01. [박주혁t]

최고차항의 계수가 k이고, y절편이 1인 사차함수 $f(x)$와, $x \neq 1$에서 정의된 함수 $g(x)=\dfrac{f(x)}{(x-1)^2e^x}$가 다음 조건을 만족시킨다. (단, $k>0$)

> (가) $f'(0)=-1, f(1)=0$,
>
> (나) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)\ln f(x)}{x^2}=0$
>
> (다) $a \leq x$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \leq g(0)$이
> 성립하는 실수 a의 최솟값이 $h(k)$이다. (단, $a<0$)

$a=-1$ 일 때, $\dfrac{1}{h'(k)}=\dfrac{p}{e}+q$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. [4점]

02. [리듬농구]

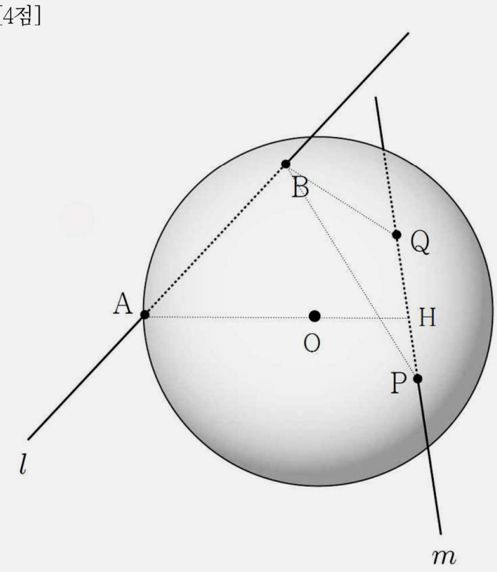
실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 구간 $[0,\ 2]$에서 두 실수 a, b에 대하여
> $f(x)=a\{\cos^3(\pi x)+\sqrt{3}\sin^3(\pi x)\}+b$이다.
>
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $\int_x^{x+2} f(t)\,dt=-2\sqrt{3}$이다.
>
> (다) 함수 $y=\int_1^x f(t)\,dt$의 그래프를 원점을 중심으로 양의 방향으로 30° 만큼 회전시켜서 얻은 곡선이 실수 전체의 집합에서 정의된 함수가 된다.

함수 $f(x)$가 $x=a^2b^2$에서 최솟값을 가질 때, 가능한 모든 a^2의 값의 합을 구하시오. [4점]

03. [박주혁t]

그림과 같이 반지름의 길이가 3인 구 S와 서로 다른 두 직선 l, m이 있다. 구 S와 직선 l이 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B, 구 S와 직선 m이 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P, Q라 하자. 구의 중심을 지나는 선분$\overline{AH}$는 $\overline{PQ}$와 수직으로 만나고, 삼각형 BPQ는 정삼각형이다. $\overline{AO}:\overline{OH}=3:2$ 일 때, 평면APQ와 평면 BPQ의 이면각을 θ라 할 때, $36\sin^2\theta$를 구하여라. [4점]



04. [박주혁t]

구간 $-1 \le x \le 1$에서 미분 가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족한다.

(가) $g(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{f(x-t)}dt$

(나) $g(x)+g''(x)=\cos x$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{g(x)}{f(x)}dx = k$ 일 때, $1024k$의 값을 구하시오. [4점]

05. [박주혁t]

최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=5$인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<5) \\ 2f(5)-f(x) & (x \geq 5) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $y=|g(x)-5|$가 $x=k$에서 미분가능하지 않고, k의 값은 k_1, k_2 일 때, $\int_4^6 \frac{x^2-5x}{f(x)-5}dx$의 값을 구하여라. [4점]

(단, $k_1 \neq k_2$, $k_1+k_2=10$)

① $\ln\frac{2}{3}$ ② $\frac{1}{5}\ln\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{5}\ln\frac{2}{3}$

④ $5\ln\frac{2}{3}$ ⑤ $-5\ln\frac{2}{3}$

06. **[리듬농구]**

열린 구간 $(0,\ 10)$에서 정의된 함수

$$f(x)=6\pi(x+1)+2\sin(\pi x)$$

의 역함수를 $g(x)$라 하자. 10보다 작은 자연수 a에 대하여 $f(a)g'(b)=a$를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는? (단, b는 실수이다.) [4점]

07. [리듬농구]

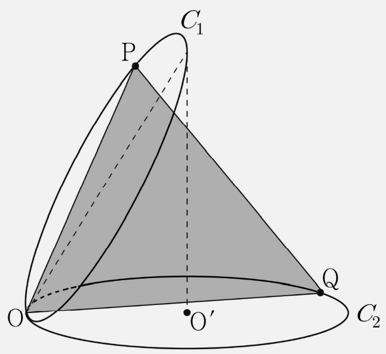
그림과 같이 반지름의 길이가 1인 두 원판 C_1, C_2가 한 점 O에서만 만난다. 원판 C_1의 둘레위의 점 P, 원판 C_2의 둘레 위의 점 Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{3}$

(나) 평면 OPQ와 원판 C_2를 포함하는 평면이 이루는 각의 크기는 60° 이다.

(다) 원판 C_2의 중심 O′에 대하여 $\overline{\mathrm{OO'}}$은 원판 C_1에서 점 O를 포함하는 지름의 원판 C_2 위로의 정사영이다.

삼각형 OPQ의 넓이를 S라 할 때, $S^2 = \dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



08. [박주혁t]

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여,

함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & (x<0) \\ f(x) & (x \geq 0) \end{cases}$$

라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $h(x)$가 다음 조건을 만족한다.

> (가) $f(0)=0$, $f(x) = f'(x) - e^{-x}$
>
> (나) 함수 $h(x)$는 모든 실수 x에 대하여 미분가능하고, 역함수가 존재한다.

$x \geq 0$ 인 구간에서 $ax^2+bx+c \leq k$를 만족하는 실수 k에 대하여, 방정식 $f(k)+f'(k)(x-k)-x=0$ 의 근을 $g(k)$라 하자.

$g(k)$는 $k=\ln 2$에서 최솟값 $m=pln2-3$를 가질 때,

이 때의 a값은 $\dfrac{-q}{rln2}$이다. $p^2+q^2+r^2$을 구하시오. [4점]

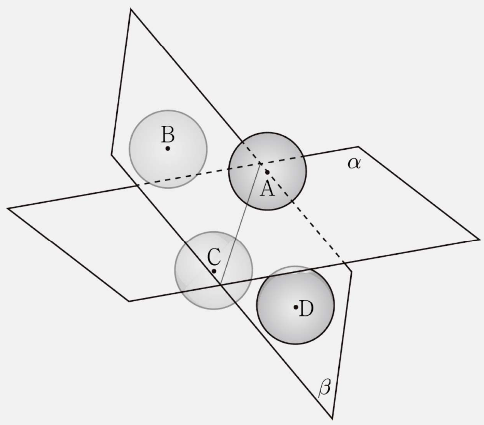
(단, p, q, r은 서로소인 정수)

09. [리듬농구]

좌표공간에서 교선이 l인 두 평면 $\alpha : z=0$, $\beta : x+\sqrt{2}y-z=0$ 에 의하여 잘려진 네 개의 영역에 반지름의 길이가 같은 네 구가 각각 두 평면 α, β에 접할 때, 네 구의 중심 A, B, C, D가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) A, C와 B, D는 각각 원점에 대하여 대칭이다.
> (나) 점 A에서 교선 l까지의 거리는 점 B에서 교선 l까지의 거리보다 작다.
> (다) 두 직선 AC, BD가 평면 α와 이루는 각의 크기를 각각 θ_1, θ_2라 하면 $\sin\theta_1 = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$, $\sin\theta_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 이다.

평면 α와 평면 ABC가 이루는 이면각의 크기를 θ라 할 때, $\tan^2\theta = \dfrac{q}{p}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



10. [리듬농구]

함수 $f(x)$ 와 연속함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $x \le 0$일 때, $f(x) = xe^{-x}$ 이다.
> (나) 모든 자연수 n에 대하여 $n-1 < x \le n$일 때,
> $f(x) = x^n e^{-x}$이다.
> (다) 모든 실수 t에 대하여 $g(t)$는 집합
> $S_t = \{x \mid f(x) \le t\}$의 원소 중 가장 큰 것이다.

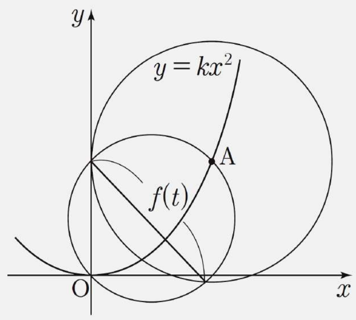
$\displaystyle\int_{f(2)}^{f(3)} g(t)\,dt = ae^{-3} + be^{-2}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.
(단, a, b는 정수이다.) [4점]

11. [리듬농구]

양수 t에 대하여 곡선 $y=kx^2$ $(k>0)$위의 점 $\mathrm{A}(t,\ kt^2)$을 중심으로 하고 y축에 접하는 원과 선분 OA를 지름으로 하는 원의 공통현의 길이를 $f(t)$라 하자. 함수

$$\int_1^x \frac{f(t)}{t}\,dt + \int_x^3 dt$$

는 $x=2$에서 최솟값 m을 갖는다. m의 값은? [4점]



① $8-2\sqrt{13}$ ② $9-2\sqrt{13}$ ③ $10-2\sqrt{13}$
④ $11-2\sqrt{13}$ ⑤ $12-2\sqrt{13}$

12. [영남권]

양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 임의의 양수 x, y에 대하여

$$f(xy)=xf(y)+yf(x)$$

이고, $f'(1)=1$이다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

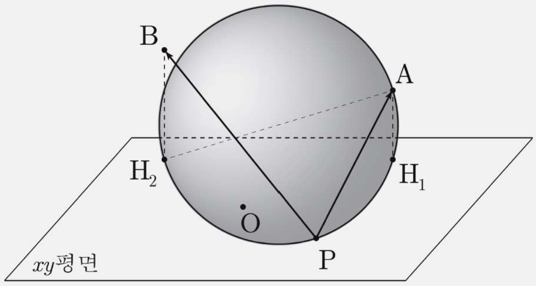
> (가) $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=g(x)$이다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x)+g(-x)=0$이다.

함수 $g(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수를 a라 할 때, 방정식 $g(x)=ax+k$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. 모든 실수 k의 값의 곱은? (단, $\lim_{x\to 0+}f(x)=0$이다.) [4점]

① -1 ② $-\frac{1}{e}$ ③ $-\frac{1}{e^2}$ ④ $\frac{1}{e}$ ⑤ 1

13. [리듬농구]

좌표공간에서 원점 O와 두 점 A, B는 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0$, $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 8$을 만족시키고 두 점 A, B에서 xy평면에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라 하자. $(\overrightarrow{\mathrm{OH_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OH_2}})^2$이 최대가 될 때, 선분 $\mathrm{AH_2}$를 지름으로 하는 구위의 임의의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최댓값은 $p + q\sqrt{5}$이다. $p^2 + q^2$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 정수이다.) [4점]



14. [박주혁t]

함수 $f(x)=\dfrac{x^3+4x}{e^x}$ 에 대하여, 함수 $g(x)$를

$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq a) \\ b-f(2a-x) & (x<a) \end{cases}$ 라 하자.

> (가) $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
>
> (나) $g(x)$가 극값이 존재하도록 하는 정수 a의 최댓값을 k라 하고, 그때의 b의 값을 l이라 하자.

함수 $g(x)$가 위의 조건을 모두 만족할 때,

$\displaystyle\int_{k-1}^{k}\{l-f(2k-x)\}dx+\int_{k}^{k+1}f(x)\,dx=\frac{p}{e^q}$ 이다.

p^2+q^2의 값을 구하시오. [4점] (단, p와 q는 정수이다.)

15. [영남권]

모든 실수 x에서 $f(x)>0$인 이차함수 $f(x)$에 대하여

$$g(x) = -\ln f(x)$$

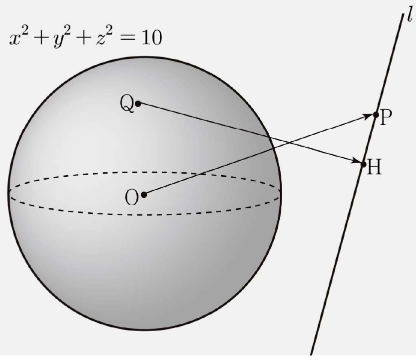
가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(1) = -\ln 18$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $g'(7) \le g'(x) \le g'(1)$이다.

함수 $h(x) = \int_x^{x+2} g(t)\,dt$가 $x=k$에서 최댓값을 가질 때, $\dfrac{k}{e^{g(0)}}$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [4점]

16. [리듬농구]

좌표공간에서 직선 l : $\frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{-2}=z+3$ 위의 점 P와 구 $x^2+y^2+z^2=10$ 위의 점 Q가 $|\overrightarrow{\mathrm{PO}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=5$를 만족시킨다. 점 Q에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QH}}$의 최댓값과 최솟값의 합은 a이다. $5a$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이다.) [4점]



수학가형 정답표

01.	10	02.	24	03.	21	04.	64	05.	②	06.	64	07.	157	08.	42
09.	44	10.	113	11.	②	12.	①	13.	128	14.	101	15.	75	16.	136