신은 자연수를 만들었고,
나머지 모두는 사람이 만들었다.

크로네커 (1823~1891)

2 자연수

오늘은 몇 월 며칠일까? 지금은 몇 시 몇 분일까? 이 물건의 가격은 얼마일까? 내 키는 몇 cm이고, 몸무게는 몇 kg일까? 오늘의 낮 기온은 몇 도일까? 이처럼 세상의 많은 것들은 수로 표현되는데, 이러한 수 중에서 가장 기본적인 것이 자연수이다.

인류가 자연수를 이해하고, 그것을 기호로 표현하기까지는 오랜 세월이 걸렸다. 문명 초기에는 일반 문자와 숫자의 구별이 분명하지 않았지만, 오늘날에는 0부터 9까지 모두 열 개의 기호를 사용하는 아라비아 숫자를 통한 표현법이 가장 널리 쓰이고 있다. 이러한 방법은 인간의 사고력을 높여 주는 데 매우 큰 역할을 하였다.

예를 들어, 손가락의 개수를 표현하기 위하여 ////////// 과 같이 나타내지 않고, 아라비아 숫자를 사용하면 두 개의 기호만 사용하여 간단히 '10'으로 표현할 수 있게 되었다. 또 아무리 큰 자연수라도 열 개의 아라비아 숫자를 사용하여 모두 표현할 수 있게 되었다.

수학 역사의 흐름

3세기

자연수에 관한 책 '산술'을 지음.

디오판토스 (?200~?284)

1801년

'산술' 지음.

가우스 (1777~1855)

19세기

옳고 그름을 1과 0으로 표현.

불 (1815~1864)


한 마리, 한 마리,
한 마리, …….
나간 양
들어온 양
메에 ― 에
메에_
메에-
오호! 이제
돌아오는군!
나간 양
들어온 양
한 마리, 한 마리,
한 마리, …….
나간 양
들어온 양

● 수를 알면 세는 것이 쉽다.

2 1 소인수분해

익힘책 31쪽 ~ 35쪽

새로운 용어
거듭제곱 · 밑 · 지수 · 소수 · 합성수 · 소인수 · 소인수분해

학습 목표
· 거듭제곱의 뜻을 알고, 이를 사용하여 자연수의 곱을 간단히 나타낼 수 있다.
· 소인수분해의 뜻을 알고, 자연수를 소인수분해할 수 있다.

자연수를 자신보다 작은 약수들의 곱으로 나타내고, 다시 그 약수들을 더 작은 약수들의 곱으로 나타내는 것을 계속해 나가면 더 이상 나누어지지 않는 약수들의 곱으로 나타낼 수 있다. 자연수의 이러한 성질은 컴퓨터와 무선 통신의 발전에 크게 기여하였고, 신호의 전달이나 암호 등과 관련하여 매우 중요한 역할을 한다.

거듭제곱

생각 열기

옛날 인도의 어느 황제는 전쟁을 좋아해서 백성들이 늘 불안하게 살고 있었다. 그래서 한 승려는 왕의 관심을 다른 곳으로 돌리기 위하여, 전략에 의해 승패가 좌우되는 전쟁과 비슷한 게임인 체스(서양장기)를 만들었다.

체스에 재미를 붙이게 된 왕은 체스를 만든 승려에게 무엇이든 원하는 것을 하사하겠다고 약속했다. 승려는 첫째 날에 두 톨, 둘째 날에 네 톨, 셋째 날에 여덟 톨과 같이 매일 밀알 수를 두 배씩 늘려서 체스판의 칸 수만큼 계속해서 달라고 하였다. 마지막 날에 승려가 받을 밀알은 모두 몇 개일까? 승려는 밀알을 모두 받을 수 있었을까? 체스판은 모두 $8\times8=64$(칸)으로 이루어져 있다.

탐구 활동

승려가 받을 밀알의 개수를 계산하는 방법에 대하여 알아보자.

탐구 1 각 날에 받을 밀알의 개수를 곱셈식을 사용하여 나타내어 보자.

	첫째 날	둘째 날	셋째 날	넷째 날	다섯째 날
밀알의 개수	2	2×2	$2\times2\times2$		

탐구 2 여섯째 날에 받을 밀알의 개수를 곱셈식을 사용하여 나타내어 보자.

탐구 활동에서 날마다 밀알의 수에 곱해지는 2의 개수가 하나씩 늘어남을 알 수 있다.

예를 들어, 50째 날에 받을 밀알의 개수는 2가 50번 곱해진 식으로 나타낼 수 있다. 따라서 마지막 날에 승려가 받을 밀알의 개수는 2가 64번 곱해진 식으로 나타낼 수 있다.

이와 같이 같은 수가 여러 번 곱해진 식을 간단히 나타내는 방법을 알아보자.

$\overbrace{2\times2\times\cdots\times2}^{64\text{개}}$
$=18446744073709551616$(개)
한 사람이 한 끼에 밀알 8000개를 먹는다면, 이 양은 60억 인구가 약 350년 동안 식사할 수 있는 양이다.

탐구 활동과 같이 2를 여러 번 곱할 때에는

$$2\times2=2^2$$
$$2\times2\times2=2^3$$
$$2\times2\times2\times2=2^4$$
$$\cdots\cdots$$

으로 나타내고, 2^2을 2의 제곱, 2^3을 2의 세제곱, 2^4을 2의 네제곱, $\cdots$ 이라고 읽는다.

2^3 ← 지수
밑

이때, 2^2, 2^3, 2^4, $\cdots$ 을 통틀어 2의 **거듭제곱**이라 하고, 거듭하여 곱하는 수 2를 **밑**, 곱한 개수를 나타낸 2, 3, 4, $\cdots$ 를 **지수**라고 한다.

지수가 1인 경우는 거듭제곱의 결과가 밑과 같다.
$2^1=2$, $10^1=10$

예를 들어, 2^3에서 밑은 2이고, 지수는 3이다.

거듭제곱을 사용하면 같은 것이 여러 번 곱해진 식을 간단히 나타낼 수 있다. 예를 들어, $2\times2\times2\times3\times3$을 간단히 나타내면 $2^3\times3^2$이다.

문제 1

다음을 거듭제곱으로 나타내어라.

(1) $3\times3\times3$ (2) $5\times5\times5\times5$

(3) $2\times2\times3\times3\times3$ (4) $2\times2\times3\times7\times7$

문제 2

다음 거듭제곱을 계산하여 표를 완성하여라.

(1)

1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2

(2)

2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}

생각 키우기

고대 그리스의 피타고라스(? B.C. 569~? B.C. 475)는 음(音소리 음)의 원리에 대하여 많은 연구를 하였고, 한 옥타브와 화음의 원리를 발견하였다. 음악 시간에 배운 두 소리의 높낮이의 차이가 한 옥타브라는 것은, 높은 소리가 내는 진동수가 낮은 소리가 내는 진동수의 2배라는 뜻이다. 이때, 피아노에서 낮은 도 건반을 누른 다음 일곱 옥타브 높은 도 건반을 누르면 소리의 진동수는 낮은 도 음의 몇 배가 되는가?

소수와 합성수

탐구 활동

1부터 10까지의 자연수에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

탐구 1 다음 표의 빈칸에 각 수의 약수를 적고, 약수의 개수를 구하여 보자.

수	약수	개수	수	약수	개수
1			6		
2			7		
3			8		
4			9		
5			10		

탐구 2 약수의 개수가 1인 수, 2인 수, 3 이상인 수를 각각 찾아보자.

• 소수(素數)
2, 3, 5, 7, ⋯
• 소수(小數)
0.1, 0.2, 0.3, ⋯

자연수 { 1
소수
합성수 }

탐구 활동에서 알 수 있듯이 자연수 중에는 약수의 개수가 1인 수도 있고 2인 수도 있으며 3 이상인 수도 있다.

자연수 중에서 2, 3, 5, 7, ⋯ 처럼 약수의 개수가 2인 수, 즉 1보다 큰 자연수 중에서 1과 자신만을 약수로 가지는 수를 **소수**라고 한다.

한편, 4, 6, 8, 9, ⋯ 와 같이 약수의 개수가 3 이상인 수, 즉 1보다 큰 자연수 중에서 소수가 아닌 수를 **합성수**라고 한다.

1은 소수도 아니고 합성수도 아니다.

문제 3 짝수 중에서 소수인 자연수를 구하여라.

문제 4 다음 수를 소수와 합성수로 구분하여라.

11, 13, 17, 25, 28, 31

토론 활동

자연수 567과 1101은 각각 소수인가, 합성수인가? 또 그렇게 생각한 이유를 말하여 보자.

다음과 같은 방법으로 1부터 50까지의 자연수 중에서 소수를 쉽게 찾을 수 있다.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

❶ 1은 소수가 아니므로 지운다.

❷ 표시하지 않은 수 중 가장 작은 수인 2에 ◯표를 하고, 2를 제외한 2의 배수를 모두 지운다.

❸ 표시하지 않은 수 중 가장 작은 수인 3에 ◯표를 하고, 3을 제외한 3의 배수를 모두 지운다.

❹ 표시하지 않은 수 중 가장 작은 수인 5에 ◯표를 하고, 5를 제외한 5의 배수를 모두 지운다.

이와 같은 방법으로 계속해 나가면 소수 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47만 남는다.

체에 걸러 내고 남는 수가 소수이다

에라토스테네스
(B.C. 275~B.C.194)

위와 같이 소수를 구하는 방법은 고대 그리스의 수학자 에라토스테네스가 고안한 것이다.

이 방법은 마치 소수를 체에 걸러 내는 것과 같다고 하여 그의 이름을 따서 에라토스테네스의 체라고 부른다.

문제 5 위 방법으로 51부터 100까지의 자연수 중에서 소수를 모두 찾아라.

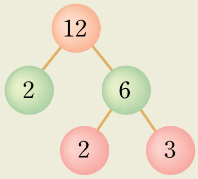
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

소인수분해

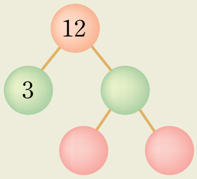
탐구 활동

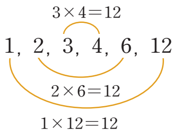
다음은 12를 자연수들의 곱으로 나타낸 것이다. 빈 곳에 알맞은 수를 써넣어 보자.

$12=2\times6$
$=2\times2\times3$



$12=3\times$ ◯
$=3\times$ ◯ $\times$ ◯





탐구 활동에서 12는 1×12, 2×6, 3×4와 같이 나타낼 수 있으므로, 1, 2, 3, 4, 6, 12는 모두 12의 약수이며 이들을 인수라고도 한다. 특히, 2, 3은 12의 인수이면서 소수이다. 이와 같이 소수인 인수를 **소인수**라고 한다.

한편, $12=2\times2\times3=2^2\times3$과 같이 소수의 곱으로 나타낼 수 있다. 이와 같이 자연수를 소수의 곱으로 나타내는 것을 **소인수분해**한다고 한다.

탐구 활동에서와 같이 12를 다른 순서, 즉 $2\times2\times3$ 또는 $3\times2\times2$로 소인수분해하여도 그 결과는 모두 $2^2\times3$이다.

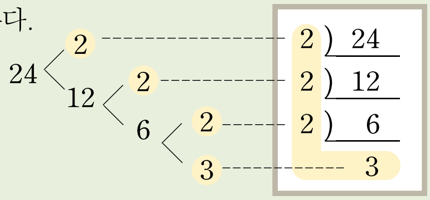
이와 같이 자연수를 소인수분해할 때, 소인수들의 순서를 생각하지 않으면 결과는 오직 한 가지이다. 일반적으로 소인수분해한 결과는 작은 소인수부터 쓰며, 같은 소인수의 곱은 거듭제곱으로 나타낸다.

예제 1

24를 소인수분해하여라.

풀이 24를 소인수로 계속해서 나누어 본다.

$24=2\times12$
$=2\times2\times6$
$=2\times2\times2\times3$
$=2^3\times3$



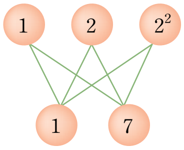
답 $2^3\times3$

문제 6

다음 수를 소인수분해하여라.

(1) 20 (2) 27 (3) 180 (4) 210

예제 2



소인수분해를 이용하여 28의 약수를 모두 구하여라.

풀이 28을 소인수분해하면 $28=2^2\times 7$이다. 이때, 2^2의 약수는 1, 2, 2^2이고, 7의 약수는 1, 7이다. 오른쪽 표와 같이 2^2의 약수와 7의 약수를 각각 곱하면 28의 약수는 1, 2, 4, 7, 14, 28이다.

$\times$	1	2	2^2
1	$1\times1=1$	$1\times2=2$	$1\times2^2=4$
7	$7\times1=7$	$7\times2=14$	$7\times2^2=28$

답 **1, 2, 4, 7, 14, 28**

문제 7

다음 수의 약수를 모두 구하여라.

(1) $2^3\times5$ (2) 3×5^2 (3) 72 (4) 100

생각 키우기

약수가 3개인 자연수를 작은 수부터 3개 찾고, 이 자연수들이 가지는 특징을 말하여라.

확인 문제

1 다음 수를 소인수분해하여라.

(1) 30 (2) 45 (3) 54

2 다음 수의 약수를 모두 구하여라.

(1) 2×5^2 (2) $3^2\times7$ (3) 52

함께 하는 수학 여행

차 번호판에 담긴 수학

수를 연구하는 학자들은 생활 속에서 만나는 수에 대해 그 수에 담겨 있는 재미있는 사실을 밝히는 것을 즐긴다. 다음은 그 중의 유명한 예로 인도의 수학자 라마누잔(1887~1920)과 영국의 수학자 하디(1877~1947)의 일화이다.

하디가 병원에 입원해 있는 라마누잔을 찾아갔을 때, 자신이 타고 온 택시의 번호가 1729였는데, 그 수는 재미있는 특징이 없는 수인 것 같다고 말했더니, 라마누잔은 다음과 같이 말했다고 한다.

"그 수는 세제곱인 두 수의 합으로 표현할 수 있는 방법이 두 가지가 있는 자연수 중에서 가장 작은 수랍니다."

〈참고 문헌: 하디, 김인수 역 (1998), *어느 수학자의 변명*, 민음사〉

$10^3+9^3=12^3+1^3$

2

2 최대공약수와 최소공배수

⇆ 익힘책 36쪽 ~ 40쪽

새로운 용어
서로소

학습 목표 최대공약수와 최소공배수의 성질을 이해하고, 이를 구할 수 있다.

인류는 달이 차고 기우는 것과 시간과 계절이 바뀌는 것들 사이에 조화를 이루는 달력을 만들려고 노력하였다. 이러한 인류의 노력은 최대공약수와 최소공배수를 구하는 문제라고 볼 수 있다.

공약수와 최대공약수

탐구 활동

승현이는 귤 12개와 과자 16개를 남김없이 똑같이 몇 개의 접시에 나누어 담으려고 한다. 이때, 다음을 알아보자.

탐구 1 귤을 남김없이 똑같이 나누어 담을 수 있는 접시의 수를 모두 구하여 보자.

탐구 2 과자를 남김없이 똑같이 나누어 담을 수 있는 접시의 수를 모두 구하여 보자.

탐구 3 **탐구 1**과 **탐구 2**를 모두 만족하는 접시의 수를 구하여 보자.

탐구 활동에서 귤 12개를 남김없이 똑같이 나누어 담을 수 있는 접시의 수는 12의 약수인 1, 2, 3, 4, 6, 12이고, 과자 16개를 남김없이 똑같이 나누어 담을 수 있는 접시의 수는 16의 약수인 1, 2, 4, 8, 16이다.

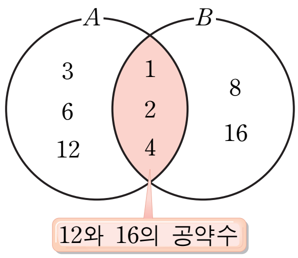
12의 약수의 집합을 A, 16의 약수의 집합을 B라고 하면

$$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\},\quad B=\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$$

이고, 집합 A와 B의 교집합은

$$A\cap B=\{1,\ 2,\ 4\}$$

임을 알 수 있다.



따라서 귤 12개와 과자 16개를 똑같이 나누어 담을 수 있는 접시의 수는 12와 16의 공약수인 1, 2, 4이다.

이와 같이 두 개 이상의 자연수의 공통인 약수를 공약수라 하고, 공약수 중에서 가장 큰 수를 최대공약수라고 한다. 따라서 12와 16의 최대공약수는 4이다.

한편, 12와 16의 공약수 1, 2, 4는 모두 최대공약수 4의 약수이다. 이와 같이 두 개 이상의 자연수의 공약수는 그 수들의 최대공약수의 약수이다.

문제 1 두 자연수 a와 b의 최대공약수가 20일 때, a와 b의 공약수를 모두 구하여라.

자연수들 중에는 9와 14처럼 공약수가 1밖에 없는 경우가 있다. 이와 같이 공약수가 1밖에 없는 두 자연수를 **서로소**라고 한다. 그러므로 서로소인 두 자연수의 최대공약수는 1이다.

문제 2 다음 중에서 서로소인 수끼리 짝지어진 것을 찾아라.

(1) 2와 6 (2) 3과 7

(3) 5와 20 (4) 6과 21

열린 문제 각자 자신의 출석 번호를 적어 보고, 짝꿍의 출석 번호와 서로소인지 알아보아라.

소인수분해를 이용하여 최대공약수를 구하여 보자.

예를 들어, 두 수 36과 90을 소인수분해하면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{rl}
36 & = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \\
90 & = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \\
\hline
 & 2 \times 3 \times 3 = 18
\end{array}
$$

공통인 소인수

$$
\begin{array}{r|rr}
2 & 36 & 90 \\
\hline
3 & 18 & 45 \\
\hline
3 & 6 & 15 \\
\hline
 & 2 & 5
\end{array}
$$

… 서로소

$2 \times 3 \times 3 = 18$

최대공약수

이때, 36과 90의 공통인 소인수 2, 3, 3을 모두 곱한 $2 \times 3 \times 3 = 18$이 36과 90의 최대공약수이다.

이와 같이 두 개 이상의 자연수의 최대공약수는 이들을 각각 소인수분해하여 공통인 소인수를 모두 곱하여 구할 수 있다.

문제 3 소인수분해를 이용하여 다음 두 수의 최대공약수를 구하여라.

(1) $2^2 \times 5 \times 7$, $2^3 \times 3 \times 7$ (2) $2^2 \times 3$, $2 \times 3 \times 5$

(3) 18, 24 (4) 96, 108

예제 1 세 수 12, 42, 60의 최대공약수를 구하여라.

풀이 소인수분해를 이용하여 구하기

❶ 각 수를 소인수분해한다.

❷ 각 수의 공통인 소인수를 모두 찾는다.

❸ ❷에서 구한 공통인 소인수를 모두 곱한다.

$$\begin{array}{rcl} 12 &=& 2 \times 2 \times 3 \\ 42 &=& 2 \times 3 \times 7 \\ 60 &=& 2 \times 2 \times 3 \times 5 \\ \hline & & 2 \times 3 = 6 \end{array}$$

따라서 구하는 최대공약수는

$$2\times3=6$$

이다.

다른 풀이 나눗셈을 이용하여 구하기

❶ 공통인 소인수로 각 수를 나눈다.

❷ 몫의 공약수가 1뿐일 때까지 ❶의 과정을 계속한다.

❸ 공통인 소인수를 모두 곱한다.

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 12 & 42 & 60 \\ \hline 3 & 6 & 21 & 30 \\ \hline & 2 & 7 & 10 \end{array}$$

공약수가 1뿐임

따라서 구하는 최대공약수는

$$2\times3=6$$

이다.

답 6

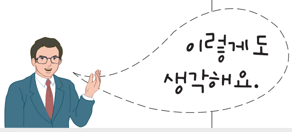
문제 4 소인수분해를 이용하여 다음 세 수의 최대공약수를 구하여라.

(1) $2^2\times3^2$, $2\times3^2\times5$, 2×7^2

(2) $2^3\times3$, $2^2\times3^2$, $2^2\times3\times5$

(3) 60, 80, 108

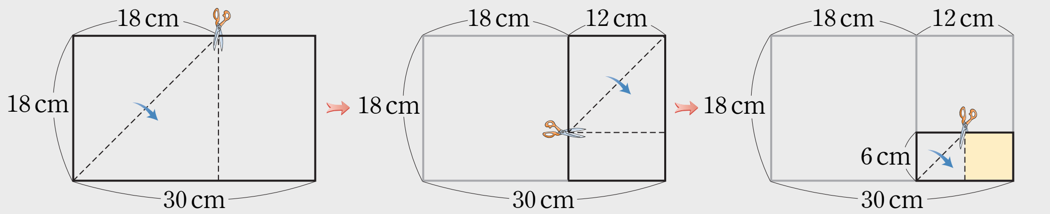
(4) 54, 72, 90



직사각형을 이용하여 최대공약수를 구할 수 있다

두 수 30과 18의 최대공약수 6을 다음과 같이 직사각형을 이용하여 구하여 보자.

가로, 세로의 길이가 각각 30 cm, 18 cm인 직사각형 모양의 종이에서 아래 그림과 같이 짧은 변을 한 변으로 하는 정사각형을 잘라 보자. 또 잘라 내고 남은 도형을 같은 방법으로 정사각형이 남을 때까지 계속 잘라 낸다.

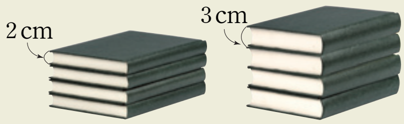


이때, 마지막 정사각형의 한 변의 길이는 6 cm가 된다. 이와 같이 직사각형을 정사각형으로 잘라 내어 최대공약수를 구할 수 있다.

공배수와 최소공배수

탐구 활동

오른쪽 그림과 같이 두께가 2 cm 인 책과 두께가 3 cm 인 책을 각각 쌓고 있다. 이때, 다음을 알아보자.

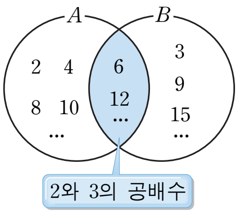


탐구 1 두께가 2 cm 인 책을 쌓을 때의 높이를 차례로 6개만 적어 보자.

탐구 2 두께가 3 cm 인 책을 쌓을 때의 높이를 차례로 5개만 적어 보자.

탐구 3 **탐구 1**과 **탐구 2**에서 쌓은 책의 높이가 같아질 때의 높이를 구하여 보자.

탐구 활동에서 두께가 2 cm 인 책을 쌓을 때의 높이는 2 의 배수인 2, 4, 6, 8, 10, 12, ⋯ (cm) 이고, 두께가 3 cm 인 책을 쌓을 때의 높이는 3 의 배수인 3, 6, 9, 12, 15, ⋯ (cm) 이다.



2 의 배수의 집합을 A, 3 의 배수의 집합을 B라고 하면

$$A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, \cdots\}, \quad B=\{3, 6, 9, 12, 15, \cdots\}$$

이고, 집합 A와 B의 교집합은 $A\cap B=\{6, 12, \cdots\}$임을 알 수 있다.

따라서 양쪽에 쌓은 책의 높이가 같아질 때의 높이는 2 와 3 의 공배수인 6, 12, ⋯ (cm) 이다.

이와 같이 두 개 이상의 자연수의 공통인 배수를 공배수라 하고, 공배수 중에서 가장 작은 수를 최소공배수라고 한다. 따라서 2 와 3 의 최소공배수는 6 이다.

한편, 2 와 3 의 공배수 6, 12, 18, ⋯ 은 모두 최소공배수 6 의 배수이다. 이와 같이 두 개 이상의 자연수의 공배수는 그 수들의 최소공배수의 배수이다.

문제 5 두 수 a와 b의 최소공배수가 8 일 때, a와 b의 공배수를 작은 것부터 차례로 5 개 구하여라.

소인수분해를 이용하여 최소공배수를 구하여 보자.

예를 들어, 두 수 12 와 30 을 소인수분해하면 오른쪽과 같다.

$$\begin{array}{rl} 12= & 2\times 2\times 3 \\ 30= & \phantom{2\times{}} 2\times 3\times 5 \\ \hline & 2\times 2\times 3\times 5=60 \end{array}$$

이때, 12 와 30 의 공통인 소인수 2, 3 과 공통이 아닌 소인수 2, 5 를 모두 곱한 $2\times2\times3\times5=60$ 이 12 와 30 의 최소공배수이다.

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 12 & 30 \\ \hline 3 & 6 & 15 \\ \hline & 2 & 5 \end{array} \cdots \text{서로소}$$

$2\times3\times2\times5=60$

최소공배수

이와 같이 두 개 이상의 자연수의 최소공배수는 이들을 각각 소인수분해하여 공통인 소인수와 공통이 아닌 소인수들을 모두 곱하여 구할 수 있다.

문제 6 소인수분해를 이용하여 다음 두 수의 최소공배수를 구하여라.

(1) $2^2\times5$, $2\times3\times5$ (2) 48, $2\times3\times7$

(3) 4, 15 (4) 45, 60

예제 2 세 수 12, 40, 60의 최소공배수를 구하여라.

풀이 **소인수분해를 이용하여 구하기**

❶ 각 수를 소인수분해한다.

❷ 각 수의 공통인 소인수와 공통이 아닌 소인수를 모두 찾는다.

❸ ❷에서 구한 소인수를 모두 곱한다.

$$\begin{array}{rcccccccccl}
12= & 2 & \times & 2 & & & \times & 3 & & & \\
40= & 2 & \times & 2 & \times & 2 & & & \times & 5 & \\
60= & 2 & \times & 2 & & & \times & 3 & \times & 5 & \\
\hline
 & 2 & \times & 2 & \times & 2 & \times & 3 & \times & 5 & =120
\end{array}$$

따라서 구하는 최소공배수는

$$2\times2\times2\times3\times5=120$$

이다.

다른 풀이 **나눗셈을 이용하여 구하기**

❶ 어느 두 수도 공통인 소인수가 없을 때까지 공통인 소인수로 각 수를 나눈다. 이때, 공통인 소인수가 없는 수는 그대로 내려 쓴다.

❷ 나눈 소인수와 몫을 모두 곱한다.

$$\begin{array}{r|rrr}
2 & 12 & 40 & 60 \\ \hline
2 & 6 & 20 & 30 \\ \hline
3 & 3 & 10 & 15 \\ \hline
5 & 1 & 10 & 5 \\ \hline
 & 1 & 2 & 1
\end{array}$$

따라서 구하는 최소공배수는

$$2\times2\times3\times5\times1\times2\times1=120$$

이다. **답** 120

문제 7 소인수분해를 이용하여 다음 세 수의 최소공배수를 구하여라.

(1) 2×5, $2^2\times3\times5$, $2\times3\times5$ (2) 2×3, 3×7, $2\times3^2\times7$

(3) 12, 15, 45 (4) 21, 28, 42

확인 문제

다음 ( ) 안에 옳은 것에는 ○표, 옳지 않은 것에는 ×표를 하여라.

(1) ( ) 2×3^3은 $2^2\times3$과 2×3^2의 공배수이다.

(2) ( ) 두 수 a와 b의 최대공약수가 12이면, a와 b의 공약수는 모두 6개이다.

(3) ( ) 서로소인 두 자연수의 공약수는 한 개뿐이다.

2 3 최대공약수와 최소공배수의 활용

익힘책 41쪽 ~ 42쪽

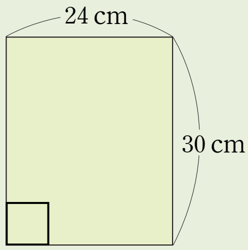
학습 목표 최대공약수와 최소공배수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

길을 걷다가 바닥에 깔린 보도블록 위의 금을 일정한 간격으로 밟아 본 경험이 있을 것이다. 이러한 것은 최소공배수를 경험하는 것이라고 할 수 있다. 이와 같이 실생활 속에는 최대공약수와 최소공배수가 다양하게 들어 있다.

최대공약수의 활용

예제 1

가로의 길이가 24 cm, 세로의 길이가 30 cm인 도화지를 남는 부분 없이 잘라서 모두 같은 크기의 정사각형으로 만들려고 한다. 되도록 큰 정사각형으로 만들려고 할 때, 정사각형의 한 변의 길이를 몇 cm로 해야 하는가?



$$\begin{array}{l} 24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \\ 30 = 2 \times 3 \times 5 \\ \hline \quad\;\; 2 \times 3 = 6 \end{array}$$

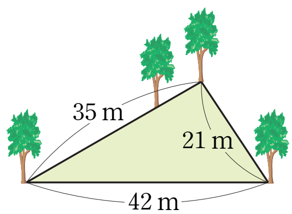
최대공약수

풀이 정사각형의 한 변의 길이는 도화지의 가로와 세로의 길이를 모두 나눌 수 있어야 하므로 24와 30의 공약수이다. 그런데 되도록 큰 정사각형으로 만들어야 하므로 정사각형의 한 변의 길이는 24와 30의 최대공약수이다. 24와 30의 최대공약수는 6이므로, 정사각형의 한 변의 길이를 6 cm로 하면 된다.

답 6 cm

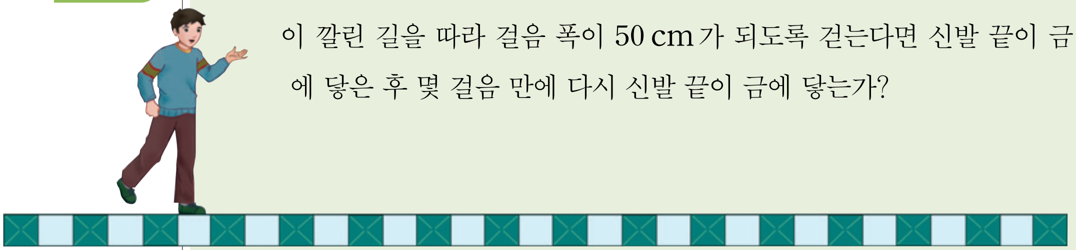
문제 1 불우 이웃을 돕기 위해서 걷은 비누 48개, 수건 72장, 치약 120개를 각각의 개수가 같게 나누어 상자에 담으려고 한다. 될 수 있는 대로 많은 상자에 담으려고 할 때, 최대한 몇 개의 상자에 담을 수 있는가?

문제 2 세 변의 길이가 각각 35 m, 42 m, 21 m인 삼각형 모양의 땅 둘레에 같은 간격으로 나무를 심으려고 한다. 그림과 같이 세 꼭짓점 위에 나무를 심고 나무 사이의 간격을 최대한 넓게 할 때, 나무의 간격과 나무의 수를 각각 구하여라.



최소공배수의 활용

예제 2 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 30 cm인 정사각형 모양의 타일이 빈틈없이 깔린 길을 따라 걸음 폭이 50 cm가 되도록 걷는다면 신발 끝이 금에 닿은 후 몇 걸음 만에 다시 신발 끝이 금에 닿는가?



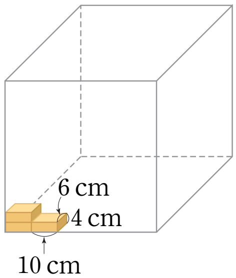
$$\begin{array}{r} 30 = 2 \times 3 \times 5 \qquad \\ 50 = 2 \times \quad\ \times 5 \times 5 \\ \hline 2 \times 3 \times 5 \times 5 = 150 \end{array}$$

최소공배수

풀이 신발 끝이 금에 닿게 되는 것은 30과 50의 공배수만큼 걸었을 때이다. 그런데 금에 닿은 후 처음으로 다시 금에 닿게 되는 것은 30과 50의 최소공배수만큼 걸었을 때이다. 30과 50의 최소공배수는 150이므로 150 cm 걸었을 때 신발 끝이 다시 금에 닿게 된다. 이때, 걸음 폭이 50 cm이므로 세 걸음 만에 다시 금에 닿는다.

답 세 걸음

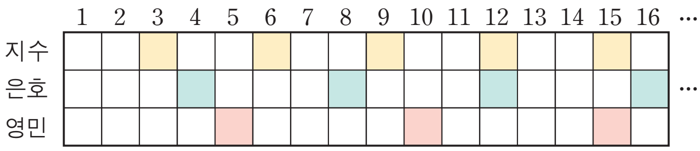
문제 3 가로의 길이가 10 cm, 세로의 길이가 6 cm, 높이가 4 cm인 블록이 있다. 이 블록들이 일정한 방향을 향하도록 쌓아서 가장 작은 정육면체 모양을 만들려고 한다. 이때, 만들어지는 정육면체의 한 모서리의 길이와 필요한 블록의 개수를 각각 구하여라.



문제 4 어느 놀이 공원에 있는 꼬마 기차는 15분마다, 회전목마는 12분마다 출발한다. 10시에 두 놀이 기구가 동시에 출발한 후, 다시 처음으로 동시에 출발하는 시각을 구하여라.

확인 문제

아래 그림과 같이 지수는 3칸, 은호는 4칸, 영민이는 5칸마다 색을 칠하고 있다. 처음으로 세로줄에 모두 색이 칠해지는 칸 번호를 구하여라.



2 4

십진법과 이진법

익힘책 43쪽 ~ 46쪽

새로운 용어
십진법 · 이진법 · 진법의 전개식

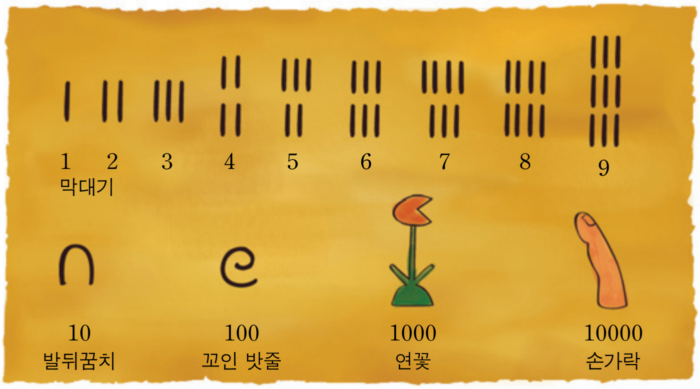
학습 목표
· 십진법과 이진법의 원리를 이해하고, 자연수를 십진법과 이진법의 전개식으로 나타낼 수 있다.
· 십진법과 이진법 사이의 관계를 이해한다.

수를 이해하고 표현하기 위한 다양한 방법이 역사에 남아 있다. 돌멩이나 나뭇가지를 사용하기도 하였고, 새로운 수에 새로운 이름을 계속 만들어 나가기도 하였다. 오늘날은 여러 문명의 영향을 받아 6세기경 인도에서 사용하기 시작하여 아라비아인들에 의하여 널리 퍼진 인도-아라비아 숫자를 많은 나라에서 사용하고 있다.

십진법

생각 열기

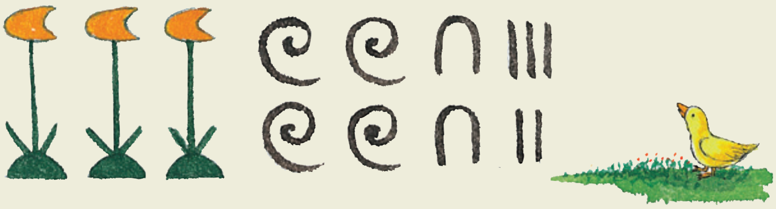
다음은 고대 이집트의 벽화에 그려진 그림 문자에 같은 값을 나타내는 아라비아 숫자를 적은 것이다. 수를 그림 문자로 어떻게 나타내었을까?



탐구 활동

위 그림 문자를 보고, 다음을 알아보자.

탐구 1 아래 그림은 오리의 마리 수를 고대 이집트의 그림 문자로 나타낸 것이다. 오리 몇 마리를 나타낸 것인지 아라비아 숫자로 적어 보자.



탐구 2 자신이 태어난 연도를 위 그림 문자를 이용하여 나타내어 보자.

탐구 3 수를 그림으로 나타낼 때에는 어떠한 장점과 단점이 있는지 말하여 보자.

우리는 오늘날 아라비아 숫자 0, 1, 2, 3, ⋯, 9 열 개의 숫자를 사용하여 자연수를 표현하고 있다.

탐구 활동의 그림 문자는 1000이 3개, 100이 4개, 10이 2개, 1이 5개이므로 나타내는 수는

$$3\times1000+4\times100+2\times10+5\times1$$

이고, 이것을 우리는 간단히 3425로 표현한다. 이 표현에서는 자리가 하나씩 올라감에 따라 자리의 값이 1, 10, 100, 1000으로 10배씩 커진다. 이와 같이 수를 나타내는 방법을 **십진법**이라고 한다.

3	4	2	5
↑	↑	↑	↑
10^3의 자리	10^2의 자리	10의 자리	1의 자리

한편, 십진법으로 나타낸 수 3425를 10의 거듭제곱을 써서

$$3425=3\times10^3+4\times10^2+2\times10+5\times1$$

과 같이 나타낼 수 있다.

이와 같이 십진법으로 나타낸 수를 10의 거듭제곱을 써서 나타낸 식을 **십진법의 전개식**이라고 한다.

예제 1 자연수 2075를 십진법의 전개식으로 나타내어라.

풀이 $2075=2\times1000+0\times100+7\times10+5\times1$

$=2\times10^3+0\times10^2+7\times10+5\times1$

답 $\mathbf{2\times10^3+0\times10^2+7\times10+5\times1}$

또는 $\mathbf{2\times10^3+7\times10+5\times1}$

문제 1 다음 수를 십진법의 전개식으로 나타내어라.

(1) 94 (2) 308

(3) 1357 (4) 20538

문제 2 다음을 십진법으로 나타내어라.

(1) $7\times10^3+2\times10+2\times1$ (2) $4\times10^4+5\times10^3+9\times10^2+1\times1$

문제 3 밀가루의 무게를 재면서 무게가 100 g, 10 g, 1 g인 저울추를 각각 2개, 5개, 3개 사용하였다. 측정한 밀가루의 무게를 십진법의 전개식으로 나타내어라.

이진법

생각 열기

숫자가 0과 1뿐이라면 2, 3, 4, 5, ⋯ 는 어떻게 표현할 수 있을까?

탐구 활동

아래 표는 무게가 각각 16 g, 8 g, 4 g, 2 g, 1 g인 저울추 중에서, 선택한 것에는 숫자 1을, 선택하지 않은 것에는 숫자 0을 사용하여 나타낸 것이다. 다음을 알아보자.

탐구 1 오른쪽 표와 같이 저울추를 선택할 때, 선택한 저울추의 총 무게를 구하여 보자. 예를 들어, 2 g짜리 1개, 1 g짜리 1개를 선택하면 선택한 저울추의 총 무게는 $2+1=3$(g)이다. 같은 방법으로 선택한 저울추의 총 무게를 계산하여 빈칸을 채워 보자.

탐구 2 16 g, 8 g, 4 g, 2 g, 1 g짜리 저울추 중에서 선택한 저울추의 개수가 차례로 1, 1, 0, 1, 1일 때, 선택한 저울추의 총 무게를 구하여 보자.

	16 g	8 g	4 g	2 g	1 g	총 무게 (g)
추의 선택표					1	1
				1	0	2
				1	1	3
			1	0	0	
			1	0	1	
			1	1	0	
			1	1	1	
		1	0	0	0	
		1	0	0	1	
		1	0	1	0	
		1	0	1	1	
		1	1	0	0	
		1	1	0	1	
		1	1	1	0	
		1	1	1	1	
	1	0	0	0	0	

탐구 2에서 선택한 저울추의 개수는 아래 그림과 같다.

1	1	0	1	1

그러므로 저울추의 총 무게는 $16+8+0+2+1=27$이고,

$$27=1\times16+1\times8+0\times4+1\times2+1\times1$$
$$=1\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+1\times2+1\times1$$

과 같이 나타낼 수 있다.

이때, 자연수 27을 1, 1, 0, 1, 1을 써서 **$11011_{(2)}$**로 나타내면, 이 수는 자리가 하나씩 올라감에 따라 자리의 값이 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4으로 2배씩 커진다. 이와 같이 수를 나타내는 방법을 **이진법**이라고 한다.

$11011_{(2)}$은

이진법으로 나타낸 수 일일영일일

이라고 읽는다. 이진법에서는 0과 1을 사용하여 자연수를 표현한다.

1	1	0	1	$1_{(2)}$
↑	↑	↑	↑	↑
2^4의 자리	2^3의 자리	2^2의 자리	2의 자리	1의 자리

한편, $11011_{(2)}$을 2의 거듭제곱을 써서

$$11011_{(2)}=1\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+1\times2+1\times1$$

과 같이 나타낼 수 있다. 이와 같이 이진법으로 나타낸 수를 2의 거듭제곱을 써서 나타낸 식을 **이진법의 전개식**이라고 한다.

문제 4 다음 수를 이진법의 전개식으로 나타내어라.

(1) $1001_{(2)}$　　(2) $11101_{(2)}$　　(3) $101010_{(2)}$

문제 5 다음을 이진법으로 나타내어라.

(1) $1\times2^4+1\times2^2+1\times2$　　(2) $1\times2^5+1\times2^3+1\times2^2+1\times1$

이진법의 전개식을 이용하면 이진법으로 나타낸 수를 십진법으로 나타낼 수 있다.

예제 2 다음 수를 십진법으로 나타내어라.

(1) $1011_{(2)}$　　(2) $11001_{(2)}$

풀이 (1) $1011_{(2)}=1\times2^3+0\times2^2+1\times2+1\times1$
$=8+2+1=11$

(2) $11001_{(2)}=1\times2^4+1\times2^3+1\times1$
$=16+8+1=25$

답 (1) **11** (2) **25**

(1)

1	0	1	1	(2)
8	4	2	1	

➡ 8+2+1=11

문제 6 다음 수를 십진법으로 나타내어라.

(1) $11_{(2)}$　　(2) $111_{(2)}$　　(3) $10101_{(2)}$

십진법으로 나타낸 수를 이진법으로 나타낼 때, 그 수를 몫이 0이 될 때까지 계속 2로 나눈 다음, 나머지를 맨 나중의 것부터 차례로 쓴다.

예제 3 자연수 11을 이진법으로 나타내어라.

풀이

	나머지
2) 11	
2) 5	… 1
2) 2	… 1
2) 1	… 0
0	… 1

$11=2\times5+1$

$5=2\times2+1$

$2=2\times1+0$

$1=2\times0+1$

$\therefore\ 11=1011_{(2)}$

답 $1011_{(2)}$

문제 7 다음 수를 이진법으로 나타내어라.

(1) 15 (2) 17 (3) 22

확인 문제

1 다음 수를 십진법으로 나타내어라.

(1) $1010_{(2)}$ (2) $10011_{(2)}$

2 자연수 21을 이진법으로 나타내어라.

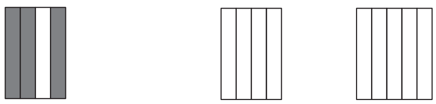
3 다음 중 가장 큰 수를 찾아라.

(1) $10010_{(2)}$ (2) $10001_{(2)}$ (3) $11001_{(2)}$

(4) $11100_{(2)}$ (5) $11101_{(2)}$

열린 문제

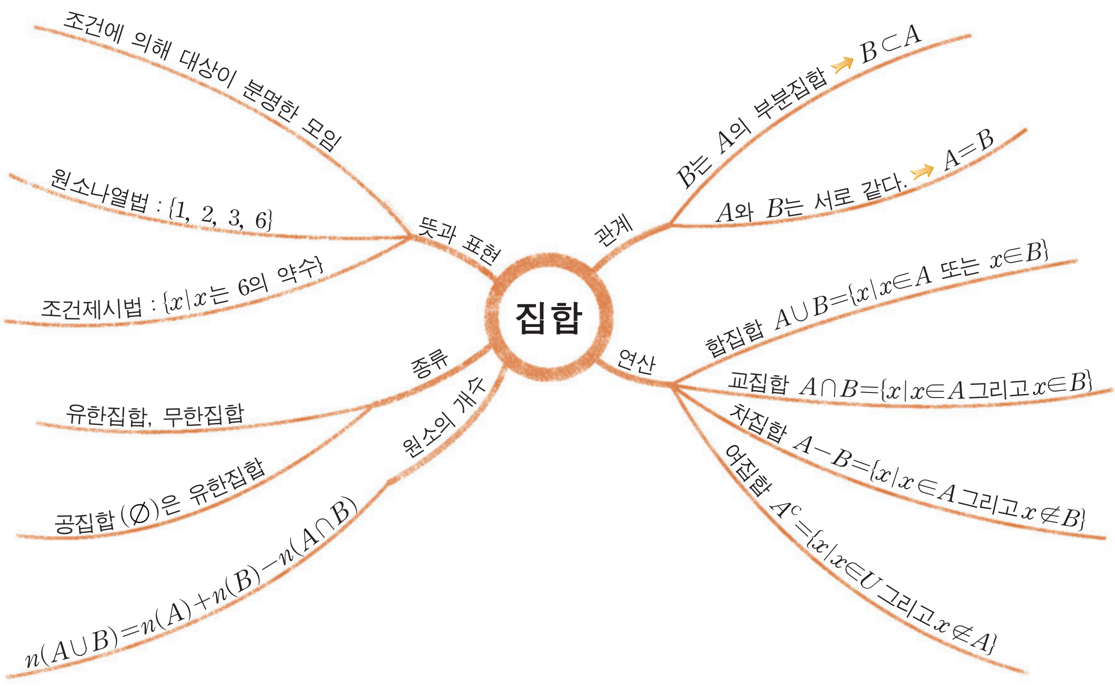
물건을 분류하고, 그 정보를 기록하는 바코드에는 이진법의 원리가 이용되고 있다. 예를 들어, $1101_{(2)}$에서 1은 색칠하고 0은 비워 놓아 아래 왼쪽 그림과 같은 바코드를 만들 수 있다. 이와 같은 방법으로 각자 태어난 달과 날을 아래 오른쪽 그림에 색칠하여 보아라.



$1\,1\,0\,1_{(2)}$ 월 일

단원 마무리

1. 집합에서 배운 내용을 그림으로 정리하여 보자.



수행 과제

2. 자연수에서 배운 내용을 생각해 보면서 중요한 내용이나 인상 깊었던 부분을 그림, 글 등으로 자유롭게 표현하여 보아라.

벤 다이어그램은 오일러의 생각?

스위스의 수학자인 오일러는 음악, 천문학, 기하학, 대수학, 역학, 광학 등 다양한 분야에 업적을 남겼다. 그가 남긴 위대한 연구 업적은 오늘날까지도 모두 정리하지 못했을 정도로 많이 있다.

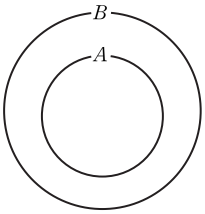
오일러(1707~1783)

벤(1834~1923)

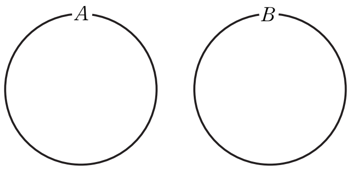
오일러는 여러 가지 생각을 잘 정리하고 쉽게 이해하기 위하여 간단한 동그라미 모양의 그림(diagram)으로 생각을 나타내는 방법을 개발하였다.

예를 들어, 오일러의 생각에 따르면 집합 A가 집합 B의 부분집합인 경우와 두 집합 사이에 공통 부분이 없는 경우를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$A \subset B$일 때

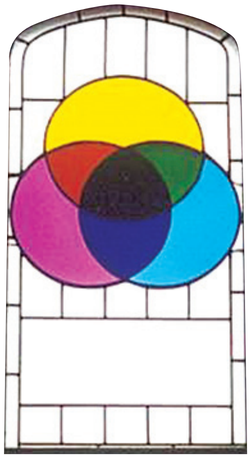


$A \cap B = \varnothing$일 때



영국의 수학자인 벤은 1880년에 오일러의 방법을 조금 변형하여 여러 조건들 사이의 관계를 알기 쉽게 표현하는 데 이용하였다.

오늘날 우리가 집합들 사이의 관계를 그림으로 나타내는 것을 '벤 다이어그램'이라고 부르지만, 사실 그것은 오일러에게서 비롯된 것이다.



벤이 총장으로 지냈던
케임브리지 대학의 식당 창문

집합이 세 개 이상 있을 때에도 오일러와 벤의 생각에 따라 그림으로 나타내는 방법이 많이 연구되었고 다양하게 발전하였지만, 우리는 오일러와 벤의 그림들을 일일이 구별하지 않고, 단순히 집합을 그림으로 나타내는 것을 '벤 다이어그램'이라고 부르기로 한다.