9=2$를 갖는다.
따라서 $a=1,\ b=2$이므로
$a+b=1+2=3$
36) [정답] ②
로그의 진수 조건에서
$x>0,\ x-\dfrac{3}{4}>0 \quad \therefore x>\dfrac{3}{4}$ ……㉠
주어진 방정식에서 $2\log_2 x=\log_2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)+2$
$\log_2 x^2=\log_2 4\left(x-\dfrac{3}{4}\right)$
$x^2=4\left(x-\dfrac{3}{4}\right)$
$x^2-4x+3=0,\ (x-1)(x-3)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=3$ ……㉡
따라서 ㉠과 ㉡에서 $x=1$ 또는 $x=3$ 이므로 모든 x 의 값의 합은
$1+3=4$
37) [정답] 32
로그의 밑 조건에서 $x>0, x\ne 1$
주어진 방정식에서
$\log_2 x-6\log_x 2-5=0$
$\log_2 x=t$ 라 하면 $t-\dfrac{6}{t}-5=0$
$t^2-5t-6=0$ ....㉠
주어진 방정식의 두 근을 각각 α, β 라 하면 방정식 ㉠ 의 두 근은 $\log_2\alpha, \log_2\beta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\log_2\alpha+\log_2\beta=\log_2\alpha\beta=5$
$\therefore \alpha\beta=2^5=32$
38) [정답] ①
.로그의 진수 조건에서
$x-2>0,\ x>0$
$\therefore x>2$ ....㉠
주어진 부등식에서
$\log_a(x-2)^2>\log_a x$
$(x-2)^2<x\ (\because 0<a<1)$
$x^2-5x+4<0$
$(x-1)(x-4)<0$
$\therefore 1<x<4$ ......㉡
㉠과 ㉡에서 $2<x<4$
따라서 정수 x는 3이고 그 개수는 1 이다.
(오답 피하기)
밑이 1 보다 작은 로그 부등식은 다음과 같이 부등호의 방향에 유의한다.
로그의 진수 조건에서
$x-2>0, x>0$
$\therefore x>2$ ....㉠
주어진 부등식에서 $\log_a(x-2)^2>\log_a x$
$(x-2)^2>x$
$x^2-5x+4>0,\ (x-1)(x-4)>0$
$\therefore\ x<1$ 또는 $x>4$ ……㉡
㉠과 ㉡에서 $x>4$ 이므로 부등식을 만족시키는 정수 x 는 무수히 많아지므로 틀린 답이 된다.
따라서 밑 a 가 $0<a<1$ 이므로 $(x-2)^2<x$ 를 풀어야 함에 유의한다.
39) [정답] ③
$y=3+\log_3(x^2-4x+31)$ 에서
$x^2-4x+31=(x-2)^2+27 \geqq 27$ 이므로
$y=3+\log_3(x^2-4x+31) \geqq 3+\log_3 27=3+3=6$
40) 정답 ⑤
$0<a<\dfrac{1}{2}$ 인 상수 a 에 대하여
곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{2a}x$ 와 직선 $y=x$
를 그리면 다음과 같다.



ㄱ. $p=\dfrac{1}{2}$ 이면 $\log_a\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$
이므로 $\sqrt{a}=\dfrac{1}{2} \quad \therefore a=\dfrac{1}{4}$ (참)
ㄴ. 그림에서 $p<q$ (참)
ㄷ. $\log_a p=p$에서 $a^p=p$ ……㉠
$\log_{2a}q=q$ 에서 $(2a)^q=q$ 이므로 $a^q=\dfrac{q}{2^q}$ ……㉡
㉠과㉡에서 $\therefore\ a^p\cdot a^q=p\cdot\dfrac{q}{2^q}$ (참)
$\therefore a^{p+q}=\dfrac{pq}{2^q}$ (참)
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.
41) [정답] ①
초기 온도가 $20^\circ C$, 화재가 발생한 지 $\dfrac{9}{8}$ 분 후의 온도가

$365\,^\circ\mathrm{C}$ 이므로 $365=20+k\log\left(8\times\dfrac{9}{8}+1\right)$

$345=k\log 10$

$\therefore k=345$

화재가 발생한 지 a 분 후의 온도는 $710\,^\circ\mathrm{C}$이므로

$710=20+345\log(8a+1)$

$690=345\log(8a+1)$

$\log(8a+1)=2$

$8a+1=10^2=100$

$\therefore\ a=\dfrac{99}{8}$

42) [정답] ⑤

.함수 $f(x)=\log_2(4x-x^2)$ 에서 로그의 진수 조건으로부터

$4x-x^2>0,\ x(x-4)<0$

$\therefore 0<x<4$

함수 $g(x)=\log_3 x+\log(x-1)$에서 로그의 진수 조건으로부터

$x>0,\ x-1>0 \quad \therefore x>1$

따라서 $A=\{x|0<x<4\}$ 이고 $B=\{x|x>1\}$ 이므로

$A\cap B=\{x|1<x<4\}$

따라서 $a=1, b=4$ 이므로

$a+b=1+4=5$

43) [정답] ③

$(g\circ f)(x)=x$ 를 만족시키는 함수 $g(x)$ 는 함수 $f(x)$ 의 역함수이므로

$y=1+\log_2 3x$ 라 하면

$y-1=\log_2 3x,\ 3x=2^{y-1},\ x=\dfrac{1}{3}\cdot 2^{y-1}$

여기에서 x, y 를 서로 바꾸면

$y=\dfrac{1}{3}\cdot 2^{x-1}$

따라서 $g(x)=\dfrac{1}{3}\cdot 2^{x-1}$ 이므로

$g(4)=\dfrac{8}{3}$

(다른 풀이)

$(g\circ f)(x)=x$ 를 만족시키는 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로

$g(4)=a$ 라 하면 $f(a)=4$ 이므로

$1+\log_2 3a=4$

$\log_2 3a=3,\ 3a=2^3$

$\therefore a=\dfrac{8}{3}$

44) [정답] ①

두 함수의 그래프가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이면 서로 역함수 관계에 있으므로 함수 $y=\log_{\frac{1}{4}}(x-1)+2$ 의 역함수를 구하면

$y-2=\log_{\frac{1}{4}}(x-1)$

$x-1=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{y-2}$

$x=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{y-2}+1$

여기에서 x, y를 서로 바꾸면

$y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x-2}+1=2^{-2x+4}+1$

따라서 $a=-2,\ b=1$이므로 $a+b=-2+1=-1$

45) [정답] ②

로그의 진수 조건에서

$x>0,\ 5-x>0$

$\therefore 0<x<5 \quad \cdots\cdots$ ㉠

주어진 부등식에서

$\log_2 x(5-x)\le\log_2 4$

$x(5-x)\le 4$

$x^2-5x+4\ge 0$

$(x-1)(x-4)\ge 0$

$\therefore x\le 1$ 또는 $x\ge 4 \quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $0<x\le 1$ 또는 $4\le x<5$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 1, 4 이고, 그 개수는 2 이다.

46) [정답] 22

$f(x)=\log\dfrac{x+3}{x+1}$ 이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)$

$=\log\dfrac{4}{2}+\log\dfrac{5}{3}+\log\dfrac{6}{4}+\cdots+\log\dfrac{n+2}{n}+\log\dfrac{n+3}{n+1}$

$=\log\left(\dfrac{4}{2}\times\dfrac{5}{2}\times\dfrac{6}{4}\times\cdots\times\dfrac{n+2}{n}\times\dfrac{n+3}{n+1}\right)$

$=\log\dfrac{(n+2)(n+3)}{6}=2$

따라서 $\dfrac{(n+2)(n+3)}{6}=10^2$ 이므로

$(n+2)(n+3)=600,\ n^2+5n-594=0$

$(n+27)(n-22)=0$

$\therefore n=22(\because n>0)$

47) [정답] ⑤

$1+\log_{\frac{1}{2}}\alpha=3$에서 $\log_{\frac{1}{2}}\alpha=2,\ \alpha=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \quad \therefore\ \alpha=\dfrac{1}{4}$

또, $\log_3(\beta-1)=3$ 에서

$\beta-1=3^3 \quad \therefore\ \beta=28$

$\therefore\ \alpha\beta=\dfrac{1}{4}\times 28=7$

48) [정답] ②

$y=\log_2(2x+4)$ 에 x 대신 $x-2$, y 대신 $y+3$ 을 대입하면

$y+3=\log_2\{2(x-2)+4\}$

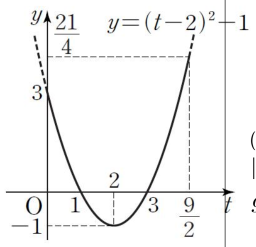
$\therefore\ y=\log_2 2x-3=\log_2 2+\log_2 x-3=\log_2 x-2$

이것을 다시 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동시키면

$x=\log_2 y-2,\ x+2=\log_2 y$

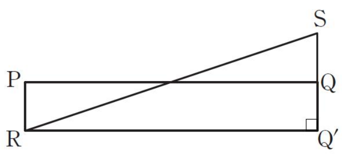
$\therefore\ y=2^{x+2}$

따라서 $2^{k+2}=8$에서 $k=1$이다.
49) [정답] 20
$\log_{\sqrt[3]{4}}x=t$로 놓으면
$x=1$일 때, $t=\log_{\sqrt[3]{4}}1=0$
$x=8$일 때, $t=\log_{\sqrt[3]{4}}8=\dfrac{9}{2}\log_2 2=\dfrac{9}{2}$
이므로 $1\le x\le 8$에서 $0\le t\le \dfrac{9}{2}$
$\therefore\ y=t^2-4t+3=(t-2)^2-1$
그림에서
$t=\dfrac{9}{2}$일 때, y의 최댓값 $M=\dfrac{21}{4}$
$t=2$일 때, y의 최솟값 $m=-1$
$\therefore\ 4M+m=21+(-1)=20$

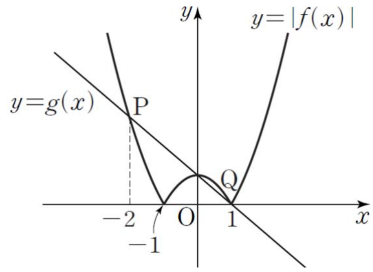


50) [정답] 20
주어진 방정식에서
$(\log_{0.2}x)(\log_{0.2}x-\log_{0.2}100)-\log_{0.2}x-2=0$
$\log_{0.2}x=t$라 하면
$t(t-\log_{0.2}100)-t-2=0$
$\therefore\ t^2-(\log_{0.2}100+1)t-2=0\quad\cdots$ ㉠
주어진 방정식의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 방정식 ㉠의 두 근은 $\log_{0.2}\alpha,\ \log_{0.2}\beta$이고, 근과 계수의 관계에 의하여
$\log_{0.2}\alpha+\log_{0.2}\beta=\log_{0.2}100+1$
$\log_{0.2}\alpha\beta=\log_{0.2}20\qquad\therefore\ \alpha\beta=20$
51) [정답] ②
두 점 P, Q의 x좌표를 각각 $x=\alpha,\ x=\beta$라 하면
$\log_2\sqrt{k\alpha}=1$에서 $k\alpha=4\qquad\therefore\ \alpha=\dfrac{4}{k}$
$\dfrac{\beta}{k}=4\qquad\therefore\ \beta=4k$
$\overline{\mathrm{PQ}}=6$이므로 $\beta-\alpha=4k-\dfrac{4}{k}=6$
$2k^2-3k-2=0$
$(2k+1)(k-2)\qquad\therefore\ k=2\ (\because\ k>1)$
따라서 $\alpha=2,\ \beta=8$이다.
점 R의 x좌표는 2이고, y좌표는 $\log_4\dfrac{2}{2}=0$이므로 $\mathrm{R}(2,\ 0)$이다.
점 S의 x좌표는 8이고, y좌표는 $\log_2\sqrt{2\times 8}=2$이므로 $\mathrm{S}(8,\ 2)$이다.
$\therefore\ \overline{\mathrm{RS}}=\sqrt{(8-2)^2+2^2}=2\sqrt{10}$

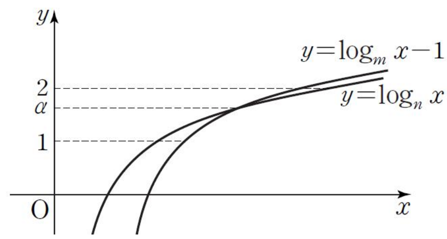
[참고]
$k=2$일 때
$\overline{\mathrm{PR}}=\log_2\sqrt{2\alpha}-\log_4\dfrac{\alpha}{2}=\log_4\dfrac{2\alpha}{\dfrac{\alpha}{2}}=1$
따라서 $y=\log_2\sqrt{2x}$의 그래프는 $y=\log_4\dfrac{x}{2}$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.



그림으로부터 $\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{QS}}=\overline{\mathrm{QQ'}}=1$이므로 직각삼각형 SRQ′에서 선분 RS의 길이는 $\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$
52) [정답] ②
$f(0)+g(0)=0$에서 $f(0)=-g(0)$이므로 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=g(x)$는 그림과 같다.



(ⅰ) 로그의 진수 조건에서
$|f(x)|>0$, 즉 $x\ne -1,\ x\ne 1$인 모든 실수이고
$g(x)>0$이므로 $x<1$
$\therefore\ x<-1$ 또는 $-1<x<1\quad\cdots$ ㉠
(ⅱ) 부등식 $\log_{0.1}|f(x)|\ge\log_{0.1}g(x)$에서 밑이 1보다 작은 0.1이므로 $|f(x)|\le g(x)$
위의 그림을 이용하여 이 부등식을 풀면
$-2\le x\le 0$ 또는 $x=1\quad\cdots$ ㉡
따라서 ㉠과 ㉡의 공통 범위를 구하면
$-2\le x<-1$ 또는 $-1<x\le 0$
이므로 주어진 부등식을 만족시키는 정수는 $-2,\ 0$이고 그 개수는 2개이다.
53) [정답] 8
$1<m<n<10$이므로 두 함수 $y=\log_m x-1,\ y=\log_n x$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$f(x)=\log_m x-1,\ g(x)=\log_n x$라 하자.
$1=f(x_1)=g(x_2)$라 하면 $1=\log_m x_1-1=\log_n x_2$이고
$x_2\le x_1$에서 $n\le m^2\quad\cdots$ ㉠
또, $2=f(x_3)=g(x_4)$라 하면 $2=\log_m x_1-1=\log_n x_2$이고
$x_3\le x_4$에서 $m^3\le n^2\quad\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $m^3\le n^2\le m^4$
$9^2=81$이고 $4^3=64,\ 5^3=125$이므로 $m=2,\ 3,\ 4$인 경우만 생각하면 된다.
(ⅰ) $m=2$일 때
$m^3=8,\ m^4=16$이므로 부등식 $m^3\le n^2\le m^4$을 만족시키는 n은 3, 4의 2개다.
(ⅱ) $m=3$일 때
$m^3=27,\ m^4=81$이므로 부등식 $m^3\le n^2\le m^4$을 만족시키는 n은 6, 7, 8, 9의 4개다.
(ⅲ) $m=4$일 때
$m^3=64,\ m^4=256$이므로 부등식 $m^3\le n^2\le m^4$을 만족시키는 n은 8, 9의 2개다.
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 $2+4+2=8$이다.
54) [정답] ①
해설
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x+8x^2)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+2x+8x^2)}{2x+8x^2}\cdot\frac{2x+8x^2}{x}\right\}$$

$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x+8x^2)}{2x+8x^2}\cdot\lim_{x\to0}(2+8x)$

$=1\times2=2$

55) [정답] ①

해설

$\lim_{x\to0}\frac{8^x-1}{e^{3x}-1}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{8^x-1}{x}\cdot x}{\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot 3x}$

$=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{\frac{8^x-1}{x}}{\frac{e^{3x}-1}{3x}}$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{\lim_{x\to0}\frac{8^x-1}{x}}{\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{3x}}$

$=\frac{1}{3}\times\frac{\ln 8}{1}=\frac{1}{3}\times3\ln2=\ln2$

56) [정답] ①

해설

$\lim_{x\to\infty}x^2\{\ln(x^2+1)-2\ln x\}$

$=\lim_{x\to\infty}x^2\{\ln(x^2+1)-\ln x^2\}$

$=\lim_{x\to\infty}x^2\left\{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right\}$

$=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}$

$=\ln e=1$

57) [정답] ④

해설

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=b$ 이므로

$\lim_{x\to-0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{f(x)}{x}=b$

가 성립해야 한다.

$\lim_{x\to+0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{\log_2(x+4)-2}{x}$

$=\lim_{x\to+0}\frac{\log_2\left(1+\frac{x}{4}\right)}{x}$

$=\lim_{x\to+0}\log_2\left(1+\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{x}}$

$=\lim_{x\to+0}\log_2\left\{\left(1+\frac{x}{4}\right)^{\frac{4}{x}}\right\}^{\frac{1}{4}}$

$=\log_2 e^{\frac{1}{4}}$

$=\frac{1}{4\ln2}$

$\therefore\ b=\frac{1}{4\ln2}$

$\lim_{x\to-0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-0}\frac{\cos x-\cos3x}{ax}$

$=\lim_{x\to-0}\frac{-2\sin2x\sin(-x)}{ax^2}$

$=\lim_{x\to-0}\frac{2\sin2x\sin x}{ax^2}$

$=\frac{4}{a}\lim_{x\to-0}\left(\frac{\sin2x}{2x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)$

$=\frac{4}{a}\times1\times1=\frac{4}{a}$

즉, $\frac{1}{4\ln2}=\frac{4}{a}$ 이므로

$a=16\ln2$

$\therefore\ \frac{a}{b}=64(\ln2)^2$

58) [정답] ⑤

$f(-2)f(-1)<0$, $f(1)f(4)<0$이므로

1. ㄱ. $g(x)=xf(x)$로 놓으면 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 $g(-2)=-2f(-2)$, $g(-1)=-f(-1)$에서 $g(-2)g(-1)=2f(-2)f(-1)<0$이므로 방정식 $xf(x)=0$은 열린 구간 $(-2,\ -1)$에서 적어도 한 개의 실근을 갖는다.
2. ㄴ. $g(x)=f(x^2)$으로 놓으면 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 $g(-2)=f(4)$, $g(-1)=f(1)$에서 $g(-2)g(-1)=f(4)f(1)<0$이므로 방정식 $f(x^2)=0$은 열린 구간 $(-2,\ -1)$에서 적어도 한 개의 실근을 갖는다.
3. ㄷ. $g(x)=f(-x)f(-2x)$로 놓으면 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 $g(-2)=f(2)f(4)$, $g(-1)=f(1)f(2)$에서 $g(-2)g(-1)=f(1)f(4)\{f(2)\}^2<0\ (\because\ f(2)\neq0)$이므로 방정식 $f(-x)f(-2x)=0$은 열린 구간 $(-2,\ -1)$에서 적어도 한 개의 실근을 갖는다.

따라서 열린 구간 $(-2,\ -1)$에서 적어도 한 개의 실근을 갖는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

59) [정답] ②

$f(x)=x^2+ax+b$로 놓으면

$f(x)g(x)=\begin{cases}\frac{x^2+ax+b}{\ln(x+1)} & (x\neq0,\ x>-1)\\ 8b & (x=0)\end{cases}$

함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to0}\frac{x^2+ax+b}{\ln(x+1)}=8b$

(i) $x\to0$일 때, (분모)$\to0$ 이므로 (분자) $\to0$이어야 한다. 즉, $b=0$

(ii) $\lim_{x\to0}\frac{x^2+ax}{\ln(x+1)}=0$에서 $\lim_{x\to0}\frac{x+a}{\ln(x+1)}=\frac{a}{1}=0$이므로 $a=0$

(i), (ii)에서 $f(x)=x^2$

$\therefore\ f(3)=3^2=9$

60) [정답] 12

$xf(x)=e^{2x}+10x-1$에서 $x\neq 0$일 때,

$f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{x}+10$

이때 함수 $f(x)$는 모든 실수에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이어야 한다.

따라서 $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$이 성립해야 하므로

$f(0)=\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{2x}-1}{x}+10\right)=\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\times 2+10\right)$

$=1\times 2+10=12$

61) [정답] 21

조건 (가)에 의하여

$f(1)f(2)<0,\ f(3)f(4)<0,\ \cdots,\ f(19)f(20)<0$ 이므로 방정식 $f(x)=0$은 열린 구간 $(1,\ 2),\ (3,\ 4),\ \cdots,(19,\ 20)$에서 각각 적어도 한 개의 실근을 갖는다. 또한, 조건 (나)에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린 구간 $(-2,\ -1)$, $(-4,\ -3)$, $(-20,\ -19)$에서 각각 적어도 한 개의 실근을 갖는다.

그리고 $f(0)=-f(0)$에서 $f(0)=0$이므로 $x=0$은 방정식 $f(x)=0$의 실근이다.

따라서 열린 구간 $(-20,\ 20)$에서 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수의 최솟값은 $10+10+1=21$

[오답피하기]

함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이면 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로 $f(0)=-f(0)$

$\therefore f(0)=0$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 항상 원점을 지남에 주의한다.

62) [정답] ②

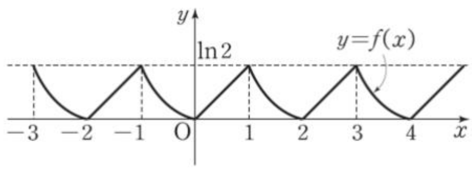
$0\le x<1$일 때, $n\to\infty$이면 $x^n\to 0$이므로

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+ax}{x^{2n}+1}=ax$

이때 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$

$\therefore\ a=b$

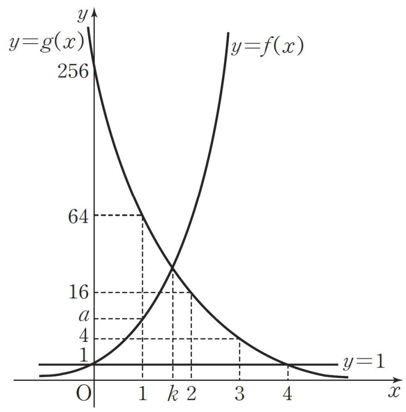
또한, $f(x)=f(x+2)$에서 $f(x)$는 주기가 2인 주지함수이므로 $f(0)=f(2)$ 즉, $-\ln 2+b=0$에서 $b=\ln 2$ 따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



닫힌 구간 $\left[\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{2}\right]$에서 $f(x)$의 최댓값 M은 $x=1$일 때, $M=\ln 2$, 최솟값 m은 $x=2$일 때 $m=0$이므로 $M+m=\ln 2$

63) [정답] 18

$f(x)=a^x,\ g(x)=4^{-x+4}$이라 하고, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표를 k라 하자.



(ⅰ) $0<k\le 1$, 즉 $f(1)\ge 64$이면

$N(a)=1+64+16+4+1=86>40$

(ⅱ) $1<k\le 2$, 즉 $f(1)=a<64$이고,

$f(2)=a^2\ge 16$이면

$4\le a<64$

$N(a)=1+a+16+4+1=a+22\le 40$에서

$a\le 18\qquad \therefore\ 4\le a\le 18$

(ⅲ) $2<k<3$, 즉 $f(2)=a^2<16$이고 $f(3)=a^3>4$이면

$2\le a<4$

$N(2)=1+2+4+4+1=12\le 40$

$N(3)=1+3+9+4+1=18\le 40$

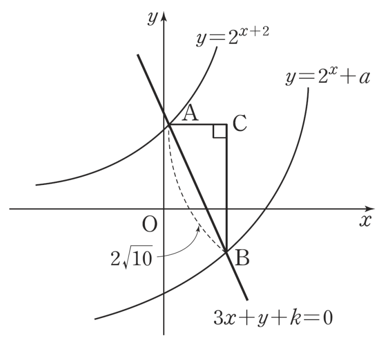
(ⅳ) a는 2 이상의 자연수이므로 $f(3)=a^3\ge 8$

따라서 $k\ge 3$인 k는 존재하지 않는다.

(ⅰ)~(ⅳ)에서 $2\le a\le 18$이므로 자연수 a의 최댓값은 18이다.

64) [정답] ③

직선 $3x+y+k=0$이 두 곡선 $y=2^{x+2}$, $y=2^x+a$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선 위의 한 점 C를 $\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$가 되도록 잡는다.



직선 $3x+y+k=0$의 기울기가 -3이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=t$라 하면 $\overline{\mathrm{CB}}=3t$이고,

$t^2+(3t)^2=(2\sqrt{10})^2$에서

$10t^2=40,\ t^2=4$

$t>0$이므로 $t=2$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AC}}=2,\ \overline{\mathrm{CB}}=6$

곡선 $y=2^x+a$는 곡선 $y=2^{x+2}$을 x축의 방향으로

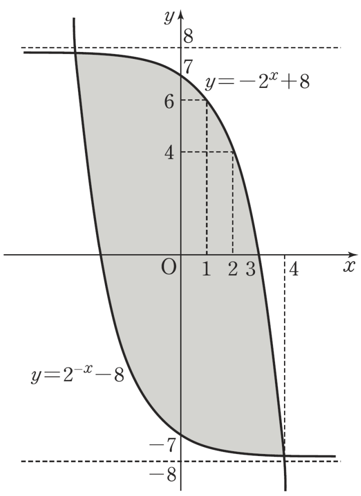
2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이므로 곡선 $y=2^{x+2}$ 위의 점 A를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점은 C이고, 점 C를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 점은 곡선 $y=2^x+a$ 위에 놓이므로 점 B가 된다.

즉, $\overline{\mathrm{CB}}=|a|$이므로 $|a|=6$에서

$a=-6$ ($\because$ $a<0$)

65) [정답] ②

두 곡선 $y=-2^x+8$, $y=2^{-x}-8$은 원점에 대하여 대칭이다.



두 곡선으로 둘러싸인 영역에서 $x>0$인 영역의 점 중 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점은

$(1,\ 6)$, $(1,\ 5)$, $\cdots$, $(1,\ -7)$

$(2,\ 4)$, $(2,\ 3)$, $\cdots$, $(2,\ -7)$

$(3,\ 0)$, $(3,\ -1)$, $\cdots$, $(3,\ -7)$

이므로 그 개수는

$14+12+8=34$

두 곡선이 원점에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 영역에서 $x<0$인 영역의 점 중 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수도 34이다.

또 두 곡선으로 둘러싸인 영역에서 y축 위의 점 중 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점은

$(0,\ 7)$, $(0,\ 6)$, $\cdots$, $(0,\ -7)$

의 15개이다.

따라서 구하는 점의 개수는

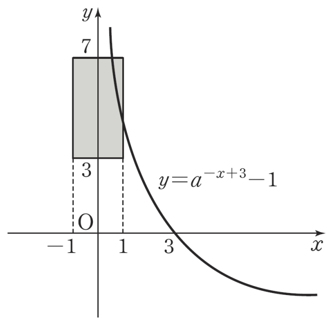
$34\times2+15=83$

66) [정답] ①

$|x|\le1 \Leftrightarrow -1\le x\le1$

$|y-5|\le2 \Leftrightarrow 3\le y\le7$

이므로 두 부등식 $|x|\le1$, $|y-5|\le2$를 동시에 만족시키는 영역은 다음과 같다.



함수 $y=a^{-x+3}-1$의 그래프는 항상 점 $S(t), T(t)$을 지나므로 주어진 부등식의 영역을 지나려면 x의 값이 증가할 때, y의 값이 감소해야 한다. 즉, $a>1$이어야 한다.

함수 $y=a^{-x+3}-1$의 그래프가 점 $(1,\ 7)$을 지날 때,

$7=a^2-1$에서 $a^2=8$

$\therefore$ $a=2\sqrt{2}$ ($\because$ $a>1$)

함수 $y=a^{-x+3}-1$의 그래프가 점 $(-1,\ 3)$을 지날 때,

$3=a^4-1$에서

$a^4=4$

$a^2=2$

$\therefore$ $a=\sqrt{2}$ ($\because$ $a>1$)

따라서 함수 $y=a^{-x+3}-1$의 그래프가 주어진 부등식의 영역을 지나기 위한 a의 값의 범위는

$\sqrt{2}\le a\le2\sqrt{2}$

이므로 a의 최댓값은 $2\sqrt{2}$, 최솟값은 $\sqrt{2}$이다.

따라서 a의 최댓값과 최솟값의 합은 $3\sqrt{2}$이다.

67) [정답] 36

$4^x+4^{-x}+a(2^x-2^{-x})+7=0$에서

$4^x+4^{-x}=(2^x-2^{-x})^2+2$이므로

$(2^x-2^{-x})^2+a(2^x-2^{-x})+9=0$

$2^x-2^{-x}=X$로 놓으면

$X^2+aX+9=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

이때 X는 모든 실숫값을 가질 수 있으므로 이차방정식 ㉠이 실근을 가지면 주어진 방정식도 실근을 갖는다.

따라서 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-36\ge0$

$(a+6)(a-6)\ge0$

$\therefore$ $a\le-6$ 또는 $a\ge6$

따라서 양수 a의 최솟값 m은 6이므로

$m^2=36$

68) [정답] 528

$2^{2x+1}-5\times2^{x+3}+k=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$2\times2^{2x}-40\times2^x+k=0$에서

$2^x=t$로 놓으면 $t>0$이고

$2t^2-40t+k=0$ $\cdots\cdots$ ㉡

x에 대한 방정식 ㉠의 두 근이 α, β이므로 t에 대한 방정식 ㉡의 두 근은 2^α, 2^β이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2^{\alpha}+2^{\beta}=\frac{40}{2}=20$

$2^{\alpha}\times 2^{\beta}=\frac{k}{2}$

$\therefore\ k=2\times 2^{\alpha+\beta}$

$=2\times 2^{6}=128$

$4^{\alpha}+4^{\beta}=(2^{\alpha}+2^{\beta})^{2}-2\times 2^{\alpha}\times 2^{\beta}$

$=20^{2}-k$

$=400-128$

$=272$

$\therefore\ 4^{\alpha}+4^{\beta}+2k=272+2\times 128$

$=528$

69) [정답] 11

$4^{x}-5\times 2^{x+1}+11=0$ 에서

$2^{2x}-10\times 2^{x}+11=0$ …… ㉠

$2^{x}=t$ 로 놓으면 $t>0$ 이고

$t^{2}-10t+11=0$ …… ㉡

x 에 대한 방정식 ㉠의 두 근이 $\alpha,\ \beta$ 이므로

t 에 대한 방정식 ㉡의 두 근은 $2^{\alpha},\ 2^{\beta}$ 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2^{\alpha}\times 2^{\beta}=11$

즉, $2^{\alpha+\beta}=11$ 이다.

$\frac{2^{\alpha}+2^{-\beta}}{2^{\alpha}-2^{-\beta}}=\frac{2^{\beta}(2^{\alpha}+2^{-\beta})}{2^{\beta}(2^{\alpha}-2^{-\beta})}$

$=\frac{2^{\alpha+\beta}+1}{2^{\alpha+\beta}-1}$

$=\frac{11+1}{11-1}$

$=\frac{6}{5}$

따라서 $m=5,\ n=6$ 이므로

$m+n=5+6=11$

70) [정답] 5

두 곡선 $y=-2^{x}+8,\ y=2^{x+2}-2$ 의 교점 A의 x 좌표를 구하면

$-2^{x}+8=2^{x+2}-2$ 에서

$2^{x}+4\times 2^{x}=10$

$5\times 2^{x}=10$

$2^{x}=2$

$\therefore\ x=1$

$\therefore$ A$(1,\ 6)$, C$(1,\ 0)$

두 곡선 $y=-2^{x}+8,\ y=-2^{-x+2}+5$ 의 교점 B의 x 좌표를 구하면

$-2^{x}+8=-2^{-x+2}+5$ 에서

$2^{x}-3-2^{-x+2}=0$

양변에 2^{x} 을 각각 곱하면

$2^{2x}-3\times 2^{x}-4=0$

$2^{x}=t$ 로 놓으면 $t>0$ 이고

$t^{2}-3t-4=0$

$(t+1)(t-4)=0$

$t>0$ 이므로 $t=4$

$2^{x}=4$ 에서 $x=2$

$\therefore$ B$(2,\ 4)$, D$(2,\ 0)$

따라서 사각형 ACDB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(6+4)\times 1=5$

71) [정답] ⑤

$\left(\frac{1}{25}\right)^{1-x}\le 5^{x+3}$ 에서

$(5^{-2})^{1-x}\le 5^{x+3}$

$5^{2x-2}\le 5^{x+3}$

즉, $2x-2\le x+3$ 이어야 하므로

$x\le 5$

따라서 자연수 x 의 값은 1, 2, 3, 4, 5이므로 구하는 합은

$1+2+3+4+5=15$

72) [정답] 14

$3^{2x}-28\times 3^{x+1}+243<0$ 에서

$3^{x}=t$ 로 놓으면 $t>0$ 이고

$t^{2}-84t+243<0$

$(t-3)(t-81)<0$

$\therefore\ 3<t<81$

즉, $3<3^{x}<81$ 에서 $3^{1}<3^{x}<3^{4}$

따라서 $1<x<4$ 이므로

$\alpha=1,\ \beta=4$

$\therefore\ 10\alpha+\beta=14$

73) [정답] ①

$a^{x}=t$ 로 놓으면 $t>0$ 이고

$t^{2}-10t+16\le 0$

$(t-2)(t-8)\le 0$

$2\le t\le 8$

$\therefore\ 2\le a^{x}\le 8$

(ⅰ) $0<a<1$ 일 때

주어진 부등식의 해가 $-\frac{3}{2}\le x\le -\frac{1}{2}$ 이므로

$a^{-\frac{1}{2}}\le a^{x}\le a^{-\frac{3}{2}}$

따라서 $a^{-\frac{1}{2}}=2,\ a^{-\frac{3}{2}}=8$ 에서

$a^{-1}=4$

$\therefore\ a=\frac{1}{4}$

(ⅱ) $a>1$ 일 때

주어진 부등식의 해가 $-\frac{3}{2}\le x\le -\frac{1}{2}$ 이므로

$a^{-\frac{3}{2}}\le a^{x}\le a^{-\frac{1}{2}}$

따라서 $a^{-\frac{3}{2}}=2$, $a^{-\frac{1}{2}}=8$ ⋯⋯ ㉠

이때 $a^{-\frac{3}{2}}=\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^3=8^3=512\neq 2$이므로 ㉠을 동시에 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 a의 값은 $\frac{1}{4}$이다.

74) [정답] ④

(ⅰ) $9^{2x-3}\leq 3^{x+3}$에서

$3^{4x-6}\leq 3^{x+3}$이므로

$4x-6\leq x+3$

$3x\leq 9$

$\therefore\ x\leq 3$

(ⅱ) $4^{-x}-3\times 2^{-x}-4\leq 0$에서

$2^{-x}=t$로 놓으면 $t>0$이고

$t^2-3t-4\leq 0$

$(t+1)(t-4)\leq 0$

$t>0$이므로

$t-4\leq 0$

$\therefore\ 0<t\leq 4$

따라서 $0<2^{-x}\leq 4$에서

$-x\leq 2$

$\therefore\ x\geq -2$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $-2\leq x\leq 3$이므로 정수 x는 -2, -1, 0, 1, 2, 3의 6개이다.

75) [정답] ③

$4^x+4^{-x}+18\geq a(2^{1+x}+2^{1-x})$에서

$4^x+4^{-x}+18\geq 2a(2^x+2^{-x})$

$(2^x+2^{-x})^2-2+18\geq 2a(2^x+2^{-x})$

$(2^x+2^{-x})^2-2a(2^x+2^{-x})+16\geq 0$

$2^x+2^{-x}=t$로 놓으면 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t\geq 2\sqrt{2^x\times 2^{-x}}=2$

이고, 주어진 부등식은

$t^2-2at+16\geq 0$ ⋯⋯ ㉠

주어진 x에 대한 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 t에 대한 부등식 ㉠이 $t\geq 2$인 모든 실수 t에 대하여 성립해야 한다.

$f(t)=t^2-2at+16$으로 놓으면

$f(t)=(t-a)^2+16-a^2$

(ⅰ) $a\geq 2$일 때

$f(a)=16-a^2\geq 0$이어야 하므로

$a^2\leq 16$

$-4\leq a\leq 4$

$\therefore\ 2\leq a\leq 4$

(ⅱ) $a<2$일 때

$f(2)=4-4a+16\geq 0$이어야 하므로

$4a\leq 20$

$a\leq 5$

$\therefore\ a<2$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 a의 값의 범위는 $a\leq 4$이므로 구하는 자연수 a의 값의 합은

$1+2+3+4=10$

76) [정답] ③

$y=\log_a(bx-1)$에 $y=0$을 대입하면

$\log_a(bx-1)=0$

$bx-1=1$ $\therefore\ x=\frac{2}{b}$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 좌표는 $\left(\frac{2}{b},\ 0\right)$이다.

또 곡선 $y=\log_b(ax-1)=\log_b\left\{a\left(x-\frac{1}{a}\right)\right\}$은 곡선 $y=\log_b ax$를 x축의 방향으로 $\frac{1}{a}$만큼 평행이동한 것이므로 곡선 $y=g(x)$의 점근선은 $x=\frac{1}{a}$이다.

문제의 조건에 의하여 점 $\left(\frac{2}{b},\ 0\right)$이 직선 $x=\frac{1}{a}$ 위에 있으므로

$\frac{1}{a}=\frac{2}{b}$, 즉 $b=2a$이다.

이때 $0<a<1<b$에서 $0<a<1<2a$이므로

$\frac{1}{2}<a<1$이다.

$\therefore\ b=2a\ \left(\frac{1}{2}<a<1\right)$

77) [정답] ④

$y=\log_2(3x+4)$ ⋯⋯ ㉠

㉠에 $y=0$을 대입하면

$\log_2(3x+4)=0$

$3x+4=1$

$\therefore\ x=-1$

그러므로 점 A의 좌표는

$\mathrm{A}(-1,\ 0)$ ⋯⋯ ㉡

㉠에 $x=0$을 대입하면

$y=\log_2 4=2$

이므로 점 B의 좌표는

$\mathrm{B}(0,\ 2)$ ⋯⋯ ㉢

직선 AB의 기울기는 $\frac{2-0}{0-(-1)}=2$이므로 점 B를 지나고 직선 AB에 수직인 직선의 방정식은

$y=-\frac{1}{2}x+2$

곡선 $y=\log_2(3x+4)$의 점근선은

$x=-\frac{4}{3}$

따라서 점근선과 직선 $y=-\frac{1}{2}x+2$의 교점 P의 좌표는

$\mathrm{P}\left(-\frac{4}{3},\ \frac{8}{3}\right)$ …… ㉣

㉡, ㉢, ㉣에서

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\{0-(-1)\}^2+(2-0)^2}$

$=\sqrt{5}$

$\overline{\mathrm{PB}}=\sqrt{\left\{0-\left(-\frac{4}{3}\right)\right\}^2+\left(2-\frac{8}{3}\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{4}{9}}$

$=\frac{2\sqrt{5}}{3}$

$\therefore\ \triangle\mathrm{PAB}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{3}$

$=\frac{5}{3}$

78) [정답] ③

$g(x)=\log 6x=\log 2+\log 3x=\log 2+f(x)$이므로 곡선 $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$를 y축의 방향으로 $\log 2$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}=\log 2$이고 $\overline{\mathrm{AB}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{CD}}$이므로 사각형 BACD는 평행사변형이다.

$y=\log 3x$에 $y=0$을 대입하면

$\log 3x=0$에서 $3x=1$

$\therefore\ x=\frac{1}{3}$

그러므로 점 A의 좌표는 $\left(\frac{1}{3},\ 0\right)$이다.

따라서 사각형 BACD의 넓이는

$\left(k-\frac{1}{3}\right)\times\log 2=\log 8$

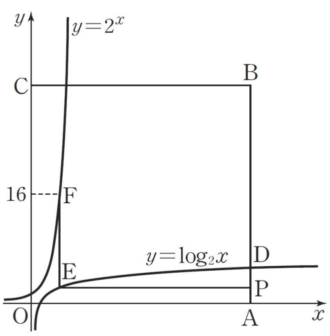
$k-\frac{1}{3}=\frac{\log 8}{\log 2}$

$=\frac{3\log 2}{\log 2}=3$

$\therefore\ k=\frac{10}{3}$

79) [정답] ⑤

선분 AD를 $2:3$으로 내분하는 점을 P라 하자.



점 F의 좌표를 $(a,\ 16)$이라 하면

$2^a=16$에서 $a=4$

두 점 E, F의 x좌표가 같으므로 점 E의 좌표를 $(4,\ b)$라 하면

$\log_2 4=b$에서 $b=2$

두 점 E, P의 y좌표가 같으므로 점 P의 좌표를 $(c,\ 2)$라 하자.

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PD}}=2:3$이므로 점 D의 좌표는 $(c,\ 5)$이다.

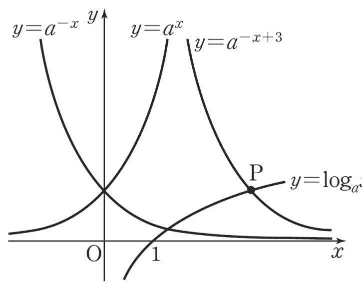
점 D는 곡선 $y=\log_2 x$ 위에 있으므로 $\log_2 c=5$에서

$c=32$

따라서 점 D의 좌표는 $(32,\ 5)$이고, 점 F의 좌표는 $(4,\ 16)$이므로 직선 DF의 기울기는 $\frac{16-5}{4-32}=-\frac{11}{28}$

80) [정답] ①

곡선 $y=\log_a x\ (a>1)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 곡선 $y=a^x$이 되고, 이 곡선을 y축에 대하여 대칭이동한 곡선 $y=a^{-x}$을 x축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 곡선 $y=a^{-x+3}$이 된다.



곡선 $y=a^{-x+3}$이 점 $\mathrm{P}(3,\ b)$를 지나므로

$b=a^0$

$\therefore\ b=1$

따라서 곡선 $y=\log_a x$가 점 $\mathrm{P}(3,\ 1)$을 지나므로

$1=\log_a 3$

$\therefore\ a=3$

$\therefore\ a+b=3+1=4$

81) [정답] 12

곡선 $y=3\times 2^{x-2}$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 곡선의 방정식은

$x=3\times 2^{y-2}$

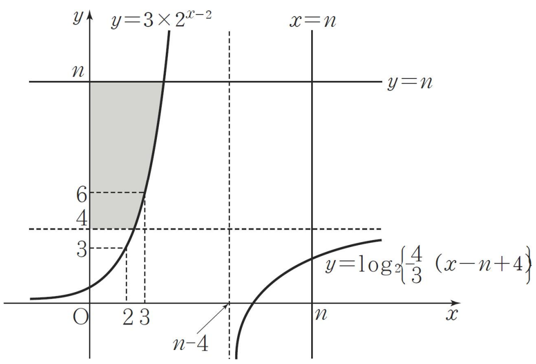
$2^{y-2}=\frac{x}{3}$

$y=\log_2\frac{x}{3}+2$

$\therefore\ y=\log_2\frac{4}{3}x$

곡선 $y=\log_2\left\{\frac{4}{3}(x-n+4)\right\}$는 곡선 $y=\log_2\frac{4}{3}x$를 x축의 방향으로 $(n-4)$만큼 평행이동한 것이므로 곡선 $y=\log_2\left\{\frac{4}{3}(x-n+4)\right\}$, x축 및 직선 $x=n$으로 둘러싸인 도형은 곡선 $y=3\times 2^{x-2}$, y축 및 직선 $y=4$로 둘러싸인 도형과 합동이다.

따라서 $a-b$의 값은 다음 그림의 색칠한 부분(경계 중 직선 $y=4$는 제외)에 포함된 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수와 같다.



$f(x)=3\times 2^{x-2}$이라 하고 위 그림의 색칠한 부분에 포함된 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점 중에서 y좌표가 k (k는 5 이상의 정수)인 점의 개수를 $g(k)$라 하면

$f(2)=3$, $f(3)=6$, $f(4)=12$, $f(5)=24$이므로

$$g(k)=\begin{cases}3 & (k=5)\\ 4 & (6\le k\le 11)\\ 5 & (12\le k\le 23)\\ \vdots & \quad\vdots\end{cases}$$

이때 $\sum_{k=5}^{12} g(k)=3+4\times 6+5=32$이므로

$n=12$

82) [정답] ③

$y=f(x)$라 하면

$y=(\log_2 x)\left(\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x}{4}\right)+\log_2 4x^2+5$

$=(\log_2 x)\left(-\log_2\dfrac{x}{4}\right)+\log_2 4+\log_2 x^2+5$

$=-(\log_2 x)(\log_2 x-\log_2 4)+2+2\log_2 x+5$

$=-(\log_2 x)(\log_2 x-2)+2\log_2 x+7$

에서 $\log_2 x=t$라 하면 $1\le x\le 32$이므로 $0\le t\le 5$이고

$y=-t(t-2)+2t+7$

$=-t^2+4t+7$

$=-(t^2-4t+4)+7+4$

$=-(t-2)^2+11$

따라서 $t=2$일 때 최댓값 $M=11$이고, $t=5$일 때 최솟값 $m=2$이므로 $M+m=11+2=13$

83) [정답] 164

함수 $f(x)=\log_2(3x+4)$는 밑이 1보다 큰 로그함수이므로 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가한다.

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$f(4)=\log_2 16=4$

함수 $g(x)=2\times 3^{4-x}+a=2\times 3^4\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^x+a$는 밑이 1보다 작은 지수함수이므로 x의 값이 증가하면 $g(x)$의 값은 감소한다.

따라서 함수 $g(x)$의 최솟값은

$g(4)=2\times 3^0+a=2+a$

함수 $f(x)$의 최댓값과 $g(x)$의 최솟값이 같으므로

$2+a=4$

$\therefore\ a=2$

그러므로 함수 $g(x)$의 최댓값은

$g(0)=2\times 3^4+2=164$

84) [정답] ③

$f(x)=\log_a(4^x+2^{x+2})$에서 $g(x)=4^x+2^{x+2}$이라 하자.

$y=g(x)=(2^x)^2+4\times 2^x$에서 $2^x=t$라 하면

$-1\le x\le 1$이므로 $\dfrac{1}{2}\le t\le 2$이고

$y=t^2+4t$

$=(t+2)^2-4$

따라서 함수 $g(x)$는 $t=\dfrac{1}{2}$, 즉 $x=-1$일 때 최솟값 $\dfrac{9}{4}$, $t=2$, 즉 $x=1$일 때 최댓값 12를 갖는다.

(i) $a>1$일 때

함수 $f(x)=\log_a g(x)$는 $g(x)$가 최대일 때 최댓값을 가지므로

$\log_a 12=-2$

$a^{-2}=12$

$a^2=\dfrac{1}{12}$

$a>1$이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 없다.

(ii) $0<a<1$일 때

함수 $f(x)=\log_a g(x)$는 $g(x)$가 최소일 때 최댓값을 가지므로

$\log_a\dfrac{9}{4}=-2$

$a^{-2}=\dfrac{9}{4}$

$a^2=\dfrac{4}{9}$

$0<a<1$이므로 $a=\dfrac{2}{3}$

따라서 조건을 만족시키는 a의 값은 $\dfrac{2}{3}$이다.

85) [정답] ⑤

$y=f(x)$

$=\left(\log_a\dfrac{x}{15}\right)\left(\log_a\dfrac{x}{6}\right)$

$=(\log_a x-\log_a 15)(\log_a x-\log_a 6)$

$=(\log_a x)^2-(\log_a 15+\log_a 6)(\log_a x)+(\log_a 15)(\log_a 6)$

$\log_a x=t$, $\log_a 15=\alpha$, $\log_a 6=\beta$라 하면

$y=t^2-(\alpha+\beta)t+\alpha\beta$

$=\left(t-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+\alpha\beta-\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$

이므로

$t=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{1}{2}(\log_a 15+\log_a 6)$

$=\dfrac{1}{2}\log_a 90$

즉, $x=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$ 일 때 함수 $f(x)$의 최솟값은

$$\alpha\beta-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2=\alpha\beta-\frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{4}$$
$$=-\frac{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}{4}$$
$$=-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2$$
$$=-\left(\frac{\log_a 15-\log_a 6}{2}\right)^2$$
$$=-\frac{1}{4}\times\left(\log_a\frac{15}{6}\right)^2$$
$$=-\frac{1}{4}\times\left(\log_a\frac{5}{2}\right)^2$$

함수 $f(x)$의 최솟값이 $-\frac{1}{4}$ 이므로

$$-\frac{1}{4}\times\left(\log_a\frac{5}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}$$
$$\left(\log_a\frac{5}{2}\right)^2=1$$

$\log_a\frac{5}{2}=1$ 또는 $\log_a\frac{5}{2}=-1$

$\therefore\ a=\frac{5}{2}$ 또는 $a=\frac{2}{5}$

따라서 조건을 만족시키는 모든 상수 a의 값의 합은

$\frac{5}{2}+\frac{2}{5}=\frac{29}{10}$

86) [정답] 13

$(6x)^{\log 3}-(4x)^{\log 2}=0\ \ (x>0)$에서

$(6x)^{\log 3}=(4x)^{\log 2}$

양변에 상용로그를 취하면

$(\log 3)(\log 6x)=(\log 2)(\log 4x)$

$(\log 3)(\log 2+\log 3+\log x)=(\log 2)(2\log 2+\log x)$

$(\log 3-\log 2)(\log x)=2(\log 2)^2-(\log 2)(\log 3)-(\log 3)^2$

$(\log 3-\log 2)(\log x)=(2\log 2+\log 3)(\log 2-\log 3)$

$(\log 3-\log 2)(\log x)=-(2\log 2+\log 3)(\log 3-\log 2)$

$\log 3-\log 2\neq 0$이므로

$$\log x=-(2\log 2+\log 3)$$
$$=-(\log 4+\log 3)$$
$$=-\log 12$$
$$=\log\frac{1}{12}$$

$\therefore\ x=\frac{1}{12}$

따라서 $\alpha=\frac{1}{12}$이므로 $p=12,\ q=1$

$\therefore\ p+q=12+1=13$

87) [정답] ③

진수의 조건에 의하여

$x+4>0,\ a-2x>0$

$a>-8$일 때, $-4<x<\frac{a}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$a\leq -8$일 때, 로그방정식의 근은 존재하지 않는다.

$\log_2(x+4)+\log_2(a-2x)=5$에서

$\log_2\{(x+4)(a-2x)\}=5$

$(x+4)(a-2x)=32$

$2x^2-(a-8)x-4(a-8)=0$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠의 범위에서 이차방정식 ㉡이 실근을 가지려면 우선 ㉡의 판별식이 0 이상이어야 한다.

이차방정식 ㉡의 판별식을 D라 하면 $D\geq 0$에서

$(a-8)^2+32(a-8)\geq 0$

$(a-8)(a+24)\geq 0$

$\therefore\ a\leq -24$ 또는 $a\geq 8$

이때 $a>-8$이므로

$a\geq 8$

$a=8$일 때 ㉠에서

$-4<x<4$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡에서 $2x^2=0$, 즉 $x=0$이고 이것은 ㉢의 조건을 만족하므로 구하는 상수 a의 최솟값은 8이다.

다른 풀이

진수의 조건에 의하여

$x+4>0,\ a-2x>0$

$a>-8$일 때, $-4<x<\frac{a}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$a\leq -8$일 때, 로그방정식의 근은 존재하지 않는다.

$\log_2(x+4)+\log_2(a-2x)=5$에서

$\log_2\{(x+4)(a-2x)\}=5$

$(x+4)(a-2x)=32$

$x+4>0$이므로

$$a-2x=\frac{32}{x+4}$$
$$a=2x+\frac{32}{x+4}$$
$$=2(x+4)+\frac{32}{x+4}-8$$
$$\geq 2\sqrt{2(x+4)\times\frac{32}{x+4}}-8\ \ (\because\ x+4>0)$$
$$=2\sqrt{64}-8$$

$=8$ (단, 등호는 $2(x+4)=\frac{32}{x+4}$, 즉 $x=0$일 때 성립한다.)

$a=8$일 때 주어진 로그방정식의 근은 $x=0$이고 이것은 ㉠의 조건을 만족하므로 구하는 상수 a의 최솟값은 8이다.

88) [정답] ④

$\overline{OA'}=k$라 하면 세 점 A, B, C의 좌표는

$A(k,\ -\log_2 k)$, $B(2k,\ \log_2 2k)$, $C(3k,\ \log_2 3k)$

세 점 A, B, C가 한 직선 l 위에 있으므로

$$\frac{\log_2 2k-(-\log_2 k)}{2k-k}=\frac{\log_2 3k-\log_2 2k}{3k-2k}$$

$(1+\log_2 k)+\log_2 k=(\log_2 3+\log_2 k)-(1+\log_2 k)$

$1+2\log_2 k=\log_2 3-1$

$\log_2 k=\frac{1}{2}(\log_2 3-2)$

$=\frac{1}{2}(\log_2 3-\log_2 4)$

$=\frac{1}{2}\log_2\frac{3}{4}$

$=\log_2\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ k=\frac{\sqrt{3}}{2}$

89) [정답] ③

진수의 조건에 의하여

$x+1>0,\ 2x+5>0$이므로

$x>-1$ …… ㉠

$\log_2(x+1)-\log_4(2x+5)\le 0$에서

$\log_2(x+1)\le\log_4(2x+5)$

$\log_2(x+1)\le\frac{1}{2}\log_2(2x+5)$

$2\log_2(x+1)\le\log_2(2x+5)$

$\log_2(x+1)^2\le\log_2(2x+5)$

밑이 1보다 크므로

$(x+1)^2\le 2x+5$

$x^2-4\le 0$

$(x+2)(x-2)\le 0$

$\therefore\ -2\le x\le 2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $-1<x\le 2$이므로 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 0, 1, 2의 3개이다.

90) [정답] 45

진수의 조건에 의하여

$3x>0,\ 9x>0$이므로

$x>0$ …… ㉠

$(\log_3 3x)(\log_3 9x)\le 12$에서

$(\log_3 3+\log_3 x)(\log_3 9+\log_3 x)\le 12$

$(1+\log_3 x)(2+\log_3 x)\le 12$

$\log_3 x=t$라 하면

$(1+t)(2+t)\le 12$

$t^2+3t-10\le 0$

$(t+5)(t-2)\le 0$

$\therefore\ -5\le t\le 2$

즉, $-5\le\log_3 x\le 2$

$\log_3 3^{-5}\le\log_3 x\le\log_3 3^2$

밑이 1보다 크므로

$\frac{1}{243}\le x\le 9$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통범위를 구하면

$\frac{1}{243}\le x\le 9$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 모든 정수 x의 합은

$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$

91) [정답] ③

진수의 조건에 의하여

$12-3x^2>0$에서

$-2<x<2$ …… ㉠

$a-2x>0$에서

$x<\frac{a}{2}$ …… ㉡

주어진 부등식을 만족시키는 정수인 해의 개수가 2이려면

㉠, ㉡에 의하여 $\frac{a}{2}>0$, 즉 $a>0$이어야 한다.

$\log_3(12-3x^2)>1+\log_3(a-2x)$에서

$\log_3(12-3x^2)>\log_3\{3(a-2x)\}$

$12-3x^2>3(a-2x)$

$x^2-2x+a-4<0$

$f(x)=x^2-2x+a-4=(x-1)^2+a-5$라 하자.

(ⅰ) $0<a\le 2$일 때

$0<\frac{a}{2}\le 1$이므로 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 x는 -1, 0의 2개이다.

따라서 주어진 부등식의 정수인 해의 개수가 2이려면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 $f(-1)<0$이어야 한다.

이때 $f(-1)=a-1<0$에서 $a<1$이므로 조건을 만족시키는 정수 a는 없다.

(ⅱ) $a>2$일 때

$\frac{a}{2}>1$이므로 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 x는 -1, 0, 1의 3개이다.

따라서 주어진 부등식의 정수인 해의 개수가 2이려면 함수 $f(x)$의 그래프가 $x=1$에 대하여 대칭이므로 $f(0)<0$, $f(-1)\ge 0$이어야 한다.

$f(0)=a-4<0$에서 $a<4$

$f(-1)=a-1\ge 0$에서 $a\ge 1$

즉, $2<a<4$이므로 조건을 만족시키는 정수 a는 3이다.

$\therefore\ a=3$

92) [정답] 7

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+7x)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+7x)}{7x}\times 7$

$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}\times 7$

$=7$

93) [정답] ②

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\sin 2x}$

$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{3x}-1}{3x}\times\frac{2x}{\sin 2x}\times\frac{3x}{2x}\right)$

$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\times\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}\times\lim_{x\to 0}\frac{3x}{2x}$

$=\lim_{s\to 0}\frac{e^{s}-1}{s}\times\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}\times\lim_{x\to 0}\frac{3x}{2x}$

$=1\times 1\times\frac{3}{2}$

$=\frac{3}{2}$

94) [정답] ①

함수 $f(x)=\begin{cases}\frac{e^{2x}+a}{x} & (x\neq 0)\\ b & (x=0)\end{cases}$ 이 $x=0$에서 연속이 되려면

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$이어야 한다.

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+a}{x}=b$에서 $x\to 0$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}(e^{2x}+a)=1+a=0$에서 $a=-1$

$\therefore\ b=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\times 2$

$=\lim_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{t}\times 2$

$=1\times 2=2$

$\therefore\ a+b=-1+2=1$

95) [정답] ①

함수 $(g\circ f)(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-0}g(f(x))=\lim_{x\to 1+0}g(f(x))$

$=g(f(1))$

이어야 한다.

(i) $\lim_{x\to 1-0}g(f(x))$에서 $f(x)=t$로 놓으면

$x\to 1-0$일 때, $t\to 2-0$

$\therefore\ \lim_{x\to 1-0}g(f(x))=\lim_{t\to 2-0}g(t)$

$=2\times 2^2+2a$

$=8+2a$

(ii) $\lim_{x\to 1+0}g(f(x))$에서 $f(x)=t$로 놓으면

$x\to 1+0$일 때, $t\to 3+0$

$\therefore\ \lim_{x\to 1+0}g(f(x))=\lim_{t\to 3+0}g(t)$

$=2\times 3^2+3a$

$=18+3a$

(iii) $g(f(1))=g(2)$

$=2\times 2^2+2a$

$=8+2a$

따라서 (i), (ii), (iii)에서

$18+3a=8+2a$

$\therefore\ a=-10$

96) [정답] ⑤

$f(x)=\log_2(x+1)-\frac{1}{2}x$로 놓으면

함수 $f(x)$는 구간 $(-1,\ \infty)$에서 연속이고

$f(1)=\log_2 2-\frac{1}{2}\times 1$

$=1-\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}>0$

$f(2)=\log_2 3-\frac{1}{2}\times 2$

$=\log_2 3-1$

$=\log_2 3-\log_2 2$

$=\log_2\frac{3}{2}>0$

$f(3)=\log_2 4-\frac{1}{2}\times 3$

$=2-\frac{3}{2}$

$=\frac{1}{2}>0$

$f(4)=\log_2 5-\frac{1}{2}\times 4$

$=\log_2 5-2$

$=\log_2 5-\log_2 4$

$=\log_2\frac{5}{4}>0$

$f(5)=\log_2 6-\frac{1}{2}\times 5$

$=\log_2 6-\frac{5}{2}$

$=\log_2 6-\log_2 2^{\frac{5}{2}}$

$=\log_2 6-\log_2 4\sqrt{2}$

$=\log_2\frac{3}{2\sqrt{2}}$

$=\log_2\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{8}}>0$

$f(6)=\log_2 7-\frac{1}{2}\times 6$

$=\log_2 7-3$

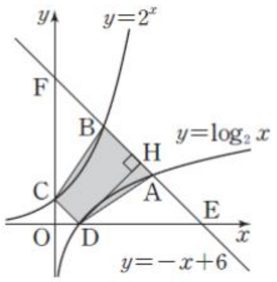
$=\log_2 7-\log_2 8$

$=\log_2\frac{7}{8}<0$

이므로 중간값의 정리에 의하여 $f(x)=0$, 즉 $x>0$일 때 $\log_2(x+1)-\frac{1}{2}x=0$은 열린 구간 $(5,\ 6)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 주어진 방정식의 실근이 존재하는 구간은 열린 구간 $(5,\ 6)$이다.

97) **정답** 17



지수함수 $y=2^x$은 로그함수 $\log_2 x$의 역함수이고 직선 AB는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 B는 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이다. 따라서 점 B의 좌표는 $(2,\ 4)$이다. $\overline{AB}=\sqrt{(2-4)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{2}$ ......㉠

두 점 $C,\ D$의 좌표는 각각 $(0,\ 1),\ (1,\ 0)$이므로

$\overline{CD}=\sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}$ ......㉡

두 점 $A,\ B$를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=-(x-4),\ x+y-6=0$

점 $D(1,\ 0)$에서 직선 $x+y-6=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{DH}=\dfrac{|1+0-6|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ ......㉢

한편, $\overline{AB}//\overline{CD}$이므로 사각형 $ABCD$는 사다리꼴이다 ....㉣

㉠, ㉡, ㉢, ㉣에 의하여 사각형 ABCD의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times(\overline{AB}+\overline{CD})\times\overline{DH}=\dfrac{1}{2}\times(2\sqrt{2}+\sqrt{2})\times\dfrac{5\sqrt{2}}{2}=\dfrac{15}{2}$

따라서 $p=2,\ q=5$이므로 $p+q=2+15=17$

98) **정답** ②

네 점 $A,\ B,\ C,\ D$의 좌표는 각각 $(1,a),(0,1),(1,0),(b,1)$이다.

두 선분 AC, BD가 직교하고 사각형 $ABCD$의 넓이가 3이므로 $\dfrac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}=\dfrac{1}{2}ab=3$에서 $ab=6$ a, b는 1보다 큰 자연수이므로 $a=2,\ b=3$ 또는 $a=3,\ b=2$ ......㉠

한편, 직선 AD의 기울기가 -1보다 크므로 $\dfrac{1-a}{b-1}>-1$

$1-a>1-b,\ a<b$ ......㉡

㉠, ㉡에서 $a=2,\ b=3$이므로 $3a+2b=3\times2+2\times3=12$

99) **정답** ⑤

두 점 A, B의 좌표를 각각$(a,0),(b,1)$이라 하면 $0=\log_k a$에서 $a=1$이므로 $A(1,0)$ $1=\log_k b$에서 $b=k$이므로 $B(k,1)$점$(k,1)$을 지나고 기울기가 $-\dfrac{1}{k}$인 직선 l의 방정식은 $y-1=-\dfrac{1}{k}(x-k),\ y=-\dfrac{1}{k}x+2$ 직선 l축과 x축, y축의 교점 C, D의 좌표를 각각 $(c,0),(0,d)$라 하면

$0=-\dfrac{1}{k}\times c+2$ 에서 $c=2k$ 이므로 $C(2,0)$

$d=-\dfrac{1}{k}\times0+2$ 에서 $d=2$이므로 $D(2,0)$

삼각형 ACD에서 $\overline{AC}=2k-1,\ \overline{OD}=2$ (O는 원점) 이므로

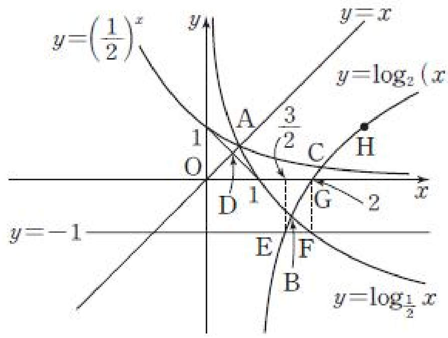
$S(k)=\dfrac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{OD}=\dfrac{1}{2}\times(2k-1)\times2=2k-1$

따라서

$S(2)+S(3)+S(4)+\cdots+S(10)=3+5+7+\cdots+19$

$=\dfrac{9(3+19)}{2}=99$

100) **정답** ②



ㄱ. 두 함수 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x,\ y=\log_{\frac{1}{2}}x$는 서로 역함수이므로 두 함수의 그래프의 교점 A는 직선 $y=x$와 $y=-x+1$의 교점을 D라 하면 점 D의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$이므로

$\overline{OD}=\sqrt{(\dfrac{1}{2})^2+(\dfrac{1}{2})^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 이때 $\overline{OA}>\overline{OD},$ 즉 $\overline{OA}>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (참)

ㄴ. 두 함수 $y=\log_2(x-1)=-1,\ y=\log\dfrac{1}{2}x$의 그래프와 직선 $y=-1$의 교점을 각각 $E,\ F$라 하자.

$\log_2(x-1)=-1$에서 $x-1=2^{-1},\ x=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

$\log_{\frac{1}{2}}x=-1$에서 $x=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}=2$ 즉, 두 점 $E,\ F$의 각각 $\left(\dfrac{3}{2},\ -1\right),\ (2,-1)$

따라서 점 B의 x좌표 b는 $\dfrac{3}{2}<b<2$이다. (참)

ㄷ. 함수$y=\log_2(x-1)$의 그래프 위의 두 점 $(2,0),\ (3,1)$을 각각 $G,\ H$를 지나는 직선의 방정식은

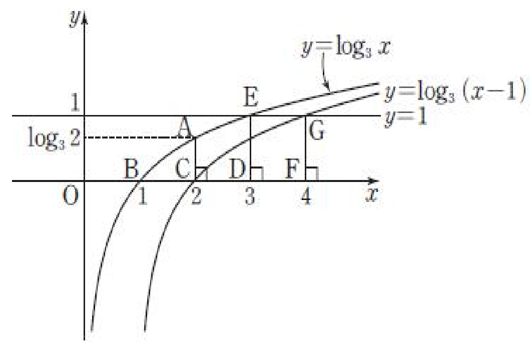
$y-0=\dfrac{1-0}{3-2}(x-2),$

즉, $y=x-2$이고 함수 $y=\log_2(x-1)$의 그래프는

$2 < x < 3$에서 직선 $y=x-2$보다 윗부분에 있으므로 함수 $y=\log_2(x-1)\,(2<x<3)$의 그래프 위의 임의의 점 P와 직선 $y=x$사이의 거리는 평행한 두 직선 $y=x, y=x-2$ 사이의 거리보다 작다. 이때 두 직선 $y=x, y=x-2$의 거리는 점 $G(2,\,0)$과 직선 $x-y=0$ 사이의 거리와 같으므로 $\dfrac{|2-0|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$이다.

따라서 점 C와 직선 $y=x$사이의 거리는 $\sqrt{2}$보다 작다. (거짓) 이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

101) **정답** ②



ㄱ. 곡선 $y=\log_3 x$ 직선 $x=2$의 교점을 A라 하면 점 A의 좌표는 $(2,\log_3 2)$이다. 두 점 $(1,0), (2,0)$을 각각 B, C라 하면 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AC}=\dfrac{1}{2}\times 1\times\log_3 2=\dfrac{1}{2}\log_3 2$

이때 로그함수 $y=\log_3 x$는 위로 볼록하므로

$S_1 > \dfrac{1}{2}\log_3 x$

(거짓)

ㄴ. 함수 $y=\log_3(x-1)$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 곡선 $y=\log_3 x$와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선

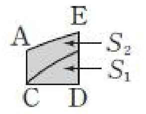
$y=\log_3(x-1)$과 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다. 따라서 S_1+S_2의 값은 곡선 $y=\log_3 x$와 x축 및 두 직선 $x=2,\ x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

한편, 두 점 $(3,0), (3,1)$을 각각 D, E라 하면 사다리꼴 $ACDE$의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times(\overline{AC}+\overline{DE})\times\overline{CD}=\dfrac{1}{2}\times(\log_3 2+1)=\dfrac{1+\log_3 2}{2}$

이때 로그함수 $y=\log_3 x$의 그래프는 위로 볼록하므로

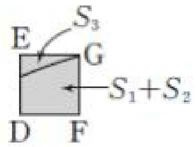
$S_1+S_2>\dfrac{1+\log_3 2}{2}$ (참)



ㄷ. 함수 $y=\log_3(x-1)$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 곡선 $y=\log_3 x$와 x축 및 두 직선 $x=2,\ x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y=\log_3(x-1)$과 x축 및 두 직선 $x=3,\ x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다. 따라서 두 점 $(4,0), (4,1)$을 각각 F, G라 하면 $S_1+S_2+S_3$의 값은 정사각형 $EDFG$의 넓이와 같다.

따라서 $S_1+S_2+S_3=1$이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄴ이다.



102) **정답** ④

곡선 $y=\ln(x+1)$과 직선 $y=t$의 교점의 x좌표는 $\ln(x+1)=t$에서 $x+1=e^t,\ x=e^t-1$이므로 A (e^t-1,t), $C(e^t-1,0)$

곡선 $y=\ln(x+1)$과 직선 $y=3t$의 교점의 x좌표는 $\ln(x+1)=3t$에서 $x+1=e^{3t},\ x=e^{3t}-1$이므로 B

$(e^{3t}-1,3t)$,

$D(e^{3t}-1,0)$ 사각형 $ABCD$의 넓이 $S(t)$는

$S(t)=\dfrac{1}{2}\times(\overline{AC}+\overline{BD})\times\overline{CD}=\dfrac{1}{2}\times(t+3t)\times(e^{3t}-1)-(e^t-1)$

$=2t(e^{3t}-e^t)=2te'(e^{2t}-1)$

이때 $2t=s$라 하면 $t\to 0+$일 때 $s\to 0+$

$$\lim_{t\to 0+}\frac{e^{2t}-1}{2t}=\lim_{s\to 0+}\frac{e^s-1}{s}=1$$

따라서

$$\lim_{t\to 0+}\frac{S(t)}{t^2}=\lim_{t\to 0+}\frac{2te^t(e^t-1)}{t^2}=\lim_{t\to 0+}(4e^t\times\frac{e^{2t}-1}{t^2})$$

$$=\lim_{t\to 0+}4e^t\times\lim_{t\to 0+}\frac{e^{2t}-1}{2t}=4\times 1=4$$

103) **정답** ②

함수 $f(x)$가 구간 $(-1,\infty)$에서 연속이기 위해서는 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이어야 한다.

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이려면 $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x+b^x+\ln(1+x)-2}{x}=2\ln 2+\ln 3+1$ ......㉠

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x+b^x+\ln(1+x)-2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{b^x-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}$$

$=\ln a+\ln b+1=\ln ab+1$......㉡

$2\ln2+\ln3+1=\ln(2^2\times3)+1=\ln12+1$......㉢

㉠,㉡,㉢에 의하여 $\ln ab=\ln12$ 즉, $ab=12$

따라서 두 자연수 $a,b\,(1<a<b)$의 순서쌍 (a,b)는 $(2,\ 6),\ (3,\ 4)$ 이므로 그 개수는 2이다.

104) **정답** ④

$f(x)=\ln x$라 하면 $f'(x)=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ 에서 $f'(1)=1$ 이므로 곡선 $y=\ln x$ 위의 점 $A(1,0)$을 지나고 직선 l에 수직인 직선 m의 방정식은

$y-0=(-1)\times(x-1)$, 즉 $y=-x+1$

따라서 점 B의 좌표는 $(0,1)$이고

$\overline{AB}=\sqrt{(0-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$ ⋯ ㉠

점 $P(t,\ln t)$와 직선 $x+y-1=0$사이의 거리를 d라 하면

$t>1,\ln t>0$ 이므로 $d=\dfrac{|t+\ln t-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{t+\ln t-1}{\sqrt{2}}$......㉡

㉠, ㉡에서

$S(t)=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times d=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{t+\ln t-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{t+\ln t-1}{2}$

한편

$T(t)=\dfrac{1}{2}\times\overline{AH}\times\overline{PH}=\dfrac{1}{2}\times(t-1)\times\ln t=\dfrac{(t-1)\ln t}{2}$이므로

$$\lim_{t\to1+}\frac{(t-1)S(t)}{T(t)}=\lim_{t\to1+}\frac{(t-1)\dfrac{t+\ln t-1}{2}}{\dfrac{(t-1)\ln t}{2}}=\lim_{t\to1+}\frac{t+\ln t-1}{\ln t}$$

$$=\lim_{t\to1+}\left(\frac{t-1}{\ln t}+1\right)$$

$t-1\to s$라 하면 $t=1+s$이고, $t\to1+$일 때 $s\to0+$이므로

$$\lim_{t\to1+}\frac{(t-1)S(t)}{T(t)}=\lim_{t\to1+}\left(\frac{t-1}{\ln t}+1\right)=\lim_{s\to0+}\frac{s}{\ln(1+s)}+1=1+1=2$$

105) **정답** ①

$\lim_{x\to0}\ln(x+1)=0,\ \lim_{x\to\infty}\ln x^2=\lim_{x\to0}2\ln|x|=-\infty$ 이므로

$\lim_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x^2}=0,\ \lim_{x\to0}\dfrac{1}{\ln x^2}=0$ 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

따라서

$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)\ln x^2}{\ln(x+1)}\times\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x^2}=3\times0=0$

...㉠

또 $\lim_{h\to0}\dfrac{\ln(h+1)}{h}=1$이므로

$f'(0)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{f(h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{f(h)\ln h^2}{\ln(h+1)}\times\dfrac{\ln(h+1)}{h}\times\dfrac{1}{\ln h^2}$......㉡

㉠, ㉡에서 $f(0)+f'(0)=0+0=0$

106) **정답** 250

$A(0,e^2)$ ......㉠ 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선 l의 방정식은 $y=e^2$ 함수 $y=e^x$의 그래프와 직선 l의 교점의 x좌표를 t라 하면 $e^2=e^t$에서 $t=2$ 즉, $B\ (2,e^2)$......㉡

$f(x)=e^x$이라 하고, 곡선 $y=f(x)$위의 점 B에서의 접선을 m이라 하면 $f'(x)=e^x$이므로 직선 m의 기울기는 $f'(2)=e^x$

따라서 직선 m의 방정식은 $y-e^2=e^2(x-2)$, 즉 $y=e^2x-e^2$ 이때 직선 m과 x축의 교점의 x좌료는 $0=e^2x-e^2$에서 $x=1$ 이므로 $D(1,0)$......㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 사각형 $AODB$의 넓이는

$S=\dfrac{1}{2}\times(\overline{AB}+\overline{OD})\times\overline{OA}=\dfrac{1}{2}\times(2+1)\times e^2=\dfrac{3}{2}e^2$

함수 $y=e^{x-4}$의 그래프는 함수 $y=e^x$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 곡선 $y=e^x$위의 점 B에서 그은 접선의 기울기와 곡선 $y=e^{x-4}$ 위의 점 C에서 그은 접선의 기울기는 서로 같다.

따라서 사각형 $BDEC$는 평행사변형이고 $\overline{BC}=4$이다.

그러므로 사각형 의 넓이는 $T=\overline{BC}\times\overline{OA}=4\times e^2=4e^2$

따라서 $T-S=4e^2-\dfrac{3}{2}e^2=\dfrac{5}{2}e^2$이므로

$k=\dfrac{5}{2}$ 그러므로 $100k=100\times\dfrac{5}{2}=250$

107) ②

[해설]

$y=a^x-\dfrac{1}{3}$에 $y=0$을 대입하면

$0=a^x-\dfrac{1}{3}$

$a^x=\dfrac{1}{3}$

$x=\log_a\dfrac{1}{3}$이므로 점 A의 좌표는 $A\left(\log_a\dfrac{1}{3},\ 0\right)$이다.

또 $y=a^x-\dfrac{1}{3}$에 $x=0$을 대입하면 $y=a^0-\dfrac{1}{3}=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$이므로

점 B의 좌표는 $B\left(0,\ \dfrac{2}{3}\right)$이다.

$\overline{OA}=\overline{OB}$이고 , $a>1$이므로 $\log_a\dfrac{1}{3}<0$이다.

따라서 $-\log_a\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$

$\log_a3=\dfrac{2}{3}$

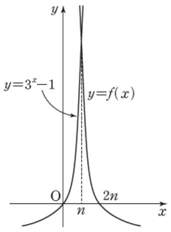
즉, $a^{\frac{2}{3}}=3$이므로

$a=\sqrt{3^3}=3\sqrt{3}$

108) 5

[해설]

곡선 $y=3^x-1$을 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 $2n$만큼 평행이동한 곡선을 $y=f(x)$는 그림과 같이 점 $(2n,\ 0)$을 지나고, 두 곡선 $y=3^x-1$, $y=f(x)$는 직선 $x=n$에 대하여 대칭이다. 이때 곡선
$y=3^x-1$은 원점 $(0,\ 0)$을 지나므로 두 곡선은 점 $(n,\ 3^n-1)$에서 만난다.



따라서 두 곡선$y=3^x-1$, $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 영역의 내부
또는 그 경계에 포함되고 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는
$x=0$일 때, (0, 0)으로 1개
$x=1$일 때
$(1,\ 0)$, $(1,\ 1)$, $(1,\ 3^1-1)$로 3^1개
$x=2$일 때
$(2,\ 0)$, $(2,\ 1)$, $(2,\ 2),\ldots,(2,3^2-1)$로 3^2개
$\vdots$
$x=n-1$일 때
$(n-1,\ 0)$, $(n-1,\ 1)$, $(n-1,\ 2),\cdots,(n-1,\ 3^{n-1}-1)$로 3^{n-1}개
$x=n$일 때
$(n,\ 0)$, $(n,\ 1)$, $(n,\ 2),\cdots,(n,\ 3^n-1)$로 $3n$개
두 곡선과 x축으로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계는 직선 $x=n$에 의하여 이등분되므로

$$a_n=2(1+3^1+3^2+\cdots+3^{n-1})+3^n$$
$$=2\sum_{m=1}^{n}3^{k-1}+3^n$$
$$=2\times\frac{3^n-1}{3-1}+3^n$$
$$=2\times3^n-1$$

$2\times3^n-1=485$에서
$2\times3^n=486$
$3^n=243$
$243=3^5$이므로
$n=5$
109) ⑤
[해설]
사각형 $ACDB$가 마름모이고, 그 넓이가 20이므로
$20=(a-b)\times\overline{AB}$ ……㉠
곡선 $y=2^{x-4}$은 곡선 $y=2^{x+1}$을 x축의 방향으로 5만큼 평행이동시킨
곡선이므로
$\overline{AB}=5$ ……㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$20=(a-b)\times5$
즉, $a-b=4$
두 점 A, C의 좌표를 각각 $A(\alpha,\ 2^{\alpha+1})$, $C(\beta,\ 2^{\beta+1})$ $(\alpha>\beta)$라 하면
$2^{\alpha+1}=a$, $2^{\beta+1}=b$이므로
$2^{\alpha+1}-2^{\beta+1}=a-b=4$ ……㉢
사각형 $ACDB$가 마름모이므로 $\overline{AC}=\overline{AB}=5$

$$\overline{AC}=\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(2^{\alpha+1}-2^{\beta+1})^2}$$
$$=\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4^2}$$
$$=5$$

$(\alpha-\beta)^2+4^2=25$
$\alpha>\beta$이므로 $\alpha-\beta=3$
$\alpha=\beta+3$을 ㉢에 대입하면
$2^{\beta+4}-2^{\beta+1}=4$
$16\times2^{\beta}-2\times2^{\beta}=4$
$2^{\beta}=\frac{2}{7}$
이때 $2^{\alpha}=2^{\beta+3}=\frac{2}{7}\times8=\frac{16}{7}$
따라서

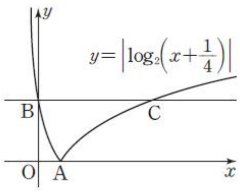
$$a+b=2^{\alpha+1}+2^{\beta+1}=2(2^{\alpha}+2^{\beta})=2\times\left(\frac{16}{7}+\frac{2}{7}\right)=\frac{36}{7}$$

110) ①
[해설]
{출제의도}
지수에 미지수가 포함된 방정식의 해를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.
{풀이}
$9^{x+1}=\left(\frac{1}{27}\right)^{-2x+3}$에서
$(3^2)^{x+1}=(3^{-3})^{-2x+3}$
$3^{2x+2}=3^{6x-9}$
$2x+2=6x-9$
$4x=11$
따라서 $x=\frac{11}{4}$
111) 2
[해설]
$2^{-x+2}+3\le\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}x-2}$에서
$2^{-x+2}+3\le(2^{-2})^{\frac{1}{2}x-2}$
$2^{-x+2}+3\le2^{-x+4}$
$2^2\times2^{-x}+3\le2^4\times2^{-x}$
$3\le12\times2^{-x}$
$\frac{1}{4}\le2^{-x}$
$2^{-2}\le2^{-x}$
밑 2가 1보다 크므로
$-2\le-x$
즉, $x\le2$
따라서 실수 x의 최댓값은 2이다.
112) ②
[해설]
$a^{2x}-8a^x+12=0$에서 $a^x=t$ $(t>0)$으로 놓으면
$t^2-8t+12=0$
$(t-2)(t-6)=0$
$t=2$ 또는 $t=6$
즉, ax=2 또는 ax=6
$a>1$, $\alpha<\beta$이므로 $a^{\alpha}=2$, $a^{\beta}=6$
$a^{\beta-\alpha}=\frac{6}{2}=3$
$a^{\frac{1}{2}}=3$
따라서 $a=3^2=9$
113) ③
[해설]
$3^{2x}-(2a+10)\times3^x+20a\le0$에서
$3^x=t$ $(t>0)$으로 놓으면
$t^2-(2a+10)t+20\le0$
$(t-10)(t-2a)\le0$
$0<a<1$이므로 $2a\le t\le10$
즉,$2a\le3^x\le10$ ……㉠
부등식 ㉠을 만족시키는 정수 x의 개수가 3이어야 하므로 정수 x는 0, 1, 2이다.
따라서 $3^{-1}<2a\le3^0$에서 $\frac{1}{6}<a\le\frac{1}{2}$이므로 양수 a의 최댓

값은 $\frac{1}{2}$이다.

114) ④

[해설]



$y=\left|\log_2\left(x+\frac{1}{4}\right)\right|$에 $y=0$을 대입하면

$0=\left|\log_2\left(x+\frac{1}{4}\right)\right|$에서 $x+\frac{1}{4}=2^0=1$이므로

$x=\frac{3}{4}$

또 $y=\left|\log_2\left(x+\frac{1}{4}\right)\right|$에 $x=0$을 대입하면

$y=\left|\log_2\left(0+\frac{1}{4}\right)\right|=2$

즉, $A\left(\frac{3}{4},\ 0\right)$, $B(0,\ 2)$이고, 점 C의 y좌표는 2이므로 점 C의 x좌표를 $a(a>0)$이라 하면

$2=\left|\log_2\left(a+\frac{1}{4}\right)\right|$

$\log_2\left(a+\frac{1}{4}\right)=2$

$a+\frac{1}{4}=4$

$a=\frac{15}{4}$

즉, $C\left(\frac{15}{4},\ 2\right)$이므로

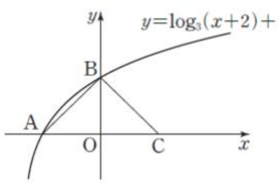
$\overline{AC}=\sqrt{\left(\frac{15}{4}-\frac{3}{4}\right)^2+(2-0)^2}=\sqrt{13}$

115) ①

[해설]

곡선 $y=\log_3 x$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동시킨 곡선은 $y=\log_3(x+2)+k$이다.

$k>0$이므로 곡선 $y=\log_3(x+2)+k$는 그림과 같다.



$\overline{AB}=\overline{BC}$이고 점 C의 좌표는 $C\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$이므로 점 A의 좌표는 $A\left(-\frac{5}{3},\ 0\right)$이다.

점 A는 곡선 $y=\log_3(x+2)+k$ 위의 점이므로

$0=\log_3\left(-\frac{5}{3}+2\right)+k$

$0=-1+k$

$k=1$

$y=\log_3(x+2)+1$에 $x=0$을 대입하면 $y=\log_3 2+1$이므로 점 B의 좌표는 $B(0,\ 1+\log_3 2)$이다.

즉, 원점 O에 대하여 $\overline{AC}=\frac{10}{3}$, $\overline{OB}=1+\log_3 2$

따라서 삼각형 ACB의 넓이는

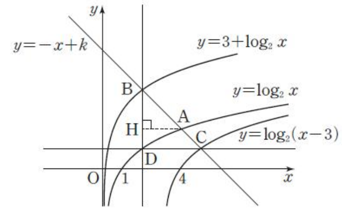
$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{OB}=\frac{1}{2}\times\frac{10}{3}\times(1+\log_3 2)$

$=\frac{5}{3}(1+\log_3 2)$

116) ④

[해설]

곡선 $y=\log_2 x$를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 곡선과 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 곡선이 각각 $y=\log_2(x-3)$, $y=3+\log_2 x$ 이다.



점 B를 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 D라 하면

$\overline{BD}=3$

또 점 D를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2(x-3)$과 만나는 점을 C'이라 하면

$\overline{DC'}=3$

삼각형 BDC'은 직각이등변삼각형이므로 직선 BC'의 기울기는 -1이다.

따라서 점 C와 점 C'은 같은 점이다.

점 A에서 직선 BD에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AB}=2\overline{AC}$이므로

$\overline{BH}=\frac{2}{3}\overline{BD}=\frac{2}{3}\times 3=2$

$\overline{AH}=\overline{BH}=2$이므로 점 A의 좌표를 $A(t,\ \log_2 t)$ $(t>0)$이라 하면

점 B의 좌표는$B(t-2, 3+\log_2(t-2))$이다.

이때

$\overline{BH}=\{3+\log_2(t-2)\}-\log_2 t$

$=3+\log_2\frac{t-2}{t}$

$=2$

$\log_2\frac{t-2}{t}=-1$

$\frac{t-2}{t}=\frac{1}{2}$

$2(t-2)=t$

즉, $t=4$

따라서 점 A의 좌표는 $A(4, \log_2 4)$, 즉 $A(4,\ 2)$이고, 점 A는 직선

$y=-x+k$ 위의 점이므로

$2=-4+k$

따라서 $k=6$

117) ③

[해설]

{출제의도}

로그의 정의와 성질을 이용하여 진수에 미지수가 포함된 부등식의 해를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

{풀이}

진수의 조건에 의하여$x-1>0$, $4x-7>0$이어야 하므로

$x>\frac{7}{4}$ ……㉠

$\log_3(x-1)+\log_3(4x-7)\le 3$에서

$\log_3(x-1)(4x-7)\le 3$

$\log_3(x-1)(4x-7)\le\log_3 3^3$

$(x-1)(4x-7)\le 3^3$

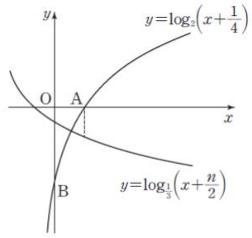
$4x^2-11x-20\le 0$

$(x-4)(4x+5)\le 0$

$-\frac{5}{4}\le x\le 4$ ……㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는 $\frac{7}{4}<x\le 4$이므로

구하는 정수 x는 2, 3, 4이고, 그 개수는 3이다.
118) 13
[해설]
진수의 조건에 의하여 $x+1>0$, $3-x>0$이므로
$-1<x<3$ ……㉠
$\log_3(x+1)-\log_3(3-x)=2$에서
$\log_3(x+1)-\log_3(3-x)+2$
$\log_3(x+1)=\log_3(3-x)+\log_3 3^2$
$\log_3(x+1)=\log_3\{9(3-x)\}$
$x+1=9(3-x)$
$x+1=27-9x$
$x=\dfrac{13}{5}$
$x=\dfrac{13}{5}$은 ㉠을 만족시키므로 $\alpha=\dfrac{13}{5}$
따라서 $5\alpha=5\times\dfrac{13}{5}=13$
119) ①
[해설]
진수의 조건에 의하여
$x>0$ ……㉠
x에 대한 방정식 $(\log_2 x)^2+a\times\log_2 x-6=0$의 두 실근을
α, β $(\alpha>0,\ \beta>0)$이라 하고, $\log_2 x=t$라 하면
$t^2+at-6=0$ ……㉡
이차방정식 ㉡의 두 실근은 $\log_2\alpha$, $\log_2\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\log_2\alpha+\log_2\beta=-a$
즉, $\log_2\alpha\beta=-a$
$\alpha\beta=\dfrac{1}{2}$이므로
$\log_2\dfrac{1}{2}=-a$
즉, $a=1$
따라서 이차방정식 ㉡은
$t^2+t-6=0$
$(t+3)(t-2)=0$
 또는 $t=2$
즉,$\log_2 x=-3$ 또는 $\log_2 x=2$이므로
$x=\dfrac{1}{8}$ 또는 $x=4$
$x=\dfrac{1}{8}$또는 $x=4$는 ㉠을 만족시키므로
방정식 $(\log_2 x)^2+a\times\log_2 x-6=0$의 두 실근의 합은
$\dfrac{1}{8}+4=\dfrac{33}{8}$
120) ⑤
[해설]
곡선 $y=\log_2\left(x+\dfrac{1}{4}\right)$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자.
$y=\log_2\left(x+\dfrac{1}{4}\right)$에 $y=0$을 대입하면
$0=\log_2\left(x+\dfrac{1}{4}\right)$이므로 $x+\dfrac{1}{4}=1$
즉, $x=\dfrac{3}{4}$이므로 점 A의 좌표는 $A\left(\dfrac{3}{4},\ 0\right)$이다.
또 $y=\log_2\left(x+\dfrac{1}{4}\right)$에 $x=0$을 대입하면
$y=\log_2\dfrac{1}{4}=\log_2 2^{-2}=-2$이므로 점 B의 좌표는 $B(0,\ -2)$이다.



그림과 같이 두 곡선$y=\log_{\frac{1}{3}}\left(x+\dfrac{n}{2}\right)$, $y=\log_2\left(x+\dfrac{1}{4}\right)$이 제4사분면에서 만나기 위해서는 $x=0$일 때 $\log_{\frac{1}{3}}\left(x+\dfrac{n}{2}\right)$의 값은 -2보다 커야하므로
$\log_{\frac{1}{3}}\left(0+\dfrac{n}{2}\right)>-2$
$\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{n}{2}>\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$
밑 3$\dfrac{1}{3}$이 1보다 작으므로
$\dfrac{n}{2}<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$
즉, $n<18$ ……㉠
또 $x=\dfrac{3}{4}$일 때, $\log_{\frac{1}{3}}\left(x+\dfrac{n}{2}\right)$의 값은 0보다 작아야 하므로
$\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{n}{2}\right)<0$
$\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{n}{2}\right)<\log_{\frac{1}{3}}1$
밑 3$\dfrac{1}{3}$이 1보다 작으므로
$\dfrac{3}{4}+\dfrac{n}{2}>1$
즉, $n>\dfrac{1}{2}$ ……㉡
㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 n의 값의 범위는
$\dfrac{1}{2}<n<18$
따라서 자연수 n은 1, 2, 3, …, 17이므로 그 개수는 17이다.
121) ③
[해설]
함수 $f(x)=\log_3(x-n)+n$의 역함수의 그래프가 점 (5, 29)를 지나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 (29, 5)를 지난다.
$5=\log_3(29-n)+n$에서
$5-n=\log_3(29-n)$
$29-n=35-n$
$29=n+3^{5-n}$ ……㉠
㉠에서 n이 자연수이고, 3^{5-n}은 3의 거듭제곱이므로
$29=28+3^0=26+3^1=20+3^2=2+3^3$에서
$29=n+3^{5-n}$을 만족시키는 n은 2뿐이다.
따라서$f(x)=\log_3(x-2)+2$이므로
$f(5)=\log_3(5-2)+2=\log_3 3+2=1+2=3$
122) ⑤
[해설]
곡선 $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-a}$과 직선 $y=3$이 만나는 점의 x좌표가 b이므로
$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{b-a}=3$에서 $3^{a-b}=3$
즉, $a-b=1$ ……㉠
곡선 $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-a}$과 곡선 $y=\log_3 x$가 만나는 점의 x좌표가 $b+1$이므로

$\left(\frac{1}{3}\right)^{b+1-a}=\log_3(b+1)$에서 $3^{a-b-1}=\log_3(b+1)$

$3^0=\log_3(b+1)$ (㉠에 의해)

$b+1=3^1$

즉, $b=2$

$b=2$를 ㉠에 대입하면 $a=3$

따라서 $a+b=3+2=5$

123) ⑤

[해설]

{출제 의도}

지수함수와 로그함수의 증가와 감소를 이해하여 주어진 함수의 최댓값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

{풀이}

닫힌 구간 [1, 2]에서 함수 $f(x)=\log_3(2x-1)+a$는 증가하므로 $x=2$에서 최댓값 3을 갖는다.

즉,$3=\log_3(2\times 2-1)+a$에서

$3=1+a$

따라서 $a=2$

이때 닫힌 구간 [2, 3]에서 함수 $g(x)=3^{-x+3}+2$는 감소하므로 $x=2$에서 최댓값 M을 갖는다.

즉, $M=3^{-2+3}+2=3+2=5$

따라서 $a+M=2+5=7$

124) ①

[해설]

$g(x)=x^2-2x+5$라 하면

$g(x)=x^2-2x+5=(x-1)^2+4$

$0\le x\le 3$에서 $g(1)\le g(x)\le g(3)$이므로 $4\le g(x)\le 8$

밑 2는 1보다 크므로

$\log_2 4\le \log_2 g(x)\le \log_2 8$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값 $M=3$, 최솟값 $m=2$이므로

$M+m=3+2=5$

125) ③

[해설]

$a>1$이므로 닫힌 구간 [-2, 1]에서 함수 $y=a^x$은 증가하고, 함수$y=a^{-x}$은 감소한다.

이때 닫힌 구간 [-2, 1]에서 함수 $y=-a^{-x}$은 증가하므로 이 구간에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

따라서 $f(-2)\le f(x)\le f(1)$

함수 $f(x)$의 최댓값이 $\frac{5}{6}$이므로

$f(1)=\frac{5}{6}$

$a-\frac{1}{a}=\frac{5}{6}$

$a^2-\frac{5}{6a}-1=0$

$6a^2-5a-6=0$

$(2a-3)(3a+2)=0$

$a=\frac{3}{2}$ 또는 $a=-\frac{2}{3}$

$a>1$이므로 $a=\frac{3}{2}$

이때 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(-2)$이므로

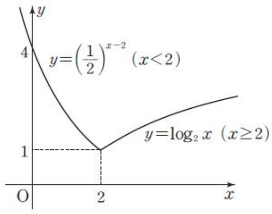
$m=f(-2)=\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{4}{9}-\frac{9}{4}=-\frac{65}{36}$

따라서 $a+m=\frac{3}{2}+\left(-\frac{65}{36}\right)=-\frac{11}{36}$

126) ③

[해설]

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



닫힌 구간 $[a-1,\ a+1]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.

(ⅰ) $a<1$일 때, $a-1<a+1<2$이므로

$M=f(a-1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{a-3}$

$m=f(a+1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{a-1}$

이때 $M+m=\left(\frac{1}{2}\right)^{a-3}+\left(\frac{1}{2}\right)^{a-1}=3$이어야 하므로

$8\left(\frac{1}{2}\right)^a+2\left(\frac{1}{2}\right)^a=3$

$\left(\frac{1}{2}\right)^a=\frac{3}{10}$ ……㉠

$a<1$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^a>\frac{1}{2}$이므로 ㉠을 만족시키는 실수 a는 존재하지 않는다.

(ⅱ) $a<3$일 때, $a-1<2\le a+1$이므로

$m=f(2)=\log_2 2=1$

이때 최댓값 M은 2이어야 하므로

$M=f(a-1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{a-3}=2$ ……㉡

또는

$M=f(a+1)=\log_2(a+1)=2$ ……㉢

㉡에서 $a=2$

㉢에서 $a=3$

$1\le a<3$이므로 $a=2$이다.

이때 $f(a+1)=f(3)=\log_2 3<2$이므로 함수 $f(x)$는 최댓값 2를 갖는다.

(ⅲ) $a\ge 3$일 때, $a+1>a-1\ge 2$이므로

$M=f(a+1)=\log_2(a+1)$

$m=f(a-1)=\log_2(a-1)$

이때 $M+m=\log_2(a+1)+\log_2(a-1)=3$이어야 하므로

$\log_2(a^2-1)=3$

$a^2-1=2^3$이므로

$a=-3$또는 $a=3$

$a\ge 3$이므로 $a=3$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 모든 실수 a의 값의 합은

$2+3=5$

127) 6

[해설]

{출제 의도}

무리수 e의 정의를 이용하여 함수의 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

{풀이}

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)+9x}{2x}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{3}{2}\times\frac{1}{3x}ln(1+3x)+\frac{9x}{2x}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{3}{2}\times\frac{1}{3x}ln(1+3x)+\frac{9}{2}\right\}$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{3x}+\frac{9}{2}$$

이때 $3x=t$로 놓으면$x\to 0$일 때 $t\to 0$이므로

$$\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{3x}+\frac{9}{2}=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}+\frac{9}{2}$$

$$=\frac{3}{2}\times 1+\frac{9}{2}$$

$$=6$$

128) ⑤

[해설]

$\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{4x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{3x}-1}{3x}\times\frac{3}{4}\right)$

이때 $3x=t$로 놓으면 $x\to0$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{3x}-1}{3x}\times\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}$

$=\frac{3}{4}\times1$

$=\frac{3}{4}$

129) ①

[해설]

$\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{\ln(1+3x)}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{3^x-1}{x}\times\frac{3x}{\ln(1+3x)}\times\frac{1}{3}\right\}$

$=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{x}\times\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\ln(1+3x)}{3x}}$

$=\frac{1}{3}\times\ln3\times\frac{1}{1}$

$=\frac{\ln3}{3}$

130) ③

[해설]

$\lim_{x\to\infty}x\{\ln(a+x)-\ln x\}=\lim_{x\to\infty}\left(x\times\ln\frac{x+a}{x}\right)$

$=\lim_{x\to\infty}\left\{x\times\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\right\}$

이때 $a>0$이므로 $\frac{a}{x}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to0+$이다.

따라서

$\lim_{x\to\infty}\left\{x\times\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\right\}=\lim_{t\to0+}\left\{a\times\frac{\ln(1+t)}{t}\right\}$

$=a\times1$

$=a$

$=a$

131) ④

[해설]

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2$이므로 $f(x)=2x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{e^{2x}-1}=1$이고 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(2x^2+ax+b)=0$에서

$b=0$

이때 $f(x)=2x^2+ax$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{2x^2+ax}{e^{2x}-1}$

$=\lim_{x\to0}\frac{x(2x+a)}{e^{2x}-1}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{2x}{e^{2x}-1}\times\frac{2x+a}{2}\right)$

$=\lim_{x\to0}\frac{2x}{e^{2x}-1}\times\lim_{x\to0}\frac{2x+a}{2}$

$=1\times\frac{a}{2}$

$=1$

즉, $a=2$

따라서 $f(x)=2x^2+2x$이므로

$f(2)=2\times2^2+2\times2=12$

132) ④

[해설]

{출제 의도}

지수함수의 도함수를 이용하여 미분계수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

{풀이}

$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{(2h+7)e^h-7}{h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{2he^h}{h}+\frac{7(e^h-1)}{h}\right\}$

$=2\lim_{h\to0}e^h+7\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}$

$=2\times1+7\times1$

$=9$

{다른 풀이}

$f(x)=(2x+7)e^x$에서

$f'(x)=2e^x+(2x+7)\times e^x$

따라서 $f'(0)=2_\times1+7\times1=9$

133) ④

[해설]

$f(x)=x\ln x+x^2$에서

$f'(x)=1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}+2x$

$=\ln x+2x+1$

따라서 $f'(e)=\ln e+2e+1=2e+2$

134) ③

[해설]

$f(0)=2$이므로

$f(x)=2^{ax}+b$에서

$2^0+b=2$, $1+b=2$

즉, $b=1$

한편, $f'(x)=2^{ax}\times\ln2^a$이고, $f'(0)=2\ln2$이므로

$2^0\times\ln2^a=2\ln2$

$a\ln2=2\ln2$

즉, $a=2$

따라서 $a+b=2+1=3$

135) ②

[해설]

$f(x)=\log_3(3x^2)=\log_3 3+2\log_3 x=1+\frac{2}{\ln3}lnx$ $(x>0)$에서

$f'(x)=\frac{2}{\ln3}\times\frac{1}{x}$

따라서

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times2$

$=2f'(1)$

$=2\times\frac{2}{\ln3}\times1$

$=\frac{4}{\ln3}$

136) ⑤

[해설]

$\lim_{x\to1}\frac{e^{a(x-1)}-3x+b}{\log_2 x}=3\ln2$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}\{e^{a(x-1)}-3x+b\}=1-3+b=0$에서

$b=2$

$f(x)=e^{a(x-1)}-3x$, $g(x)=\log_2 x$로 놓으면

$f(1)=-2$, $g(1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{e^{a(x-1)}-3x+b}{\log_2 x}$

$=\lim_{x\to1}\frac{e^{a(x-1)}-3x+2}{\log_2 x}$

$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{e^{a(x-1)}-3x+2}{x-1}\times\frac{x-1}{\log_2 x}\right\}$

$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{x-1}{g(x)-g(1)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{\frac{g(x)-g(1)}{x-1}}$$

$$=f'(1)\times\frac{1}{g'(1)}=3\ln2$$

$f(x)=e^{a(x-1)}-3x=e^{-a}\times(e^a)^x-3x$에서

$f'(x)=e^{-a}\times(e^a)^x\times\ln e^a-3=ae^{-a}\times e^{ax}-3$

또 $g(x)=\log_2 x=\dfrac{1}{\ln2}\times\ln x$에서

$g'(x)=\dfrac{1}{\ln2}\times\dfrac{1}{x}$이므로

$$f'(1)\times\frac{1}{g'(1)}=(ae^{-a}\times e^a-3)\times\ln2$$
$$=(a-3)\ln2$$
$$=3\ln2$$

에서 $a-3=3$, $a=6$

따라서 $a+b=6+2=8$

{다른 풀이}

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{e^{a(x-1)}-3x+b}{\log_2 x}=3\ln2$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이므로

(분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to1}\{e^{a(x-1)}-3x+b\}=1-3+b=0$에서

$b=2$

$$\lim_{x\to1}\frac{e^{a(x-1)}-3x+b}{\log_2 x}=\lim_{x\to1}\frac{e^{a(x-1)}-3x+2}{\log_2 x}$$

$x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{e^{a(x-1)}-3x+2}{\log_2 x}=\lim_{t\to0}\frac{e^{at}-3(1+t)+2}{\log_2(1+t)}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{e^{at}-1-3t}{\frac{\ln(1+t)}{\ln2}}$$

$$=\ln2\lim_{t\to0}\frac{\frac{e^{at}-1-3t}{t}}{\frac{\ln(1+t)}{t}}$$

$$=\ln2\frac{\lim_{t\to0}\frac{e^{at}-1-3t}{t}}{\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}}$$

$$=\ln2\frac{\lim_{t\to0}\left(\frac{e^{at}-1}{at}\times a\right)-\lim_{t\to0}3}{\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}}$$

$$=(a-3)\ln2$$

$(a-3)\ln2=3\ln2$이므로

$a-3=3$에서 $a=6$

따라서 $a+b=6+2=8$