

이 름 :

제 1회

TCS Real 실전 모의고사
미적분1 1회 A형

시간	50 분	범 위	미분계수 ~ 정적분의 활용
해당학교	해당고교		

- 본 시험지는 시험문제를 적중하기 위해 일부 문항을 변형 및 창작한 문제로 넣었습니다.
- 시험문제에서 개념이 부족하여 손도 대지 못한 문제는 개별 질문을 할수 있도록 합니다. (해당 단원 개념 강의도 별도로 챙겨봅시다.)
- 계산은 문제지의 여백을 이용하여 풀도록 합니다.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

2017학년도 1학기 기말고사 내신대비
TCS Real 실전 모의고사

미적분1 1회 A형

1. 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x < 2) \\ a(x-4)^2 + b & (x \geq 2) \end{cases}$ 가 $x=2$ 에서 미분가능할 때,

$f(3)$ 의 값을 구하시오.

- ① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

2. 함수 $f(x) = x^2 + 3x$ 에 대하여 $x=1$ 에서 $x=3$ 까지 변할 때의 평균변화율과 $x=a$ 에서의 미분계수가 같을 때, 상수 a 의 값은?

- ① -1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 4

3. 곡선 $f(x) = x^2 + 3$ 위의 점 $(2, 7)$ 에서의 접선의 기울기는?

- ① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

4. 곡선 $y = x^2(x-1)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

- ① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

5. 방정식 $x^3 - 3x^2 = a$ 가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 정수 a 의 값의 합은?

- ① -8 ② -7 ③ -6
④ -5 ⑤ -4

6. 닫힌 구간 $[-2, 2]$ 에서 정의된 함수 $f(x) = -x^3 + 3x^2 + a$ 의 최솟값이 -4일 때, 최댓값은? (단, a 는 상수이다.)

- ① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

7. $\int_0^x (x-t)f(t)dt = x^3 - 2x^2 + x$ 을 만족하는 다항함수 $f(x)$ 에 대해,

$f'(x)$ 를 구하면?

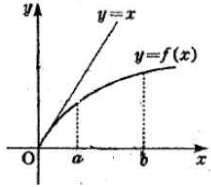
- ① $3x^2 - 4x + 1$ ② $2x(3x - 2)$ ③ $6x - 4$
④ $12x - 4$ ⑤ 6

8. $0 \leq x \leq 3$ 일 때, 함수

$f(x) = (x^2 - 2x + 2)^3 - 3(x^2 - 2x + 2)^2 + 1$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

- ① 48 ② 49 ③ 50
④ 51 ⑤ 52

9. 2 아래 그림은 미분가능한 함수 $y=f(x)$ 와 $y=x$ 의 그래프이다.



$0 < a < b$ 일 때 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?

< 보 기 >

㉠. $\frac{f(a)}{a} < \frac{f(b)}{b}$

㉡. $f(b) - f(a) > b - a$

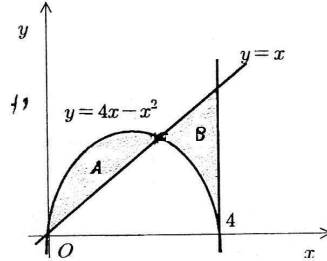
㉢. $f'(a) > f'(b)$

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢
 ④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

10. 연속함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 할 때, 다음 중 옳은 것을 고르면?

- ① $F(x)$ 는 연속이 아닌 점이 존재할 수 있다.
 ② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x} = f(0)$ 이다.
 ③ $F(x)$ 가 $x=a$ 에서 극값을 가지면 $f(a)=0$ 이다.
 ④ $F'(x) = f(x) + c$ (단, c 는 임의의 실수)이다.
 ⑤ $f(x)=0$ 이면 $F(x)=0$ 이다.

11. 그림과 같이 곡선 $y=x(4-x)$ 와 두 직선 $y=x, x=4$ 로 둘러싸인 부분 A, B의 넓이를 각각 S_1, S_2 라 할 때, $S_2 - S_1$ 의 값은?



- ① $-\frac{8}{3}$ ② $-\frac{4}{3}$ ③ 0
 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

12. 함수 $f(x)$ 가 임의의 실수 x, y 에 대하여

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy + 1$$

을 만족하고 $x=0$ 에서 미분가능하다고 한다. 이 때 함수 $f(x)$ 에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

㉠. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$

㉡. 함수 $f(x)$ 는 2차 함수이다.

㉢. 모든 실수 x 에 대하여 연속이라 할 수 없다.

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡
 ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

- 13.** 밑면의 반지름의 길이가 r 이고, 높이가 $2r$ 인 원뿔의 부피를 구분구적법으로 구한 것이다.

오른쪽 그림과 같이 원뿔의 높이를 n 등분하고 각 분점을 지나고 밑면에 평행한 평면으로 원뿔을 자르면 각 단면의 반지름의 길이는 위에서부터 차례로 다음과 같다.

$$\frac{r}{n}, \frac{2r}{n}, \dots, \frac{(n-1)r}{n}$$

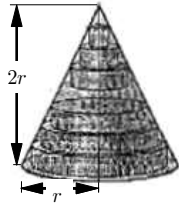
각 단면을 밑면으로 하고 높이가 $\boxed{\text{(가)}}$ 인 $(n-1)$ 개의 원기둥의 부피의 합 V_n 은

$$V_n = \pi \left(\frac{r}{n} \right)^2 \boxed{\text{(가)}} + \pi \left(\frac{2r}{n} \right)^2 \boxed{\text{(가)}} + \dots + \pi \left(\frac{(n-1)r}{n} \right)^2 \boxed{\text{(가)}}$$

$$= \frac{2\pi r}{n} \boxed{\text{(나)}}$$

따라서 구하는 도형의 부피 V 는

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \boxed{\text{(다)}}$$



위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

- ① $\frac{r}{n}, \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{kr}{n} \right)^2, \frac{\pi r^3}{3}$
 ② $\frac{r}{n}, \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{kr}{n} \right)^2, \frac{2\pi r^3}{3}$
 ③ $\frac{2r}{n}, \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{kr}{n} \right)^2, \frac{\pi r^3}{3}$
 ④ $\frac{2r}{n}, \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{kr}{n} \right)^2, \frac{2\pi r^3}{3}$
 ⑤ $\frac{2r}{n}, \sum_{k=1}^n \left(\frac{kr}{n} \right)^2, \frac{2\pi r^3}{3}$

- 14.** 함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족할 때, 정적분

$$\int_{-3}^3 (x+5)f(x) dx \text{의 값은?}$$

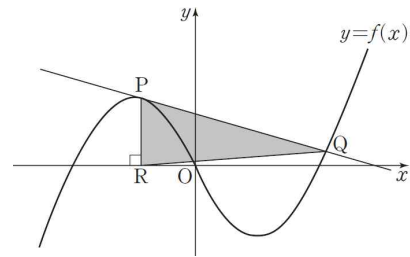
(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = f(x)$

$$\text{(나)} \int_2^5 f(x-2) dx = 2$$

- ① -20 ② -10 ③ 0
 ④ 10 ⑤ 20

- 15.** 그림과 같이 삼차함수 $f(x) = x^3 - 4x$ 위의

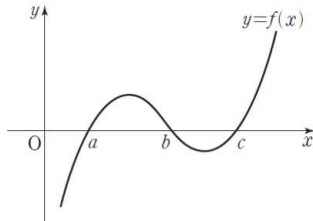
점 $P(t, t^3 - 4t)$ ($-2 < t < 0$)에서의 접선이 곡선 $y = f(x)$ 와 만나는 점 중 P 가 아닌 점을 Q , 점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 R 라 하자. 삼각형 PRQ 의 넓이를 $g(t)$ 라 할 때, 함수 $g(t)$ 의 최댓값은?



- ① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5
 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

16. 삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같고, $f(x)$ 는

$$\int_a^b f(x)dx = 4, \int_a^c f(x)dx = 1 \text{을 만족시킨다.}$$



함수 $f(x)$ 의 한 부정적분 $F(x)$ 에 대하여 $F(a) = \frac{1}{2}$ 일 때, 방정식 $F(x) = k$ 가 서로 다른 네 실근을 갖도록 하는 모든 정수 k 의 값의 합은?

- ① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

<서술형>

17. 곡선 $y = -x^2 + 1$ 위의 점 $(-1, 0)$ 에서의 접선이 곡선 $y = x^3 - ax + 18$ 에 접할 때, 상수 a 의 값을 구하시오.

18. 연속함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f(-x) = f(x)$
(나) $f(x+2) = f(x)$
(다) $\int_{-1}^1 (2x+3)f(x) dx = 15$

$\int_{-6}^{10} f(x)dx$ 의 값을 구하시오

19. 임의의 실수 x 에 대하여 다항함수 $f(x)$ 가

$$xf(x) = 2x^4 - x^3 + \int_1^x f(t) dt$$

를 만족할 때, 다음 문제의 풀이과정을 쓰고 답을 구하시오.

(1) $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 를 구하시오.

(2) 임의의 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $\int_1^x f(t) dt = 0$ 을 만족하는 실수 x 의 값을 구하시오.

(3) 함수 $f(x)$ 를 구하시오.

20. 양의 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가

다음 조건을 만족시킨다.

(가) 임의의 양의 실수 t 에 대하여 네 점

$(0, 0), (t, 0), (0, f(t)), (t, f(t))$ 를 꼭짓점으로 하는

사각형의 넓이를 $S(t)$ 라고 할 때, $S(t+1) - S(t)$ 가 $2t$ 로 일정하다.

(나) $\int_1^2 xf(x) dx = 3$

$\int_{\frac{5}{2}}^{\frac{9}{2}} xf(x) dx = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p, q 는 서로소인 자연수이다.)

미적분 1 1-A

미분 적분 정답 및 해설

1) 정답 ③

2) 정답 ③

$$f(x) = x^2 + 3x, \quad f'(x) = 2x + 3$$

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = f'(a)$$

$$2a + 3 = \frac{18 - 4}{3 - 1} = 7$$

$$\therefore a = 2$$

3) ②

4) 정답 ①

5) 정답 ③

6) 정답 ①

[출제 의도] 함수의 최대, 최소 이해하기

$$f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x - 2)$$

x	-2	...	0	...	2
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$a + 20$	$\searrow$	a	$\nearrow$	$a + 4$

$x = 0$ 일 때, 최솟값을 가지므로 $a = -4$

따라서 $x = -2$ 일 때, 최댓값은 16

7) 정답 ⑤

$$x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt = x^3 - 2x^2 + x - 3 \text{에서 양변을 미분하면}$$

$$\int_0^x f(t) dt + x f(x) - x f(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

식을 정리한 뒤 다시 미분하면

$$f(x) = 6x - 4 \text{ 따라서 } f'(x) = 6 \text{이다.}$$

8) 정답 ①

9) 정답 ③

ㄱ. $\frac{f(a)}{a}$ 는 원점과 $(a, f(a))$ 사이의 기울기이고

$\frac{f(b)}{b}$ 는 원점과 $(b, f(b))$ 사이의 기울기이다. 따라서 $\frac{f(a)}{a} > \frac{f(b)}{b}$ 이다. (거짓)

ㄴ. $f(b) - f(a) > b - a$ 는 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 1$ 이고 $(a, f(a))$ 과 $(b, f(b))$ 사이

의 기울기이므로 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 1$ 이다 (거짓)

ㄷ. $f'(a)$ 는 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기이고 $f'(b)$ 는 $(b, f(b))$ 에서의 접선의 기울기이므로 $f'(a) > f'(b)$ 가 맞다. (참)

10) 정답 ③

$F(x)$ 는 연속함수 $f(x)$ 의 한 부정적분이므로 $F'(x) = f(x)$ 이다.

① $F'(x) = f(x)$ 이고 $f(x)$ 는 연속이므로, $F(x)$ 는 모든 실수 x 에서 미

분가능하므로 연속이다. (거짓)

$$\textcircled{2} \quad f(0) = F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x} \text{ (거짓)}$$

③ $F(x)$ 가 $x = a$ 에서 극값을 가지고 ①에서 미분가능하므로 $F'(a) = f(a) = 0$ (참)

$$\textcircled{4} \quad F'(x) = f(x) \neq f(x) + c \text{ (거짓)}$$

$$\textcircled{5} \quad f(x) = 0 \text{이면 } F(x) = c \text{ (거짓)}$$

11) 정답 ①

$$S_2 - S_1 = \int_0^4 \{x - (4x - x^2)\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \right]_0^4 = -\frac{3}{8}$$

12) 정답 ③

13) 정답 ④

오른쪽 그림과 같이 원뿔의 높이를 n 등분하고 각 분점을 지나고 밑면에 평행한 평면으로 원뿔을 자르면 각 단면의 반지름의 길이는 위에서부터 차례로 다음과 같다.

$$\frac{r}{n}, \frac{2r}{n}, \dots, \frac{(n-1)r}{n}$$

각 단면을 밑면으로 하고 높이가 $\frac{2r}{n}$ 인

$(n-1)$ 개의 원기둥의 부피의 합 V_n 은

$$V_n = \pi \left(\frac{r}{n} \right)^2 \left(\frac{2r}{n} \right) + \pi \left(\frac{2r}{n} \right)^2 \left(\frac{2r}{n} \right) + \dots + \pi \left(\frac{(n-1)r}{n} \right)^2 \left(\frac{2r}{n} \right)$$

$$= \frac{2\pi r^3}{n} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{kr}{n} \right)^2 \right]$$

따라서 구하는 도형의 부피 V 는

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \frac{2\pi r^3}{3}$$

14) 정답 ⑤

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = f(x)$ 의 조건은 우함수 조건이므로 $xf(x)$ 는 기함수가 된다.

$$\therefore \int_{-3}^3 (x+5)f(x) dx = \int_{-3}^3 \{xf(x) + 5f(x)\} dx$$

$$= \int_{-3}^3 xf(x) dx + 5 \int_{-3}^3 f(x) dx$$

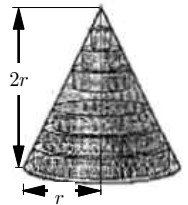
$$= 0 + 10 \int_0^3 f(x) dx \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{(나)} \quad \int_2^5 f(x-2) dx = 2 \text{에서 } \int_0^3 f(x) dx = 2 \text{이므로}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } 10 \int_0^3 f(x) dx = 10 \cdot 2 = 20$$

15) 정답 ⑤

$$f(x) = x^3 - 4x \text{에서 } f'(x) = 3x^2 - 4 \text{이므로}$$



곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(t, t^3-4t)$ 에서의 접선의 방정식은
 $y-(t^3-4t)=(3t^2-4)(x-t)$

$$y=(3t^2-4)x-2t^3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉠과 $y=x^3-4x$ 를 연립하면

$$x^3-4x=(3t^2-4)x-2t^3$$

$$x^3-3t^2x+2t^3=0, (x-t)^2(x+2t)=0$$

따라서 접선 ㉠과 곡선 $y=f(x)$ 가 만나는 점 중

$P(t, t^3-4t)$ 가 아닌 점 x 의 좌표는 $-2t$ 이므로

$$Q(-2t, -8t^3+8t)$$

점 Q에서 직선 PR에 내린 수선의 발을 H
 라 하면 삼각형 PRQ의 넓이 $g(t)$ 는

$$g(t)=\frac{1}{2} \times \overline{PR} \times \overline{QH}=\frac{1}{2} \times (t^3-4t) \times (-2t-t)$$

$$=-\frac{3}{2}t^4+6t^2 \quad (-2 < t < 0) \text{이다.}$$

따라서 $g'(t)=-6t^3+12t=-6t(t^2-2)=0$ 에서

$$t=-\sqrt{2} \quad (\because -2 < t < 0)$$

열린 구간 $(-2, 0)$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(-2)	$\dots$	$-\sqrt{2}$	$\dots$	(0)
$g'(t)$		+	0	-	
$g(t)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 열린 구간 $(-2, 0)$ 에서 함수 $g(t)$ 는

$t=-\sqrt{2}$ 에서 극대이면서 최대이므로 $g(t)$ 의 최댓값은

$$g(-\sqrt{2})=-\frac{3}{2}(-\sqrt{2})^4+6(-\sqrt{2})^2=-\frac{3}{2} \times 4+6 \times 2=6$$

16) 정답 ③

해설

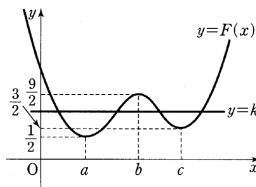
삼차함수 $f(x)$ 의 한 부정적분 $F(x)$ 는 사차함수이고

$F'(x)=f(x)=0$ 에서 $x=a$ 또는 $x=b$ 또는 $x=c$

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=4 \text{에서 } F(b)=\frac{9}{2}$$

$$\int_a^c f(x)dx=F(c)-F(a)=1 \text{에서 } F(c)=\frac{3}{2}$$

따라서 함수 $y=F(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



방정식 $F(x)=k$ 가 서로 다른 네 실근을 갖도록 하려면 함수 $y=F(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로 k 의 값의 범위는 $\frac{3}{2} < k < \frac{9}{2}$ 이다.

따라서 구하는 모든 정수 k 의 값의 합은

$$2+3+4=9$$

17) 정답 10

$f(x)=-x^2+1$ 로 놓으면 $f'(x)=-2x$ 이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, 0)$ 에서의 접선의 기울기는 2이다.

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, 0)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y=2(x+1)=2x+2$$

$g(x)=x^3-ax+18$ 이라 놓고 직선 $y=2x+2$ 가 곡선 $y=g(x)$ 와 접하는 접점의 좌표를 $(t, g(t))$ 라 하면

$$2t+2=t^3-at+18 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$g'(t)=3t^2-a=2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉡에서 $a=3t^2-2$ 이고 이 값을 ㉠에 대입하면

$$2t+2=t^3-(3t^2-2)t+18$$

$$t^3=8 \quad \therefore t=2$$

$t=2$ 를 ㉡에 대입하면 $a=10$

18) 정답 40

[출제의도] 정적분의 성질 추론하기

(가)에서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 y 축 대칭

$$(다)에서 \int_{-1}^1 (2x+3)f(x)dx = \int_{-1}^1 3f(x)dx = 15$$

$$\text{이므로 } \int_{-1}^1 f(x)dx = 5$$

$$(나)에 의해 \int_{-6}^{10} f(x)dx = 8 \int_{-1}^1 f(x)dx = 40$$

19) 정답 (1) $f'(x)=8x^2-3x$ (2) $x=1$

$$(3) f(x)=\frac{8}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{6}$$

20) 정답 47