

01

[풀이]

지수법칙에 의하여

$$3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}} = 3$$

답 ③

02

[풀이]

두 집합 A, B 에 모두 속하는 원소는 1, 3이므로

$$A \cap B = \{1, 3\}$$

따라서 구하는 값은 4이다.

답 ①

03

[풀이]

$f^{-1}(4) = a$ 로 두면 역함수의 성질에 의하여

$$f(a) = 4$$

$$\therefore a = 3$$

답 ③

04

[풀이]

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \times 3^{n+1} + 1}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(12 + \left(\frac{1}{3} \right)^n \right) = 12 + 0 = 12$$

답 ⑤

05

[풀이]

$x \rightarrow 0+$ 일 때, $f(x)$ 는 0보다 큰 값을 가지면서 0에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0$$

$x \rightarrow 0-$ 일 때, $f(x)$ 는 0보다 큰 값을 가지면서 0에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 0$$

$x = 0$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 좌극한과 우극한이 0으로 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$x \rightarrow 1+$ 일 때, $f(x)$ 는 2보다 작은 값을 가지면서 2에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 0 + 2 = 2$$

답 ④

06

[풀이]

원순열의 수를 구하는 공식에 의하여

구하는 경우의 수는

$$\frac{{}_5P_5}{5} = \frac{5!}{5} = 4! = 24$$

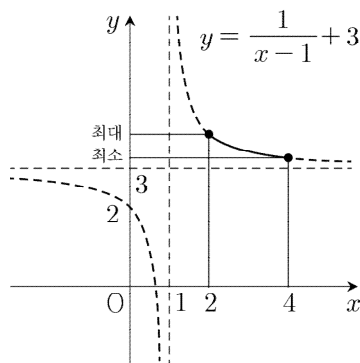
답 ④

07

[풀이]

유리함수 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동시키면 유리함수

$y = \frac{1}{x-1} + 3$ 의 그래프와 일치한다.



닫힌구간 $[2, 4]$ 에서 함수 $y = \frac{1}{x-1} + 3$ 은

$x = 2$ 일 때, 최댓값 4를 갖는다.

답 ②

08

[풀이]

적분과 미분의 관계에 의하여

$$f'(x) = (x-2)(x-3)$$

$$\therefore f'(4) = 2 \times 1 = 2$$

답 ②

09

[풀이]

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라고 하면

$$P = \{x | x \neq -2, x \neq 4\},$$

$$Q = \{x | -2 \leq x \leq 4\}$$

(단, P, Q 는 실수 전체의 집합의 부분집합이다.)

두 조건 $\sim p, \sim q$ 의 진리집합은 각각

$$P^C = \{-2, 4\},$$

$$Q^C = \{x | x < -2 \text{ 또는 } x > 4\}$$

① (거짓)

$P \not\subset Q$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.

반례로 $x = 5$ 를 생각할 수 있다.

즉, $5 \in P$ 이지만 $5 \notin Q$ 이다.

② (거짓)

$P^C \not\subset Q^C$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.

반례로 $x = -2$ 를 생각할 수 있다.

즉, $-2 \in P^C$ 이지만 $-2 \notin Q^C$ 이다.

③ (거짓)

$Q \not\subset P^C$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.

반례로 $x = 0$ 을 생각할 수 있다.

즉, $0 \in Q$ 이지만 $0 \notin P^C$ 이다.

④ (거짓)

④에서 주어진 명제는 ②에서 주어진 명제의 대우이다.

②의 명제가 거짓이므로 ④의 명제도 거짓이다.

⑤ (참)

$P^C \subset Q$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

이상에서 참인 명제는 ⑤뿐이다.

답 ⑤

10

[풀이]

검은색 공이 뽑히는 사건을 A , 짝수가 적힌 공이 뽑히는 사건을 B 라고 하자.

수학적 확률의 정의에 의하여

$$P(A) = \frac{9}{14}, P(A \cap B) = \frac{4}{14}$$

조건부 확률을 구하는 공식에 의하여

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{14}}{\frac{9}{14}} = \frac{4}{9}$$

답 ⑤

[참고]

(단위:개)			
구분	검은색	흰색	합계
홀수	5	3	8
짝수	$4 = n(A \cap B)$	2	6
합계	$9 = n(A)$	5	14

조건부 확률을 수학적 확률의 정의대로 구하면

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{4}{9}$$

11

[풀이]

시그마의 성질에 의하여

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{10} 10 = 10 \times 10 = 100 \quad \cdots \textcircled{1}$$

문제에서 주어진 등식을 다시 쓰면

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k + 2b_k) = 160 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} - \textcircled{1}$ 을 하면, 시그마의 성질에 의하여

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} b_k = 60$$

답 ①

12

[풀이]

함수 $f(x)$ 를 3차함수로 가정하자.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$$

조건 (가)에서

$$\frac{f(x)}{x^2} = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2} \text{ 이므로}$$

$$a > 0 \text{ 이면 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = \infty \text{ 이고,}$$

$$a < 0 \text{ 이면 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = -\infty \text{ 이다.}$$

이는 가정에 모순이므로 $f(x)$ 는 3차함수가 아니다.

함수 $f(x)$ 를 4차이상의 함수로 가정했을 때에도 동일한 모순이 발생한다.

따라서 $f(x)$ 는 1차 또는 2차함수이다.

함수 $f(x)$ 가 1차함수라고 가정하자.

$$f(x) = ax + b (a \neq 0)$$

조건 (가)에서

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} \right) = 0 \neq 2$$

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.

<http://atom.ac/books/3888>

이는 가정에 모순이므로 $f(x)$ 는 2차함수이다.

$$f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$$

조건 (가)에서

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} \right) = a = 2$$

함수 $f(x)$ 의 방정식은

$$f(x) = 2x^2 + bx + c$$

조건 (나)에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x + b + \frac{c}{x} \right) = 3$$

그런데 $\lim_{x \rightarrow 0} (2x + b) = b$ 이므로

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{c}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x + b + \frac{c}{x} \right) - \lim_{x \rightarrow 0} (2x + b) \\ &= 3 - b \end{aligned}$$

이때,

$$c > 0 \text{ 이면 } \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{c}{x} = \infty, \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{c}{x} = -\infty,$$

$$c < 0 \text{ 이면 } \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{c}{x} = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{c}{x} = \infty$$

이므로 $c = 0$ 이다.

이를 ㉠에 대입하면 $b = 3$ 이다.

함수 $f(x)$ 의 방정식은

$$f(x) = 2x^2 + 3x$$

$$\therefore f(2) = 14$$

답 ②

[참고]

함수 $f(x)$ 가 2차함수임을 엄밀하게 증명하면 다음과 같다.

함수 $f(x)$ 의 방정식을

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

으로 두자. (단, $a_n \neq 0$)

$n \geq 3$ 이라고 가정하자.

조건 (가)에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(a_n x^{n-2} + \frac{a_{n-1}}{x^{3-n}} + \dots + \frac{a_1}{x} + \frac{a_0}{x^2} \right) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n-1}}{x^{3-n}} + \dots + \frac{a_1}{x} + \frac{a_0}{x^2} \right) \text{은 수렴하고,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^{n-2} = \infty (a_n > 0 \text{인 경우}),$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^{n-2} = -\infty (a_n < 0 \text{인 경우})$$

이므로, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2}$ 은 발산한다.

이는 가정에 모순이므로 $n = 1$ 또는 $n = 2$ 이다.

$n = 1$ 이라고 가정하자.

함수 $f(x)$ 의 방정식을

$$f(x) = ax + b (a \neq 0)$$

으로 두면, 조건 (가)에서

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} \right) = 0 \neq 2$$

이는 가정에 모순이므로 $n = 2$ 이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 2차함수이다.

13

[풀이]

로그의 밑의 변환 공식에 의하여

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} = \frac{\log_2 5}{\log_3 5} = \frac{\frac{\log_5 5}{\log_5 2}}{\frac{\log_5 5}{\log_5 3}} = \frac{\log_5 3}{\log_5 2}$$

$$= \frac{\frac{1}{\log_5 2}}{\frac{1}{\log_5 3}} = \frac{\log_5 3}{\log_5 2} = \log_2 3$$

답 ④

14

[풀이]

확률변수 X 가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르므로

확률변수 $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ 는 표준정규분포 $N(0, 1^2)$ 을

따른다.

$$P(m \leq X \leq m+12)$$

$$= P\left(\frac{m-m}{\sigma} \leq Z \leq \frac{m+12-m}{\sigma}\right)$$

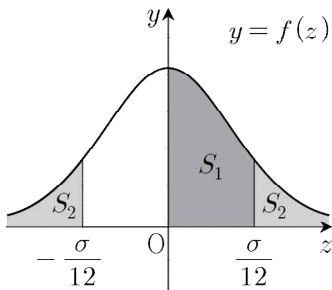
$$= P\left(0 \leq Z \leq \frac{12}{\sigma}\right) (= S_1 \text{으로 두자.})$$

$$P(X \leq m-12) = P\left(Z \leq \frac{m-12-m}{\sigma}\right)$$

$$=P\left(Z \leq -\frac{12}{\sigma}\right) (=S_2 \text{로 두자.})$$

문제에서 주어진 등식을 다시 쓰면

$$S_1 - S_2 = 0.3664 \quad \dots (*)$$



그런데

$$P\left(Z \leq -\frac{12}{\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{12}{\sigma}\right) \text{이고,}$$

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{12}{\sigma}\right) + P\left(Z \geq \frac{12}{\sigma}\right) = \frac{1}{2}$$

이므로, (*)을 다시 쓰면

$$2S_1 - (S_1 + S_2) = 2S_1 - \frac{1}{2} = 0.3664$$

정리하면

$$S_1 = P\left(0 \leq Z \leq \frac{12}{\sigma}\right) = 0.4332$$

이므로

$$\frac{12}{\sigma} = 1.5$$

$$\therefore \sigma = 8$$

답 ③

15

[풀이1]

문제에서 주어진 6장의 카드를 각각

$A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, C$

로 두자.

문자열

○○○○○○

의 왼쪽 끝에 A가 올 확률은 $\frac{3}{6}$ 이다.

(왼쪽 끝에 A_1, A_2, A_3 중에서 하나가 온다.)

예를 들어 왼쪽 끝에 A_2 가 왔다고 하자.

문자열

A_2 ○○○○○

의 오른쪽 끝에 A가 올 확률은 $\frac{2}{5}$ 이다.

(오른쪽 끝에 A_1, A_3 중에서 하나가 온다.)

확률의 곱셈정리에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

답 ②

[풀이2]

문제에서 주어진 시행에서 표본공간 S 의 각각의 근원사건이 일어날 가능성은 같은 정도로 기대된다. 이때, 각각의 근원사건이 일어날 확률은

$$\frac{1}{720} (= \frac{1}{6!}) \text{이다.}$$

문제에서 주어진 6장의 카드를 각각

$A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, C$

로 두자.

6장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 순열의 수에 의하여 $6!$ 이다.

양 끝 모두에 A가 오도록 6장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

순열의 수에 의하여 ${}_3P_2 \times 4!$ 이다.

이때, ${}_3P_2$ 는 서로 다른 3개(A_1, A_2, A_3)에서 2개를 택하는 순열의 수이다.

예를 들어 A_1, A_3 이 선택되었을 때의 문자열은

$A_1 \circ \circ \circ \circ A_3$ 또는 $A_3 \circ \circ \circ \circ A_1$

이제 나머지 자리에 A_2, B_1, B_2, C 가 올

경우의 수는 순열의 수에 의하여 $4!$ 이다.

따라서 구하는 확률은 수학적 확률의 정의에 의하여

$$\frac{{}_3P_2 \times 4!}{6!} = \frac{1}{5}$$

답 ②

[풀이3]

문제에서 주어진 시행에서 표본공간 S 의 각각의 근원사건이 일어날 가능성은 같은 정도로 기대된다. 이때, 각각의 근원사건이 일어날 확률은

$$\frac{1}{60} (= \frac{1}{\frac{6!}{3!2!}}) \text{이다.}$$

6장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$$\frac{6!}{3!2!} = 60$$

양 끝 모두에 A가 오도록 6장의 카드를

일렬로 나열하는 경우의 수는

같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

따라서 구하는 확률은 수학적 확률의 정의에 의하여

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.

<http://atom.ac/books/3888>

$$\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$$

답 ②

[풀이4]

문제에서 주어진 시행에서 표본공간 S 의 각각의 근원사건이 일어날 가능성은 같은 정도로 기대된다.

이때, 각각의 근원사건이 일어날 확률은 $\frac{1}{60}$ ($=$

$$\frac{1}{{}_6C_3 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1}$$
)이다.

문자열

○○○○○○○

에 3개의 A, A, A가 올 자리를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_6C_3$ 이다.

예를 들어

A○AA○○, A○○A○A, ...

등이 가능하다.

양쪽 끝 모두에 A가 온 문자열

A○○○○○A

에 1개의 A가 올 자리를 선택하는

경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_1$ 이다.

구하는 확률은 수학적 확률의 정의에 의하여

$$\frac{{}_4C_1}{{}_6C_3} = \frac{1}{5}$$

답 ②

[참고]

[풀이3]의 결과와 [풀이2]의 결과가 같은 산술적인 이유

$$\frac{\frac{4!}{2!}}{\frac{6!}{3!2!}} = \frac{\frac{4!}{2!} \times 3!2!}{\frac{6!}{3!2!} \times 3!2!} = \frac{4!3!}{6!} = \frac{{}_3P_2 \times 4!}{6!}$$

위의 계산과정에서 분자, 분모에 곱해진 $3!2!$ 은 세 개의 A_1, A_2, A_3 과 두 개의 B_1, B_2 를 나열하는 경우의 수이다.

[풀이4]의 결과와 [풀이2]의 결과가 같은 산술적인 이유

$$\frac{{}_4C_1}{{}_6C_3} = \frac{{}_4C_1 \times 3!3!}{{}_6C_3 \times 3!3!} = \frac{4!3!}{6!} = \frac{{}_3P_2 \times 4!}{6!}$$

위의 계산과정에서 분자, 분모에 곱해진 $3!3!$ 은 세 개의 A_1, A_2, A_3 과 세 개의 B_1, B_2, C 를 나열하는 경우의 수이다.

16

[풀이1]

조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 중복조합의 수에 의하여

$${}_3H_{10} = {}_{12}C_{10} = {}_{12}C_2 = \frac{12 \times 11}{2 \times 1} = 66$$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$$

조건 (가)에서

$$y + z = 10 - x \geq 0 \text{ 즉, } 0 \leq x \leq 10$$

조건 (나)를 다시 쓰면

$$0 < 10 - x < 10 \text{ 즉, } 0 < x < 10$$

조건 (나)에서 주어진 조건의 부정은

$$x = 0 \text{ 또는 } x = 10 \text{ (즉, } y + z = 10 \text{ 또는 } y + z = 0)$$

조건 (가)를 만족시키지만, 조건 (나)를 만족시키지 않는 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 중복조합의 수에 의하여

$$y + z = 10 (x = 0): {}_2H_{10} = {}_{11}C_{10} = {}_{11}C_1 = 11$$

$$y + z = 0 (x = 10): 1 \text{ ((10, 0, 0)이 유일하다.)}$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$66 - (11 + 1) = 54$$

답 ④

[풀이2]

조건 (나)에서 $y + z$ 의 값은 1 이상 9 이하이다.

$y + z = 1$ 을 조건 (가)에 대입하면 $x = 9$

순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 중복조합의 수에 의하여

$${}_2H_1 = {}_2C_1 = 2$$

$y + z = 2$ 를 조건 (가)에 대입하면 $x = 8$

순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 중복조합의 수에 의하여

$${}_2H_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

$y + z = 3$ 을 조건 (가)에 대입하면 $x = 7$

순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 중복조합의 수에 의하여

$${}_2H_3 = {}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

⋮

$y + z = 9$ 를 조건 (가)에 대입하면 $x = 1$

순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 중복조합의 수에 의하여

$${}_2H_9 = {}_{10}C_9 = {}_{10}C_1 = 10$$

이상에서 구하는 경우의 수는

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.

<http://atom.ac/books/3888>

$$\frac{2+3+4+\cdots+10}{\text{등차수열의 합}} = \frac{2+10}{2} \times 9 = 54$$

답 ④

[참고]

$y+z=k$ ($k=1, 2, 3, \dots, 9$)일 때,
순서쌍 (x, y, z) 의 개수의 일반항을 구하자.
 $y+z=k$ 를 조건 (가)에 대입하면 $x=10-k$
순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 중복조합의 수에 의하여

$${}_2H_k = {}_{k+1}C_k = {}_{k+1}C_1 = k+1$$

17

[풀이]

문제에서 주어진 조건에 의하여

$$x < 0 \text{ 일 때, } g(x) = -f(x) + x^2 + 4$$

$$x > 0 \text{ 일 때, } g(x) = f(x) - x^2 - 2x - 8$$

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이므로

함수의 연속에 대한 정의에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0)$$

이다.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (-f(x) + x^2 + 4) = -f(0) + 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (f(x) - x^2 - 2x - 8) = f(0) - 8$$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) - \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = -f(0) + 4 - f(0) + 8 = 6$$

정리하면

$$\therefore f(0) = 3$$

답 ⑤

18

[풀이]

두 원 O_1, O_2 의 중심을 각각 O_1, O_2 , 점 O_2 에서
세 선분 B_1D_1, D_1A_1, A_1B_1 에 내린 수선의 발을
각각 H, I, J 라고 하자.

원의 정의에 의하여

$$\overline{O_1A_1} = \overline{O_1B_1} = \overline{O_1C_1}$$

이므로 점 O_1 은 정삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 외심이다. 그
런데 정삼각형의 외심과 무게중심은 일치하므로, 점
 O_1 은 정삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 무게중심이다.

무게중심의 성질과 삼각비의 정의에 의하여

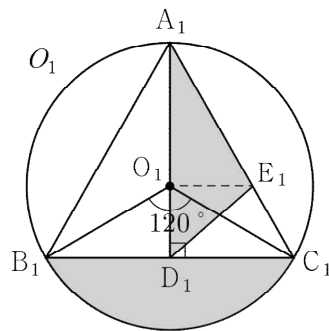
$$\overline{A_1D_1} = \overline{A_1O_1} \times \frac{3}{2} = 3,$$

$$\overline{B_1D_1} = \frac{\overline{A_1D_1}}{\tan 60^\circ} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3},$$

$$\overline{A_1B_1} = \frac{\overline{A_1D_1}}{\sin 60^\circ} = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}$$

수열 $\{a_n\}$ 을 다음과 같이 정의하자.

a_n =(그림 R_n 에서 새롭게 그려진  모양의 도형의 넓이)



세 삼각형 $O_1A_1B_1, O_1B_1C_1, O_1C_1A_1$ 은

서로 SSS합동이므로

$$\angle C_1O_1B_1 = \frac{1}{3} \times 360^\circ = 120^\circ$$

부채꼴의 넓이와 삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

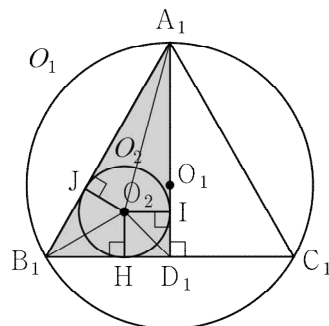
$$a_1 = ((\triangle O_1B_1C_1 \text{의 넓이}) - (\triangle O_1B_1C_1 \text{의 넓이})) + (\triangle A_1D_1E_1 \text{의 넓이})$$

$$= \left(\pi \times 2^2 \times \frac{120}{360} - \frac{1}{2} \times 2^2 \times \sin(180^\circ - 120^\circ) \right)$$

$$+ \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 3 = \frac{4}{3}\pi (= S_1)$$

$$(\because \overline{A_1E_1} = \frac{2}{3} \overline{A_1C_1} \text{에서})$$

$$(\triangle A_1D_1E_1 \text{의 넓이}) = \frac{2}{3} \times (\triangle A_1D_1C_1 \text{의 넓이})$$



삼각형의 내심의 성질에 의하여

$$\overline{O_2H} = \overline{O_2I} = \overline{O_2J}$$

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.

<http://atom.ac/books/3888>

원 O_2 의 반지름의 길이를 r 이라고 하자.

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$$(\triangle A_1B_1D_1 \text{의 넓이}) = (\triangle O_2B_1D_1 \text{의 넓이}) \\ + (\triangle O_2D_1A_1 \text{의 넓이}) + (\triangle O_2A_1B_1 \text{의 넓이})$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}r + \frac{3}{2}r + \sqrt{3}r$$

정리하면

$$r = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$$

도형의 닮음비와 넓이비의 관계에 의하여

$$\frac{a_2}{a_1} = \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{6 - 3\sqrt{3}}{8}$$

수열 $\{a_n\}$ 의 귀납적 정의는

$$a_1 = \frac{4}{3}\pi, \quad a_{n+1} = \frac{6 - 3\sqrt{3}}{8}a_n$$

$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 이므로 등비급수의 합을 구하는 공식에 의하여

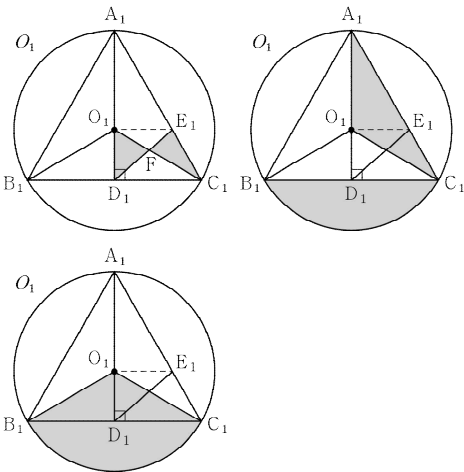
$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{4}{3}\pi}{1 - \frac{6 - 3\sqrt{3}}{8}} = \frac{32(3\sqrt{3} - 2)\pi}{69}$$

답 ③

[참고1]

$a_1 (= S_1)$ 을 다음과 같은 방법으로 간단하게 구할 수 있다.

두 선분 O_1C_1 , E_1D_1 의 교점을 F라고 하자.



삼각형의 무게중심의 성질과 문제에서 주어진 조건에 의하여

$$\overline{A_1O_1} : \overline{O_1D_1} = 2 : 1 = \overline{A_1E_1} : \overline{E_1C_1}$$

평행선의 성질의 역에 의하여

$$\overline{O_1E_1} \parallel \overline{D_1C_1}$$

이므로

$$(\triangle O_1D_1C_1 \text{의 넓이}) = (\triangle E_1D_1C_1 \text{의 넓이})$$

$$\text{즉, } (\triangle O_1D_1F \text{의 넓이}) = (\triangle E_1C_1F \text{의 넓이})$$

이므로

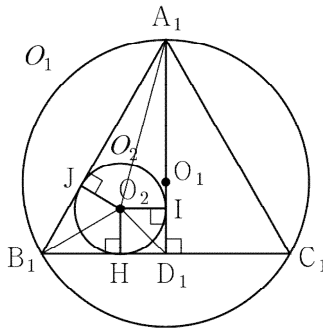
$$(\triangle A_1D_1E_1 \text{의 넓이}) = (\triangle A_1O_1C_1 \text{의 넓이})$$

그런데 두 삼각형 $A_1O_1C_1$, $C_1O_1B_1$ 은 서로 SSS합동이므로

$$\therefore a_1 = (\triangle O_1B_1C_1 \text{의 넓이})$$

[참고2]

원 O_2 의 반지름의 길이를 다음과 같이 구할 수 있다.



삼각형의 내심의 성질에 의하여

$$\overline{O_2H} = \overline{O_2I} = \overline{O_2J}$$

다음과 같은 RHS합동이 성립한다.

$$\triangle O_2B_1H \equiv \triangle O_2B_1J$$

$$\triangle O_2HD_1 \equiv \triangle O_2ID_1$$

$$\triangle O_2IA_1 \equiv \triangle O_2JA_1$$

그러므로

$$\overline{A_1B_1} = \overline{A_1J} + \overline{JB_1} = \overline{A_1I} + \overline{B_1H}$$

$$= (\overline{A_1D_1} - r) + (\overline{B_1D_1} - r)$$

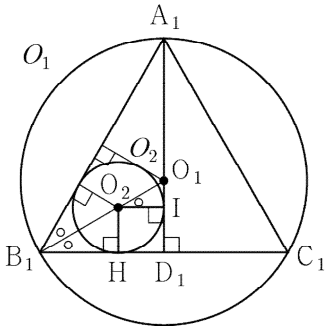
$$\text{즉, } 2\sqrt{3} = (3 - r) + (\sqrt{3} - r)$$

정리하면

$$\therefore r = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$$

[참고3]

원 O_2 의 반지름의 길이를 다음과 같이 구할 수 있다.



(단, $\angle = 30^\circ$)

정삼각형의 내심, 외심, 무게중심은 일치하므로 O_1 은 정삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 내심이다.

내심의 정의에 의하여

점 O_1 은 $\angle A_1B_1C_1$ 의 이등분선 위에 있고,

점 O_2 는 $\angle A_1B_1D_1$ 의 이등분선 위에 있으므로

세 점 B_1, O_2, O_1 은 한 직선 위에 있다.

$\overline{O_2I} \parallel \overline{B_1D_1}$ 이므로 평행선의 성질에 의하여

$\angle O_1O_2I = \angle O_1B_1D_1 = 30^\circ$ (동위각)

직각삼각형 O_1O_2I 에서 삼각비의 정의에 의하여

$$\tan 30^\circ = \frac{\overline{IO_1}}{\overline{O_2I}} = \frac{1-r}{r} \approx, \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1-r}{r}$$

정리하면

$$\therefore r = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$$

19

[풀이1]

수열 $\{a_n\}$ 의 귀납적 정의에 의하여

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = 1,$$

$$a_3 = (a_2)^2 - (a_1)^2 = 1^2 - 1^2 = 0,$$

$$a_4 = (a_3)^2 - (a_2)^2 = 0^2 - 1^2 = -1,$$

$$a_5 = (a_4)^2 - (a_3)^2 = (-1)^2 - 0^2 = 1,$$

$$a_6 = (a_5)^2 - (a_4)^2 = 1^2 - (-1)^2 = 0,$$

$$a_7 = (a_6)^2 - (a_5)^2 = 0^2 - 1^2 = -1,$$

$\vdots$

수열 $\{a_n\}$ 을 나열하면

$$1, 1, 0, -1, 1, 0, -1, 1, 0, -1, 1, \dots$$

즉, 첫째항을 제외하면 세 수 $1, 0, -1$ 이 반복되어 나타난다.

수열 $\{a_n + n\}$ 을 나열하면

$$a_1 + 1 = 2,$$

$$a_2 + 2 = 3, a_3 + 3 = 3, a_4 + 4 = 3,$$

$$a_5 + 5 = 6, a_6 + 6 = 6, a_7 + 7 = 6,$$

$\vdots$

다시 쓰면

$$2, 3, 3, 3, 6, 6, 6, 9, 9, 9, 12, 12, 12, \dots$$

수열 $\{b_n\}$ 의 귀납적 정의는

$$b_1 = k, b_{n+1} = -b_n + a_n + n \quad (n \geq 1)$$

수열 $\{b_n\}$ 을 나열하면

$$b_1 = k,$$

$$b_2 = -k + 2,$$

$$\boxed{b_3 = k - 2 + 3 = k + 1},$$

$$b_4 = -k - 1 + 3 = -k + 2,$$

$$b_5 = k - 2 + 3 = k + 1,$$

$$b_6 = -k - 1 + 6 = -k + 5,$$

$$b_7 = k - 5 + 6 = k + 1,$$

$$b_8 = -k - 1 + 6 = -k + 5,$$

$$\boxed{b_9 = k - 5 + 9 = k + 4},$$

$$b_{10} = -k - 4 + 9 = -k + 5,$$

$$b_{11} = k - 5 + 9 = k + 4,$$

$$b_{12} = -k - 4 + 12 = -k + 8,$$

$$b_{13} = k - 8 + 12 = k + 4,$$

$$b_{14} = -k - 4 + 12 = -k + 8,$$

$$\boxed{b_{15} = k - 8 + 15 = k + 7},$$

$\vdots$

발견적 추론에 의하여 수열

$$b_3, b_9, b_{15}, b_{21}, \dots$$

은 이 순서대로 공차가 3인 등차수열이다.

등차수열의 일반항의 공식에 의하여

$$b_{21} = b_3 + 3 \times 3 = (k + 1) + 9 = k + 10$$

$$b_{21} = 21 - b_{20} = 21 - 14 = 7$$

$$(\because a_{20} + 20 = 21)$$

이므로

$$k + 10 = 7$$

$$\therefore k = -3$$

답 ①

[풀이2]

수열 $\{a_n\}$ 의 귀납적 정의에 의하여

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = 1,$$

$$a_3 = (a_2)^2 - (a_1)^2 = 1^2 - 1^2 = 0,$$

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.

<http://atom.ac/books/3888>

$$a_4 = (a_3)^2 - (a_2)^2 = 0^2 - 1^2 = -1,$$

$$a_5 = (a_4)^2 - (a_3)^2 = (-1)^2 - 0^2 = 1,$$

$$a_6 = (a_5)^2 - (a_4)^2 = 1^2 - (-1)^2 = 0,$$

$$a_7 = (a_6)^2 - (a_5)^2 = 0^2 - 1^2 = -1,$$

⋮

수열 $\{a_n\}$ 을 나열하면

1, 1, 0, -1, 1, 0, -1, 1, 0, -1, 1, ...

즉, 첫째항을 제외하면 세 수 1, 0, -1이 반복되어 나타난다.

수열 $\{a_n + n\}$ 을 나열하면

$$a_1 + 1 = 2,$$

$$a_2 + 2 = 3, \quad a_3 + 3 = 3, \quad a_4 + 4 = 3,$$

$$a_5 + 5 = 6, \quad a_6 + 6 = 6, \quad a_7 + 7 = 6,$$

⋮

다시 쓰면

2, 3, 3, 3, 6, 6, 6, 9, 9, 9, 12, 12, 12, ...

문제에서 주어진 두 번째 등식을 다시 쓰면

$$b_{n+1} + b_n = a_n + n$$

이 등식에 $n = 1, 2, 3, \dots$ 을 대입하면

$$b_2 + b_1 = a_1 + 1 = 2, \quad \dots \textcircled{㉑}$$

$$b_3 + b_2 = a_2 + 2 = 3, \quad \dots \textcircled{㉒}$$

$$b_4 + b_3 = a_3 + 3 = \boxed{3}, \quad \dots \textcircled{㉓}$$

$$b_5 + b_4 = a_4 + 4 = 3, \quad \dots \textcircled{㉔}$$

$$b_6 + b_5 = a_5 + 5 = 6, \quad \dots \textcircled{㉕}$$

$$b_7 + b_6 = a_6 + 6 = \boxed{6}, \quad \dots \textcircled{㉖}$$

$$b_8 + b_7 = a_7 + 7 = 6, \quad \dots \textcircled{㉗}$$

$$b_9 + b_8 = a_8 + 8 = 9, \quad \dots \textcircled{㉘}$$

$$b_{10} + b_9 = a_9 + 9 = \boxed{9}, \quad \dots \textcircled{㉙}$$

$$b_{11} + b_{10} = a_{10} + 10 = 9, \quad \dots \textcircled{㉚}$$

$$b_{12} + b_{11} = a_{11} + 11 = 12, \quad \dots \textcircled{㉛}$$

$$b_{13} + b_{12} = a_{12} + 12 = \boxed{12}, \quad \dots \textcircled{㉜}$$

$$b_{14} + b_{13} = a_{13} + 13 = 12, \quad \dots \textcircled{㉝}$$

$$b_{15} + b_{14} = a_{14} + 14 = 15, \quad \dots \textcircled{㉞}$$

⋮

$$b_{19} + b_{18} = a_{18} + 18 = \boxed{18},$$

$$b_{20} + b_{19} = a_{19} + 19 = 18,$$

$$b_{21} + b_{20} = a_{20} + 20 = 21,$$

$$b_{22} + b_{21} = a_{21} + 21 = \boxed{21},$$

⋮

$$\textcircled{㉟} - \textcircled{㉑}: b_3 - b_1 = 1 \quad \text{즉, } b_3 = b_1 + 1$$

$$\textcircled{㉑} - \textcircled{㉒}: b_5 - b_3 = 0 \quad \text{즉, } b_5 = b_3$$

$$\textcircled{㉒} - \textcircled{㉓}: b_7 - b_5 = 0 \quad \text{즉, } b_7 = b_5$$

$$\textcircled{㉓} - \textcircled{㉔}: b_9 - b_7 = 3 \quad \text{즉, } b_9 = b_7 + 3 = b_3 + 3$$

$$\textcircled{㉔} - \textcircled{㉕}: b_{11} - b_9 = 0 \quad \text{즉, } b_{11} = b_9$$

$$\textcircled{㉕} - \textcircled{㉖}: b_{13} - b_{11} = 0 \quad \text{즉, } b_{13} = b_{11}$$

$$\textcircled{㉖} - \textcircled{㉗}: b_{15} - b_{13} = 3 \quad \text{즉, } b_{15} = b_{13} + 3 = b_9 + 3$$

⋮

정리해서 다시 쓰면

$$b_3 = b_1 + 1, \quad b_3 = b_5 = b_7, \quad b_9 = b_3 + 3,$$

$$b_9 = b_{11} = b_{13}, \quad b_{15} = b_9 + 3, \quad \dots$$

발견적 추론에 의하여 수열

$$b_3, b_9, b_{15}, \dots$$

은 이 순서대로 공차가 3인 등차수열이다.

등차수열의 일반항의 공식에 의하여

$$b_{21} = b_3 + 3 \times 3 = (k+1) + 9 = k+10$$

$$(\because b_3 = b_1 + 1)$$

$$b_{21} = 21 - b_{20} = 21 - 14 = 7 \text{이므로}$$

$$k+10 = 7$$

$$\therefore k = -3$$

답 ①

[참고1]

마찬가지의 방법으로

$$b_2 = b_4, \quad b_6 = b_2 + 3, \quad b_6 = b_8 = b_{10},$$

$$b_{12} = b_6 + 3, \quad b_{12} = b_{14} = b_{16}, \quad b_{18} = b_{12} + 3, \quad \dots$$

발견적 추론에 의하여 수열

$$b_6, b_{12}, b_{18}, \dots$$

은 이 순서대로 공차가 3인 등차수열이다.

[참고2]

수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=1, n=3k-1) \\ 0 & (n=3k) \\ -1 & (n=3k+1) \end{cases}$$

(단, k 는 자연수이다.)

수열 $\{b_n\}$ 의 일반항은

$$b_1 = -3, \quad b_2 = 5, \quad b_4 = 5,$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{n-7}{2} & (n=6k-3) \\ \frac{n}{2} + 5 & (n=6k) \end{cases}$$

$$b_{6k} = b_{6k+2} = b_{6k+4}, \quad b_{6k-3} = b_{6k-1} = b_{6k+1}$$

(단, k 는 자연수이다.)

20

[풀이]

곡선 $y=f(x)$ 의 방정식과 직선 $y=-x+t$ 의 방정식을 연립하면

$$f(x)=-x+t \text{ 즉, } f(x)+x=t$$

$h(x)=f(x)+x$ 로 두면 아래와 같은 필요충분조건을 생각할 수 있다.

$$f(x)=-x+t \Leftrightarrow f(x)+x=t \Leftrightarrow h(x)=t$$

곡선 $y=h(x)$ 와 직선 $y=t$ 의 교점의 개수는 $g(t)$ 이다.

ㄱ. (참)

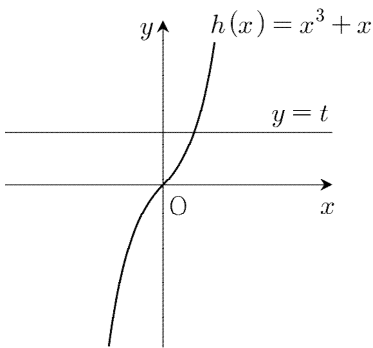
함수 $h(x)=x^3+x$ 의 도함수는

$$h'(x)=3x^2+1$$

모든 실수 x 에 대하여 $h'(x)>0$ 이므로

실수 전체의 집합에서 함수 $h(x)$ 는 증가한다.

함수 $h(x)=x^3+x$ 의 그래프는



모든 실수 t 에 대하여 함수 $h(x)=x^3+x$ 의 그래프와

직선 $y=t$ 의 교점의 개수는 1이다.

함수 $g(t)$ 의 방정식은

$$g(t)=1$$

따라서 함수 $g(t)$ 는 상수함수이다.

ㄴ. (참)

삼차함수 $h(x)$ 가 일대일대응이라고 가정하자.

모든 실수 t 에 대하여 곡선 $y=h(x)$ 와

직선 $y=t$ 의 교점의 개수는 1이므로

모든 실수 t 에 대하여 $g(t)=1$ (상수함수)이다.

이는 가정에 모순이므로 삼차함수 $h(x)$ 는 일대일대응이 아니다.

삼차함수 $h(x)$ 가 일대일대응이 아니므로

삼차함수 $h(x)$ 는 극값을 가져야 한다.

함수 $h(x)$ 의 도함수는

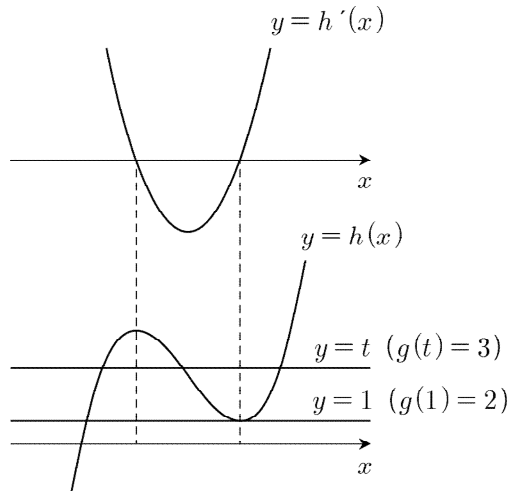
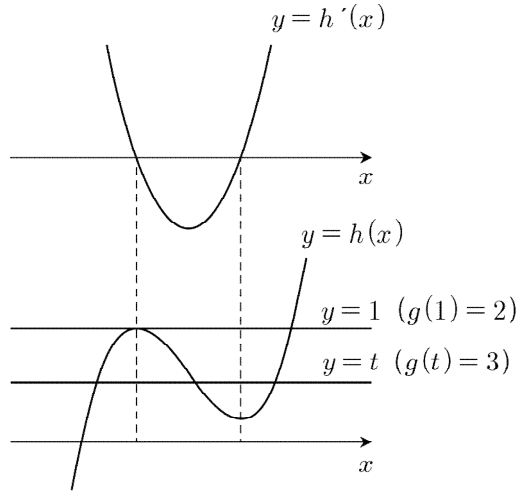
$$h'(x)=f'(x)+1$$

삼차함수 $h(x)$ 가 극값을 가지므로 방정식

$$h'(x)=0 \quad (\Leftrightarrow f'(x)+1=0)$$

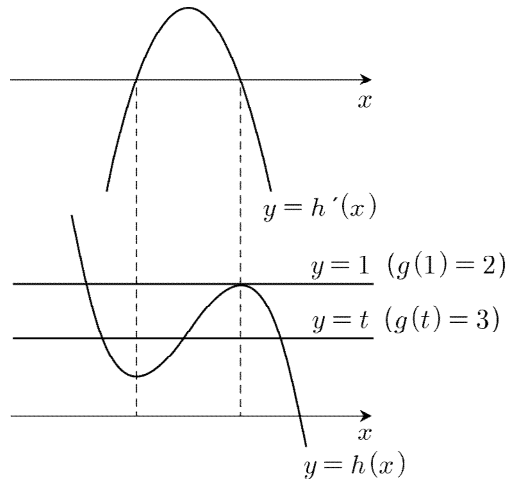
의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

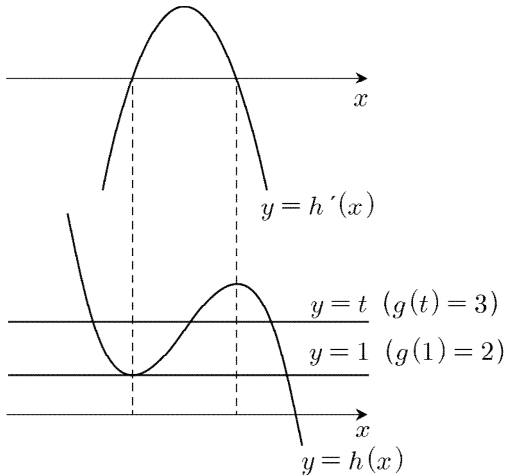
- 함수 $h(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수인 경우
두 함수 $h'(x)$, $h(x)$ 의 그래프는 각각



위의 그림처럼 $g(t)=3$ 인 t 가 존재한다.

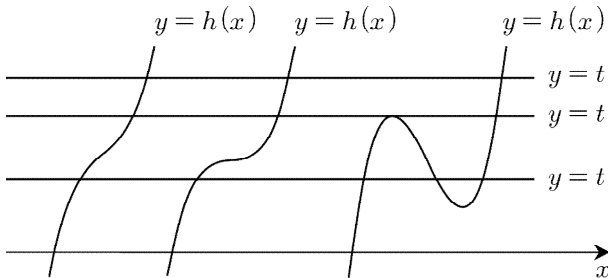
- 함수 $h(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수인 경우
두 함수 $h'(x)$, $h(x)$ 의 그래프는 각각



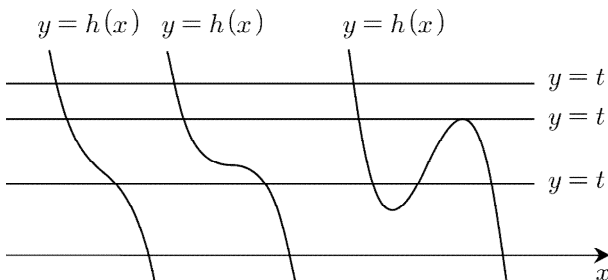


위의 그림처럼 $g(t)=3$ 인 t 가 존재한다.
따라서 보기 ㄴ에서 주어진 명제는 참이다.
ㄷ. (거짓)

$h(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수일 때,
곡선 $y=h(x)$ 와 직선 $y=t$ 는 다음과 같다.



$h(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수일 때,
곡선 $y=h(x)$ 와 직선 $y=t$ 는 다음과 같다.



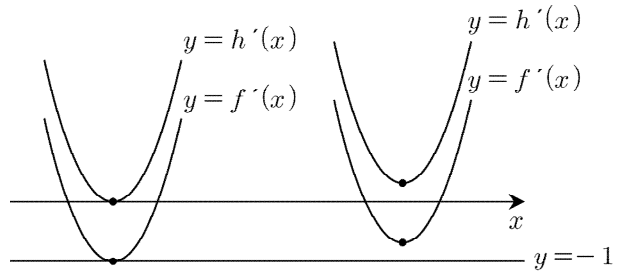
ㄱ과 ㄴ을 푸는 과정에서 (그리고 위의 그림에서)
다음과 같은 필요충분조건을 생각할 수 있다.

- 함수 $h(x)$ 가 일대일대응인 경우
함수 $h(x)$ 는 극값을 갖지 않는다.(일대일대응○)
 $\Leftrightarrow$ 함수 $g(t)$ 는 상수함수이다.
 $\Leftrightarrow$ 함수 $g(t)$ 의 치역은 $\{1\}$ 이다.
- 함수 $h(x)$ 가 일대일대응이 아닌 경우
함수 $h(x)$ 는 극값을 갖는다.(일대일대응×)
 $\Leftrightarrow$ 함수 $g(t)$ 는 상수함수가 아니다.
 $\Leftrightarrow$ 함수 $g(t)$ 의 치역은 $\{1, 2, 3\}$ 이다.
함수 $g(t)$ 가 상수함수이면 함수 $h(x)$ 는 극값을 갖지 않으므로 방정식

$$h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-1$$

은 중근을 갖거나 서로 다른 두 허근을 갖아야 한다.

- 함수 $h(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수인 경우



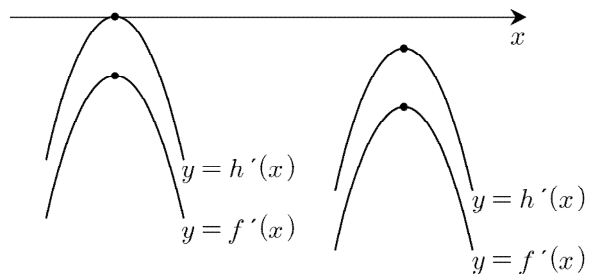
위의 그림처럼

$-1 \leq$ (이차함수 $f'(x)$ 의 꼭짓점의 y 좌표) < 0 이면
방정식 $h'(x)=0$ 은 중근을 갖거나 서로 다른 두 허근을 갖지만

방정식 $f'(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때, 함수 $f(x)$ 는 극값을 갖는다. ($\leftarrow$ 반례)

- 함수 $h(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수인 경우



위의 그림처럼

방정식 $h'(x)=0$ 이 중근을 갖거나 서로 다른 두 허근을 가지면

방정식 $f'(x)=0$ 은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

이때, 함수 $f(x)$ 는 극값을 갖지 않는다.

따라서 보기 ㄷ에서 주어진 명제는 거짓이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

[참고1]

보기 ㄷ의 반례로

$$h'(x) = f'(x) + 1 = x^2$$

을 생각할 수 있다.

[참고2]

보기 ㄷ의 반례를 다음과 같이 찾을 수도 있다.

함수 $f(x)$ 의 방정식을

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$$

함수 $h(x)$ 의 방정식은

$$h(x) = ax^3 + bx^2 + (c+1)x + d (a \neq 0)$$

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.

<http://atom.ac/books/3888>

두 함수 $f(x)$, $h(x)$ 의 도함수는

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c,$$

$$h'(x) = 3ax^2 + 2bx + c + 1$$

두 이차방정식 $f'(x) = 0$, $h'(x) = 0$ 의 판별식을 각각 D_1 , D_2 라고 하자.

$$D_1/4 = b^2 - 3ac > 0 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$$D_2/4 = b^2 - 3a(c+1) = D_1/4 - 3a \leq 0 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 순서쌍 (a, b, c) 로는 $(1, 1, -\frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}, 0, -1)$, ... 등이 있다.

[참고3]

보기 ㄷ의 역명제는 다음과 같다.

‘삼차함수 $f(x)$ 의 극값이 존재하지 않으면 함수 $g(t)$ 는 상수함수이다.’(참)

보기 ㄷ의 대우명제는 다음과 같다.

‘삼차함수 $f(x)$ 의 극값이 존재하면 함수 $g(t)$ 는 상수함수가 아니다.’(거짓)

다음의 명제들도 생각해보자.

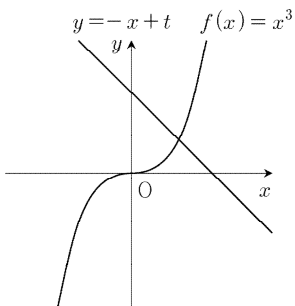
‘최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 의 극값이 존재하면 함수 $g(t)$ 는 상수함수가 아니다.’(거짓)

‘최고차항의 계수가 음수인 삼차함수 $f(x)$ 의 극값이 존재하면 함수 $g(t)$ 는 상수함수가 아니다.’(참)

[참고4]

곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = -x + t$ 의 위치 관계를 살펴보자.

ㄱ. (참)



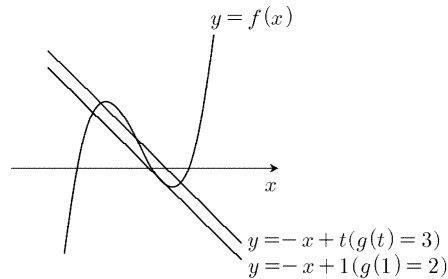
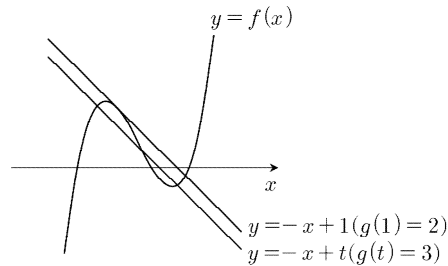
모든 실수 t 에 대하여 함수 $f(x) = x^3$ 의 그래프와 직선 $y = -x + t$ 의 교점의 개수는 1이다.

함수 $g(t)$ 의 방정식은

$$g(t) = 1$$

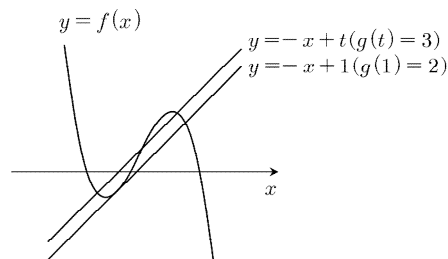
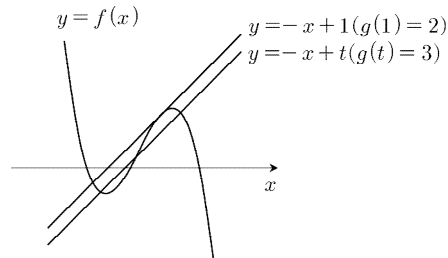
ㄴ. (참)

• 함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수인 경우



위의 그림처럼 $g(t) = 3$ 인 t 가 존재한다.

• 함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수인 경우

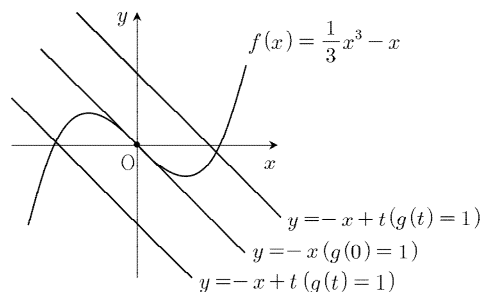


위의 그림처럼 $g(t) = 3$ 인 t 가 존재한다.

ㄷ. (거짓)

(반례)

함수 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ 는 보기 ㄷ을 만족시키지 않는다.



위의 그림처럼 $g(t) = 1$ (상수함수)이지만 함수 $f(x)$ 는 극값을 갖는다.

21

[풀이]

우선 합성함수 $(g \circ f)(x)$ 가 정의되는지를 판단하자.

함수 $f(x)$ 의 치역은 실수 전체의 집합의 부분집합이고, 함수 $g(x)$ 의 정의역은 실수 전체의 집합이므로 합성함수 $(g \circ f)(x)$ 가 정의된다.

함수 $(g \circ f)(x)$ 의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

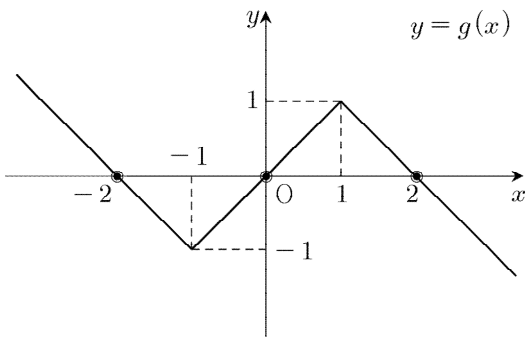
함수 $(g \circ f)(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 정의된 역함수를 가지므로 함수 $(g \circ f)(x)$ 의 치역은 실수 전체의 집합이다. 그리고 함수 $(g \circ f)(x)$ 는 일대일대응이다.

상수 a, b, c 의 값에 관계없이 함수 $(g \circ f)(x)$ 의 그래프가 항상 지나는 점을 찾자.

$f(0) = 0, g(0) = 0$ 에서

$(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(0) = 0$

이므로 함수 $(g \circ f)(x)$ 의 그래프는 항상 원점을 지난다.



위의 그림에서 $g(2) = g(-2) = 0$ 이므로 일대일함수의 정의에 의하여

$f(x) \neq -2, f(x) \neq 2$... ㉠

($\because$ 만약 $f(t) = -2$ 인 $t (\neq 0)$ 가 존재한다고 하면

$(g \circ f)(t) = g(f(t)) = g(-2) = 0 = (g \circ f)(0)$

이는 가정에 모순이다.

따라서 $f(x)$ 는 -2 를 함숫값으로 가질 수 없다.

마찬가지의 이유로 $f(x)$ 는 2 를 함숫값으로 가질 수 없다.)

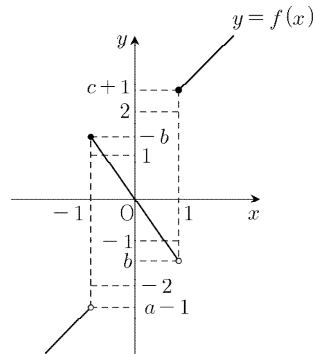
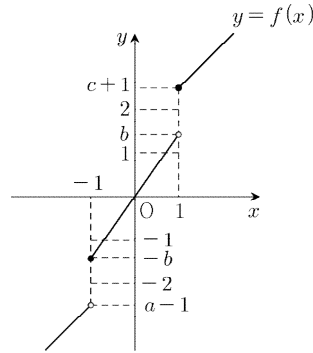
만약 $b = 0$ 이라고 하면 구간 $[-1, 1)$ 에 속하는 임의의 실수 x 에 대하여

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(0) = 0 (\because f(x) = 0)$

이므로 이는 가정에 모순이다. 따라서 $b \neq 0$ 이다.

$|b| > 1$ 이라고 가정하자.

함수 $f(x)$ 의 그래프는



(왼쪽은 $b > 1$ 인 경우, 오른쪽은 $b < -1$ 인 경우)

㉠을 만족시키기 위하여

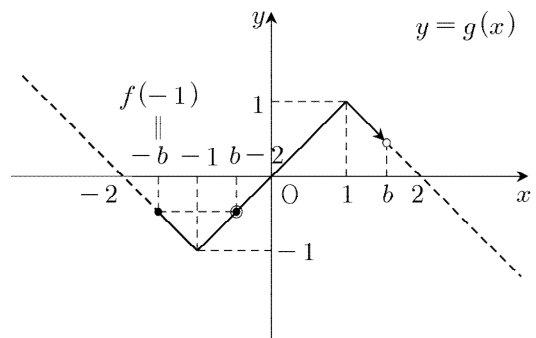
(경우1) $b > 1$ 일 때,

$f(-1) = -b > -2$ 이므로 $1 < b < 2$ 이다.

(경우2) $b < -1$ 일 때,

$f(-1) = -b < 2$ 이므로 $-2 < b < -1$ 이다.

(경우1)을 함수 $g(x)$ 의 그래프에서 생각하자.



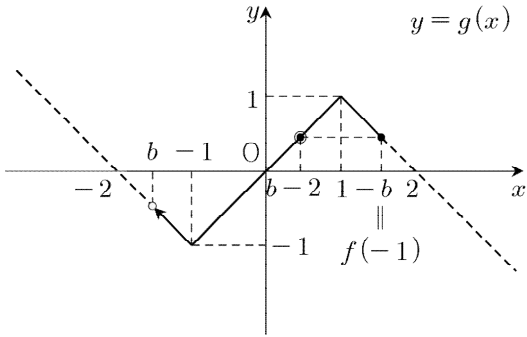
위의 그림처럼

$(g \circ f)(b-2) = (g \circ f)(-b)$

이므로 함수 $(g \circ f)(x)$ 가 일대일대응이라는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 (경우1)은 가능하지 않다.

(경우2)를 함수 $g(x)$ 의 그래프에서 생각하자.



위의 그림처럼

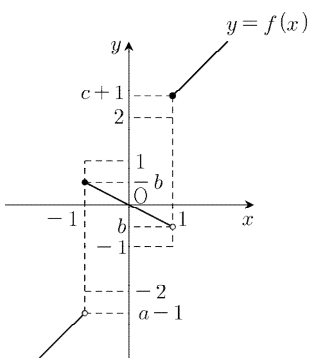
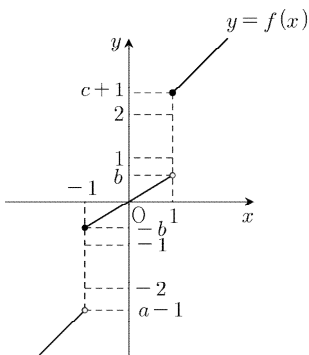
$$(g \circ f)(b-2) = (g \circ f)(-b)$$

이므로 함수 $(g \circ f)(x)$ 가 일대일대응이라는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 (경우2)는 가능하지 않다.

이는 가정에 모순이다. 따라서 $|b| \leq 1 (b \neq 0)$ 이다.

함수 $f(x)$ 의 그래프는



(왼쪽은 $0 < b < 1$ 인 경우, 오른쪽은 $-1 < b < 0$ 인 경우)

위의 두 경우 모두 ㉠을 만족시킨다.

위의 그림에서 왼쪽을 (경우3), 오른쪽을 (경우4)라고 하자.

(경우3), (경우4)에 대하여

$$x < -1 \text{ 일 때, } f(x) < a-1 \leq -2 \text{ 에서}$$

$$g(f(x)) > g(a-1) \geq 0$$

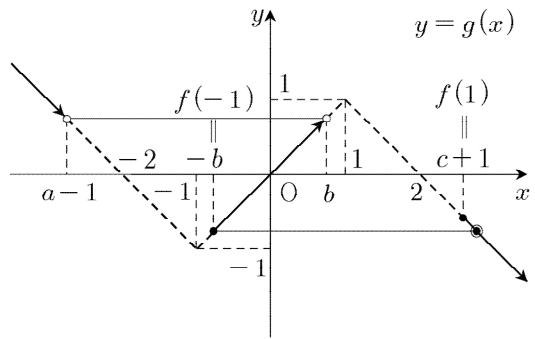
($\because$ 구간 $(-\infty, 2]$ 에서 함수 $g(x)$ 는 감소함수)

$$x \geq 1 \text{ 일 때, } f(x) \geq c+1 > 2 \text{ 에서}$$

$$g(f(x)) \leq g(c+1) < 0$$

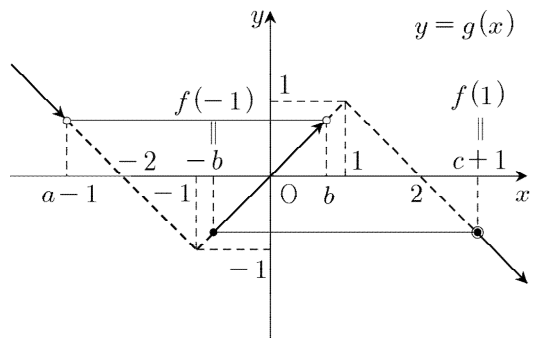
($\because$ 구간 $[2, \infty)$ 에서 함수 $g(x)$ 는 감소함수)

(경우3)을 함수 $g(x)$ 의 그래프에서 생각하자.



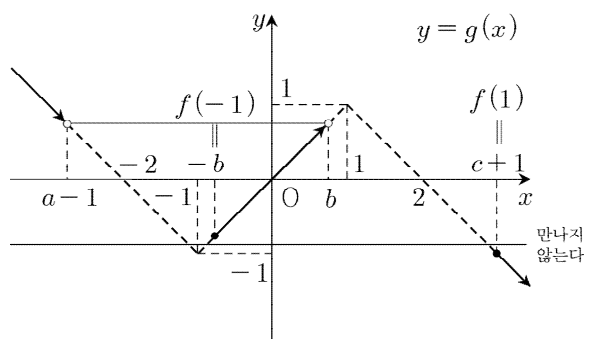
위의 그림처럼 $g(f(1)) > g(f(-1))$ 이면

함수 $(g \circ f)(x)$ 는 일대일대응이 아니다.



위의 그림처럼 $g(f(1)) = g(f(-1))$ 이면

함수 $(g \circ f)(x)$ 는 일대일대응이 아니다.

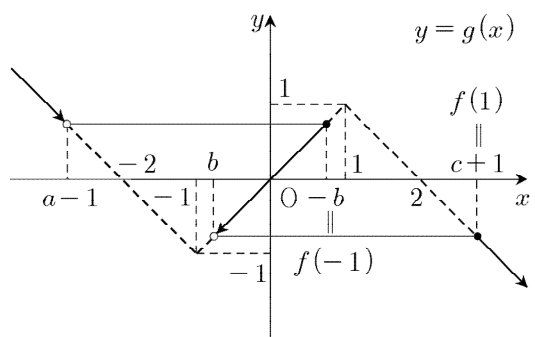


위의 그림처럼 $g(f(1)) < g(f(-1))$ 이면

함수 $(g \circ f)(x)$ 는 일대일대응이 아니다.

따라서 (경우3)은 가능하지 않다.

(경우4)를 함수 $g(x)$ 의 그래프에서 생각하자.



오직 $g(f(1)) = g(b)$ 이고 $g(f(-1)) = g(a-1)$ 일 때, 함수 $(g \circ f)(x)$ 는 일대일대응이다.

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.

<http://atom.ac/books/3888>

$$g(f(1))=g(b) \text{에서 } g(c+1)=g(b)$$

$$\text{즉, } b=-c+1$$

$$g(f(-1))=g(a-1) \text{에서 } g(-b)=g(a-1)$$

$$\text{즉, } a=b-1=-c$$

$$\therefore a+b+2c=-c-c+1+2c=1$$

답 ②

22

[풀이]

순열의 수에 대한 공식에 의하여

$${}_7P_3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

답 210

23

[풀이]

함수 $f(x)$ 의 도함수는

$$f'(x) = 6x - 2$$

$$\therefore f'(1) = 4$$

답 4

24

[풀이1]

함수 $y = 2\sqrt{x}$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동시키면 함수 $y - k = 2\sqrt{x}$ 의 그래프와 일치한다. 이 함수의 그래프가 점 $(1, 5)$ 를 지나므로

$$5 - k = 2\sqrt{1} \text{ 즉, } 5 - k = 2$$

k 에 대한 일차방정식을 풀면

$$\therefore k = 3$$

답 3

[풀이2]

점 $(1, 5)$ 를 y 축의 방향으로 $-k$ 만큼 평행이동시키면 점 $(1, 5 - k)$ 이다. 이 점이 함수 $y = 2\sqrt{x}$ 의 그래프 위에 있으므로

$$5 - k = 2\sqrt{1} \text{ 즉, } 5 - k = 2$$

k 에 대한 일차방정식을 풀면

$$\therefore k = 3$$

답 3

25

[풀이1]

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라고 하면

$$a_1 = d$$

일반항 a_n 은

$$a_n = a_1 + (n-1)d = dn (n=1, 2, 3, \dots)$$

등차중앙의 정의에 의하여

$$2a_3 = a_2 + a_4 = 24 \text{ 즉, } a_3 = 3d = 12 \text{에서 } d = 4$$

$$\therefore a_5 = 5d = 20$$

답 20

[풀이2]

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라고 하면

$$a_1 = d$$

일반항 a_n 은

$$a_n = a_1 + (n-1)d = dn (n=1, 2, 3, \dots)$$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$$a_2 + a_4 = 6d = 24 \text{에서 } d = 4$$

$$\therefore a_5 = 5d = 20$$

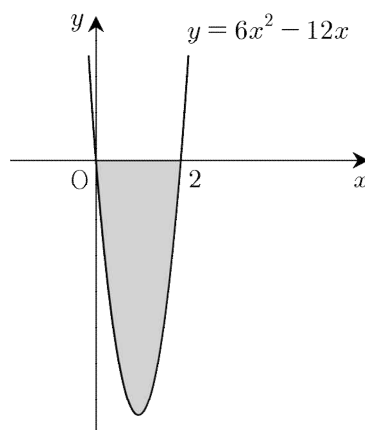
답 20

26

[풀이]

방정식 $6x^2 - 12x = 0$ 을 풀면

$$6x(x-2) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$



구하는 넓이를 S 라고 하자.

곡선과 x 축 사이의 넓이를 구하는 정적분의 공식에 의하여

$$S = \int_0^2 |6x^2 - 12x| dx = \int_0^2 (12x - 6x^2) dx$$

$$= [6x^2 - 2x^3]_0^2 = 8$$

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.

<http://atom.ac/books/3888>

답 8

[참고] 교육과정 외

$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$ ($a \neq 0$, $\alpha < \beta$)에 대하여
(곡선 $y = f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이)

$$= \frac{|a|}{6}(\beta - \alpha)^3$$

이 공식을 이용하면

$$S = \frac{6}{6}(2 - 0)^3 = 8$$

27

[풀이]

모집단의 월 교통비는 정규분포 $N(8, 1.2^2)$ 을 따르므로 이 지역 직장인 중 임의추출한 n 명의 월 교통비의 평균을 $\bar{X}$ 라고 하면, $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(8, \left(\frac{1.2}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따른다.

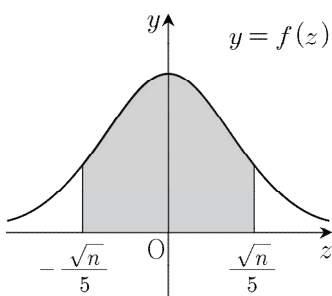
$$Z = \frac{\bar{X} - 8}{\frac{1.2}{\sqrt{n}}}$$

을 따른다.

$$P(7.76 \leq \bar{X} \leq 8.24)$$

$$= P\left(\frac{7.76 - 8}{\frac{1.2}{\sqrt{n}}} \leq Z \leq \frac{8.24 - 8}{\frac{1.2}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$= P\left(-\frac{\sqrt{n}}{5} \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{5}\right) \geq 0.6826$$



$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{5}\right) \geq \frac{0.6826}{2} = 0.3413$$

문제에서 주어진 표준정규분포표에서

$$\frac{\sqrt{n}}{5} \geq 1$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$n \geq 25$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 25이다.

답 25

28

[풀이]

이산확률변수의 기댓값에 대한 정의에 의하여

$$E(X) = \sum_{k=1}^5 kP(X=k), E(Y) = \sum_{k=1}^5 kP(Y=k)$$

이므로, 문제에서 주어진 등식의 양변에 k 를 곱하면

$$kP(Y=k) = \frac{k}{2}P(X=k) + \frac{k}{10}$$

시그마의 성질에 의하여

$$\sum_{k=1}^5 kP(Y=k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^5 kP(X=k) + \frac{1}{10} \sum_{k=1}^5 k$$

연속하는 자연수의 거듭제곱의 합의 공식에 의하여

$$\therefore E(Y) = \frac{1}{2}E(X) + \frac{1}{10} \times \frac{5 \times 6}{2} = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

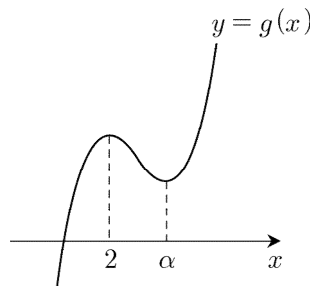
답 ②

29

[풀이1]

미분가능한 함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 극댓값을 가지므로

$$g'(2) = 0$$



위의 그림처럼 함수 $g(x)$ 가 $x=\alpha$ 에서 극솟값을 갖는다고 하면 $\alpha > 2$ 이다.

그리고 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 3이므로 $g'(x)$ 의 최고차항의 계수는 9이다.

인수정리에 의하여

$$g'(x) = 9(x-2)(x-\alpha) \quad (\text{단, } \alpha > 2)$$

부정적분을 하면

$$g(x) = 3x^3 - \frac{9}{2}(2+\alpha)x^2 + 18\alpha x + C \quad \dots \textcircled{1}$$

(단, C 는 적분상수)

이제 $g(x)$ 의 인수에 대하여 생각해 보자.

$k \neq 1$, $k \neq 2$, $k \neq 3$ 인 k 에 대하여

$g(k) = 0$ 이라고 가정하자.

문제에서 주어진 등식에서

$$f(k)g(k) = (k-1)^2(k-2)^2(k-3)^2 \neq 0$$

이므로 가정에 모순이다.

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.

<http://atom.ac/books/3888>

따라서 $g(x)$ 는

$$x-1, x-2, x-3$$

중에서 적어도 2개 이상을 인수로 가진다.

$g(x)$ 가 $x-1$ 을 인수로 가진다고 가정하자.

$$g(1) = \frac{27}{2}\alpha - 6 + C = 0 \quad \text{즉, } C = 6 - \frac{27}{2}\alpha$$

함수 $g(x)$ 의 방정식은

$$g(x) = 3x^3 - \frac{9}{2}(2+\alpha)x^2 + 18\alpha x + 6 - \frac{27}{2}\alpha$$

$$= 3(x-1)\left\{x^2 - \left(\frac{3}{2}\alpha + 2\right)x + \frac{9}{2}\alpha - 2\right\}$$

$$g(2) = \frac{9}{2}\alpha - 6 > 3 \quad (\because \alpha > 2) \text{이므로}$$

$g(x)$ 는 $x-2$ 를 인수로 가지지 않는다.

$$g(3) = 6 \neq 0 \text{이므로}$$

$g(x)$ 는 $x-3$ 을 인수로 가지지 않는다.

이는 가정에 모순이다.

따라서 $g(x)$ 는 $x-1$ 을 인수로 가지지 않는다.

함수 $g(x)$ 의 방정식은

$$g(x) = 3(x-2)^m(x-3)^n$$

(단, m, n 은 2 이하의 자연수이고, $m+n=3$)

함수 $g(x)$ 의 방정식은

$$g(x) = 3(x-2)^2(x-3)$$

$$= 3x^3 - 21x^2 + 48x - 36$$

또는

$$g(x) = 3(x-2)(x-3)^2$$

$$= 3x^3 - 24x^2 + 63x - 54$$

㉠과 ㉡의 계수비교를 하면

$$-\frac{9}{2}(2+\alpha) = -21, \quad 18\alpha = 48 \text{에서 } \alpha = \frac{8}{3}$$

㉠과 ㉡의 계수비교를 하면

$$-\frac{9}{2}(2+\alpha) = -24, \quad 18\alpha = 63$$

을 모두 만족시키는 α 는 존재하지 않는다.

따라서 함수 $g(x)$ 의 방정식은

$$g(x) = 3(x-2)^2(x-3)$$

함수 $f(x)$ 의 방정식은

$$f(x) = \frac{1}{3}(x-1)^2(x-3)$$

함수 $f(x)$ 의 도함수는

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x-1)(x-3) + \frac{1}{3}(x-1)^2$$

$$f'(0) = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \text{에서 } p=3, q=7$$

$$\therefore p+q=10$$

답 10

[풀이2]

우선 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 인수에 대하여 생각해 보자.

$k \neq 1, k \neq 2, k \neq 3$ 인 k 에 대하여

$f(k) = 0$ 이라고 가정하자.

문제에서 주어진 등식에서

$$f(k)g(k) = (k-1)^2(k-2)^2(k-3)^2 \neq 0$$

이므로 가정에 모순이다.

따라서 $f(x)$ 는

$$x-1, x-2, x-3$$

중에서 적어도 2개 이상을 인수로 가진다.

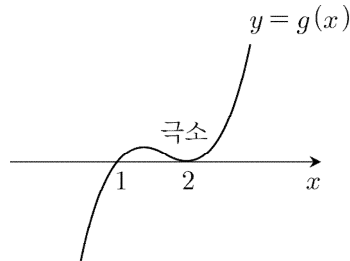
마찬가지의 방법으로 $g(x)$ 는

$$x-1, x-2, x-3$$

중에서 적어도 2개 이상을 인수로 가진다.

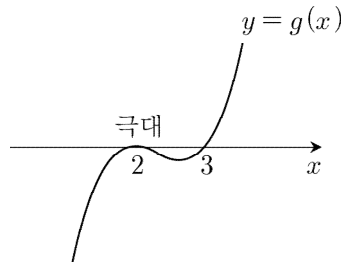
(1) $g(x)$ 가 $(x-2)^2$ 을 인수로 갖는 경우

$$(\text{경우1}) \quad g(x) = 3(x-1)(x-2)^2$$



함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 극솟값을 가지므로 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

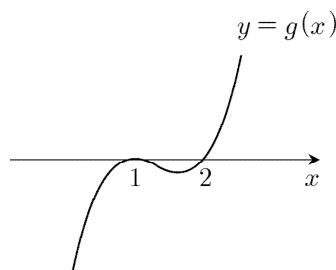
$$(\text{경우2}) \quad g(x) = 3(x-2)^2(x-3)$$



함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 극댓값을 가지므로 문제에서 주어진 조건을 만족시킨다.

(2) $g(x)$ 가 $x-2$ 를 인수로 갖고, $(x-2)^2$ 을 인수로 갖지 않는 경우

$$(\text{경우3}) \quad g(x) = 3(x-1)^2(x-2)$$



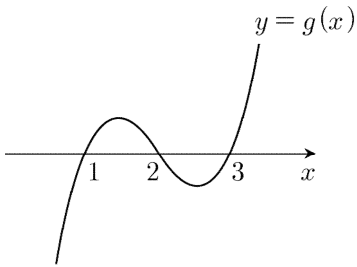
함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 극값을 가지지 않으므로 문

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.

<http://atom.ac/books/3888>

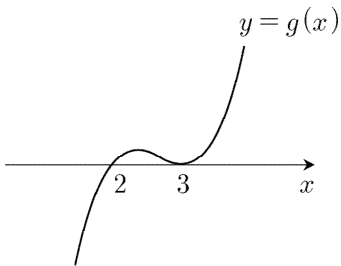
제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(경우4) $g(x) = 3(x-1)(x-2)(x-3)$



함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 극값을 가지지 않으므로 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

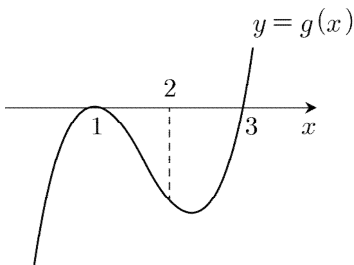
(경우5) $g(x) = 3(x-2)(x-3)^2$



함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 극값을 가지지 않으므로 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(3) $g(x)$ 가 $x-2$ 를 인수로 갖지 않는 경우

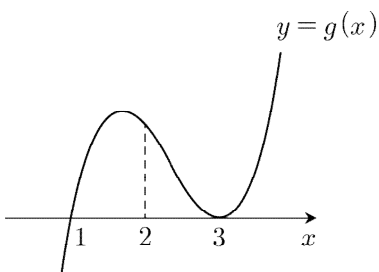
(경우6) $g(x) = 3(x-1)^2(x-3)$



함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값을 가진다.

함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 극댓값을 가질 수 없으므로 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(경우7) $g(x) = 3(x-1)(x-3)^2$



함수 $g(x)$ 의 도함수는

$$g'(x) = 3(x-3)^2 + 6(x-1)(x-3)$$

$$g'(2) = 3 - 6 = -3 \neq 0$$

함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 극값을 가지지 않으므로 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

이상에서 함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 극댓값을 가지는 경우는 (경우2)뿐이다.

따라서 함수 $g(x)$ 의 방정식은

$$g(x) = 3(x-2)^2(x-3)$$

함수 $f(x)$ 의 방정식은

$$f(x) = \frac{1}{3}(x-1)^2(x-3)$$

함수 $f(x)$ 의 도함수는

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x-1)(x-3) + \frac{1}{3}(x-1)^2$$

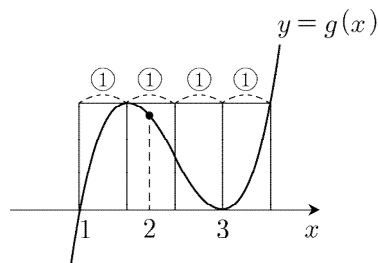
$$f'(0) = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \text{에서 } p=3, q=7$$

$$\therefore p+q=10$$

답 10

[참고1]

(경우7): 함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 극댓값을 갖지 않음을 다음과 같이 삼차함수 그래프에서의 비례관계로 보여도 좋다.



위의 그림에서 함수 $g(x)$ 는

$$x = \frac{1 \times 3 + 2 \times 1}{3} = \frac{5}{3}$$

에서 극댓값을 갖는다.

따라서 함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 극댓값을 가질 수 없다.

[참고2]

다음과 같은 경우 구분도 가능하다.

•

(경우1) $g(x)$ 가 $x-1$, $x-2$, $x-3$ 을 모두 인수로 갖는 경우

$$g(x) = 3(x-1)(x-2)(x-3)$$

(경우2) $g(x)$ 가 $x-1$ 을 인수로 갖지 않는 경우

$$g(x) = 3(x-2)^2(x-3), g(x) = 3(x-2)(x-3)^2$$

(경우3) $g(x)$ 가 $x-2$ 를 인수로 갖지 않는 경우

$$g(x) = 3(x-1)^2(x-3), g(x) = 3(x-1)(x-3)^2$$

(경우4) $g(x)$ 가 $x-3$ 을 인수로 갖지 않는 경우

$$g(x) = 3(x-1)^2(x-2), g(x) = 3(x-1)(x-2)^2$$

•

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.

<http://atom.ac/books/3888>

(경우1) $g(x)$ 가 $(x-1)^2$ 을 인수로 갖는 경우

$$g(x) = 3(x-1)^2(x-2), \quad g(x) = 3(x-1)^2(x-3)$$

(경우2) $g(x)$ 가 $x-1$ 을 인수로 갖고, $(x-1)^2$ 을 인수로 갖지 않는 경우

$$g(x) = 3(x-1)(x-2)^2,$$

$$g(x) = 3(x-1)(x-2)(x-3),$$

$$g(x) = 3(x-1)(x-3)^2$$

(경우3) $g(x)$ 가 $x-1$ 을 인수로 갖지 않는 경우

$$g(x) = 3(x-2)^2(x-3), \quad g(x) = 3(x-2)(x-3)^2$$

•

(경우1) $g(x)$ 가 $(x-3)^2$ 을 인수로 갖는 경우

$$g(x) = 3(x-1)(x-3)^2, \quad g(x) = 3(x-2)(x-3)^2$$

(경우2) $g(x)$ 가 $x-3$ 을 인수로 갖고, $(x-3)^2$ 을 인수로 갖지 않는 경우

$$g(x) = 3(x-1)^2(x-3),$$

$$g(x) = 3(x-1)(x-2)(x-3),$$

$$g(x) = 3(x-2)^2(x-3)$$

(경우3) $g(x)$ 가 $x-3$ 을 인수로 갖지 않는 경우

$$g(x) = 3(x-1)(x-2)^2, \quad g(x) = 3(x-1)^2(x-2)$$

[풀이3]

우선 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 인수에 대하여 생각해보자.

$k \neq 1, k \neq 2, k \neq 3$ 인 k 에 대하여

$f(k) = 0$ 이라고 가정하자.

문제에서 주어진 등식에서

$$f(k)g(k) = (k-1)^2(k-2)^2(k-3)^2 \neq 0$$

이므로 가정에 모순이다.

따라서 $f(x)$ 는

$$x-1, x-2, x-3$$

중에서 적어도 2개 이상을 인수로 가진다.

마찬가지의 방법으로 $g(x)$ 는

$$x-1, x-2, x-3$$

중에서 적어도 2개 이상을 인수로 가진다.

미분가능한 함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 극댓값을 가지므로

$$g'(2) = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

함수 $f(x)g(x)$ 의 도함수는

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$= 2(x-1)(x-2)^2(x-3)^2$$

$$+ 2(x-1)^2(x-2)(x-3)^2$$

$$+ 2(x-1)^2(x-2)(x-3)^2$$

위의 등식에 $x=2$ 를 대입하면

$$f'(2)g(2) + f(2)g'(2) = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$f'(2)g(2) = 0$$

여기서 $g(2) \neq 0$ 이라고 가정하자.

$g(x)$ 는 $x-2$ 를 인수로 갖지 않으므로

$f(x)$ 는 $(x-2)^2$ 을 인수로 가져야 한다.

$$f(x) = \frac{1}{3}(x-1)(x-2)^2 \text{에서}$$

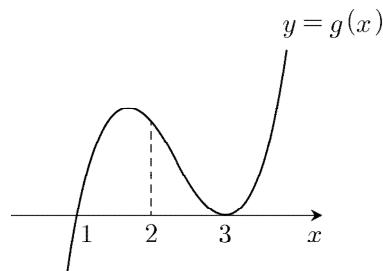
$$g(x) = 3(x-1)(x-3)^2 \quad \dots (\text{경우1})$$

또는

$$f(x) = \frac{1}{3}(x-2)^2(x-3) \text{에서}$$

$$g(x) = 3(x-1)^2(x-3) \quad \dots (\text{경우2})$$

(경우1)



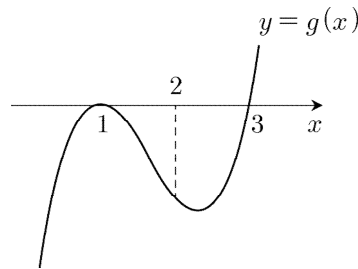
함수 $g(x)$ 의 도함수는

$$g'(x) = 3(x-3)^2 + 6(x-1)(x-3)$$

$$g'(2) = 3 - 6 = -3 \neq 0$$

함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 극값을 가지지 않으므로 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(경우2)



함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값을 가진다.

함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 극댓값을 가질 수 없으므로 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

이는 가정에 모순이다. 따라서 $g(2) = 0$ 이다.

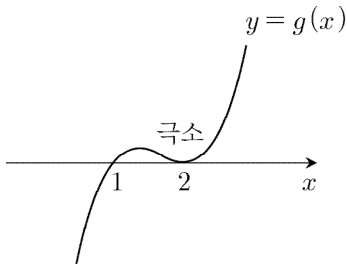
$$g(2) = g'(2) = 0 \text{이므로 인수정리에 의하여}$$

$$g(x) = 3(x-1)(x-2)^2 \quad \dots (\text{경우3})$$

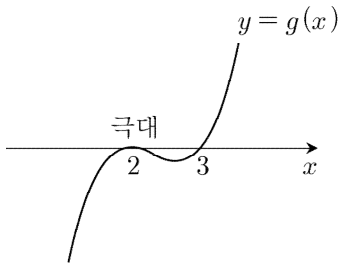
또는

$$g(x) = 3(x-2)^2(x-3) \quad \dots (\text{경우4})$$

(경우3)



함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 극솟값을 가지므로 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
(경우4)



함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 극댓값을 가지므로 문제에서 주어진 조건을 만족시킨다.

따라서 함수 $g(x)$ 의 방정식은

$$g(x) = 3(x-2)^2(x-3)$$

함수 $f(x)$ 의 방정식은

$$f(x) = \frac{1}{3}(x-1)^2(x-3)$$

함수 $f(x)$ 의 도함수는

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x-1)(x-3) + \frac{1}{3}(x-1)^2$$

$$f'(0) = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \text{에서 } p=3, q=7$$

$$\therefore p+q=10$$

답 10

[풀이4]

우선 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 인수에 대하여 생각해보자.

$k \neq 1, k \neq 2, k \neq 3$ 인 k 에 대하여

$f(k) = 0$ 이라고 가정하자.

문제에서 주어진 등식에서

$$f(k)g(k) = (k-1)^2(k-2)^2(k-3)^2 \neq 0$$

이므로 가정에 모순이다.

따라서 $f(x)$ 는

$$x-1, x-2, x-3$$

중에서 적어도 2개 이상을 인수로 가진다.

마찬가지의 방법으로 $g(x)$ 는

$$x-1, x-2, x-3$$

중에서 적어도 2개 이상을 인수로 가진다.

(1) $g(2) > 0$ 인 경우

함수 $g(x)$ 는 구간 $(-\infty, 2]$ 에서 연속이고

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty, g(2) > 0$$

이므로 사이값 정리에 의하여

$g(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(-\infty, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때, $c=1$ 일 수 밖에 없다.

그리고 $g(2) \neq 0$ 이므로 함수 $g(x)$ 의 방정식은

$$g(x) = 3(x-1)^2(x-3) \quad \dots (\text{경우1})$$

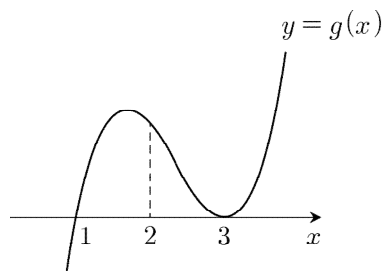
또는

$$g(x) = 3(x-1)(x-3)^2 \quad \dots (\text{경우2})$$

(경우1)

$$g(2) = -3 < 0 \text{이므로 제외하자.}$$

(경우2)



함수 $g(x)$ 의 도함수는

$$g'(x) = 3(x-3)^2 + 6(x-1)(x-3)$$

$$g'(2) = 3 - 6 = -3 \neq 0$$

함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 극값을 가지지 않으므로 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(2) $g(2) = 0$ 인 경우

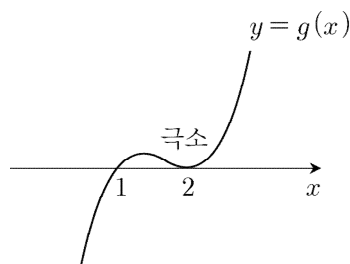
$g(2) = g'(2) = 0$ 이므로 함수 $g(x)$ 의 방정식은

$$g(x) = 3(x-1)(x-2)^2 \quad \dots (\text{경우3})$$

또는

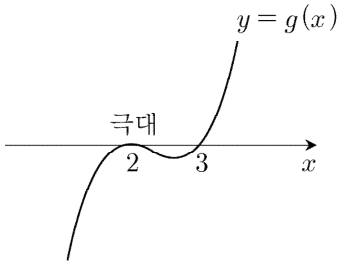
$$g(x) = 3(x-2)^2(x-3) \quad \dots (\text{경우4})$$

(경우3)



함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 극솟값을 가지므로 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(경우4)



함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 극댓값을 가지므로 문제에서 주어진 조건을 만족시킨다.

(3) $g(2) < 0$ 인 경우

함수 $g(x)$ 는 구간 $[2, \infty)$ 에서 연속이고

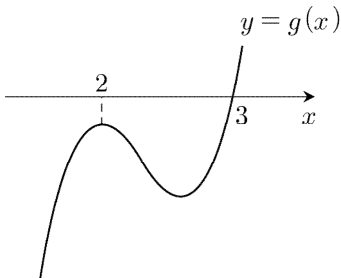
$$g(2) < 0, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$$

이므로 사이값 정리에 의하여

$g(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(2, \infty)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때, $c=3$ 일 수 밖에 없다.

그리고 $g(2) < 0$ 이므로 함수 $g(x)$ 의 그래프는



함수 $g(x)$ 의 방정식은

$$g(x) = 3(x-2)^2(x-3)$$

이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 은 서로 다른 두 허근을 가지므로 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

이상에서 문제에서 주어진 조건을 만족시키는 경우는 (경우4)뿐이다.

함수 $g(x)$ 의 방정식은

$$g(x) = 3(x-2)^2(x-3)$$

함수 $f(x)$ 의 방정식은

$$f(x) = \frac{1}{3}(x-1)^2(x-3)$$

함수 $f(x)$ 의 도함수는

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x-1)(x-3) + \frac{1}{3}(x-1)^2$$

$$f'(0) = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \text{에서 } p=3, q=7$$

$$\therefore p+q=10$$

답 10

30

[풀이]

네 함수

$$f(x), f(x-a), f(x-b), f(x-2)$$

의 방정식은 각각

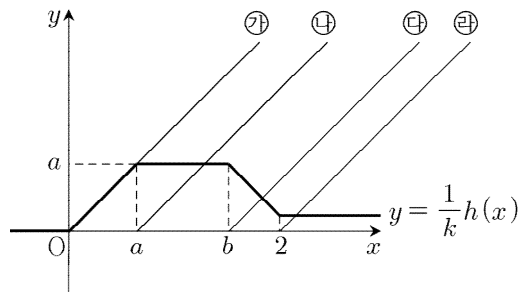
$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ x & (x > 0) \end{cases} \quad \dots \textcircled{㉑}$$

$$f(x-a) = \begin{cases} 0 & (x \leq a) \\ x-a & (x > a) \end{cases} \quad \dots \textcircled{㉒}$$

$$f(x-b) = \begin{cases} 0 & (x \leq b) \\ x-b & (x > b) \end{cases} \quad \dots \textcircled{㉓}$$

$$f(x-2) = \begin{cases} 0 & (x \leq 2) \\ x-2 & (x > 2) \end{cases} \quad \dots \textcircled{㉔}$$

㉑의 그래프를 x 축의 방향으로 각각 $a, b, 2$ 만큼 평행이동시키면 ㉒, ㉓, ㉔의 그래프와 일치한다.



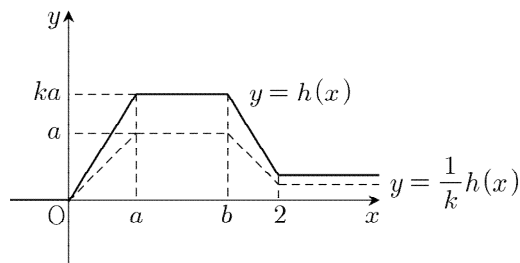
우선 함수 $h(x)$ 의 방정식을 구하자.

구간	$f(x)$	$f(x-a)$	$f(x-b)$	$f(x-2)$
$(-\infty, 0]$	0	0	0	0
$[0, a]$	x	0	0	0
$[a, b]$	x	$x-a$	0	0
$[b, 2]$	x	$x-a$	$x-b$	0
$[2, \infty)$	x	$x-a$	$x-b$	$x-2$

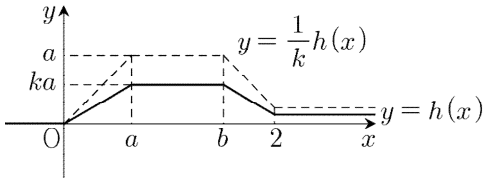
위의 표를 이용하여 함수 $h(x)$ 의 방정식을 구하면

$$h(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ kx & (0 < x \leq a) \\ ka & (a < x \leq b) \\ k(-x+a+b) & (b < x \leq 2) \\ k(a+b-2) & (x > 2) \end{cases}$$

$k > 1$ 일 때, 함수 $h(x)$ 의 그래프는



$0 < k < 1$ 일 때, 함수 $h(x)$ 의 그래프는



문제에서 주어진 조건에 의하여

모든 실수 x 에 대하여

$$0 \leq h(x) \leq g(x)$$

이 성립해야 한다.

(*)에 $x=a$ 를 대입하면

$$0 \leq h(a) \leq g(a) \quad \text{즉,} \quad 0 \leq ka \leq a(2-a)$$

정리하면

$$k \leq 2-a$$

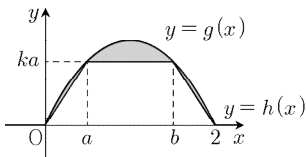
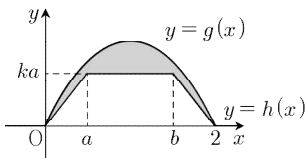
(*)에 $x=2$ 를 대입하면

$$0 \leq h(2) \leq g(2) \quad \text{즉,} \quad 0 \leq k(a+b-2) \leq 0$$

정리하면

$$b=2-a$$

㉠, ㉡이 성립하면 아래 그림처럼 (*)이 성립한다.



정적분의 성질에 의하여

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \{g(x) - h(x)\} dx \\ &= \int_0^2 g(x) dx - \int_0^2 h(x) dx \\ &= (\text{상수}) - \int_0^2 h(x) dx \end{aligned}$$

이므로 정적분 $\int_0^2 h(x) dx$ 의 값이 최대이면 문제에

서 주어진 정적분의 값은 최소가 된다.

사다리꼴의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$$\int_0^2 h(x) dx = \frac{(b-a)+2}{2} \times h(a)$$

$$= (2-a) \times ka \quad (\because \text{㉡})$$

$$\leq a(2-a)^2 \quad (\because \text{㉠}) \quad (\text{등호성립조건:} \quad k=2-a)$$

...㉢

삼차함수 $y=x(x-2)^2$ 이 최대일 때의 x 의 값을 구하자.

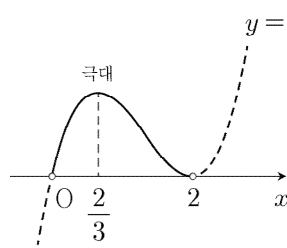
(단, $0 < x < 2$)

이 삼차함수의 도함수는

$$y' = (x-2)^2 + 2x(x-2) = (x-2)(3x-2)$$

$$y' = 0 \text{에서 } x = \frac{2}{3} \text{ 또는 } x = 2$$

x	...	$\frac{2}{3}$	...	2	...
y'	+	0	-	0	+
y		↗	극대	↘	극소



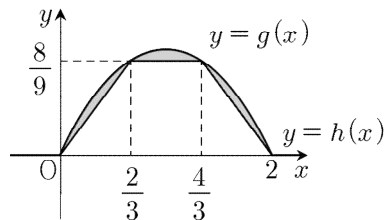
구간 $(0, 2)$ 에서 삼차함수 $y=x(x-2)^2$ 은 $x=\frac{2}{3}$

일 때 최댓값을 갖는다.

따라서 ㉢을 다시 쓰면

$$\int_0^2 h(x) dx \leq a(2-a)^2 \leq \frac{32}{27}$$

(단, 등호는 $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{4}{3}$, $k=\frac{4}{3}$ 일 때 성립한다.)



$$\therefore 60(k+a+b) = 60 \times \frac{10}{3} = 200$$

답 200

[참고1]

문제에서 주어진 정적분의 값의 최솟값을 구해보자.

정적분의 성질에 의하여

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \{g(x) - h(x)\} dx \\ &= \int_0^2 g(x) dx - \int_0^2 h(x) dx \\ &\geq \frac{4}{3} - \frac{32}{27} = \frac{4}{27} \end{aligned}$$

(단, 등호는 $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{4}{3}$, $k=\frac{4}{3}$ 일 때 성립한다.)

[참고2]

함수 $h(x)$ 의 그래프를 다음과 같은 방법으로 그려도 좋다.

실수 전체의 집합에서 네 함수

$$f(x), f(x-a), f(x-b), f(x-2)$$

가 연속이므로, 함수 $h(x)$ 는 연속함수이다.

아래의 다섯 개의 구간

$$(-\infty, 0], [0, a], [a, b], [b, 2], [2, \infty)$$

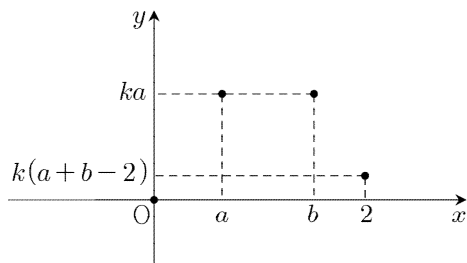
에서 함수 $h(x)$ 는 일차함수 혹은 상수함수이다.

구간	$(-\infty, 0]$	$[0, a]$	$[a, b]$	$[b, 2]$	$[2, \infty)$
선분 /반직선	반직선	선분	선분	선분	반직선
기울기	0	+	0	-	0

우선 함수 $h(x)$ 의 그래프 위의 네 점

$$(0, 0), (a, ka), (b, ka), (2, k(a+b-2))$$

를 좌표평면에 표시하자.



이제 네 개의 점

$$(0, 0), (a, ka), (b, ka), (2, k(a+b-2))$$

를 연결하면 함수 $h(x)$ 의 그래프를 얻는다.

