제 2 교시

수학 영역(가 형)

미 적 분Ⅱ

2018학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가 21번

1. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 = -1\,,\quad a_n = 2 - \frac{1}{2^{n-2}} \ (n \geq 2)$$

이다. 구간 $[-1,\,2)$에서 정의된 함수 $f(x)$가
모든 자연수 n에 대하여

$$f(x) = \sin\left(2^n \pi x\right) \ \left(a_n \leq x \leq a_{n+1}\right)$$

이다. $-1 < \alpha < 0$인 실수 α에 대하여 $\int_{\alpha}^{t} f(x)\,dx = 0$을
만족시키는 $t\ (0 < t < 2)$의 값의 개수가 103일 때,
$\log_2(1 - \cos(2\pi\alpha))$의 값은? [4점]

① -48　② -50　③ -52　④ -54　⑤ -56

2018학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가 30번

2. 함수 $f(x) = \ln\left(e^x + 1\right) + 2e^x$에 대하여 이차함수 $g(x)$와 실수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $h(x) = \lvert g(x) - f(x-k) \rvert$는 $x = k$에서 최솟값 $g(k)$를 갖고, 닫힌 구간 $[k-1,\, k+1]$에서 최댓값 $2e + \ln\left(\frac{1+e}{\sqrt{2}}\right)$를 갖는다.

$g'\left(k - \frac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오. (단, $\frac{5}{2} < e < 3$이다.) [4점]

2018학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가 20번

3. 양수 a와 실수 b에 대하여 함수 $f(x)=ae^{3x}+be^{x}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은? [4점]

> (가) $x_1<\ln\frac{2}{3}<x_2$를 만족시키는 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $f''(x_1)f''(x_2)<0$이다.
>
> (나) 구간 $[k, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하도록 하는 실수 k의 최솟값을 m이라 할 때, $f(2m)=-\frac{80}{9}$이다.

① -15 ② -12 ③ -9 ④ -6 ⑤ -3

2018학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가 21번

4. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여

$$F(x)=\ln|f(x)|$$

라 하고, 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여

$$G(x)=\ln|g(x)\sin x|$$

라 하자.

$$\lim_{x\to 1}(x-1)F'(x)=3\,,\ \lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\frac{1}{4}$$

일 때, $f(3)+g(3)$의 값은? [4점]

① 57 ② 55 ③ 53 ④ 51 ⑤ 49

2018학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가 30번

5. 실수 a와 함수 $f(x)=\ln(x^4+1)-c$ ($c>0$인 상수)에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 2가 되도록 하는 모든 a의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면 α_1, α_2, $\cdots$, α_m (m은 자연수)이다. $a=\alpha_1$일 때, 함수 $g(x)$와 상수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.
(나) $\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)\,dx = k\alpha_m \int_0^1 |f(x)|\,dx$

$mk\times e^c$의 값을 구하시오. [4점]

2017학년도 대학수학능력시험 20번

6. 함수 $f(x)=e^{-x}\displaystyle\int_0^x \sin(t^2)\,dt$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(\sqrt{\pi})>0$
ㄴ. $f'(a)>0$을 만족시키는 a가 열린 구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.
ㄷ. $f'(b)=0$을 만족시키는 b가 열린 구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2017학년도 대학수학능력시험 21번

7. 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 증가하는 연속함수 $f(x)$가

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 2\,,\ \int_0^1 |f(x)|\,dx = 2\sqrt{2}$$

를 만족시킨다. 함수 $F(x)$가

$$F(x) = \int_0^x |f(t)|\,dt \quad (0 \le x \le 1)$$

일 때, $\int_0^1 f(x)F(x)\,dx$의 값은? [4점]

① $4-\sqrt{2}$ ② $2+\sqrt{2}$ ③ $5-\sqrt{2}$
④ $1+2\sqrt{2}$ ⑤ $2+2\sqrt{2}$

2017학년도 대학수학능력시험 30번

8. $x > a$에서 정의된 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. (단, a는 상수이다.)

> (가) $x > a$인 모든 실수 x에 대하여 $(x-a)f(x) = g(x)$이다.
> (나) 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $f(x)$는 $x = \alpha$와 $x = \beta$에서 동일한 극댓값 M을 갖는다. (단, $M > 0$)
> (다) 함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수보다 많다.

$\beta - \alpha = 6\sqrt{3}$일 때, M의 최솟값을 구하시오. [4점]

2017학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가 21번

9. 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' = x^2 e^{-x^2}$
>
> (나) $g(x) = \dfrac{4}{e^4}\displaystyle\int_1^x e^{t^2} f(t)\,dt$

$f(1) = \dfrac{1}{e}$일 때, $f(2) - g(2)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{16}{3e^4}$ ② $\dfrac{6}{e^4}$ ③ $\dfrac{20}{3e^4}$ ④ $\dfrac{22}{3e^4}$ ⑤ $\dfrac{8}{e^4}$

2017학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가 30번

10. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x) = |2\sin(x + 2|x|) + 1|$$

에 대하여 함수 $h(x) = f(g(x))$는 실수 전체의 집합에서 이계도함수 $h''(x)$를 갖고, $h''(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f'(3)$의 값을 구하시오. [4점]

2017학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가 21번

11. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x) \neq 1$
(나) $f(x)+f(-x)=0$
(다) $f'(x)=\{1+f(x)\}\{1+f(-x)\}$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \neq -1$이다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 어떤 열린 구간에서 감소한다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$는 세 개의 변곡점을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2017학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가 30번

12. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 상수 $a\,(0<a<2\pi)$와 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=f(-x)$
(나) $\displaystyle\int_{x}^{x+a} f(t)\,dt=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

닫힌 구간 $\left[0,\ \frac{a}{2}\right]$에서 두 실수 b, c에 대하여

$$f(x)=b\cos(3x)+c\cos(5x)$$

일 때, $abc=-\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2016학년도 대학수학능력시험 21번

13. $0 < t < 41$인 실수 t에 대하여 곡선 $y = x^3 + 2x^2 - 15x + 5$와 직선 $y = t$가 만나는 세 점 중에서 x좌표가 가장 큰 점의 좌표를 $(f(t),\ t)$, x좌표가 가장 작은 점의 좌표를 $(g(t),\ t)$라 하자. $h(t) = t \times \{f(t) - g(t)\}$라 할 때, $h'(5)$의 값은? [4점]

① $\frac{79}{12}$　② $\frac{85}{12}$　③ $\frac{91}{12}$　④ $\frac{97}{12}$　⑤ $\frac{103}{12}$

2016학년도 대학수학능력시험 30번

14. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \le b$일 때, $f(x) = a(x-b)^2 + c$이다.
(단, a, b, c는 상수이다.)

(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) = \int_0^x \sqrt{4 - 2f(t)}\,dt$이다.

$\int_0^6 f(x)\,dx = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2016학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가 21번

15. 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} |\sin x|-\sin x & \left(-\frac{7}{2}\pi \le x < 0\right) \\ \sin x-|\sin x| & \left(0 \le x \le \frac{7}{2}\pi\right) \end{cases}$$

라 하자. 닫힌 구간 $\left[-\frac{7}{2}\pi,\ \frac{7}{2}\pi\right]$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $\int_a^x f(t)\,dt \ge 0$이 되도록 하는 실수 a의 최솟값을 α, 최댓값을 β라 할 때, $\beta-\alpha$의 값은? (단, $-\frac{7}{2}\pi \le a \le \frac{7}{2}\pi$) [4점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ $\frac{5}{2}\pi$ ④ $\frac{7}{2}\pi$ ⑤ $\frac{9}{2}\pi$

2016학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가 30번

16. 양수 a와 두 실수 b, c에 대하여 함수 $f(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^x$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)$는 $x=-\sqrt{3}$과 $x=\sqrt{3}$에서 극값을 갖는다.
(나) $0 \le x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_2)-f(x_1)+x_2-x_1 \ge 0$이다.

세 수 a, b, c의 곱 abc의 최댓값을 $\frac{k}{e^3}$라 할 때, $60k$의 값을 구하시오. [4점]

2016학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가 21번

17. 2 이상의 자연수 n에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=e^{x+1}\{x^2+(n-2)x-n+3\}+ax$$

가 역함수를 갖도록 하는 실수 a의 최솟값을 $g(n)$이라 하자. $1 \le g(n) \le 8$을 만족시키는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 43 ② 46 ③ 49 ④ 52 ⑤ 55

2016학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가 30번

18. 정의역이 $\{x \mid 0 \le x \le 8\}$이고 다음 조건을 만족시키는 모든 연속함수 $f(x)$에 대하여 $\displaystyle\int_0^8 f(x)\,dx$의 최댓값은 $p+\dfrac{q}{\ln 2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 자연수이고, $\ln 2$는 무리수이다.) [4점]

(가) $f(0)=1$이고 $f(8) \le 100$이다.
(나) $0 \le k \le 7$인 각각의 정수 k에 대하여
$$f(k+t)=f(k) \quad (0<t\le 1)$$
또는
$$f(k+t)=2^t \times f(k) \quad (0<t\le 1)$$
이다.
(다) 열린 구간 $(0,\,8)$에서 함수 $f(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.

2015학년도 대학수학능력시험 30번

19. 함수 $f(x)=e^{x+1}-1$과 자연수 n에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=100|f(x)|-\sum_{k=1}^{n}|f(x^k)|$$

이라 하자. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

2015학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가 30번

20. 양의 실수 전체의 집합에서 감소하고 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다.
(나) 임의의 양의 실수 t에 대하여 세 점
$(0,\ 0),\ (t,\ f(t)),\ (t+1,\ f(t+1))$
을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 $\dfrac{t+1}{t}$이다.
(다) $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx=2$

$\displaystyle\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x}dx=\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

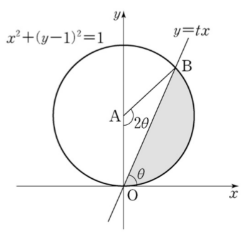
2015학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가 21번

21. 양의 실수 t에 대하여 좌표평면에서 x, y에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2 \le 1 \\ y \le tx \end{cases}$$

가 나타내는 영역의 넓이를 $f(t)$라 하자. 다음은 $f'(2)$의 값을 구하는 과정이다.

원 C: $x^2+(y-1)^2=1$의 중심을 A, 원 C와 직선 l: $y=tx$가 만나는 두 점을 각각 O, B라 하자. 직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면



$\angle\mathrm{OAB}=2\theta$이다. 주어진 연립부등식이 나타내는 영역의 넓이를 $g(\theta)$라 하면

$g(\theta)=\theta-$ $\boxed{\text{(가)}}$

이다. $t=\tan\theta$이므로 $g(\theta)=f(t)=f(\tan\theta)$이고, 합성함수의 미분법에 의하여

$g'(\theta)=f'(t)\times$ $\boxed{\text{(나)}}$

이다.

$t=2$일 때, $\tan\theta=2$이므로 $f'(2)=$ $\boxed{\text{(다)}}$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $h_1(\theta)$, $h_2(\theta)$라 하고 (다)에 알맞은 수를 a라 할 때, $a\times h_1\left(\frac{\pi}{4}\right)\times h_2\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{8}{25}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{12}{25}$ ④ $\frac{14}{25}$ ⑤ $\frac{16}{25}$

2015학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가 30번

22. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $1 \le f'(x) \le 3$이다.
(나) 모든 정수 n에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(4n, 8n)$, 점 $(4n+1, 8n+2)$, 점 $(4n+2, 8n+5)$, 점 $(4n+3, 8n+7)$을 모두 지난다.
(다) 모든 정수 k에 대하여 닫힌 구간 $[2k, 2k+1]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 각각 이차함수의 그래프의 일부이다.

$\int_3^6 f(x)\,dx=a$라 할 때, $6a$의 값을 구하시오. [4점]

2014학년도 대학수학능력시험 21번

23. 연속함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이고, 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=\frac{\pi}{2}\int_{1}^{x+1} f(t)\,dt$$

이다. $f(1)=1$일 때,

$$\pi^2\int_{0}^{1} xf(x+1)\,dx$$

의 값은? [4점]

① $2(\pi-2)$ ② $2\pi-3$ ③ $2(\pi-1)$
④ $2\pi-1$ ⑤ 2π

2014학년도 대학수학능력시험 30번

24. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)e^{-x}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 $(1,\ g(1))$과 점 $(4,\ g(4))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.
(나) 점 $(0,\ k)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 접선의 개수가 3인 k의 값의 범위는 $-1<k<0$이다.

$g(-2)\times g(4)$의 값을 구하시오. [4점]

2014학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가 30번

25. 두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$g\left(e^{x}\right)=\begin{cases} f(x) & (0 \le x < 1) \\ g\left(e^{x-1}\right)+5 & (1 \le x \le 2) \end{cases}$$

를 만족시키고, $\int_{1}^{e^2} g(x)\,dx = 6e^2+4$ 이다.

$\int_{1}^{e} f(\ln x)\,dx = ae+b$ 일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

(단, a, b는 정수이다.) [4점]

2014학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가 27번

26. 함수 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ 에 대하여

$$F(x)=\int_{0}^{x} t f(x-t)\,dt \quad (x \le 0)$$

일 때, $F'(a)=\ln 10$ 을 만족시키는 상수 a의 값을 구하시오.

[4점]

2014학년도 대학수학능력시험 예비 시행 21번

27. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-1 \le x < 1$일 때 $f(x) = \dfrac{(x^2-1)^2}{x^4+1}$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 4\int_{0}^{1} f(x)\,dx$
ㄴ. $1 < x < 2$일 때 $f'(x) > 0$이다.
ㄷ. $\displaystyle\int_{1}^{3} x|f'(x)|\,dx = 4$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

확률과 통계

2018학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가 20번

28. 다음은 n명의 사람이 각자 세 상자 A, B, C 중 2개의 상자를 선택하여 각 상자에 공을 하나씩 넣을 때, 세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우의 수를 구하는 과정이다. (단, n은 6의 배수인 자연수이고 공은 구별하지 않는다.) [4점]

세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우는 '(i) 세 상자에 공이 들어가는 모든 경우'에서 '(ii) 세 상자에 모두 같은 개수의 공이 들어가는 경우'와 '(iii) 세 상자 중 두 상자에만 같은 개수의 공이 들어가는 경우'를 제외하면 된다.

(i)의 경우 :
n명의 사람이 각자 세 상자 중 공을 넣을 두 상자를 선택하는 경우의 수는 n명의 사람이 각자 공을 넣지 않을 한 상자를 선택하는 경우의 수와 같다. 따라서 세 상자에 중복을 허락하여 n개의 상자를 선택하는 경우의 수인 (가) 이다.

(ii)의 경우 :
각 상자에 $\dfrac{2n}{3}$개의 공이 들어가는 경우뿐이므로 경우의 수는 1이다.

(iii)의 경우 :
두 상자 A, B에 같은 개수의 공이 들어가면 상자 C에는 최대 n개의 공을 넣을 수 있으므로 두 상자 A, B에 각각 $\dfrac{n}{2}$개보다 작은 개수의 공이 들어갈 수 없다. 따라서 두 상자 A, B에 같은 개수의 공이 들어가는 경우의 수는 (나) 이다.
그러므로 세 상자 중 두 상자에만 같은 개수의 공이 들어가는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2 \times ($ (나) $-1)$이다.

따라서 세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우의 수는 (다) 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$이라 할 때, $\dfrac{f(30)}{g(30)} + h(30)$의 값은? [4점]

① 481 ② 491 ③ 501 ④ 511 ⑤ 521

2014학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가 20번

29. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $G(t)$는 평균이 t, 표준편차가 $\frac{1}{t^2}$인 정규분포를 따르는 확률변수 X에 대하여

$$G(t)=\mathrm{P}\left(X \le \frac{3}{2}\right)$$

이다. 함수 $G(t)$의 최댓값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.4	0.1554
0.5	0.1915
0.6	0.2257
0.7	0.2580

① 0.3085 ② 0.3446 ③ 0.6915 ④ 0.7257 ⑤ 0.7580

평면 곡선

2017학년도 대학수학능력시험 19번

30. 두 양수 k, p에 대하여 점 $\mathrm{A}(-k, 0)$에서 포물선 $y^2=4px$에 그은 두 접선이 y축과 만나는 두 점을 각각 F, F', 포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 할 때, $\angle\mathrm{PAQ}=\frac{\pi}{3}$이다. 두 점 F, F'을 초점으로 하고 두 점 P, Q를 지나는 타원의 장축의 길이가 $4\sqrt{3}+12$일 때, $k+p$의 값은? [4점]

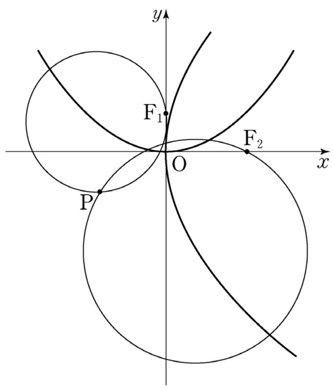
① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

2015학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가 28번

31. 좌표평면에서 포물선 $C_1 : x^2 = 4y$의 초점을 F_1, 포물선 $C_2 : y^2 = 8x$의 초점을 F_2라 하자. 점 P는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 중심이 C_1 위에 있고 점 F_1을 지나는 원과
> 중심이 C_2 위에 있고 점 F_2를 지나는 원의 교점이다.
> (나) 제3사분면에 있는 점이다.

원점 O에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}^2$의 최댓값을 구하시오. [4점]



2014학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가 29번

32. 좌표평면에서 포물선 $y^2 = 16x$ 위의 점 A에 대하여 점 B는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 점 A가 원점이면 점 B도 원점이다.
> (나) 점 A가 원점이 아니면 점 B는 점 A, 원점 그리고
> 점 A에서의 접선이 y축과 만나는 점을 세 꼭짓점으로
> 하는 삼각형의 무게중심이다.

점 A가 포물선 $y^2 = 16x$ 위를 움직일 때 점 B가 나타내는 곡선을 C라 하자. 점 $(3,\ 0)$을 지나는 직선이 곡선 C와 두 점 P, Q에서 만나고 $\overline{\mathrm{PQ}} = 20$일 때, 두 점 P, Q의 x좌표의 값의 합을 구하시오. [4점]

평면 벡터

2018학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가 29번

33. 좌표평면에서 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 한 점을 A, 중심이 O이고 반지름의 길이가 3인 원 위의 한 점을 B라 할 때, 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} = 3\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}$
> (나) $|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 = 20$

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$의 최솟값은 m이고 이때 $|\overrightarrow{OP}| = k$이다. $m + k^2$의 값을 구하시오. [4점]

2017학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가 29번

34. 양의 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(t)$에 대하여 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 1)$에서의 위치 $(x,\ y)$가

$$\begin{cases} x = 2\ln t \\ y = f(t) \end{cases}$$

이다. 점 P가 점 $(0,\ f(1))$로부터 움직인 거리가 s가 될 때 시각 t는 $t = \dfrac{s + \sqrt{s^2+4}}{2}$이고, $t = 2$일 때 점 P의 속도는 $\left(1,\ \dfrac{3}{4}\right)$이다. 시각 $t = 2$일 때 점 P의 가속도를 $\left(-\dfrac{1}{2},\ a\right)$라 할 때, $60a$의 값을 구하시오. [4점]

2014학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가 21번

35. 자연수 n에 대하여 함수 $y=f(x)$를 매개변수 t로 나타내면

$$\begin{cases} x=e^t \\ y=(2t^2+nt+n)e^t \end{cases}$$

이고, $x \geq e^{-\frac{n}{2}}$일 때 함수 $y=f(x)$는 $x=a_n$에서 최솟값 b_n을 갖는다. $\frac{b_3}{a_3}+\frac{b_4}{a_4}+\frac{b_5}{a_5}+\frac{b_6}{a_6}$의 값은? [4점]

① $\frac{23}{2}$ ② 12 ③ $\frac{25}{2}$ ④ 13 ⑤ $\frac{27}{2}$

2014학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가 30번

36. 좌표평면에서 곡선 $y=x^2+x$ 위의 두 점 A, B의 x좌표를 각각 s, t $(0<s<t)$라 하자. 양수 k에 대하여 두 직선 OA, OB와 곡선 $y=x^2+x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 k가 되도록 하는 점 (s, t)가 나타내는 곡선을 C라 하자. 곡선 C 위의 점 중에서 점 $(1, 0)$과의 거리가 최소인 점의 x좌표가 $\frac{2}{3}$일 때, $k=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

공간 도형, 공간 벡터

2018학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가 29번

37. 좌표공간에 세 점 $\mathrm{O}(0, 0, 0)$, $\mathrm{A}(1, 0, 0)$, $\mathrm{B}(0, 0, 2)$가 있다. 점 P가 $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = 0$, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| \leq 4$를 만족시키며 움직일 때,

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = 1, \quad \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

을 만족시키는 두 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M+m = a+b\sqrt{5}$일 때, $6(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]

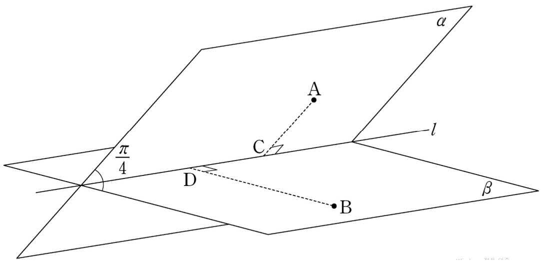
2017학년도 대학수학능력시험 29번

38. 한 모서리의 길이가 4인 정사면체 ABCD에서 삼각형 ABC의 무게중심을 O, 선분 AD의 중점을 P라 하자. 정사면체 ABCD의 한 면 BCD 위의 점 Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 서로 수직일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점]

2017학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가 29번

39. 그림과 같이 직선 l을 교선으로 하고 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 두 평면 α와 β가 있고, 평면 α 위의 점 A와 평면 β 위의 점 B가 있다. 두 점 A, B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{3}$이고 직선 AB와 평면 β가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$일 때, 사면체 ABCD의 부피는 $a+b\sqrt{2}$이다. $36(a+b)$의 값을 구하시오.
(단, a, b는 유리수이다.) [4점]

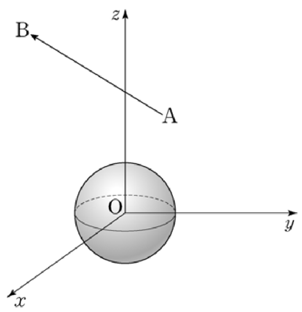


2016학년도 대학수학능력시험 29번

40. 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(2,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3})$, $\mathrm{B}(1,\ -\sqrt{2},\ 2\sqrt{3})$에 대하여 점 P는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=1$
(나) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{6}$이다.

중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 구 위의 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$의 최댓값이 $a+b\sqrt{33}$이다. $16(a^2+b^2)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]

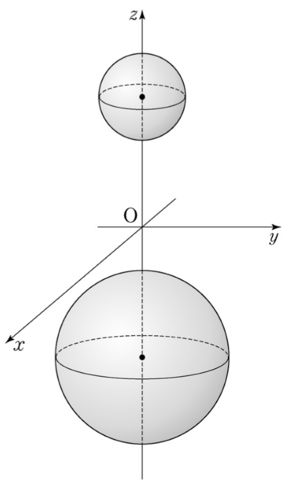


2016학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가 29번

41. 좌표공간에 두 개의 구

$$S_1 : x^2+y^2+(z-3)^2=1\,,\ \ S_2 : x^2+y^2+(z+3)^2=4$$

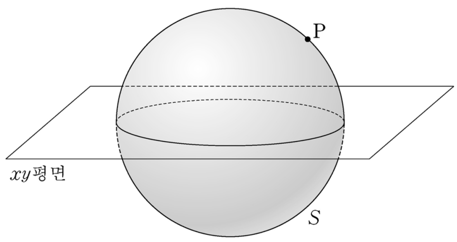
가 있다. 점 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{6},\ 0\right)$을 포함하고 S_1과 S_2에 동시에 접하는 평면을 α라 하자. 점 $\mathrm{Q}(k,\ -\sqrt{3}\,,\ 2)$가 평면 α 위의 점일 때 $120k$의 값을 구하시오. [4점]



2015학년도 대학수학능력시험 29번

42. 좌표공간에 구 $S : x^2+y^2+z^2=50$과 점 $\mathrm{P}(0,\ 5,\ 5)$가 있다. 다음 조건을 만족시키는 모든 원 C에 대하여 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 $\frac{q}{p}\pi$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(가) 원 C는 점 P를 지나는 평면과 구 S가 만나서 생긴다. (나) 원 C의 반지름의 길이는 1이다.

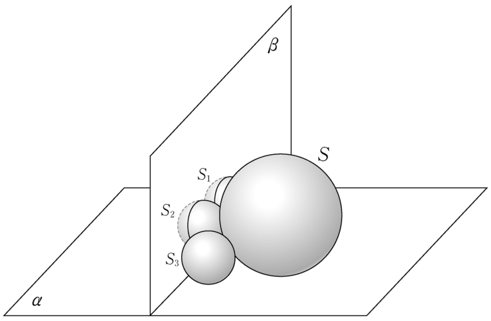


2015학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가 29번

43. 그림과 같이 평면 α 위에 놓여 있는 서로 다른 네 구 S, S_1, S_2, S_3이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) S의 반지름의 길이는 3이고, S_1, S_2, S_3의 반지름의 길이는 1이다.
> (나) S_1, S_2, S_3은 모두 S에 접한다.
> (다) S_1은 S_2와 접하고 S_2는 S_3과 접한다.

S_1, S_2, S_3의 중심을 각각 O_1, O_2, O_3이라 하자. 두 점 O_1, O_2를 지나고 평면 α에 수직인 평면을 β, 두 점 O_2, O_3을 지나고 평면 α에 수직인 평면이 S_3과 만나서 생기는 단면을 D라 하자. 단면 D의 평면 β 위로의 정사영의 넓이를 $\frac{q}{p}\pi$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



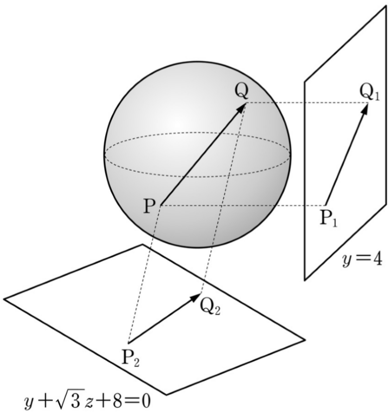
2014학년도 대학수학능력시험 19번

44. 좌표공간에서 중심의 x좌표, y좌표, z좌표가 모두 양수인 구 S가 x축과 y축에 각각 접하고 z축과 서로 다른 두 점에서 만난다. 구 S가 xy평면과 만나서 생기는 원의 넓이가 64π이고 z축과 만나는 두 점 사이의 거리가 8일 때, 구 S의 반지름의 길이는? [4점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

2014학년도 대학수학능력시험 29번

45. 좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=4$ 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 두 점 P, Q에서 평면 $y=4$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{Q_1}$이라 하고, 평면 $y+\sqrt{3}z+8=0$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{P_2}$, $\mathrm{Q_2}$라 하자. $2|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}|^2$의 최댓값을 구하시오. [4점]



2014학년도 대학수학능력시험 예비 시행 30번

46. 반지름의 길이가 2인 구의 중심 O를 지나는 평면을 α라 하고, 평면 α와 이루는 각이 $45°$인 평면을 β라 하자. 평면 α와 구가 만나서 생기는 원을 C_1, 평면 β와 구가 만나서 생기는 원을 C_2라 하자. 원 C_2의 중심 A와 평면 α 사이의 거리가 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$일 때, 그림과 같이 다음 조건을 만족하도록 원 C_1 위에 점 P, 원 C_2 위에 두 점 Q, R를 잡는다.

(가) $\angle\mathrm{QAR}=90°$ (나) 직선 OP와 직선 AQ는 서로 평행하다.

평면 PQR와 평면 AQPO가 이루는 각을 θ라 할 때, $\cos^2\theta=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]