

5지선다형

1. 함수 $f(x) = -4x^3 + 6x - 1$ 과 모든 실수 m 에 대하여 방정식

$\int_0^x f(t)dt = mx$ 를 만족시키는 x 의 최솟값과 최댓값을 각각

$g_1(m), g_2(m)$ 이라 하고, $g_1(m) < c < g_2(m) + 1$ 일 때,

$$\frac{\int_0^{g_2(m)} f(t)dt - \int_0^{g_1(m)} f(t)dt}{g_2(m) - g_1(m)} = f(c)$$

을 만족시키는 서로 다른 모든 실수 c 의 개수를 $h(m)$ 이라 하자. 함수 $h(m)$ 이 $m=k$ 에서 불연속인 모든 실수 k 의 값의 합은 $\sqrt{a}-b$ 이다. a^2+b^2 의 값을 구하시오.
(단, a, b 는 자연수이다.) [4점] 1)

1)

$\int_0^x f(t)dt = F(x)$ 라 하면, $F(0)=0$ 이고 $f(x)=-4x^3+6x-1$ 이므로

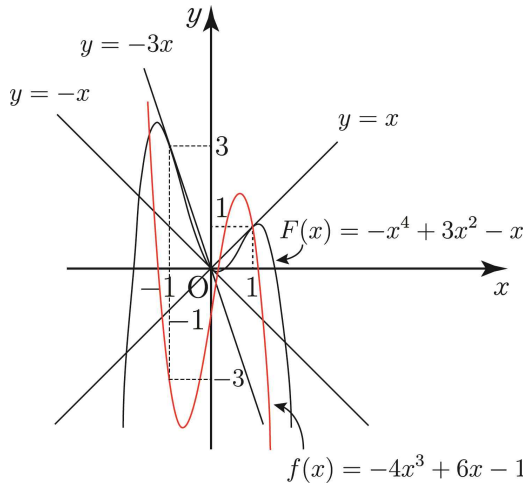
$F(x)=-x^4+3x^2-x$ 이다.

$$\frac{\int_0^{g_2(m)} f(t)dt - \int_0^{g_1(m)} f(t)dt}{g_2(m) - g_1(m)} = f(c) \Leftrightarrow \frac{F(g_2(m)) - F(g_1(m))}{g_2(m) - g_1(m)} = F'(c)$$

이므로 x 의 값이 $g_1(m)$ 에서 $g_2(m)$ 까지 변할 때 함수 $F(x)$ 의 평균변화율과 $x=c$ 에서 함수 $F(x)$ 의 기울기가 서로 같도록 하고 $g_1(m) < c < g_2(m)+1$ 을 만족시키는 서로 다른 모든 실수 c 의 개수가 $h(m)$ 이다.

한편, $F(0)=0$ 이고 $y=mx$ 가 $(0,0)$ 을 지나므로 한 교점은 $(0,0)$ 이다. 곡선 $y=F(x)$ 위의 점 $(a, F(a))$ 에서의 접선이 $(0,0)$ 을 지나는 경우, 즉 $0=f(a)(0-a)+F(a)$ 인 경우는 $3a(a+1)(a-1)=0$ 이므로 $a=0$ 또는 $a=1$ 또는 $a=-1$ 일 때이다.

$F'(0)=f(0)=-1$, $F'(1)=f(1)=1$, $F'(-1)=f(-1)=-3$ 이고 $F(0)=0$, $F(1)=1$, $F(-1)=3$ 이므로 $y=F(x)$ 와 $y=f(x)$ 의 개형은 다음과 같다.



$f'(x)=-12x^2+6=0$ 을 만족시키는 x 는 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로

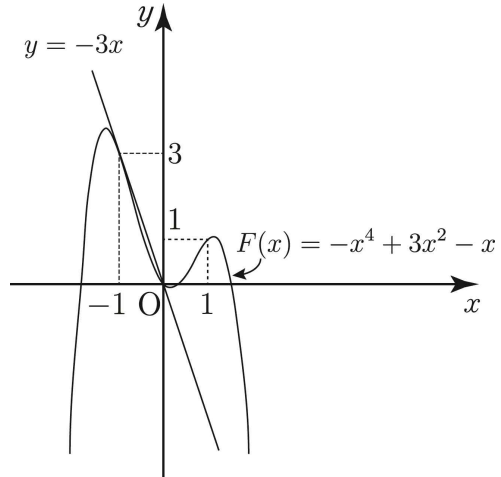
함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 에서 극댓값 $\sqrt{8}-1$ 을 가지고, $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

에서 극솟값 $-\sqrt{8}-1$ 을 가진다.

따라서 $-\sqrt{8}-1 < \alpha < \sqrt{8}-1$ 인 실수 α 에 대하여 $y=F(x)$ 위의 점 중에서 기울기가 α 인 서로 다른 점의 개수는 3, 기울기가 $-\sqrt{8}-1$ 또는 $\sqrt{8}-1$ 인 서로 다른 점의 개수는 2, $-\sqrt{8}-1 > \alpha$ 또는 $\sqrt{8}-1 < \alpha$ 인 모든 실수 α 에 대하여 $y=F(x)$ 위의 점 중에서 기울기가 α 인 서로 다른 점의 개수는 1이다. 따라서 $m=\sqrt{8}-1$ 또는 $m=-\sqrt{8}-1$ 일 때 $h(m)$ 이 불연속일 가능성이 있다.

($x < 0$ 에서 $F(x)=mx$ 의 실근은 $-3 \leq m$ 일 때 존재하고, $x > 0$ 에서 $F(x)=mx$ 의 실근은 $m \leq 1$ 일 때 존재한다.)

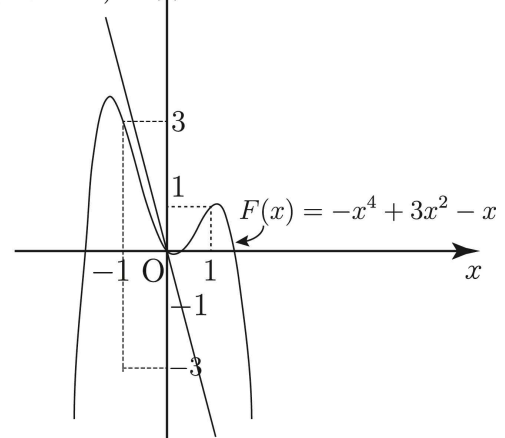
i) $m=-3$ 일 때



$g_1(-3)=-1$ 이고 $y=-3x$ 가 $x=-1$ 에서 $y=F(x)$ 에 접하지만 $g_1(-3) < c < g_2(-3)+1$ 이므로 c 가 -1 일 수 없다. 따라서 $-1 < c < 0$ 일 때와 $0 < c < g_2(-3)+1$ 일 때 조건을 만족시키는 c 가 1개씩 존재하므로 $h(-3)=2$ 이다.

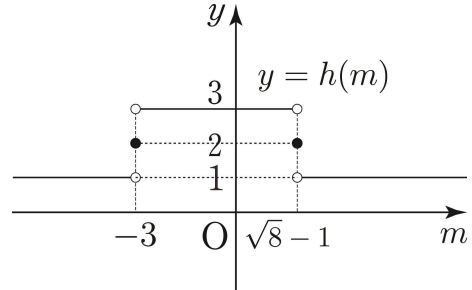
ii) $m=-\sqrt{8}-1$ 일 때

$$y = (-\sqrt{8}-1)x$$



$0 < c < g_2(-\sqrt{8}-1)+1$ 인 c 에 대하여 조건을 만족시키는 c 가 1개 존재하므로 $h(-\sqrt{8}-1)=1$ 이다.

같은 방식으로 구해보면 $y=h(m)$ 의 그래프는 다음과 같다.



따라서 $x=-3$, $x=\sqrt{8}-1$ 에서 불연속이므로 모든 불연속점의 x 좌표의 합은 $\sqrt{8}-4$ 이다. 따라서 $a=8$, $b=4$ 이므로 $a^2+b^2=80$ 이다.