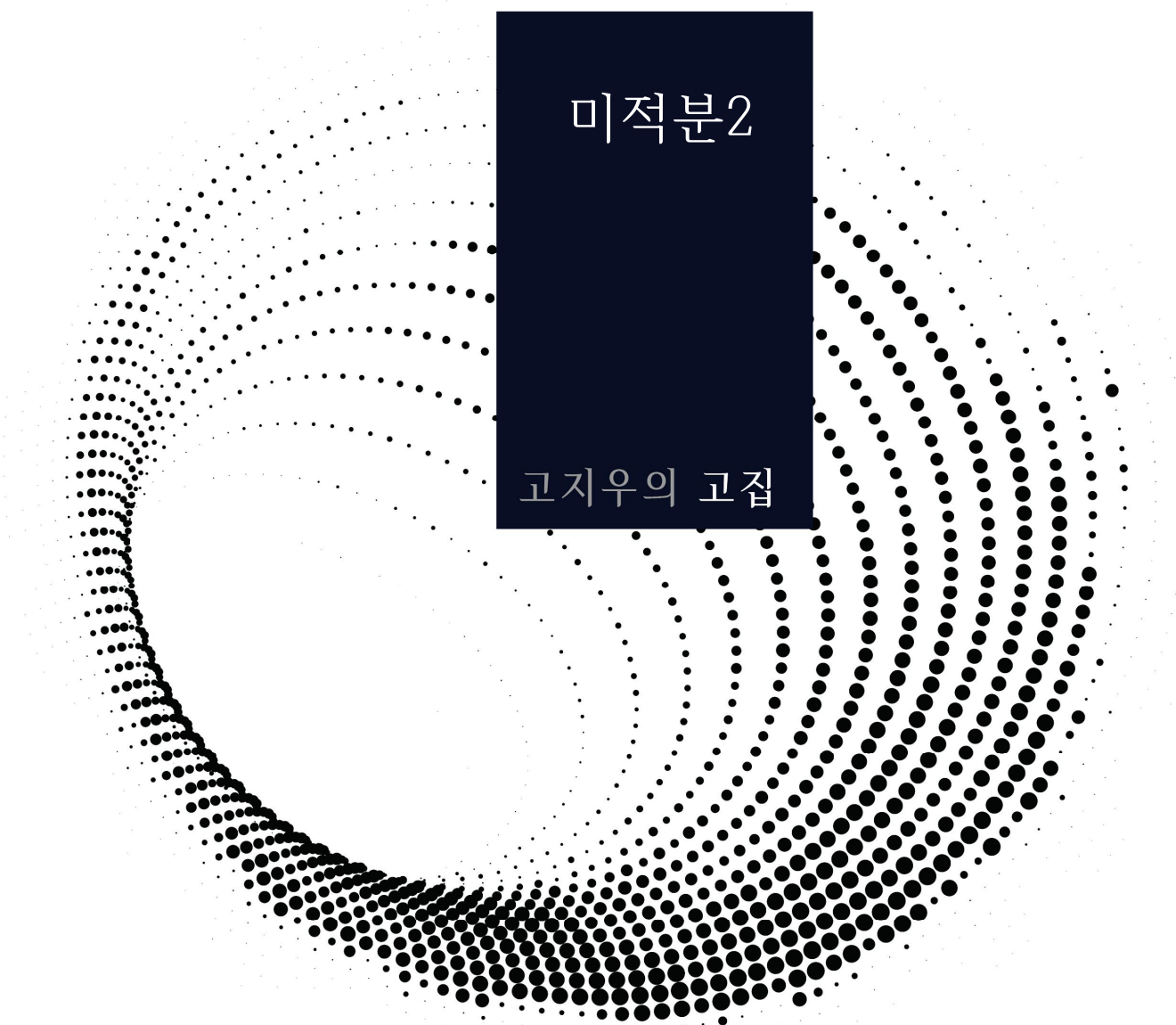


01

미적분2

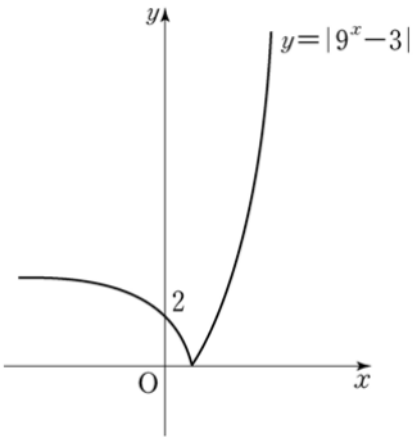
고지우의 고집



1. 문제

좌표평면 위의 두 곡선 $y = |9^x - 3|$ 과 $y = 2^{x+k}$ 이 만나는 서로 다른 두 점의 x 좌표를 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)라 할 때, $x_1 < 0, 0 < x_2 < 2$ 를 만족시키는 모든 자연수 k 의 값의 합은?

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12



2. 문제

자연수 $n (n \geq 2)$ 에 대하여 직선 $y = -x + n$ 과 곡선 $y = |\log_2 x|$ 가 만나는 서로 다른 두 점의 x 좌표를 각각 $a_n, b_n (a_n < b_n)$ 이라 할 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

[보기]

ㄱ. $a_2 < \frac{1}{4}$

ㄴ. $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

ㄷ. $1 - \frac{\log_2 n}{n} < \frac{b_n}{n} < 1$

① ㄱ

② ㄴ

③ ㄷ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3. 문제

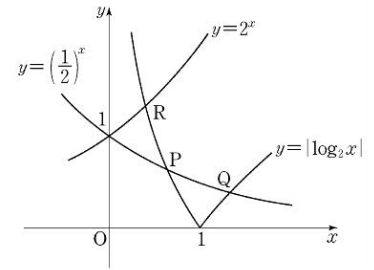
좌표평면에서 두 곡선 $y = |\log_2 x|$ 와 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 이 만나는 두 점을

$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ($x_1 < x_2$)라 하고, 두 곡선 $y = |\log_2 x|$ 와 $y = 2^x$ 이 만나는 점을 $R(x_3, y_3)$ 이라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

- ㄱ. $\frac{1}{2} < x_1 < 1$
 ㄴ. $x_2 y_2 - x_3 y_3 = 0$
 ㄷ. $x_2(x_1 - 1) > y_1(y_2 - 1)$

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



1. 문제

정의역이 $x < 4$ 인 두 함수 $f(x) = 2^x$, $g(x) = x^2$ 의 그래프가 만나는 두 점을 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $x_1 < x_2$)

<보 기>

ㄱ. $x_1 + x_2 > 0$

ㄴ. $x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 < 0$

ㄷ. $|x_1 \cdot y_2| - |x_2 \cdot y_1| > 0$

① ㄱ

② ㄴ

③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



2. 문제

함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+2) = f(x)$ 를 만족시키고,

$$f(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right| + 1 \quad \left(-\frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2} \right)$$

이다. 자연수 n 에 대하여 지수함수 $y = 2^{\frac{x}{n}}$ 의 그래프와 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 교점의 개수가 5 가 되도록 하는 모든 n 의 값의 합은?

- ① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15



3. 문제

자연수 n 에 대하여 좌표평면에서 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 정사각형의 한 변의 길이를 a_n 이라 하자.

(가) 정사각형의 각 변은 좌표축에 평행하고, 두 대각선의 교점은 $(n, 2^n)$ 이다.

(나) 정사각형과 그 내부에 있는 점 (x, y) 중에서 x 가 자연수이고, $y = 2^x$ 을 만족시키는 점은 3개뿐이다.

예를 들어 $a_1 = 12$ 이다. $\sum_{k=1}^7 a_k$ 의 값을 구하시오.

Theme 단조함수
개념적용·문제분석 과정

미적분 II
고지우의 고집



4. 문제

좌표평면에서 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 정사각형의 개수를 a_n 이라 하자.

(가) 한 변의 길이가 n 이고 네 꼭짓점의 x 좌표와 y 좌표가 모두 자연수이다.

(나) 두 곡선 $y = \log_2 x$, $y = \log_{16} x$ 와 각각 서로 다른 두 점에서 만난다.

$a_3 + a_4$ 의 값은?

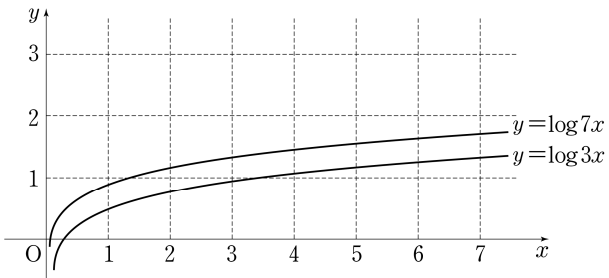
- ① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29



5. 문제

좌표평면에서 다음 조건을 만족시키는 정사각형 중 두 함수 $y = \log 3x$, $y = \log 7x$ 의 그래프와 모두 만나는 것의 개수를 구하시오.

- (가) 꼭짓점의 x 좌표, y 좌표가 모두 자연수이고 한 변의 길이가 1이다.
 (나) 꼭짓점의 x 좌표는 모두 100 이하이다.





6. 문제

다음 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수를 구하시오.

(가) $1 \leq a \leq 10, 1 \leq b \leq 100$

(나) 곡선 $y = 2^x$ 이 원 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 1$ 과 만나지 않는다.

(다) 곡선 $y = 2^x$ 이 원 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 4$ 와 적어도 한 점에서 만난다.



7. 문제

자연수 a, b 에 대하여 곡선 $y = a^{x+1}$ 과 곡선 $y = b^x$ 이 직선 $x = t$ ($t \geq 1$)와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자.

다음 조건을 만족시키는 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수를 구하시오. 예를 들어, $a=4, b=5$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $2 \leq a \leq 10, 2 \leq b \leq 10$

(나) $t \geq 1$ 인 어떤 실수 t 에 대하여 $\overline{PQ} \leq 10$ 이다.



8. 문제

좌표평면에서 $a > 1$ 인 자연수 a 에 대하여 두 곡선 $y = 4^x$, $y = a^{-x+4}$ 과 직선 $y = 1$ 로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수가 20 이상 40 이하가 되도록 하는 a 의 개수를 구하시오.



9. 문제

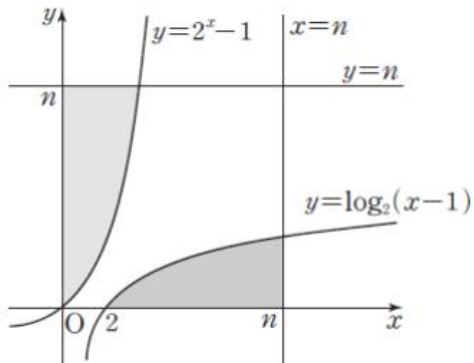
x 가 실수일 때, 다음 식의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

$$\log_3(x^2 - x + 1) - \log_3(x^2 + x + 1)$$



10. 문제

자연수 n 에 대하여 좌표평면에서 곡선 $y=2^x-1$ 과 직선 $y=n$ 및 y 축으로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수를 $f(n)$ 이라 하자. 곡선 $y=\log_2(x-1)$ 과 직선 $x=n$ 및 x 축으로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수를 $g(n)$ 이라 하자. $f(n)-g(n)=12$ 를 만족시키는 자연수 n 의 개수를 구하시오.





1. 문제

함수 $f(x) = a^x$ 에 대한 설명으로 항상 옳은 것을 <보기>에서 모두 고르면?
(단, $a > 1$ 이다.)

〈 보 기 〉

ㄱ. $f(x) > 0$

ㄴ. $f(x) + f(-x) \geq 2$

ㄷ. $f(|x|) \geq \frac{1}{2} \{f(x) + f(-x)\}$

① ㄱ

② ㄷ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



문제풀이

1.

2. 문제

방정식

$$4^x + 4^{-x} + a(2^x - 2^{-x}) + 7 = 0$$

이 실근을 갖기 위한 양수 a 의 최솟값을 m 이라 할 때, m^2 의 값을 구하시오.



3. 문제

$a > 1$ 인 실수 a 에 대하여 닫힌 구간 $[-2, 1]$ 에서 함수 $f(x) = a^x - a^{-x}$ 의 최댓값이 $\frac{5}{6}$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 최솟값을 m 이라 하자. $a+m$ 의 값은?

- ① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{5}{18}$ ③ $-\frac{11}{36}$ ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{13}{36}$



1. 문제

$a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$ 일 때, 함수

$$f(x) = \frac{b^x + \log_a x}{a^x + \log_b x}$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $1 < a < b$ 이면 $x > 1$ 인 모든 x 에 대하여 $f(x) > 1$ 이다.

ㄴ. $b < a < 1$ 이면 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 이다.

ㄷ. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \log_a b$

① ㄱ

② ㄴ

③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



2. 문제

함수 $f(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^x$ ($x > 1$)에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

- <보 기>
- ㄱ. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = e$
 ㄴ. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)f(x+1) = e^2$
 ㄷ. $k \geq 2$ 일 때, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(kx) = e^k$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3. 문제

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1-\sin x} - e^{1-\tan x}}{\tan x - \sin x}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{2}{e}$ ③ 1 ④ e ⑤ $2e$

4. 문제

함수 $f(x)$ 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $f(x) = x^2$ 이면 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)} - 1}{x} = 0$ 이다.

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{f(x)} = 1$ 이면 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{f(x)} = \ln 3$ 이다.

ㄷ. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 이면 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)} - 1}{x}$ 이 존재한다.

① ㄱ

② ㄷ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

