

이 름 :

제 2회

TCS REAL 모의고사
미적분2 2회 A형

시간	50 분	범 위	여러 가지 미분법 ~ 정적분의 활용
해당학교	해당고교		

- 본 시험지는 시험문제를 적중하기 위해 일부 문항을 변형 및 창작한 문제로 넣었습니다.
- 시험문제에서 개념이 부족하여 손도 대지 못한 문제는 개별 질문을 할수 있도록 합니다. (해당 단원 개념 강의도 별도로 챙겨봅시다.)
- 계산은 문제지의 여백을 이용하여 풀도록 합니다.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

2017학년도 2학기 기말고사 내신대비
NK-TCS REAL 모의고사

미적분2 2회 A형

1. 원점 $(0, 0)$ 에서 곡선 $y = e^x$ 에 그은 접선의 방정식은?

- ① $y = ex$ ② $y = 2ex$ ③ $y = e^x$
④ $y = e^{-x}$ ⑤ $y = e^{2x}$

2. 함수 $f(x) = (\sqrt{9-x^2})^x$ ($0 < x < 3$)에 대하여 $f'(2\sqrt{2})$ 의 값은?

- ① -10 ② -8 ③ -6
④ -4 ⑤ -2

3. $f(x) = \int \frac{1}{x^2+x} dx$ 이고, $f(1) = 0$ 일 때, $f(2)$ 의 값은?

- ① $\ln \frac{2}{3}$ ② $\ln \frac{3}{4}$ ③ $\ln \frac{4}{3}$
④ $\ln \frac{3}{2}$ ⑤ $\ln 2$

4. 닫힌 구간 $[1, e^2]$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \ln x^2$ 에 대하여 $f(e^2) = (e^2 - 1)f'(c) + f(1)$ 을 만족시키는 상수 c 의 값은?

- ① $e - 1$ ② e ③ $\frac{e^2 - 1}{2}$
④ $e + 1$ ⑤ $\frac{e^2 + 1}{2}$

5. 정적분 $\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos 2x} dx$ 의 값은?

- ① $2\sqrt{2}$ ② 2 ③ $\sqrt{2}$
 ④ $-\sqrt{2}$ ⑤ $-2\sqrt{2}$

6. $-4 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $y = x + \frac{25}{x-5}$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m

이라 할 때, $M-m$ 의 값은?

- ① 8 ② 10 ③ 12
 ④ 14 ⑤ 16

7. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 와 지수함수 $g(x) = e^x$ 에 대하여

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(1+2h)) - g(f(2-3h))}{h} = 3$ 일 때, $g(f(3))$ 의 값은?

- ① e^6 ② e^7 ③ e^8
 ④ e^9 ⑤ e^{10}

8. 함수 $f(x) = (x^3 + 3x^2 + a)e^{-x}$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가질 때, 정수 a 의 개수는?

- ① 8 ② 9 ③ 10
 ④ 11 ⑤ 12

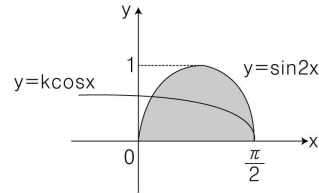
9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^3 + \left(1 + \frac{3}{n}\right)^3 + \cdots + \left(1 + \frac{2n}{n}\right)^3 \right\}$ 의 값은?

- ① 10 ② 20 ③ 30
④ 40 ⑤ 50

10. $\overline{AB} = \overline{AC} = 2$ 인 삼각형 ABC 에 내접하는 원의 반지름의 길이가 최대가 될 때, $\overline{BC}$ 의 길이는?

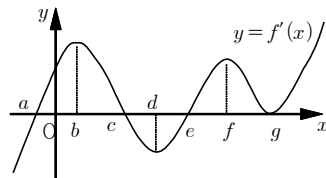
- ① $2(\sqrt{5}+1)$ ② $\sqrt{5}+1$ ③ $2(\sqrt{5}-1)$
④ $\sqrt{5}-1$ ⑤ 2

11. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 곡선 $y = \sin 2x$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 곡선 $y = k \cos x$ 가 이등분할 때, 상수 k 의 값은



- ① $1 - \sqrt{2}$ ② $2 - \sqrt{2}$ ③ 1
④ $1 + \sqrt{2}$ ⑤ $2 + \sqrt{2}$

12. 함수 $f(x)$ 의 도함수 $y = f'(x)$ 의 그래프가 주어진 그림과 같을 때, 함수 $f(x)$ 에 대한 옳은 설명만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?



- < 보 기 > —
ㄱ. 함수 $f(x)$ 의 변곡점은 3개다.
ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 $x = c$ 에서 극댓값을 갖는다.
ㄷ. 함수 $f(x)$ 는 구간 (b, d) 에서 감소함수이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

13. 함수 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ($x > 0$)에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?(단, e 는 자연로그의 밑이다.)

—[보 기]—

- ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 극댓값 $\frac{1}{e}$ 을 갖는다.
 ㄴ. 함수 $f(x)$ 의 그래프가 위로 볼록한 구간은 $(\frac{3}{e^2}, \infty)$ 이다.
 ㄷ. 모든 양수 a 에 대하여 $e^a \geq a^e$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 연속함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f(x+2)$ 이다.
 (나) $\int_1^{\frac{3}{2}} f(2x)dx = 9$, $\int_1^{\frac{4}{3}} f(3x)dx = 1$

$\int_{2012}^{2025} f(x)dx$ 의 값은?

- ① 90 ② 100 ③ 144
 ④ 169 ⑤ 199

15. 좌표평면 위의 두 점 $P(x, 0)$, $Q(x, \sin x)$ 를 이은 선분을 한 변으로 하고 이 평면에 수직으로 세운 정삼각형 PQR 를 만든다. 점 P 가 x 축 위를 원점에서 점 $C(\frac{\pi}{2}, 0)$ 까지 움직일 때, $\triangle PQR$ 이 그리는 입체도형의 부피는?

- ① $\sqrt{3}\pi$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{4}\pi$
 ④ $\frac{\sqrt{3}}{8}\pi$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{16}\pi$

16. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$f'(x) + f'(4-x) = 0$$

항상 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

— < 보 기 > —

- ㄱ. $f'(2) = 0$
 ㄴ. 함수 $|f(x) - f(2)|$ 의 미분불가능한 점은 3개다.
 ㄷ. $f(\alpha) = 0$ 이고 $f'(\alpha) = 0$ 이면
 $f(x) = (x-\alpha)^2(x+\alpha-4)^2$ 이다. (단, $\alpha \neq 2$)

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. $x > 0$ 일 때, 함수 $f(x) = e^{-x} \cos x$ 가 극댓값을 갖는 x 의 값을 작은 것부터 차례대로 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ 이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$ 의 값은? (단, e 는 자연로그의 밑이다.)

① $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{e^{2\pi}-1}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{e^{2\pi}-1}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{e^{\frac{3}{4}\pi}}{e^{2\pi}-1}$

④ $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{e^{\pi}}{e^{2\pi}-1}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{e^{\frac{5}{4}\pi}}{e^{2\pi}-1}$

<서술형>

18. 함수 $f(x) = \begin{cases} (ax+2)^2 & (x \leq 0) \\ e^{3x} + b & (x > 0) \end{cases}$ 가 실수 전체의 집합에서 미분 가능할 때, $4a+b$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.)

19. 미분가능한 함수 $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) > 0, g(x) > 0$
 (나) $f(x) = f'(x) \sec x, g(x) = g'(x) \operatorname{cosec} x$
 (다) $f(0)g(0) = \frac{1}{e}$

물음에 답하시오.

(1) 함수 $y = f(x)g(x)$ 를 구하시오.

(2) 함수 $y = f(x)g(x)$ 의 최댓값을 구하시오.

(3) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)g\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)g\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}$ 의 값을 구하시오.

20. 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 등식

$$f(x) = \int_0^x t \sin(x-t) dt \text{을 만족할 때,}$$

(1) 함수 $f(x)$ 와 도함수 $f'(x)$ 를 구하여라

(2) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(-2h)}{h}$ 의 값을 구하여라.

미적분 2 2-A

정답 및 해설

1) 답. ①

접점을 (t, e^t) 라 하면 $y' = e^x$ 이므로 접선의 기울기는 e^t 이다.

따라서 접선의 방정식은 $y - e^t = e^t(x - t)$ 이고

$(0, 0)$ 을 지나므로

$$-e^t = e^t(-t) \Rightarrow t = 1$$

따라서 접선의 방정식은 $y - e = e(x - 1) \Rightarrow y = ex$

2) 답. ②

$$\ln f(x) = x \times \ln(\sqrt{9-x^2})$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(\sqrt{9-x^2}) + x \cdot \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}$$

$$\frac{f'(2\sqrt{2})}{f(2\sqrt{2})} = 2\sqrt{2} \times 1 \times \frac{-4\sqrt{2}}{2\sqrt{9-8}}$$

$$f'(2\sqrt{2}) = -8$$

3) 답. ③

$$\int \frac{1}{x^2+x} dx$$

$$= \int \frac{1}{x(x+1)} dx$$

$$= \int \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right\} dx$$

$$= \ln|x| - \ln|x+1| + c$$

$$f(1) = 0 - \ln 2 + c + 0 \text{ 이므로}$$

$$c = \ln 2$$

$$\therefore f(2) = \ln 2 - \ln 3 + \ln 2 = 2\ln 2 - \ln 3 = \ln \frac{4}{3}$$

4) 정답 ③

$$f(e^2) = (e^2 - 1)f'(c) + f(1) \text{에서}$$

$$\frac{f(e^2) - f(1)}{e^2 - 1} = f'(c) \quad \dots\dots ①$$

함수 $f(x) = \ln x^2$ 은 닫힌 구간 $[1, e^2]$ 에서 연속이고, 열린 구간 $(1, e^2)$ 에서 미분 가능하므로 평균값의 정리에 의하여 ①을 만족시키는 c 가 1과 e^2 사이에 적어도 하나 존재한다.

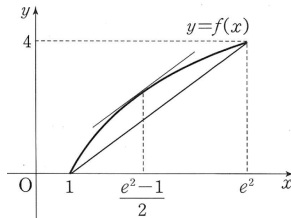
$$f'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x} \text{ 이므로}$$

$$\frac{f(e^2) - f(1)}{e^2 - 1} = \frac{2}{c}$$

$$\frac{\ln e^4 - \ln 1}{e^2 - 1} = \frac{2}{c}$$

$$\frac{4}{e^2 - 1} = \frac{2}{c}$$

$$\therefore c = \frac{e^2 - 1}{2}$$



5) 답. ④

$$1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x \text{에서 } \sqrt{1 + \cos 2x} = \sqrt{2} |\cos x|$$

$$\int_0^\pi \sqrt{1 + \cos 2x} dx = \int_0^\pi \sqrt{2} |\cos x| dx$$

$$= \sqrt{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (-\cos x) dx \right)$$

$$= \sqrt{2} \left([\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [-\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^\pi \right) = 2\sqrt{2}$$

6) 정답 ⑤

$f(x) = x + \frac{25}{x-5}$ 로 놓으면 $f(x)$ 는 $-4 \leq x \leq 4$ 에서 연속이고

$$f'(x) = 1 - \frac{25}{(x-5)^2} = \frac{x(x-10)}{(x-5)^2} = 0 \text{이면}$$

$$x = 0 \text{ 또는 } x = 10$$

x	-4		0		4
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$			↗ 최대	↘ 최소	

따라서, 구하는 최댓값은 $M = f(0) = -5$,

$$\text{최소값은 } m = f(4) = -21 \left(\because f(-4) = -\frac{61}{9} \right)$$

$$\therefore M - m = -5 - (-21) = 16$$

7) 답. ①

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(1+2h)) - g(f(2-3h))}{h} = 3$$

분모 $\rightarrow 0$, 분자 $\rightarrow 0$

$$\therefore g(f(1)) = g(f(2))$$

$$F(x) = g(f(x)) \text{라 하면}$$

$$F(1) = F(2)$$

$$e^{a+b+c} = e^{4a+2b+c}$$

$$1 = e^{3a+b}$$

$$b = -3a$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{g(f(1+2h)) - g(f(1))}{2h} \times 2 + \frac{g(f(1))}{h} \right. \\ \left. - \left\{ \frac{g(f(2-3h)) - g(f(2))}{-3h} \times (-3) - \frac{g(f(2))}{h} \right\} \right]$$

$$= 2g(f(1))' + 3g(f(2))' = 3 \quad (\because g(f(1)) = g(f(2)))$$

이 때,

$$g(f(x)) = e^{ax^2+bx+c}$$

$$g(f(x))' = e^{ax^2+bx+c}(2ax+b)$$

$$g(f(1))' = e^{a+b+c}(2a+b) = e^{c-2a}(-a)$$

$$g(f(2))' = e^{4a+2b+c}(4a+b) = e^{c-2a}(a)$$

$$2g(f(1))' + 3g(f(2))'$$

$$= 2e^{c-2a}(-a) + 3e^{c-2a}(a)$$

$$= ae^{c-2a} = 3$$

이 때, $3e^0$ 의 형태일 때만 식이 만족되므로 $a = 3, c = 6$

$$g(f(3)) = e^{9a+3b+c} = e^c = e^6$$

8) 답. ④

$$f'(x) = (3x^2 + 6x)e^{-x} + e^{-x}(x^3 + 3x^2 + a) \\ = (-x^3 + 6x - a)e^{-x}$$

$f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면

$-x^3 + 6x - a$ 의 부호가 양에서 음, 음에서 양으로 바뀌는점이 적어도 하나씩 필요하다.

$y = -x^3 + 6x$ 와 $y = a$ 의 교점이 2개이상 (통과하는 점)있어야 한다.

$y = -x^3 + 6x$ 를 미분하면

$$y' = -3x^2 + 6 = -3(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$$

이므로 $x = -\sqrt{2}$ 에서 극솟값 $-4\sqrt{2}$
 $x = \sqrt{2}$ 에서 극댓값 $4\sqrt{2}$ 를 갖는다.
 그러므로 $-4\sqrt{2} < a < 4\sqrt{2}$
 만족하는 정수 a 의 개수는 11개다.

9) 답. ②

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^3 + \left(1 + \frac{3}{n}\right)^3 \cdots + \left(1 + \frac{2n}{n}\right)^3 \right\}$$

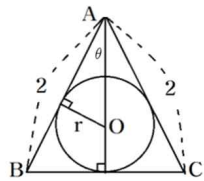
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^3$$

주어진 식을 정적분의 형태로 표현하면

$$\int_1^3 x^3 dx = \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_1^3$$

$$= \frac{1}{4} (81 - 1) = 20$$

10) 답. ③



$\angle OAB = \theta$ 라 하면,

$$BM = 2 \sin \theta$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \sin 2\theta$$

(두변과 끼인각 활용)

$$\text{또는 } \therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} (2 + 2 + 4 \sin \theta) \times r$$

(삼각형의 내심 활용)

$$2 \sin 2\theta = (2 + 2 \sin \theta) r$$

$$\therefore r = \frac{\sin 2\theta}{1 + \sin \theta}$$

r 의 최댓값 ?

$$r' = \frac{2 \cos 2\theta (1 + \sin \theta) - \sin 2\theta \cdot \cos \theta}{(1 + \sin \theta)^2}$$

$$= \frac{-2 (\sin^3 \theta + 2 \sin^2 \theta - 1)}{(1 + \sin \theta)^2}$$

$$= \frac{-2 (\sin^2 \theta + \sin \theta - 1)(\sin \theta + 1)}{(1 + \sin \theta)^2} = 0$$

$$\sin \theta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \sin \theta = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (무연근)}, \sin \theta = -1 \text{ (무연근)}$$

$$\sin \theta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ 극대}$$

다른 극점이 없으므로 이때 r 은 최대
 그런데

$$\overline{BC} = 2\overline{BM} = 4 \sin \theta = 2(\sqrt{5} - 1)$$

11) 답. ②

$$k \cos x = 2 \sin 2x$$

$$k \cos x = 2 \sin x \cos x$$

$\therefore \sin x = \frac{k}{2}$ 식을 만족하는 x 을 α 라 한다

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x - k \cos x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$$

$$\left[-\frac{1}{2} \cos 2x - k \sin x \right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} = \left[-\frac{1}{4} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$-\frac{1}{2} (-1 - \cos 2\alpha) - k(1 - \sin \alpha) = -\frac{1}{4} (-1 - 1)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - 2 \frac{k^2}{4}\right) - k \left(1 - \frac{k}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{k^2}{4} - k + \frac{1}{2} = 0$$

$$\left(\frac{k}{2} - 1\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{k}{2} - 1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$k = 2 \pm \sqrt{2} \quad (k > 1)$$

$$\therefore k = 2 - \sqrt{2}$$

12) 답. ②

ㄱ. 함수 $f(x)$ 의 변곡점은 4개다. [참]

이계도함수 $y = f''(x) = 0$ 인 점, 즉 $y = f'(x)$ 의 극대점과 극소점에
 변곡점이 있으므로, 변곡점은 4개다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 $x = c$ 에서 극댓값을 갖는다. [참]

도함수 $y = f'(x)$ 의 그래프에서 $x = c$ 에서 $f'(c) = 0$ 이고 x 값이 증가
 함에 따라 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 극댓값을 갖는다.

ㄷ. 함수 $f(x)$ 는 구간 (b, d) 에서 감소상태이다. [거짓]

도함수 $y = f'(x)$ 의 그래프는 구간 (b, d) 에서 x 값이 증가함에 따라
 양의 값에서 음의 값으로 변화하므로 함수 $f(x)$ 는 증가하다가 감
 소하게 된다.

따라서 옳은 설명은 ③ ㄱ, ㄴ이다.

13) [정답] ④

ㄱ. 함수 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 에서 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = e$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	e	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = e$ 에서 극댓값 $\frac{1}{e}$ 을 갖는다. (참)

$$\therefore f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \text{에서 } x = e^{\frac{3}{2}}$$

$x > e^{\frac{3}{2}}$ 에서 $f''(x) > 0$ 이므로 $y = f(x)$ 의 그래프는 아래로 볼록, $0 < x < e^{\frac{3}{2}}$
 에서 $f''(x) < 0$ 이므로 $y = f(x)$ 의 그래프는 위로 볼록하다. (거짓)

ㄷ. ㄱ에서 모든 양수 a 에 대하여 $f(a) \leq \frac{1}{e}$

$$\frac{\ln a}{a} \leq \frac{1}{e}, e \ln a \leq a, \ln a^e \leq \ln e^a \therefore e^a \geq a^e \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

14) 답. ㉓

$$\int_1^{\frac{3}{2}} f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_2^3 f(x) dx = 9$$

$$\therefore \int_2^3 f(x) dx = 18$$

$$\int_1^{\frac{4}{3}} f(3x) dx = \frac{1}{3} \int_3^4 f(x) dx = 1$$

$$\therefore \int_3^4 f(x) dx = 3$$

$$\therefore \int_2^4 f(x) dx = 18 + 3 = 21$$

$f(x) = f(x+2)$ 이므로

$$\int_{2012}^{2025} f(x) dx = 6 \int_2^4 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx = 6 \times 21 + 18 = 144$$

15) 답.

정삼각형 한 변의 길이가 $\sin x$ 이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \text{의 식에 대입하면}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \sin^2 x \text{이것을 적분하면 된다. (단면의 넓이)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{16} \pi \end{aligned}$$

16) 답. ㉓

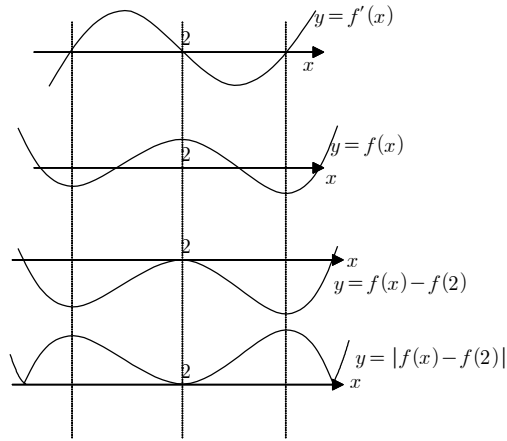
ㄱ. $x=2$ 를 대입하면 $f'(2)+f'(2)=0$ 이므로 $f'(2)=0$ (참)

ㄴ. $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로 $f'(x)$ 는 3차 함수이다.

$f'(x)+f'(4-x)=0$ 에서 $y=f'(x)$ 는 $(2, 0)$ 에 대칭인 함수이다.

즉, $y=f'(x)$ 인 삼차함수가 $(2, 0)$ 에 대칭이므로 $y=f'(x)$ 의 변곡점은 $(2, 0)$ 이다.

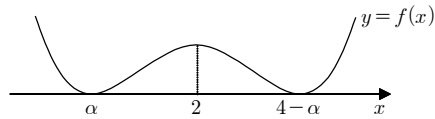
아래 그림에서와 같이 $y=f'(x)$ 의 그래프를 이용하여 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형을 개략적으로 그려본다.



따라서 위 그림에서 $|f(x)-f(2)|$ 의 미분 불가능한 점은 2개다.

$\therefore$ (거짓)

ㄷ. $f(\alpha)=0, f'(\alpha)=0$ 이고, $\alpha \neq 2$ 이면 아래 그림과 같이 극솟점이 $(\alpha, 0)$ 이고, $y=f(x)$ 는 $x=2$ 에 대해 대칭이 된다.



따라서 $f(x)=(x-\alpha)^2(x-4+\alpha)^2$ 이 된다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

17) [정답] ㉑

함수 $f(x)=e^{-x}\cos x$ 에서

$$f'(x)=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x$$

$$=-e^{-x}(\sin x+\cos x)$$

$$=-\sqrt{2}e^{-x}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x+\frac{\pi}{4}=\pi, 2\pi, 3\pi, \dots \text{이므로}$$

$$x=\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi, \frac{11}{4}\pi, \dots$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 조사하면

$$x=\frac{3}{4}\pi, \frac{11}{4}\pi, \dots \text{에서 극솟값을 갖고,}$$

$$x=\frac{7}{4}\pi, \frac{15}{4}\pi, \dots \text{에서 극댓값을 갖는다.}$$

$$\therefore x_n=2n\pi-\frac{\pi}{4} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(2n\pi-\frac{\pi}{4}\right)} \cos\left(2n\pi-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\left(2n\pi-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{e^{-\frac{7}{4}\pi}}{1-e^{-2\pi}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{e^{2\pi}-1}$$

18) 정답 6

(i) $x=0$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{3x}+b)=f(0), \quad 1+b=4 \quad \therefore b=3$$

(ii) $f'(x) = \begin{cases} 2a(ax+2) & (x < 0) \\ 3e^{3x} & (x > 0) \end{cases}$ 이고 $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow -0} 2a(ax+2) = \lim_{x \rightarrow +0} 3e^{3x}$$

$$4a = 3 \quad \therefore a = \frac{3}{4}$$

$$\therefore 4a + b = 3 + 3 = 6$$

19) 답. (1) $y = e^{\sin x - \cos x}$ (2) $e^{\sqrt{2}}$ (3) e

$$1) f(x) = f'(x) \sec x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x$$

$$g(x) = g'(x) \operatorname{cosec} x$$

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \sin x$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \cos x dx$$

$$f(x) = t$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

$$f'(x) = \frac{dt}{dx}$$

$$f'(x) dx = dt$$

$$\int \frac{1}{t} dt = \ln t = \ln f(x) + C_1$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C_2$$

$$\ln f(x) = \sin x + C_3 \quad (C_3 = C_2 - C_1)$$

$$f(x) = e^{\sin x + C_3}$$

$g(x)$ 에 대해 같은 과정을 반복

$$g(x) = e^{-\cos x + C_4}$$

$$f(x)g(x) = e^{\sin x - \cos x + C_3 + C_4}$$

$$f(0)g(0) = e^{-1 + C_3 + C_4} \quad \therefore C_3 + C_4 = 0$$

$$\therefore y = e^{\sin x - \cos x}$$

$$2) \{f(x)g(x)\}' = e^{\sin x} \cos x e^{-\cos x} + e^{\sin x} e^{-\cos x} (\sin x) \\ = e^{\sin x} e^{-\cos x} (\sin x + \cos x)$$

$$\sin x + \cos x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$x + \frac{\pi}{4} = t$$

$$\sqrt{2} \sin t = 0$$

$$\therefore t = 0, \pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$$

이 외 무수히 많이 존재하지만, 주기함수 이므로 이 두 값

만 비교하면 극대값은 $x = \frac{3}{4}\pi$ 일 때 갖는다.

따라서, $f\left(\frac{3}{4}\pi\right)g\left(\frac{3}{4}\pi\right)$ 가 최댓값

$$e^{\sin \frac{3}{4}\pi} e^{-\cos \frac{3}{4}\pi} = e^{\sqrt{2}}$$

$$3) \left\{ f\left(\frac{\pi}{2}\right)g\left(\frac{\pi}{2}\right) \right\}'$$

$$(e^{\sin x - \cos x})' = (e^{\sin x - \cos x}) \cdot (\cos x + \sin x)$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1, \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\therefore e^{1-0} \cdot (0+1) = e$$

20) 답. (1) $f(x) = x - \sin x$, $f'(x) = 1 - \cos x$, (2) 0

$$(1) x - t = u \text{로 놓으면 } -1 = \frac{du}{dt}, t = x - u$$

$t=0$ 일 때, $u=x$, $t=x$ 일 때, $u=0$ 이므로

$$f(x) = \int_0^x t \sin(x-t) dt = \int_x^0 (x-u) \sin u (-du)$$

$$= \int_0^x (x-u) \sin u du = x \int_0^x \sin u du - \int_0^x u \sin u du$$

$$= x [-\cos u]_0^x - [\sin u - u \cos u]_0^x = x - \sin x$$

$$f'(x) = 1 - \cos x$$

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(-2h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(2h) - f(0)}{h} - \frac{f(-2h) - f(0)}{h} \right)$$

$$= 4f'(0) = 0$$