제 2 교시

수학 영역(가 형)

21. 함수 $f(x)=2\pi x-\sin(2\pi x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가 있다. 정의역이 $\{x\,|\,|x|<n\}$인 함수 $(g\circ f)(x)$에 대하여 역함수가 존재하고, 그 역함수를 $h(x)$라 하자. 함수 $h(x)$가 $x=g(f(a))$ $(|a|<n)$에서 미분가능하지 않도록 하는 실수 a의 개수가 18이고, 실수 a의 값의 합이 $\frac{13}{2}$일 때, $g'(n\pi)$의 값은? (단, n은 자연수이다.) [4점]

풀이)

$f'(x)=2\pi(1-\cos(2\pi x))$이므로 $f'(x)\geq 0$이다.
정의역이 $\{x\,|\,|x|<n\}$인 함수 $(g\circ f)(x)$의 역함수가 존재하려면 증가함수거나 감소함수여야 하므로 $(g\circ f)(x)$의 도함수가 음이 아닌 혹은 양이 아닌 값만을 가져야 한다. 그런데 $g(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 $f'(x)\geq 0$이므로 $g'(f(x))f'(x)\leq 0$일 수 없다. $g'(f(x))f'(x)\geq 0$이어야 한다.
즉, 구간 $(-2n\pi,\ 2n\pi)$에서 $g'(x)\geq 0$이면 충분하다. ($\because f(n)=2n\pi,\ f(-n)=-2n\pi$)

또한 $h(x)$가 $x=g(f(a))$에서 미분가능하지 않으려면, $(g\circ f)(x)$가 미분가능한 함수이므로 $g'(f(a))f'(a)=0$이어야 한다. (그렇지 않으면 미분계수가 존재하고, $g'(f(a))f'(a)=0$인 경우엔 역함수의 미분계수에 대한 극한 식이 발산해버려서 존재하지 않음. 예를 들어 함수 $f_1(x)=x^3$의 역함수는 $f_1^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$인데, $f_1(x)=x^3$ $x=0$에서 미분가능하나, 역함수는 $x=f_1(0)$에서 미분불가능합니다. $f_1'(0)=0$이어서 생긴 문제인데, 이 문항은 이것과 원리와 같음.)

먼저, $f'(a)=0$인 경우를 보자. 만약 정의역이 실수 전체의 집합이면, $f'(x)=2\pi(1-\cos(2\pi x))$이므로, $a=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$순으로 간다. 정의역을 만약 $\{x\,|\,|x|<9\}$로 정해준다면 $a=0,\ \pm1,\ \cdots,\ \pm8$까지로, 미분불가능한 실수 a의 개수는 17개가 된다. 즉, $g'(f(a))=0$인 실수 a의 개수가 1개 존재해야 조건을 만족시킨다. (참고로 $g'(f(a))=0$인 실수 a의 개수는 1개를 넘어갈 수 없음.) 이때의 a를 k라 하면, 모든 합은 $0+(1-1)+(2-2)+\cdots(8-8)+k$가 되어 결국 k가 된다. 따라서 $k=\frac{13}{2}$이고, $f\left(\frac{13}{2}\right)=13\pi$이므로, $g(x)=(x-13\pi)^3+b$꼴만이 가능하다. 따라서 $n=9$이고, $g'(9\pi)=48\pi^2$이다.

29. 좌표공간에 점 A$(0,\ 0,\ 2)$를 중심으로 하고 원점 O를 지나는 구 위에 점 P가 있고, 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=12$
(나) 삼각형 APQ의 넓이는 $6\sqrt{3}$이다.
(다) $\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{PQ})\leq 8$

점 $R\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{2},\ 2\right)$에 대하여 $\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OQ}$의 최댓값과 최솟값의 합은 $a+b\sqrt{3}$이다. $b-a$의 값을 구하시오. (단, $a,\ b$는 정수이다.) [4점]

풀이)

A를 중심으로 하고 원점을 지나는 구의 방정식은 $x^2+y^2+(z-2)^2=4$이다. 따라서 $|\overrightarrow{AP}|=2$이다.
점 Q를 직선 AP에 내린 수선의 발을 H라 하고, (가) 조건의 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=12$임을 이용하면 $|\overrightarrow{AH}|=6$이다. 또한 (나) 조건의 삼각형 APQ의 넓이가 $6\sqrt{3}$임을 이용하여 $|\overrightarrow{QH}|=6\sqrt{3}$인 것을 알 수 있다. 따라서 $|\overrightarrow{QA}|=12$이다.
(다) 조건의 $\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{PQ})\leq 8$에서,
$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP})=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}-|\overrightarrow{AP}|^2$이므로
$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP})=8$이다.
즉, $\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{PQ})=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PQ}\leq 8$은 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OA}\leq 0$과 동치이다. 따라서 P의 z좌표는 2이하인 곳을 움직인다.

$\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OR}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AQ})$이고, $\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OA}=4$이므로
$\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{AQ}+2$이다. $|\overrightarrow{OR}|=\frac{13}{6}$, $|\overrightarrow{AQ}|=12$이고, 두 벡터 $\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{AQ}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 구하는 값은 $4+26\cos\theta$가 된다.
점 R'을 $\overrightarrow{OR'}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OR}$로 두자.
$\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{OR}$이 이루는 각의 크기를 α라 하면 $\cos\alpha=\frac{12}{13}$이다.
$\cos\theta$가 최대가 될 때는 $\theta=\frac{\pi}{6}-\alpha$일 때이고, 최소가 될 때는 $\theta=-\pi$일 때이다. 따라서 최댓값은 $4+26\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=9+12\sqrt{3}$이고 최솟값은 $4-26=-22$이다. 따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $-13+12\sqrt{3}$이고, $b-a=25$이다. (벡터 회전에 관한 문제. 뻔한 레파토리지만, 불쑥불쑥 찾아오기 때문에 대비를 잘 해둬야 합니다.)

30. 사차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xg(x)=\{f(x)-x^4+2\}e^x$$

을 만족시킨다. 실수 k에 대하여 함수 $\int_0^x g(t)dt-g(k)x$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수를 $h(k)$라 할 때, 두 함수 $g(x)$, $h(k)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$가 극대가 되는 x의 개수와 극소가 되는 x의 개수는 같다.
(나) 함수 $h(k)$가 $k=a$에서 불연속이 되는 실수 a의 값은 3개 존재하고, 그 중 최솟값은 -2이다.
(다) $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{e}{4}\times g(-1)$

$f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

풀이)

$xg(x)=\{f(x)-x^4+2\}e^x$에 대하여 $x=0$을 대입하여 $f(0)=-2$인 것을 알 수 있다. 또한

$g(x)=\dfrac{\{f(x)-x^4+2\}e^x}{x}$ 이고, $g(x)$는 연속함수이므로

$g(0)=\lim_{x\to 0}g(x)$이다. 즉, $f(x)=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x-2$로 두면, $g(x)=\{(a_0-1)x^3+a_1x^2+a_2x+a_3\}e^x$ 이다.

그런데 $a_0\neq 1$인 경우 $g'(x)$ 또한 (삼차함수)$\times e^x$꼴로 나오는데, 이 경우 (가) 조건을 만족시키지 못한다. 극소와 극대가 되는 x의 개수는 항상 다르게 나오기 때문이다. 이 모순을 해결하려면 $a_0=1$인 경우를 생각하면 된다.

이 경우로 생각하여 $f(x)=x^4+bx^3+cx^2+dx-2$로 두면, $g(x)=(bx^2+cx+d)e^x$이다.

함수 $\int_0^x g(t)dt-g(k)x$를 x에 관해 미분하면 $g(x)-g(k)$인데, 극소 또는 극대가 되는 x의 개수를 찾기 위해선 미분하여 0이 되는 x의 값을 찾아야 하므로, $g(x)-g(k)=0$, 즉 $g(x)=g(k)$라는 식을 통해 알 수 있다. 두 곡선 $y=g(x)$와 $y=g(k)$의 교점의 관계로 해석해보자. (나)의 조건을 생각해보면, $y=g(x)$의 개형은 세 가지가 있다. ($g(x)$가 극값을 가지지 않으면 $g(x)$가 증가함수나 감소함수이게 되는데, (나) 조건을 당연히 만족시키지 못하게 되므로 극값을 가진다.) 이때, $g(x)$의 도함수는 (이차함수)$\times e^x$꼴로 나오므로 두 개의 극값을 가진다.

[1] 두 극값의 부호가 다른 경우
[2] 두 극값의 부호가 같은 경우
[3] 한 극값을 0으로 가지는 경우

이때, 한 극값이 0이 되는 경우인 [3]만이 (나) 조건을 만족시킨다. (불연속이 되는 실수 a의 개수는 [1]의 경우엔 5, [2]의 경우엔 4이다. 스스로 그래프를 그려보시길 바랍니다.)
이때, 또한 $x=-2$에서는 0이 아닌 극값을 가져야함을 알 수 있다. $g'(x)=\{bx^2+(2b+c)x+(c+d)\}e^x$이므로 $g'(-2)=0$임을 이용하면 $c=d$이다. 다시 정리하면
$g'(x)=\{bx^2+(2b+c)x+2c\}e^x$이다.

$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{e}{4}\times g(-1)$임을 이용하면, $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}b-\frac{1}{2}$이고, $g(-1)=be^{-1}$이므로 $b=1$인 것을 알 수 있다.

즉, $g'(x)=\{x^2+(2+c)x+2c\}e^x=(x+2)(x+c)e^x$이고, $x=-c$에서 $g(x)$는 극값 0을 가져야 하므로 $c=0$임을 알 수 있다.

따라서 $f(x)=x^4+x^3-2$이므로 $f(3)=106$이다.

(참고) $b=0$인 경우 조건 (나)를 절대 만족시키지 못한다.