

고지우의 난문현답

[기출 + 킬러]

제 2 회

1. 2016년 9월 평가원
2. 2017년 6월 평가원
3. 2018년 사관학교
4. 2017년 9월 평가원
5. 규토 고득점 N제
6. 규토 고득점 N제
7. 규토 고득점 N제
8. 2017년 3월 교육청
9. 2017년 9월 평가원
10. 2014년 경찰대
11. 2013년 경찰대
12. 2016년 10월 교육청
13. 2017년 4월 교육청
14. 2011년 경찰대
15. 2014년 경찰대

1. 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $x = -2$ 에서 극댓값을 갖는다.
 (나) $f'(-3) = f'(3)$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

- ㄱ. 도함수 $f'(x)$ 는 $x = 0$ 에서 최솟값을 갖는다.
 ㄴ. 방정식 $f(x) = f(2)$ 는 서로 다른 두 실근을 갖는다.
 ㄷ. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$ 에서의 접선은 점 $(2, f(2))$ 를 지난다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[추가문항 1]

최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$ 가 있다.

- (가) $f(0) = f'(0)$
 (나) $x \geq -2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq f'(x)$

$g(x) = f(x) - f'(x)$ 라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

- ㄱ. $g(-2) \geq 0$
 ㄴ. 함수 $g(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극솟값을 갖는다.
 ㄷ. $g(1) = 3$ 이면 $g(2) = 12$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2. 함수

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - kx^2 + 1 \quad (k > 0 \text{인 상수})$$

의 그래프 위의 서로 다른 두 점 A, B에서의 접선 l , m 의 기울기가 모두 $3k^2$ 이다. 곡선 $y=f(x)$ 에 접하고 x 축에 평행한 두 직선과 접선 l , m 으로 둘러싸인 도형의 넓이가 24일 때, k 의 값은?

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
 ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

[추가문항 2]

자연수 n 에 대하여 함수 $f(x) = \int_0^x \{3t^2 - 2(n+6)t + 6n\} dt$ 일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

- ㄱ. $n=6$ 일 때, 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
 ㄴ. $n=3$ 일 때, 곡선 $y=|f(x)|$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{81}{2}$ 이다.
 ㄷ. 방정식 $|f(x)|=|f(a)|$ 가 서로 다른 세 실근을 가지도록 하는 0이 아닌 실수 a 의 개수가 3이 되도록 하는 자연수 n 은 한 개이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3. 자연수 n 에 대하여 함수 $f(x)$ 를 $f(x)=x^2+\frac{1}{n}$ 이라 하고

함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=\begin{cases} (x-1)f(x) & (x \geq 1) \\ (x-1)^2 f(x) & (x < 1) \end{cases}$$

이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

㉠. $\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{g(x)}{x-1} = 0$

㉡. $n=1$ 일 때, 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 극솟값을 갖는다.

㉢. 함수 $g(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 x 의 개수가 1인 n 의 개수는 5이다.

- ① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

[추가문항 3]

함수 $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{a+1}{3}x^3+\frac{a+b}{2}x^2+bx$ 가 구간 $(-\infty, 0)$ 에서 감소하고 구간 $(3, \infty)$ 에서 증가하도록 하는 두 실수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 에 대하여 $a+b$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하자. M^2+m^2 의 값은? [4점]

- ① 18 ② 20 ③ 22
④ 24 ⑤ 26

4. 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ x & (x > 0) \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x(2-x) & (|x-1| \leq 1) \\ 0 & (|x-1| > 1) \end{cases}$$

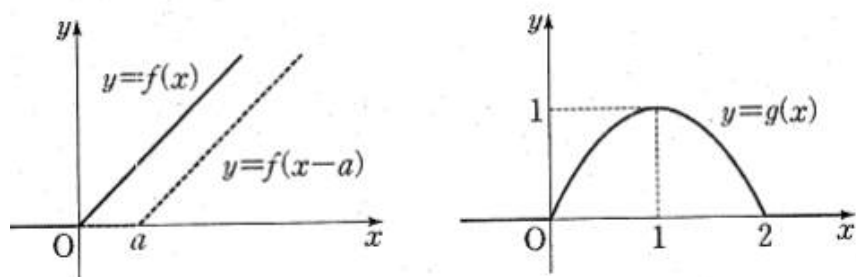
이다. 양의 실수 k, a, b ($a < b < 2$)에 대하여, 함수 $h(x)$ 를

$$h(x) = k\{f(x) - f(x-a) - f(x-b) + f(x-2)\}$$

라 정의하자. 모든 실수 x 에 대하여 $0 \leq h(x) \leq g(x)$ 일 때,

$\int_0^2 \{g(x) - h(x)\}dx$ 의 값이 최소가 되게 하는 k, a, b 에

대하여 $60(k+a+b)$ 의 값을 구하시오.



[추가문항 4]

실수 t 에 대하여 $t \leq x \leq t+1$ 에서 함수 $f(x) = x^2(x-1)$ 의 최댓값을 $g(t)$ 라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

ㄱ. $g\left(-\frac{1}{4}\right) = 0$

ㄴ. $-3 \leq t \leq -2$ 에서 함수 $g(t)$ 의 최댓값은 -2 이다.

ㄷ. $\lim_{t \rightarrow a-} \frac{g(t) - g(a)}{t - a} \neq \lim_{t \rightarrow a+} \frac{g(t) - g(a)}{t - a}$ 를 만족시키는 실수 a 의 개수는 2이다.

① ㄱ

② ㄱ, ㄴ

③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[추가문항 5]

두 함수 $f(x) = \begin{cases} -x+2 & (x < 1) \\ -2x+4 & (x \geq 1) \end{cases}$, $g(x) = x^2 + ax + b$ 가 있

다. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, a, b 는 실수이다.) [4점]

보기

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$

ㄴ. 함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이면 $g(1)=0$ 이다.

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하면 $g'(1)=0$ 이다.

① ㄱ

② ㄷ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[추가문항 6]

실수 a 에 대하여

$$\int_1^a (ax^2 + 6x) dx = \int_1^{-a} (ax^2 + 6x) dx + 96$$

일 때, a^2 의 값을 구하시오. [3점]

[추가문항 7]

함수 $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 2x + a$ 에 대하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(-1 + \frac{2k}{n}\right) = \frac{25}{3}$$

일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

8. 자연수 전체의 집합의 부분집합 X 가 상수 p 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $n(X) = 3$

(나) $x \in X$ 일 때,

x 가 홀수이면 $\frac{x+p}{2} \in X$,

x 가 짝수이면 $\frac{x}{2} \in X$ 이다.

$5 \in X$ 일 때, 모든 자연수 p 의 값의 합을 구하시오.

[추가문항 8]

전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$ 에 대하여 $n(A - B^c)$ 의 값은? [2점]

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

9. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 은 $a_1 = a_2 = 1$, $b_1 = k$ 이고,
모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+2} = (a_{n+1})^2 - (a_n)^2, \quad b_{n+1} = a_n - b_n + n$$

을 만족시킨다. $b_{20} = 14$ 일 때, k 의 값은?

- ① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

【추가문항 9】

홀수 n 에 대하여 3^n 과 3^{n+1} 사이에 있는 4의 배수의 집합을 T 라 할 때, 다음은 집합 T 의 모든 원소의 합을 구하는 과정이다.

$$3^n + 1 = 3^n + 1^n$$

$$= 4(3^{n-1} - 3^{n-2} + 3^{n-3} - 3^{n-4} + \cdots + 3^2 - 3 + 1)$$

이때 $k = 3^{n-1} - 3^{n-2} + 3^{n-3} - 3^{n-4} + \cdots + 3^2 - 3 + 1$ 이라 하면

k 는 양의 정수이고 $3^n + 1 = 4k$ 이다.

그러므로 $3^{n+1} - 1 = 4(\boxed{\text{(가)}})$

집합 T 의 모든 원소는 작은 것부터 차례로 공차가 4인 등차수열을 이루므로 항의 개수를 m 이라 하면

$$m = \frac{\boxed{\text{(나)}}}{2}$$

따라서 집합 T 의 모든 원소의 합을 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times \frac{\boxed{\text{(나)}}}{2} \times \{(3^n + 1) + (3^{n+1} - 1)\} \\ &= 3^n(\boxed{\text{(나)}}) \end{aligned}$$

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(n)$ 이라 할 때,
 $f(3) + g(3)$ 의 값은? [3점]

- ① 36 ② 37 ③ 38
④ 39 ⑤ 40

10. 첫째항이 3인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_{10} - a_2 = 4$ 일 때,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{21}$ ② $\frac{2}{21}$ ③ $\frac{1}{7}$
 ④ $\frac{4}{21}$ ⑤ $\frac{5}{21}$

[추가문항 10]

수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_n + a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+3)} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

이 성립한다. $\sum_{k=1}^{21} a_k = \frac{11}{23}$ 일 때, a_1 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$
 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

11. 두 함수 f 와 g 는 임의의 두 실수 x 와 y 에 대하여 다음을 만족시킨다.

$$f(0)=3, f(x+g(y))=(x+y^2-1)^2-1$$

이때, $f(7)+g(7)$ 의 값이 될 수 있는 수 중에서 가장 큰 값은?

- ① 92 ② 113 ③ 126
④ 135 ⑤ 147

[추가문항 11]

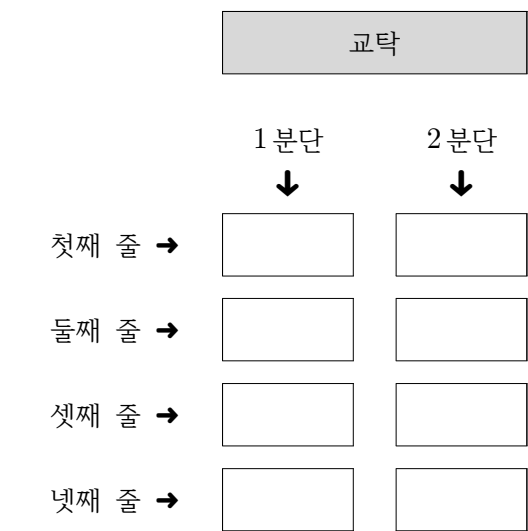
$\frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{\log_{2/\sqrt{2}} 3} + \frac{1}{\log_4 3} + \frac{1}{\log_{4/\sqrt{2}} 3} = k \log_3 2$ 를 만족시키는 상수 k 의 값을 구하시오. [3점]

12. 교내 수학경시대회에 A 학급 학생 3명, B 학급 학생 3명, C 학급 학생 2명이 참가 신청하였다. 그림과 같이 두 분단, 네 줄의 좌석에 다음 조건을 만족시키도록 이 학생 8명을 배정하는 방법의 수를 구하시오.

- (가) 같은 줄의 바로 옆에 같은 학급 학생이 앉지 않도록 배정한다.

(나) 같은 분단의 바로 앞뒤에 같은 학급 학생이 앉지 않도록 배정한다.

(다) 같은 학급 학생을 같은 분단에 배정 할 경우 학급 번호가 작을수록 교탁에 가까운 자리에 배정한다.



[추가문항 12]

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7의 일곱 개의 수를 일렬로 나열하여 일곱 자리의 자연수를 만들 때, 백만 자리의 수부터 나열된 7개의 수 중에서 홀수는 크기순으로 점점 크게, 짝수는 크기순으로 점점 작게 만들 수 있는 모든 경우의 수를 구하시오. [3점]

13. 자연수 n 에 대하여 0부터 n 까지 정수가 하나씩 적힌 $(n+1)$ 개의 공이 들어 있는 상자가 있다. 이 상자에서 한 개의 공을 꺼내어 공에 적힌 수를 확인하고 다시 넣는 과정을 5번 반복할 때, 확인한 5개의 수가 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 a_n 이라 하자.

- (가) 꺼낸 공에 적힌 수는 먼저 꺼낸 공에 적힌 수보다 작지 않다.
 (나) 세 번째 꺼낸 공에 적힌 수는 첫 번째 꺼낸 공에 적힌 수보다 1이 더 크다.

$\sum_{n=1}^{18} \frac{a_n}{n+2}$ 의 값을 구하시오.

[추가문항 13]

만의 자리의 수부터 차례로 일의 자리의 수까지 다음 규칙에 따라 두 수 1, 2를 중복 사용하여 다섯 자리의 자연수를 만든다.

- (가) 한 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수가 6의 약수이면 1을 연속하여 2개 쓰고 6의 약수가 아니면 2를 1개 쓴다.
 (나) 남은 자리의 수가 1개이면 2를 쓴다.

규칙에 따라 만든 다섯 자리의 자연수의 각 자리의 수 중 1이 2개 일 때, 그 자연수가 짝수일 확률은? [4점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$
 ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

14. 다항식 $(x^3 + 3x^2 + 3x + a)^4$ 의 전개식에서 x^7 의 계수가 $2^3 \times 3^5$ 일 때, 상수 a 의 값은?

- ① 9 ② 18 ③ 27
④ 36 ⑤ 45

[추가문항 14]

확률변수 X 의 확률질량함수가

$$P(X=k) = {}_{120}C_k p^k (1-p)^{120-k} \quad (k=0, 1, 2, \dots, 120)$$

이고, 확률변수 X 의 평균이 30이다. $V(2X-3)$ 의 값을 구하시오. (단, p 는 상수이다.) [3점]

15. 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=0}^n k(k-1)(k-2) {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k} = \boxed{2p} \times p^3$$

이 성립한다. $\boxed{2p}$ 에 알맞은 식을 $f(n)$ 이라 할 때, $f(10)$ 의 값을 구하여라. (단, $0 < p < 1$)

[추가문항 15]

어느 과수원에서 생산되는 복숭아 한 개의 무게는 평균이 260 g, 표준편차가 6 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 과수원에서 생산된 복숭아 중에서 9개를 임의추출하여 한 상자에 넣어 판매할 때, 복숭아 한 상자의 무게가 2322 g 이상이고 2376 g 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 상자의 무게는 생각하지 않는다.) [3점]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

- ① 0.5328 ② 0.6247 ③ 0.6387
 ④ 0.7745 ⑤ 0.8185

[기출 + 킬러 정답]

1. 5
2. 3
3. 2
4. 200
5. 50
6. 12
7. 24
8. 62
9. 1
10. 2
11. 3
12. 396
13. 760
14. 1
15. 720

[추가문항 정답]

1. 3
2. 5
3. 5
4. 2
5. 5
6. 12
7. 2
8. 2
9. 1
10. 4
11. 7
12. 35
13. 5
14. 90
15. 5