01

[풀이]
성분으로 주어진 벡터의 연산에 의하여
$\vec{a}-\vec{b}=(6,\ 2)-(0,\ 4)=(6,\ -2)$
따라서 벡터 $\vec{a}-\vec{b}$의 모든 성분의 합은 4이다.
답 ④

02

[풀이]
함수의 극한의 성질에 의하여
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}\times\frac{7}{4}=1\times\frac{7}{4}=\frac{7}{4}$$
답 ⑤

03

[풀이]
선분 AB의 2:1내분점을 C라고 하자.
점 C는 x축 위에 있으므로 점 C의 z좌표는 0이다.
선분의 내분점 공식에 의하여
$$(\text{점 C의 } z\text{좌표})=\frac{2\times a+1\times 4}{2+1}=0$$
a에 대한 일차방정식을 풀면
$\therefore\ a=-2$
답 ②

04

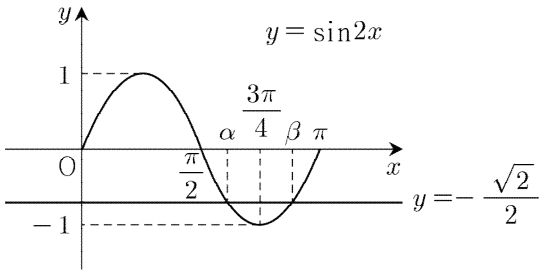
[풀이]
조건부확률의 정의에 의하여
$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{5}$$
답 ④

05

[풀이]
함수 $y=2^x+5$의 그래프는
지수함수 $y=2^x$의 그래프를
y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.
지수함수 $y=2^x$의 점근선이 $y=0$(x축)이므로
함수 $y=2^x+5$의 점근선은 $y=5$이다.
직선 $y=5$의 방정식과
함수 $y=\log_3 x+3$의 방정식을 연립하면
$\log_3 x+3=5$ 즉, $\log_3 x=2$
로그의 정의에 의하여
$\therefore\ x=3^2=9$
답 ③

06

[풀이]
문제에서 주어진 방정식을 정리하면
$$\sin 2x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$
주기가 π인 곡선 $y=\sin 2x$와 직선 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의
x좌표를 각각 α, β라고 하자.(단, $\alpha<\beta$)



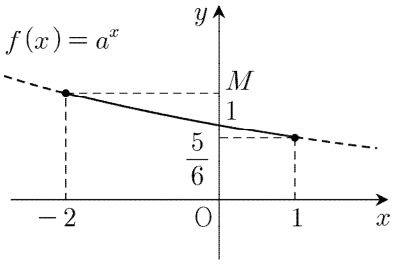
닫힌구간 $\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$에서 곡선 $y=\sin 2x$는
직선 $x=\frac{3\pi}{4}$에 대하여 대칭이므로
$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3\pi}{4}$$
$\therefore\ \alpha+\beta=\frac{3\pi}{2}$
답 ③

[참고]
α, β의 값은 각각 $\alpha=\frac{5\pi}{8}$, $\beta=\frac{7\pi}{8}$이다.

07

[풀이]
$0<a<1$이므로 지수함수 $f(x)=a^x$은 감소함수이다.

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://atom.ac/books/3888



단힌구간 $[-2,\ 1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때, 최솟값을 가지므로

$f(1)=a=\frac{5}{6}$

단힌구간 $[-2,\ 1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때, 최댓값을 가지므로

$M=f(-2)=\frac{1}{a^2}$

$\therefore\ a\times M=a\times\frac{1}{a^2}=\frac{1}{a}=\frac{6}{5}$

답 ⑤

08

[풀이]

$t=\ln x$로 놓으면 $dt=\frac{1}{x}dx$

$x=1$일 때 $t=0$, $x=e$일 때 $t=1$이므로

정적분의 치환적분법에 의하여

$\int_1^e\frac{3(\ln x)^2}{x}dx=\int_0^1 3t^2dt=[t^3]_0^1=1$

답 ①

09

[풀이]

조건 (가)에 의하여 쌍곡선의 두 초점이 x축 위에 있고,

두 초점을 연결한 선분의 중점이 원점이므로

쌍곡선의 방정식을 다음과 같이 둘 수 있다.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (단, $a>0$, $b>0$) $\cdots(*)$

이 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$

조건 (나)에 의하여 두 점근선이 서로 수직이므로

$\frac{b}{a}\times\left(-\frac{b}{a}\right)=-1$ 정리하면 $b=a$

이를 $(*)$에 대입하면

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$

조건 (가)에 의하여

$a^2+a^2=5^2$ 풀면 $a=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

$\therefore$ (쌍곡선의 주축의 길이)$=2a=5\sqrt{2}$

답 ④

10

[풀이1]

문제에서 주어진 6장의 카드를 각각

A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, C

로 두자.

문자열

○○○○○○

의 왼쪽 끝에 A가 올 확률은 $\frac{3}{6}$이다.

(왼쪽 끝에 A_1, A_2, A_3 중에서 하나가 온다.)

예를 들어 왼쪽 끝에 A_2가 왔다고 하자.

문자열

A_2○○○○○

의 오른쪽 끝에 A가 올 확률은 $\frac{2}{5}$이다.

(오른쪽 끝에 A_1, A_3 중에서 하나가 온다.)

확률의 곱셈정리에 의하여 구하는 확률은

$\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$

답 ②

[풀이2]

문제에서 주어진 시행에서 표본공간 S의 각각의 근원사건이 일어날 가능성은 같은 정도로 기대된다. 이때, 각각의 근원사건이 일어날 확률은 $\frac{1}{720}(=\frac{1}{6!})$이다.

문제에서 주어진 6장의 카드를 각각

A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, C

로 두자.

6장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

순열의 수에 의하여 6!이다.

양 끝 모두에 A가 오도록 6장의 카드를

일렬로 나열하는 경우의 수는

순열의 수에 의하여 ${}_3P_2\times4!$이다.

이때, ${}_3P_2$는 서로 다른 3개(A_1, A_2, A_3)에서

2개를 택하는 순열의 수이다.

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://atom.ac/books/3888

예를 들어 A_1, A_3이 선택되었을 때의 문자열은
A_1○○○○A_3 또는 A_3○○○○A_1
이제 나머지 자리에 A_2, B_1, B_2, C가 올
경우의 수는 순열의 수에 의하여 4!이다.
따라서 구하는 확률은 수학적 확률의 정의에 의하여
$$\frac{{}_3P_2\times 4!}{6!}=\frac{1}{5}$$
답 ②

[풀이3]
문제에서 주어진 시행에서 표본공간 S의 각각의 근원사건이 일어날 가능성은 같은 정도로 기대된다. 이때, 각각의 근원사건이 일어날 확률은 $\frac{1}{60}\left(=\frac{1}{\frac{6!}{3!2!}}\right)$이다.
6장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는
같은 것이 있는 순열의 수에 의하여
$$\frac{6!}{3!2!}=60$$
양 끝 모두에 A가 오도록 6장의 카드를
일렬로 나열하는 경우의 수는
같은 것이 있는 순열의 수에 의하여
$$\frac{4!}{2!}=12$$
따라서 구하는 확률은 수학적 확률의 정의에 의하여
$$\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$$
답 ②

[풀이4]
문제에서 주어진 시행에서 표본공간 S의 각각의 근원사건이 일어날 가능성은 같은 정도로 기대된다. 이때, 각각의 근원사건이 일어날 확률은
$$\frac{1}{60}\left(=\frac{1}{{}_6C_3\times{}_3C_2\times{}_1C_1}\right)$$이다.
문자열
○○○○○○
에 3개의 A, A, A가 올 자리를 선택하는
경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_6C_3$이다.
예를 들어
A○A A○○, A○○A○A, …
등이 가능하다.
양쪽 끝 모두에 A가 온 문자열
A○○○○A
에 1개의 A가 올 자리를 선택하는
경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_1$이다.
구하는 확률은 수학적 확률의 정의에 의하여
$$\frac{{}_4C_1}{{}_6C_3}=\frac{1}{5}$$
답 ②

[참고]
[풀이3]의 결과와 [풀이2]의 결과가 같은 산술적인 이유
$$\frac{\frac{4!}{2!}}{\frac{6!}{3!2!}}=\frac{\frac{4!}{2!}\times 3!2!}{\frac{6!}{3!2!}\times 3!2!}=\frac{4!3!}{6!}=\frac{{}_3P_2\times 4!}{6!}$$
위의 계산과정에서 분자, 분모에 곱해진 3!2!은 세 개의 A_1, A_2, A_3과 두 개의 B_1, B_2를 나열하는 경우의 수이다.
[풀이4]의 결과와 [풀이2]의 결과가 같은 산술적인 이유
$$\frac{{}_4C_1}{{}_6C_3}=\frac{{}_4C_1\times 3!3!}{{}_6C_3\times 3!3!}=\frac{4!3!}{6!}=\frac{{}_3P_2\times 4!}{6!}$$
위의 계산과정에서 분자, 분모에 곱해진 3!3!은 세 개의 A_1, A_2, A_3과 세 개의 B_1, B_2, C를 나열하는 경우의 수이다.

11

[풀이1]
$g(3)=a$로 두면 역함수의 성질에 의하여
$f(a)=3$ 즉, $a^3+5a+3=3$
정리하면
$a^3+5a=0$, $a(a^2+5)=0$
$a^2+5>0$이므로 $a=0$이다.
역함수의 미분법에 의하여
$$\therefore\ g'(3)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{5}$$
$(\because f'(x)=3x^2+5)$
답 ③

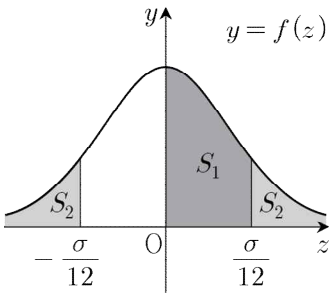
[풀이2]
역함수의 성질에 의하여
$g(f(x))=x$
(단, x는 함수 $f(x)$의 정의역의 원소)
양변을 x에 대하여 미분하면
$$g'(f(x))f'(x)=1 \qquad \cdots(*)$$
방정식 $f(x)=3$을 풀면 $x=0$이므로
(*)에 $x=0$을 대입하면

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://atom.ac/books/3888

$g'(f(0))f'(0)=1$ 즉, $g'(3)f'(0)=1$
역함수의 미분법에 의하여
$\therefore\ g'(3)=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{5}$
$(\because f'(x)=3x^2+5)$
답 ③

12

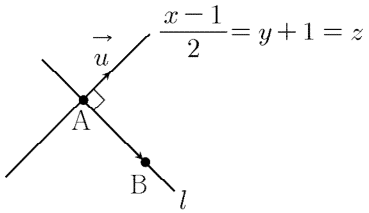
[풀이]
확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로
확률변수 $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$는 표준정규분표 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따른다.
$\mathrm{P}(m\le X\le m+12)$
$=\mathrm{P}\left(\dfrac{m-m}{\sigma}\le Z\le\dfrac{m+12-m}{\sigma}\right)$
$=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{12}{\sigma}\right)(=S_1$으로 두자.)
$\mathrm{P}(X\le m-12)=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{m-12-m}{\sigma}\right)$
$=\mathrm{P}\left(Z\le-\dfrac{12}{\sigma}\right)(=S_2$로 두자.)
문제에서 주어진 등식을 다시 쓰면
$S_1-S_2=0.3664$ $\cdots(*)$



그런데
$\mathrm{P}\left(Z\le-\dfrac{12}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{12}{\sigma}\right)$이고,
$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{12}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{12}{\sigma}\right)=\dfrac{1}{2}$
이므로, $(*)$을 다시 쓰면
$2S_1-(S_1+S_2)=2S_1-\dfrac{1}{2}=0.3664$
정리하면
$S_1=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{12}{\sigma}\right)=0.4332$
이므로
$\dfrac{12}{\sigma}=1.5$
$\therefore\ \sigma=8$
답 ③

13

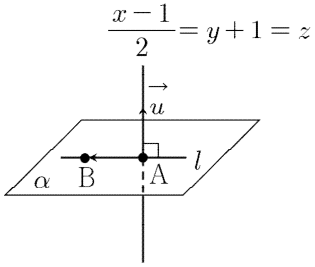
[풀이1]
문제에서 주어진 두 점
$(1,\ a,\ 0),\ (b,\ -3,\ -2)$
를 각각 A, B라고 하자. 그리고 직선
$\dfrac{x-1}{2}=y+1=z$
의 방향벡터를 $\vec{u}=(2,\ 1,\ 1)$이라고 하자.



직선 l의 방향벡터를
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b-1,\ -3-a,\ -2)$
문제에서 주어진 두 직선은 서로 수직이므로
$\vec{u}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$
성분으로 주어진 벡터의 내적을 하면
$\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=2b-a-7=0$ $\cdots$㉠
점 A가 직선 l 위에 있으므로
$\dfrac{1-1}{2}=a+1=0$ 풀면 $a=-1$ $\cdots$㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 $b=3$
$\therefore\ a+b=2$
답 ①

[풀이2]
문제에서 주어진 두 점
$(1,\ a,\ 0),\ (b,\ -3,\ -2)$
를 각각 A, B라고 하자. 그리고 직선
$\dfrac{x-1}{2}=y+1=z$
의 방향벡터를 $\vec{u}=(2,\ 1,\ 1)$이라고 하자.
점 A가 직선 l 위에 있으므로
$\dfrac{1-1}{2}=a+1=0$ 풀면 $a=-1$ $\cdots$㉠
직선 $\dfrac{x-1}{2}=y+1=z$에 수직이고
점 A를 지나는 평면을 α라고 하자.

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://atom.ac/books/3888



평면 α의 법선벡터를 $\vec{u}$로 두자.
평면 α의 방정식은
α: $2x+y+z-a-2=0$
직선 l은 평면 α에 포함되므로,
직선 l 위의 점 B는 평면 α 위의 점이다.
$2b-3-2-a-2=0$
정리하면
$2b-a-7=0$ $\cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $b=3$
$\therefore$ $a+b=2$
답 ①

14

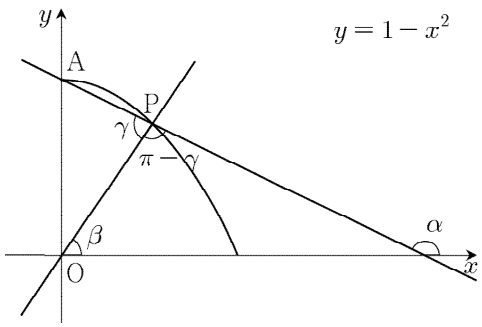
[풀이]
이산확률변수의 기댓값에 대한 정의에 의하여
$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=1}^{5}k\mathrm{P}(X=k)$, $\mathrm{E}(Y)=\sum_{k=1}^{5}k\mathrm{P}(Y=k)$
이므로, 문제에서 주어진 등식의 양변에 k를 곱하면
$k\mathrm{P}(Y=k)=\frac{k}{2}\mathrm{P}(X=k)+\frac{k}{10}$
시그마의 성질에 의하여
$\sum_{k=1}^{5}k\mathrm{P}(Y=k)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{5}k\mathrm{P}(X=k)+\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{5}k$
연속하는 자연수의 거듭제곱의 합의 공식에 의하여
$\therefore$ $\mathrm{E}(Y)=\frac{1}{2}\mathrm{E}(X)+\frac{1}{10}\times\frac{5\times6}{2}=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$
답 ②

15

[풀이]
점 P의 x좌표를 $t(0<t<1)$로 두면
$\overline{\mathrm{PH}}=t$
점 P의 y좌표가 $1-t^2$이므로
$\overline{\mathrm{HO}}=1-t^2$, $\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AO}}-\overline{\mathrm{HO}}=1-(1-t^2)=t^2$
직각삼각형 PHA에서 삼각비의 정의에 의하여
$\tan\theta_1=\frac{\overline{\mathrm{HA}}}{\overline{\mathrm{PH}}}=\frac{t^2}{t}=t=\frac{1}{2}$
직각삼각형 PHO에서 삼각비의 정의에 의하여
$\tan\theta_2=\frac{\overline{\mathrm{HO}}}{\overline{\mathrm{PH}}}=\frac{1-t^2}{t}=\frac{3}{2}$
삼각함수의 덧셈정리에 의하여
$\therefore$ $\tan(\theta_1+\theta_2)=\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2}=8$
답 ④

[참고1]
t의 값을 다음과 같이 구해도 좋다.
점 P의 x좌표를 $t(0<t<1)$로 두면
$\overline{\mathrm{PH}}=t$
직각삼각형 PHA에서 삼각비의 정의에 의하여
$\tan\theta_1=\frac{\overline{\mathrm{HA}}}{\overline{\mathrm{PH}}}=\frac{\overline{\mathrm{HA}}}{t}=\frac{1}{2}$에서 $\overline{\mathrm{HA}}=\frac{t}{2}$
$\overline{\mathrm{HO}}=\overline{\mathrm{AO}}-\overline{\mathrm{AH}}=1-\frac{t}{2}$
그런데
(점 H의 y좌표)=(점 P의 y좌표)$=1-t^2$
이므로
$1-\frac{t}{2}=1-t^2$
정리하면
$2t^2-t=0$, $t(2t-1)=0$
$t\neq0$이므로 $t=\frac{1}{2}$

[참고2]
$\tan(\theta_1+\theta_2)$의 값을 다음과 같이 구해도 좋다.
$\theta_1+\theta_2=\gamma$로 두자. (단, $0<\gamma<\pi$)



두 직선 AP, OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라고 하자.
점 P의 좌표가 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right)$이므로

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://atom.ac/books/3888

$\tan\alpha=-\frac{1}{2}$, $\tan\beta=\frac{3}{2}$

$\pi-\gamma=\alpha-\beta$ 즉, $\gamma=\pi-\alpha+\beta$이므로

삼각함수의 덧셈정리에 의하여

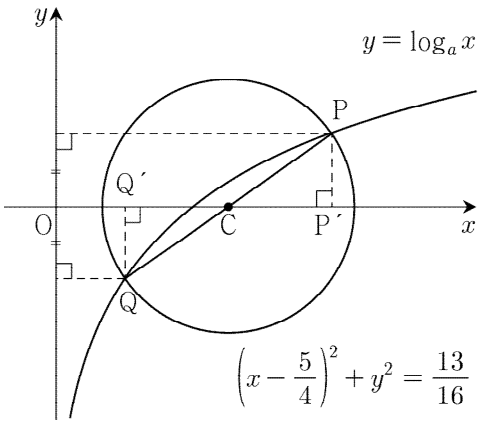
$\tan\gamma=\tan(\pi+(\beta-\alpha))=\tan(\beta-\alpha)$

$=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}{1-\frac{3}{4}}=8$

16

[풀이1]

문제에서 주어진 원의 중심을 C, 두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′라고 하자.



$\overline{PC}=\overline{QC}$이고, $\angle PCP'=\angle QCQ'$(맞꼭지각)이므로

두 직각삼각형 PCP′, QCQ′는 서로 RHA합동이다.

$\overline{CP'}=\overline{CQ'}=t\left(0<t<\frac{\sqrt{13}}{4}\right)$로 두면

(두 점 P, P′의 x좌표)$=\frac{5}{4}+t$,

(두 점 Q, Q′의 x좌표)$=\frac{5}{4}-t$

$\overline{PP'}=\overline{QQ'}$이고,

두 점 P, Q의 y좌표의 부호가 다르므로

$\log_a\left(\frac{5}{4}+t\right)=-\log_a\left(\frac{5}{4}-t\right)$

정리하면

$\log_a\left(\frac{5}{4}+t\right)\left(\frac{5}{4}-t\right)=\log_a 1$

$\left(\frac{5}{4}+t\right)\left(\frac{5}{4}-t\right)=1$

좌변을 전개하여 정리하면

$\frac{25}{16}-t^2=1$, $t^2=\frac{9}{16}$ 풀면 $t=\frac{3}{4}$

점 P의 좌표는 $P(2,\ \log_a 2)$이므로

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

(혹은 직각삼각형 PCP′에서 피타고라스의 정리에 의하여)

$\overline{CP}=\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+(\log_a 2)^2}$

$=\frac{\sqrt{13}}{4}=$(원 C의 반지름의 길이)

양변을 제곱하여 정리하면

$(\log_a 2)^2=\frac{1}{4}$

$\log_a 2>0$이므로 $\log_a 2=\frac{1}{2}$

로그의 정의에 의하여

$a^{\frac{1}{2}}=2$

$\therefore\ a=2^2=4$

답 ③

[풀이2]

문제에서 주어진 원의 중심을 C,

두 점 P, Q의 x좌표를 각각 p, q라고 하면

$C\left(\frac{5}{4},\ 0\right)$, $P(p,\ \log_a p)$, $Q(q,\ \log_a q)$

$\left(\text{단, } \frac{5}{4}-\frac{\sqrt{13}}{4}<q<\frac{5}{4}<p<\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{13}}{4}\right)$

점 C는 선분 PQ의 중점이므로

내분점의 공식에 의하여

$\frac{p+q}{2}=\frac{5}{4}$, $\frac{\log_a p+\log_a q}{2}=0$

정리하면

$p+q=\frac{5}{2}$, $pq=1$

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

p, q는 이차방정식

$t^2-\frac{5}{2}t+1=0$

의 서로 다른 두 실근이다.

위의 이차방정식의 좌변을 인수분해하면

$\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-2)=0$이므로 $p=2$, $q=\frac{1}{2}$

점 P의 좌표는 $P(2,\ \log_a 2)$이므로

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{CP}=\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+(\log_a 2)^2}$

$=\frac{\sqrt{13}}{4}=$(원 C의 반지름의 길이)

양변을 제곱하여 정리하면

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://atom.ac/books/3888

$(\log_a 2)^2 = \frac{1}{4}$

$\log_a 2 > 0$이므로 $\log_a 2 = \frac{1}{2}$

로그의 정의에 의하여

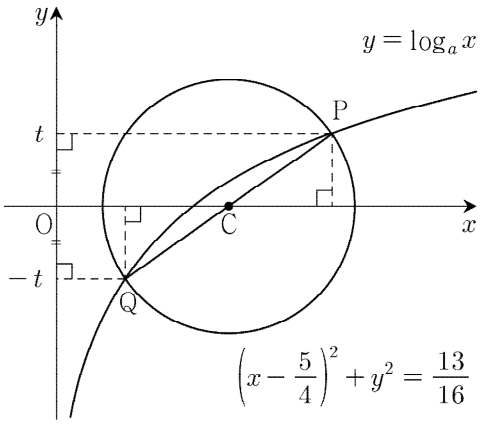
$a^{\frac{1}{2}} = 2$

$\therefore\ a = 2^2 = 4$

답 ③

[풀이3]

문제에서 주어진 원의 중심을 C라고 하자.



선분 PQ의 중점이 C이고, 점 C가 x축 위에 있으므로 내분점의 공식에 의하여

두 점 P, Q의 y좌표를 각각 t, $-t$로 둘 수 있다.

(단, $0 < t < \frac{\sqrt{13}}{4}$)

두 점 P, Q의 좌표는

$\mathrm{P}(a^t,\ t)$, $\mathrm{Q}(a^{-t},\ -t)$

내분점의 공식에 의하여

$\frac{a^t + a^{-t}}{2} = \frac{5}{4}$

정리하면

$2a^{2t} - 5a^t + 2 = 0$

좌변을 인수분해하면

$(2a^t - 1)(a^t - 2) = 0$

(점 P의 x좌표)$= a^t > \frac{5}{4}$이므로 $a^t = 2$이다.

점 P의 좌표가 $\mathrm{P}(2,\ t)$이므로

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{\mathrm{CP}} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + t^2} = \frac{\sqrt{13}}{4}$

양변을 제곱하여 정리하면

$t^2 = \frac{1}{4}$

$t > 0$이므로 $t = \frac{1}{2}$이다.

$a^{\frac{1}{2}} = 2$

$\therefore\ a = 2^2 = 4$

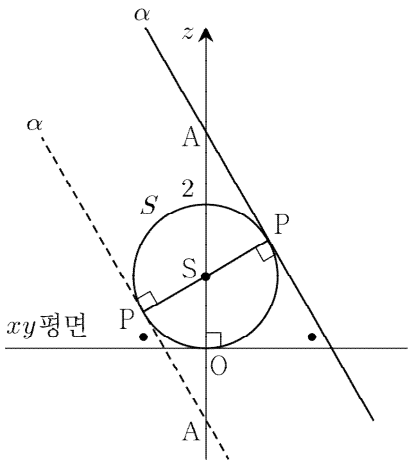
답 ③

17

[풀이1]

구 S의 중심을 S(0, 0, 1), 구 S와 점 P에서 접하는 평면을 α, 평면 α와 z축의 교점을 A라고 하자. 이때, 평면 α와 xy평면의 교선은 QR이다.

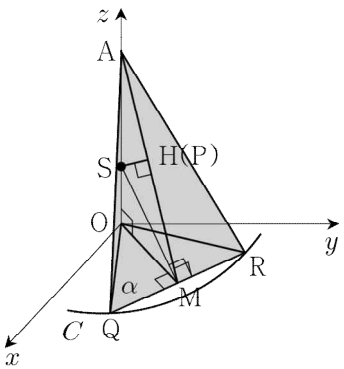
한 직선 위에 있지 않은 세 점 P, S, O로 유일하게 결정되는 평면 PSO로 문제에서 주어진 도형들을 자른 단면은 아래 그림과 같다.



(단, ●$= 60^\circ$이다.)

만약 점 A의 z좌표가 음수이면 점 P의 z좌표는 1보다 작다. 이는 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않으므로 점 A의 z좌표는 양수이다.

점 O에서 직선 QR에 내린 수선의 발을 M, 점 S에서 직선 AM에 내린 수선의 발을 H라고 하자.

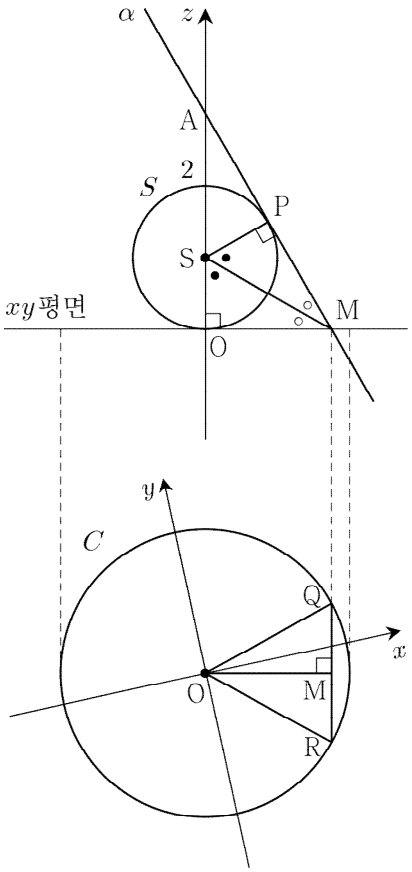


$\overline{\mathrm{SO}} \perp (xy\text{평면})$, $\overline{\mathrm{OM}} \perp \overline{\mathrm{QR}}$

이므로 삼수선의 정리❶에 의하여

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://atom.ac/books/3888

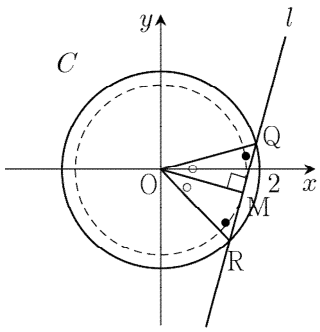
$\overline{SM} \perp \overline{QR}$ (그리고 $\overline{AM} \perp \overline{QR}$)
$\overline{SM} \perp \overline{QR}$, $\overline{MA} \perp \overline{QR}$, $\overline{SH} \perp \overline{MA}$
이므로 삼수선의 정리❸에 의하여
$\overline{SH} \perp \alpha$
그런데 평면 α는 점 P에서 구 S에 접하므로
두 점 H, P는 일치한다.
한 직선 위에 있지 않은 세 점 A, O, M으로 유일하게 결정되는 평면 AMO로 문제에서 주어진 도형들을 자른 단면은 아래 그림과 같다. 이때, 두 점 S, P는 평면 AMO 위에 있다.



(단, ●=60°, ○=30° 이다.)
원(구)의 정의에 의하여 $\overline{SP} = \overline{SO}$ 이므로
두 직각삼각형 SPM, SOM은 서로 RHS합동이다.
두 직각삼각형 SPM, SOM의 내각의 크기는 각각

$$\angle SMP = \angle SMO = \frac{\pi}{6},\ \angle MSP = \angle MSO = \frac{\pi}{3}$$

직각삼각형 SOM에서 특수각의 삼각비에 의하여
$\overline{OM} = \sqrt{3}$

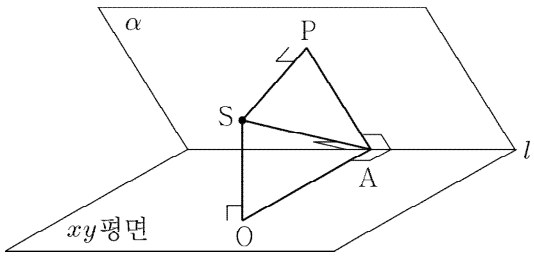


(단, ●=60°, ○=30° 이다.)
원의 정의에 의하여 $\overline{OQ} = \overline{OR}$ 이므로
두 직각삼각형 OMQ, OMR은 서로 RHS합동이다.
직각삼각형 OMQ에서 특수각의 삼각비에 의하여

$$\angle OQM = \frac{\pi}{3},\ \angle QOM = \frac{\pi}{6},\ \overline{MQ} = 1$$

마찬가지의 방법으로 $\overline{MR} = 1$이므로
$\therefore\ \overline{QR} = \overline{QM} + \overline{MR} = 2$
답 ④

[풀이2]
구 S의 중심을 S(0, 0, 1), 구 S와 점 P에서 접하는 평면을 α, 평면 α와 xy평면의 교선을 l이라고 하자.



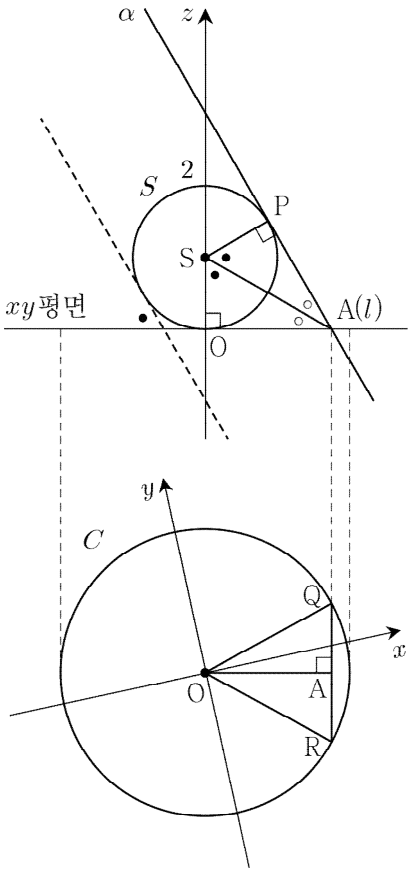
점 O에서 직선 l에 내린 수선의 발을 A라고 하자.
$\overline{SO} \perp (xy\text{평면})$, $\overline{OA} \perp l$이므로
삼수선의 정리❶에 의하여 $\overline{SA} \perp l$이다.
평면 α가 점 P에서 구 S에 접하므로
$\overline{SP} \perp \alpha$
삼수선의 정리❷에 의하여 $\overline{PA} \perp l$이다.
$\overline{OA} \perp l$, $\overline{PA} \perp l$이므로
이면각의 정의에 의하여 $\angle PAO$는
평면 α와 xy평면이 이루는 이면각의 크기이므로

$$\angle PAO = \frac{\pi}{3}$$

$\overline{PA} \perp l$, $\overline{SA} \perp l$이므로 한 점에서 만나는 두 직선 PA, SA로 결정되는 평면 PSA는 직선 l에 수직이다.
$\overline{SA} \perp l$, $\overline{OA} \perp l$이므로 한 점에서 만나는 두 직선 SA, OA로 결정되는 평면 SOA는 직선 l에 수직이다.
점 A를 지나고 직선 l에 수직인 평면은 유일하게 결정되므로

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://atom.ac/books/3888

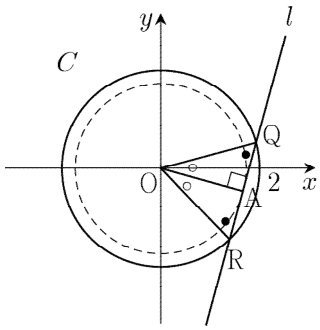
두 평면 PSA, SOA는 일치한다.
즉, 네 점 P, S, O, A는 한 평면 위에 있다.
그리고 PSO $\perp \alpha$, PSO $\perp$ (xy평면)이다.
평면 PSO로 문제에서 주어진 도형들을 자른 단면은 다음과 같다. 이때, 평면 α, xy평면, 평면 PSO는 한 점에서 만나고, 이 점이 바로 A이다. (점 A는 직선 l (QR)과 평면 PSO의 교점이기도 하다.)



(단, ●=60°, ○=30° 이다.)
점 P의 z좌표가 점 S의 z좌표(=1)보다 크므로,
위의 그림처럼 평면 α와 z축의 교점의 z좌표는 양수이다.
(만약 평면 α와 z축의 교점의 z좌표가 음수라고 가정하면 점 P의 z좌표는 1보다 작다. 이는 가정에 모순이다.)
원(구)의 정의에 의하여 $\overline{SP}=\overline{SO}$ 이므로
두 직각삼각형 SPA, SOA는 서로 RHS합동이다.
두 직각삼각형 SPA, SOA의 내각의 크기는 각각

$$\angle SAP=\angle SAO=\frac{\pi}{6},\ \angle ASP=\angle ASO=\frac{\pi}{3}$$

직각삼각형 SOA에서 특수각의 삼각비에 의하여
$\overline{OA}=\sqrt{3}$
평면 α와 xy평면의 교선은 l이므로
직선 l과 xy평면 위의 원 C가 만나는 두 점은 각각 Q, R이다.



(단, ●=60°, ○=30° 이다.)
원의 정의에 의하여 $\overline{OQ}=\overline{OR}$ 이므로
두 직각삼각형 OAQ, OAR은 서로 RHS합동이다.
직각삼각형 OAQ에서 특수각의 삼각비에 의하여

$$\angle OQA=\frac{\pi}{3},\ \angle QOA=\frac{\pi}{6},\ \overline{AQ}=1$$

마찬가지의 방법으로 $\overline{AR}=1$이므로
$\therefore\ \overline{QR}=\overline{QA}+\overline{AR}=2$
답 ④

[풀이3]
구 S의 중심을 S(0, 0, 1), 구 S와 점 P에서 접하는 평면을 α, 평면 α와 xy평면의 교선을 l이라고 하자.
평면 α는 z축에 평행하지 않으므로
평면 α의 법선벡터를 $\overrightarrow{n_1}=(a,\ b,\ 1)$로 두자.
그리고 평면 α의 방정식을 다음과 같이 두자.
α: $ax+by+z+c=0$
xy평면의 법선벡터를 $\overrightarrow{n_2}=(0,\ 0,\ 1)$로 두자.
평면 α와 xy평면이 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이므로
두 평면이 이루는 각의 크기를 구하는 공식에 의하여

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}\ \text{즉,}\ \frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}$$

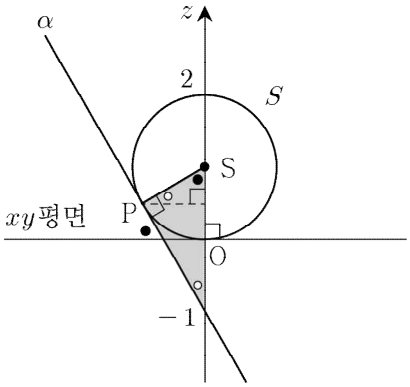
정리하면
$a^2+b^2=3$
평면 α가 구 S에 접하므로
점과 평면 사이의 거리 공식에 의하여

$$\frac{|1+c|}{\sqrt{a^2+b^2+1^2}}=1\ \text{즉,}\ \frac{|1+c|}{2}=1$$

풀면 $c=1$ 또는 $c=-3$
(1) $c=1$인 경우
평면 α의 방정식은
α: $ax+by+z+1=0$ (단, $a^2+b^2=3$)
평면 α의 방정식에 $x=y=0$을 대입하면
$z=-1$

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://atom.ac/books/3888

이므로, 평면 α와 z축의 교점은 $(0,\ 0,\ -1)$이다.
직선 SP와 이 직선 위에 있지 않은 점 $(0,\ 0,\ -1)$로 유일하게 결정되는 평면으로 문제에서 주어진 도형들을 자른 단면은 아래 그림과 같다.



(단, ●$=60^\circ$, ○$=30^\circ$이다.)
직각삼각형의 닮음과 특수각의 삼각비에 의하여

$$(\text{점 P의 } z\text{좌표})=\frac{1}{2}<1$$

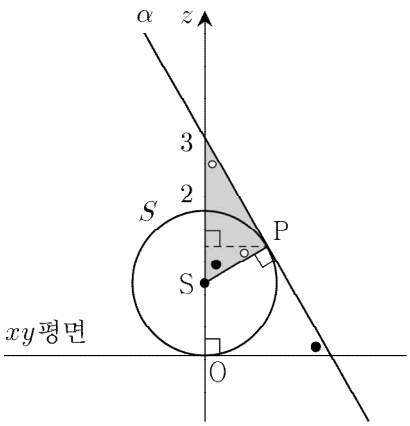
이는 문제의 조건을 만족시키지 않으므로 $c\neq 1$이다.
따라서 $c=-3$이다.
(귀류법으로 $c=-3$임을 보였으므로,
아래의 (2)의 과정은 건너뛰어도 좋다.)
(2) $c=-3$인 경우
평면 α의 방정식은

α: $ax+by+z-3=0$ (단, $a^2+b^2=3$)

평면 α의 방정식에 $x=y=0$을 대입하면

$z=3$

이므로, 평면 α와 z축의 교점은 $(0,\ 0,\ 3)$이다.
직선 SP와 이 직선 위에 있지 않은 점 $(0,\ 0,\ 3)$으로 유일하게 결정되는 평면으로 문제에서 주어진 도형들을 자른 단면은 아래 그림과 같다.



(단, ●$=60^\circ$, ○$=30^\circ$이다.)
직각삼각형의 닮음과 특수각의 삼각비에 의하여

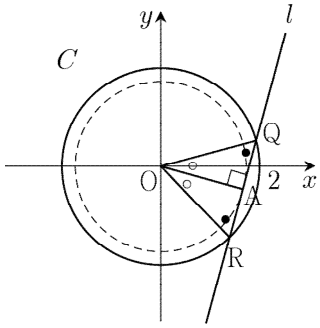
$$(\text{점 P의 } z\text{좌표})=\frac{3}{2}>1$$

(1), (2)에서 $c=-3$이므로
평면 α의 방정식은

α: $ax+by+z-3=0$ (단, $a^2+b^2=3$)

평면 α의 방정식에 $z=0$을 대입하여
직선 l의 방정식을 구하면

l : $ax+by-3=0$ (단, $a^2+b^2=3$)



(단, ●$=60^\circ$, ○$=30^\circ$이다. 그리고
점선으로 표시된 원은 중심이 원점이고,
반지름의 길이가 $\sqrt{3}$인 원이다.)
점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여

$$\overline{OA}=\frac{3}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{3}\ (\because a^2+b^2=3)$$

직각삼각형 OAQ에서 피타고라스의 정리에 의하여

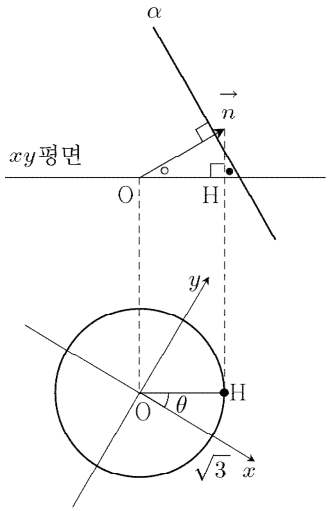
$$\overline{AQ}=\sqrt{\overline{OQ}^2-\overline{OA}^2}=1$$

마찬가지의 방법으로 $\overline{AR}=1$이므로

$$\therefore\ \overline{QR}=\overline{QA}+\overline{AR}=2$$

답 ④

[참고]
평면 α의 법선벡터를 다음과 같은 방법으로 구해도 좋다. 평면 α의 법선벡터 $\vec{n}$의 종점에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라고 하자. (단, 법선벡터의 시점은 원점이고, 법선벡터의 종점과 점 H 사이의 거리는 1이다.)

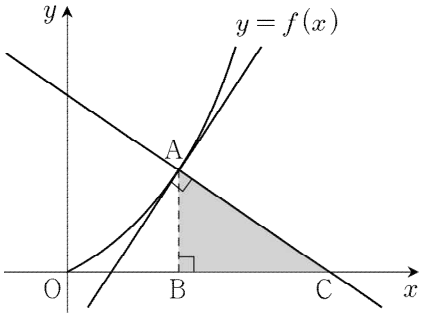


이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://atom.ac/books/3888

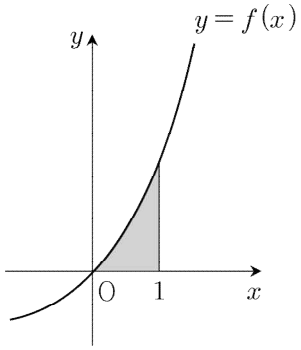
(단, ●=60°, ○=30°이다.)
평면 α와 xy평면이 이루는 각의 크기가
$\frac{\pi}{3}$(=●)이므로,
벡터 $\vec{n}$에 평행한 직선과 xy평면이 이루는 각의 크기는
$\frac{\pi}{6}$(=○)이다.
두 점 O, H와 벡터 $\vec{n}$의 종점으로 결정되는
삼각형에서 특수각의 삼각비에 의하여
$\overline{OH}=\sqrt{3}$
xy평면 위의 점 H의 자취는 중심이 O이고,
반지름의 길이가 $\sqrt{3}$인 원이다.
점 H의 좌표를 삼각함수를 이용하여 표현하면
$H(\sqrt{3}\cos\theta,\ \sqrt{3}\sin\theta,\ 0)$
이므로
$\therefore\ \vec{n}=(\sqrt{3}\cos\theta,\ \sqrt{3}\sin\theta,\ 1)$

18

[풀이]
원점을 지나는 증가함수 $y=f(x)$의 그래프는
구간 $(0,\ \infty)$에서 제1사분면에 그려진다.



점 A에서 x축에 내린 수선의 발 B의 좌표는
$B(t,\ 0)$
점 A를 지나고 점 A에서의 접선과 수직인 직선의 방정식은
$$y-f(t)=-\frac{1}{f'(t)}(x-t)$$
이 직선의 방정식에 $y=0$을 대입하여 정리하면
$x=t+f(t)f'(t)$
점 C의 좌표는 $C(t+f(t)f'(t),\ 0)$이다.
삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여
$$(\text{삼각형 ABC의 넓이})=\frac{1}{2}\overline{AB}\,\overline{BC}=\frac{1}{2}\{f(t)\}^2f'(t)$$
문제에서 주어진 조건에 의하여
$$\frac{1}{2}\{f(t)\}^2f'(t)=\frac{1}{2}(e^{3t}-2e^{2t}+e^t)$$
양변에 6을 곱하고 우변을 인수분해하면
$$3\{f(t)\}^2f'(t)=3e^t(e^t-1)^2$$
부정적분을 하면
$$\int 3\{f(t)\}^2f'(t)dt=\int 3e^t(e^t-1)^2dt$$
치환적분법에 의하여
$\{f(t)\}^3=(e^t-1)^3+C$(단, C는 적분상수)
양변에 $t=0$을 대입하면
$\{f(0)\}^3=(e^0-1)^3+C$
정리하면
$0=0+C$에서 $C=0$이므로
$\{f(t)\}^3=(e^t-1)^3$ 풀면 $f(t)=e^t-1$
($\because y=x^3$은 일대일대응이므로 $x^3=a^3$이면 $x=a$이다.)

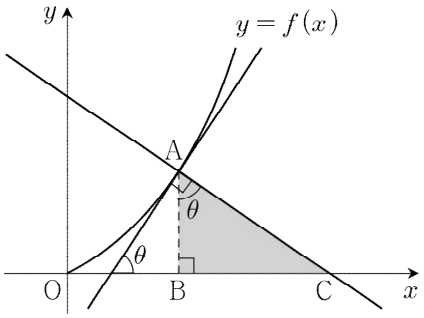


곡선과 x축 사이의 넓이를 구하는 정적분의 공식에 의하여
$$\int_0^1(e^x-1)dx=\left[e^x-x\right]_0^1=e-1-1=e-2$$
답 ①

[참고1]
임의의 양의 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$는
닫힌구간 $[0,\ x]$에서 연속이고,
열린구간 $(0,\ x)$에서 미분가능하므로
평균값의 정리에 의하여
$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(c)$ (단, $0<c<x$)
인 실수 c가 적어도 하나 존재한다.
그런데 $f'(c)>0$이므로
$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}>0$
정리하면 $f(x)>0$이다.
임의의 양의 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이므로
점 $(x,\ f(x))$는 제1사분면에 속한다.
따라서 열린구간 $(0,\ \infty)$에서
함수 $y=f(x)$의 그래프는 제1사분면에 그려진다.

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://atom.ac/books/3888

[참고2]
다음과 같은 방법으로 삼각형 ABC의 넓이를 구해도 좋다.
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선이
x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라고 하면
$\tan\theta=f'(t)$

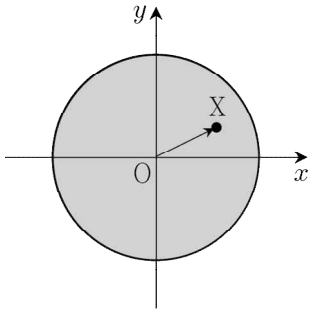


$\angle CAB=\frac{\pi}{2}-\angle BCA=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\theta$
직각삼각형 ABC에서 삼각비의 정의에 의하여
$\overline{BC}=\overline{AB}\tan\theta=f(t)f'(t)$
삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여
(삼각형 ABC의 넓이)$=\frac{1}{2}\overline{AB}\,\overline{BC}=\frac{1}{2}\{f(t)\}^2f'(t)$

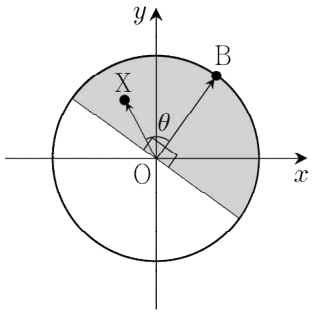
[참고3]
다음과 같은 방법으로 삼각형 ABC의 넓이를 구해도 좋다.
점 C의 좌표를 $C(c,\ 0)$으로 두자.
(곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 기울기)
$\times$(직선 AC의 기울기)
$=f'(t)\times\frac{0-f(t)}{c-t}=-1$
정리하면
$c=t+f(t)f'(t)$
삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여
(삼각형 ABC의 넓이)$=\frac{1}{2}\overline{AB}\,\overline{BC}=\frac{1}{2}\{f(t)\}^2f'(t)$

19

[풀이1]
좌표평면에서 부등식
$|\overrightarrow{OX}|\le 1$ …㉠
을 만족시키는 모든 점 X만의 집합이 나타내는 도형은
아래 그림처럼 중심이 원점이고,
반지름의 길이가 1인 원의 둘레 및 내부이다.

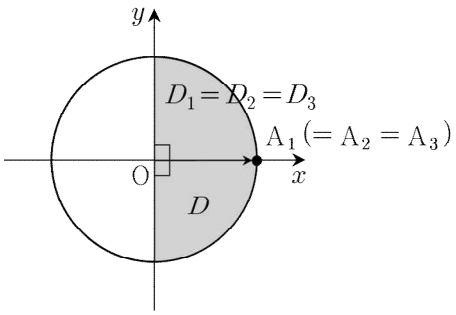


좌표평면에서 점 B는 중심이 원점이고,
반지름의 길이가 1인 원 위의 점이라고 하자.
• 점 X가 원점이 아닌 경우
두 벡터 $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하자.
(단, $0\le\theta\le\pi$)
벡터의 내적의 정의에 의하여
$\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OX}|\,|\overrightarrow{OB}|\cos\theta\ge 0$ …㉡
$|\overrightarrow{OX}|>0$, $|\overrightarrow{OB}|=1>0$이므로
$\cos\theta\ge 0$에서 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$이다.
• 점 X가 원점인 경우에는 ㉡이 항상 성립한다.
좌표평면에서 두 부등식 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는
모든 점 X만의 집합이 나타내는 도형은
아래 그림처럼 중심이 원점이고,
반지름의 길이가 1인 반원의 둘레 및 내부이다.



점 B 대신에 점 A_1 또는 점 A_2 또는 점 A_3이 와도
동일한 결과를 얻는다.
각각의 k의 값에 대하여
문제에서 주어진 두 부등식을 동시에 만족시키는
모든 점 X만의 집합이 나타내는 도형을 D_k라고 하자.
이때, $D=D_1\cap D_2\cap D_3$이다.
ㄱ. (참)
문제에서 주어진 등식에 의하여
세 벡터 $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$의 종점은 같다.
즉, 세 점 A_1, A_2, A_3은 일치한다.
이때, 세 점이 일치하는 점을 $(1,\ 0)$으로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://atom.ac/books/3888



위의 그림처럼 도형 D는 두 점 $(0,\ 1)$, $(0,\ -1)$을 연결한 선분을 지름으로 하는 반원의 둘레 및 내부이다. 이때, 점 $(1,\ 0)$은 반원의 둘레 위에 있다.

따라서 도형 D의 넓이는 $\frac{\pi}{2}$이다.

ㄴ. (참)

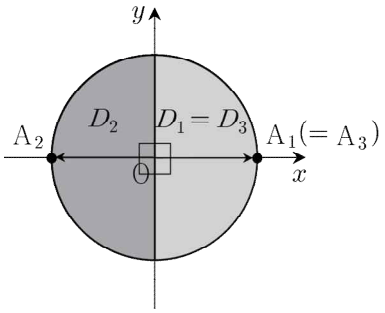
문제에서 주어진 두 등식에 의하여

두 벡터 $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$의 두 종점을 연결한

선분 A_1A_2의 중점은 원점 O이고,

두 벡터 $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_3}$의 종점은 같다.

이때, 두 점 A_1, A_3이 일치하는 점을 $(1,\ 0)$, 점 A_2를 $(-1,\ 0)$으로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.



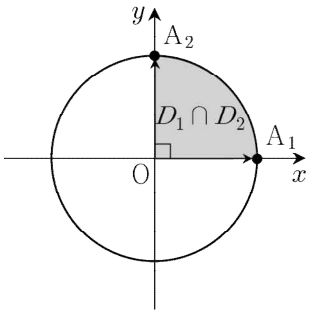
위의 그림처럼 도형 D는 두 반원이 만나서 생기는 y축 위의 선분이다. 이때, 선분의 양 끝점은 각각 $(0,\ 1)$, $(0,\ -1)$이다. 따라서 도형 D의 길이는 2이다.

ㄷ. (참)

문제에서 주어진 등식에 의하여

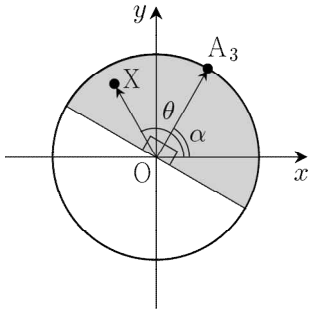
두 벡터 $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$는 서로 수직이다.

이때, 두 점 A_1, A_2를 각각 $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.



동경 OA_3이 나타내는 각의 크기를 α라고 하자.

(단, $0\le\alpha<2\pi$)



도형 D_3에 속하는 임의의 점 X에 대하여

동경 OX가 나타내는 각의 크기를 θ라고 하면

(단, $0\le\theta<2\pi$)

$$\alpha-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\alpha+\frac{\pi}{2}$$

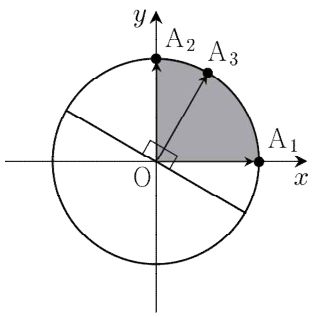
그런데 $D_1\cap D_2\subset D_3$이므로

$$\alpha-\frac{\pi}{2}\le 0,\ \frac{\pi}{2}\le\alpha+\frac{\pi}{2}$$

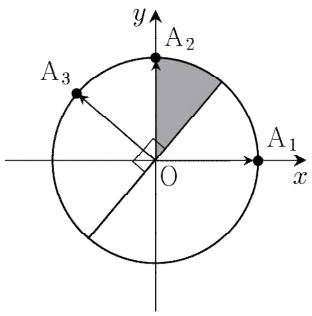
정리하면

$$0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$$

즉, 아래 그림처럼 점 A_3은 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_1A_2의 호 A_1A_2 위의 점이다.



만약 점 A_3이 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_1A_2의 호 A_1A_2 위의 점이 아니라면, 아래 그림과 같이 D의 넓이는 $\frac{\pi}{4}$ 보다 작다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://atom.ac/books/3888

답 ⑤

[풀이2]

점 X의 좌표를 $(x,\ y)$로 두자.

문제에서 주어진 부등식

$|\overrightarrow{OX}| \le 1$ …㉠

에 의하여

$\sqrt{x^2+y^2} \le 1$ 즉, $x^2+y^2 \le 1$

부등식 ㉠을 만족시키는 모든 점 X만의 집합이 나타내는 도형은 원점을 중심으로 하고, 반지름의 길이가 1인 원의 둘레 및 내부이다.

점 X의 좌표를 삼각함수를 이용하여 다음과 같이 두자.

$X(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ (단, $0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta < 2\pi$)

점 A_k의 좌표를 $(a_k,\ b_k)$로 두자.

(단, $k=1,\ 2,\ 3$이고, $a_k^2+b_k^2=1$이다.)

문제에서 주어진 부등식

$\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OA_k} \ge 0$ …㉡

에 의하여

$a_kx+b_ky \ge 0$

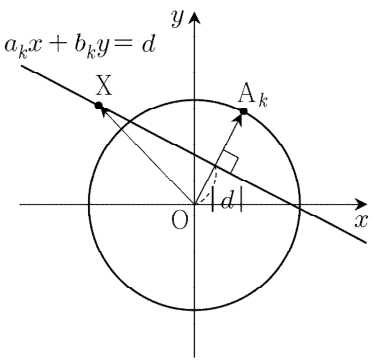
여기서 직선

$a_kx+b_ky=d$ …(*)

에 대하여 생각해보자.

(단, d는 상수)

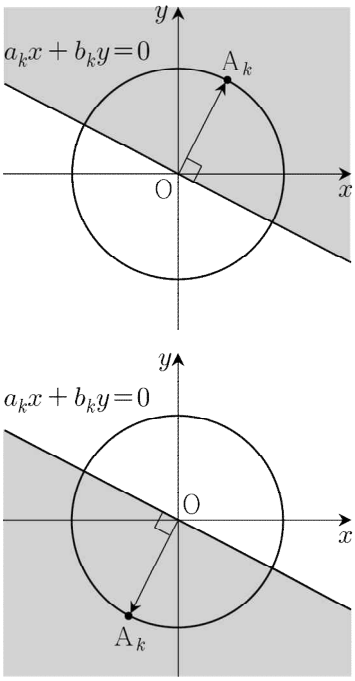
직선 (*)은 법선벡터가 $(a_k,\ b_k)$이고, 원점과의 거리가 $|d|$인 직선이다. 이때, 아래 그림처럼 직선 (*)과 반직선 OA_k는 만난다.



따라서 좌표평면에서 부등식

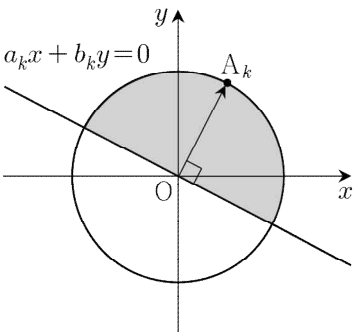
$a_kx+b_ky \ge 0$

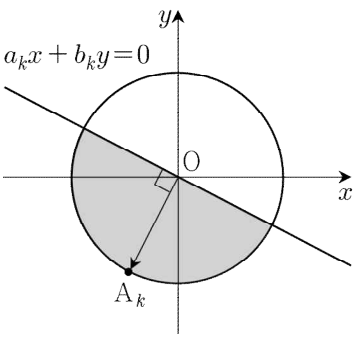
즉, ㉡이 나타내는 영역은 아래 그림과 같다.



각각의 k에 대하여 좌표평면에서

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 영역은 아래 그림과 같다.





ㄱ. (참)

문제에서 주어진 등식에 의하여

세 벡터 $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$의 종점은 같다.

즉, 세 점 A_1, A_2, A_3은 일치한다.

이때, 세 점이 일치하는 점을 $(1,\ 0)$으로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

성분으로 주어진 벡터의 내적을 하면

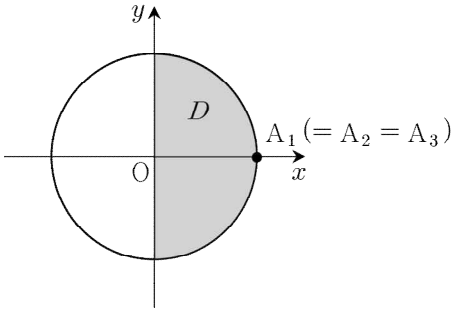
$\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OA_k}$

$=(r\cos\theta,\ r\sin\theta) \cdot (1,\ 0) = r\cos\theta \ge 0$

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://atom.ac/books/3888

$r=0$이면 위의 부등식은 항상 성립한다.
이때, 점 X는 원점이다.
$0<r\le 1$이면 $\cos\theta\ge 0$이므로

$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3\pi}{2}\le\theta<2\pi$

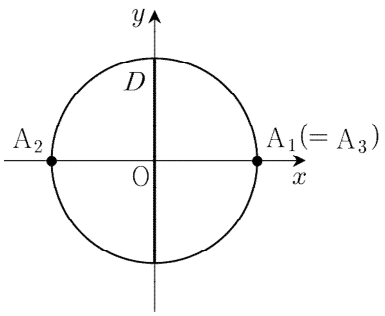


위의 그림처럼 도형 D는 두 점 $(0,\ 1)$, $(0,\ -1)$을 연결한 선분을 지름으로 하는 반원의 둘레 및 내부이다.
이때, 점 $(1,\ 0)$은 반원의 둘레 위에 있다.

따라서 도형 D의 넓이는 $\frac{\pi}{2}$이다.

ㄴ. (참)
문제에서 주어진 두 등식에 의하여
두 벡터 $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$의 두 종점을 연결한
선분 A_1A_2의 중점은 원점 O이고,
두 벡터 $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_3}$의 종점은 같다.
이때, 두 점 A_1, A_3이 일치하는 점을 $(1,\ 0)$, 점 A_2를 $(-1,\ 0)$으로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.
$\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OA_2}$
$=(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\cdot(1,\ 0)=r\cos\theta\ge 0$ …㉢
$\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OA_3}$
$=(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\cdot(-1,\ 0)=-r\cos\theta\ge 0$ …㉣
$r=0$이면 ㉢, ㉣이 항상 성립한다.
이때, 점 X는 원점이다.
$0<r\le 1$이면 $\cos\theta\ge 0$(㉢), $\cos\theta\le 0$(㉣)이므로

$\cos\theta=0$ 즉, $\theta=\frac{\pi}{2}$ 또는 $\theta=\frac{3\pi}{2}$

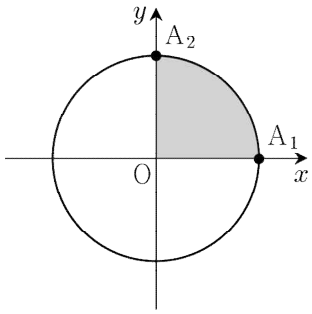


위의 그림처럼 도형 D는 두 반원이 만나서 생기는 y축 위의 선분이다. 이때, 선분의 양 끝점은 각각 $(0,\ 1)$, $(0,\ -1)$이다. 따라서 도형 D의 길이는 2이다.

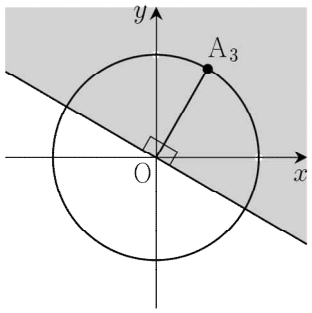
ㄷ. (참)
문제에서 주어진 등식에 의하여
두 벡터 $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$는 서로 수직이다.
이때, 두 점 A_1, A_2를 각각 $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.
$\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OA_1}$
$=(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\cdot(1,\ 0)=r\cos\theta\ge 0$ …㉤
$\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OA_2}$
$=(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\cdot(0,\ 1)=r\sin\theta\ge 0$ …㉥
$r=0$이면 ㉤, ㉥이 항상 성립한다.
이때, 점 X는 원점이다.
$0<r\le 1$이면 $\cos\theta\ge 0$(㉤), $\sin\theta\ge 0$(㉥)이므로

$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

두 부등식 ㉤, ㉥의 영역을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



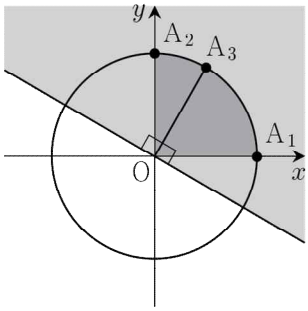
$\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OA_3}$
$=(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\cdot(a_3,\ b_3)$
$=a_3r\cos\theta+b_3r\sin\theta\ge 0$ …㉦
(단, $a_3^2+b_3^2=1$)
$r=0$이면 ㉦이 항상 성립한다. 이때, 점 X는 원점이다.
$0<r\le 1$이면 부등식 ㉦은 좌표평면에서 다음과 같은 영역을 나타낸다.



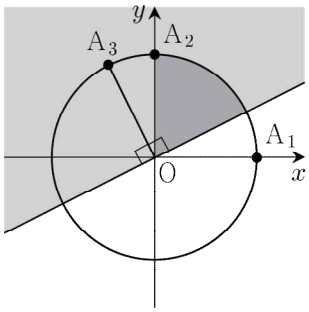
아래 그림처럼 점 A_3이 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://atom.ac/books/3888

OA_1A_2의 호 A_1A_2 위의 점이면 D의 넓이가 $\frac{\pi}{4}$이다.



아래 그림처럼 점 A_3이 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_1A_2의 호 A_1A_2 위의 점이 아니면 D의 넓이는 $\frac{\pi}{4}$보다 작다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.
답 ⑤

20

[풀이]
세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우는 '(ⅰ) 세 상자에 공이 들어가는 모든 경우'에서 '(ⅱ) 세 상자에 모두 같은 개수의 공이 들어가는 경우'와 '(ⅲ) 세 상자 중 두 상자에만 같은 개수의 공이 들어가는 경우'를 제외하면 된다.
(ⅰ)의 경우 :
n명의 사람이 각자 세 상자 중 공을 넣을 두 상자를 선택하는 경우의 수는 n명의 사람이 각자 공을 넣지 않을 한 상자를 선택하는 경우의 수와 같다. 따라서 세 상자에서 중복을 허락하여 n개의 상자를 선택하는 경우의 수인 $\boxed{{}_3\mathrm{H}_n}$이다.
(ⅱ)의 경우 :
각 상자에 $\frac{2n}{3}$개의 공이 들어가는 경우뿐이므로 경우의 수는 1이다.
(ⅲ)의 경우 :
두 상자 A, B에 같은 개수의 공이 들어가면 상자 C에는 최대 n개의 공을 넣을 수 있으므로 두 상자 A, B에 각각 $\frac{n}{2}$개보다 작은 개수의 공이 들어갈 수 없다.
(이유: 두 상자 A, B에 각각 k개의 공이 들어가면 상자 C에는 $2n-2k$개의 공이 들어간다.
모든 사람(n명)이 한 사람도 빠짐없이 상자 C에 공을 하나씩 넣었다고 하면, 상자 C에는 n개의 공이 들어간다. 즉, 상자 C에 들어가는 공의 최대 개수는 n이다.
$2n-2k \le n$에서 $k \ge \frac{n}{2}$
따라서 두 상자 A, B에 들어가는 공의 최대 개수는 각각 $\frac{n}{2}$이다.)

경우	A	B	C
경우(1)	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}$	n
경우(2)	$\frac{n}{2}+1$	$\frac{n}{2}+1$	$n-2$
경우(3)	$\frac{n}{2}+2$	$\frac{n}{2}+2$	$n-4$
⋮	⋮	⋮	⋮
경우$(\frac{n}{6}+1)$	$\frac{2n}{3}$	$\frac{2n}{3}$	$\frac{2n}{3}$
⋮	⋮	⋮	⋮
경우$(\frac{n}{2}+1)$	$\frac{n}{2}+\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}+\frac{n}{2}$	0

(경우(1)→경우(2): 상자 C에서 2개의 공을 꺼내어 두 상자 A, B에 각각 1개씩 넣었다고 생각하면 된다. 나머지도 마찬가지이다.)
따라서 두 상자 A, B에 같은 개수의 공이 들어가는 경우의 수는 $\boxed{\frac{n}{2}+1}$이다.
그러므로 세 상자 중 두 상자에만 같은 개수의 공이 들어가는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2 \times (\boxed{\frac{n}{2}+1}-1)$이다. (이유: 경우$(\frac{n}{6}+1)$은 (ⅱ)과 중복된다.)
따라서 세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우의 수는 $\boxed{\frac{(n+2)(n+1)}{2}-1-\frac{3}{2}n}$이다.

(가): $f(n)={}_3\mathrm{H}_n={}_{2+n}\mathrm{C}_n={}_{2+n}\mathrm{C}_2=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$

(나): $g(n)=\frac{n}{2}+1$

(다): $h(n)=\frac{(n+2)(n+1)}{2}-1-\frac{3}{2}n$

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://atom.ac/books/3888

$\therefore \ \dfrac{f(30)}{g(30)}+h(30)=31+450=481$

답 ①

21

[풀이]

수열 $\{a_n\}$의 일반항에서

$a_1=-1,\ a_2=1,\ a_3=\dfrac{3}{2},\ a_4=\dfrac{7}{4},\ \cdots$

모든 자연수 n에 대하여 $a_n<2$이고,

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$이다.

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\begin{cases}\sin(2\pi x) & (-1\le x\le 1)\\ \sin(4\pi x) & \left(1\le x\le \dfrac{3}{2}\right)\\ \sin(8\pi x) & \left(\dfrac{3}{2}\le x\le \dfrac{7}{4}\right)\\ \quad\vdots & \quad\vdots\\ \sin(2^n\pi x) & \left(2-\dfrac{1}{2^{n-2}}\le x\le 2-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)\\ \quad\vdots & \quad\vdots\end{cases}$$

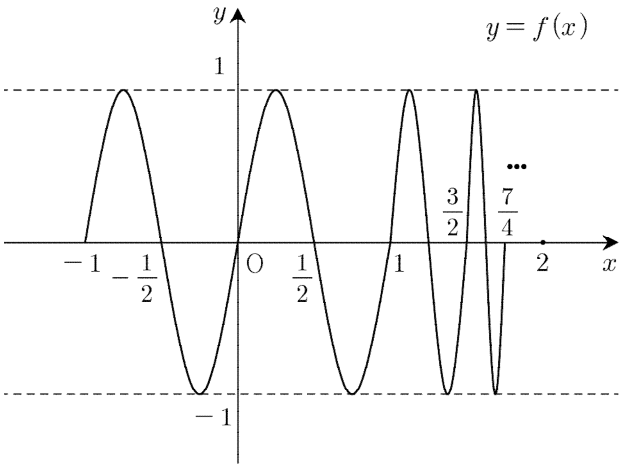
(단, $n\ge 2$)

2 이상의 자연수 n에 대하여

구간 $[a_n,\ a_{n+1}]$의 길이와

함수 $y=\sin(2^n\pi x)$의 주기는 각각 $\dfrac{1}{2^{n-1}}$이다.

함수 $f(x)$의 그래프는



정적분의 성질에 의하여

$$\int_\alpha^t f(x)dx=\int_0^t f(x)dx-\int_0^\alpha f(x)dx$$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$$\int_0^t f(x)dx=\int_0^\alpha f(x)dx\ (\text{단, } 0<t<2)\qquad \cdots(*)$$

$g(t)=\int_0^t f(x)dx$로 두자. (단, $0<t<2$)

적분과 미분의 관계에 의하여

$g'(t)=f(t)$

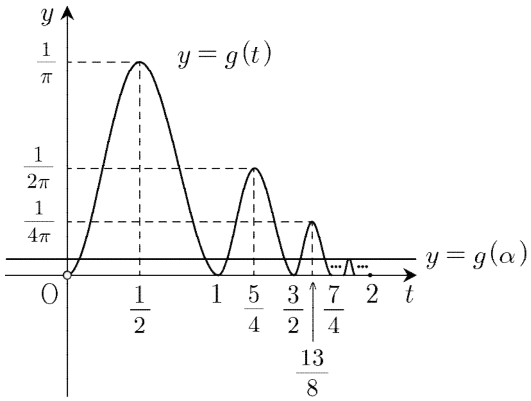
함수 $g(t)$의 방정식은

$$g(t)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2\pi}\cos(2\pi t)+\dfrac{1}{2\pi} & (0<t\le 1)\\ -\dfrac{1}{4\pi}\cos(4\pi t)+\dfrac{1}{4\pi} & \left(1\le t\le \dfrac{3}{2}\right)\\ -\dfrac{1}{8\pi}\cos(8\pi t)+\dfrac{1}{8\pi} & \left(\dfrac{3}{2}\le t\le \dfrac{7}{4}\right)\\ \quad\vdots & \quad\vdots\\ -\dfrac{1}{2^n\pi}\cos(2^n\pi t)+\dfrac{1}{2^n\pi} & \left(2-\dfrac{1}{2^{n-2}}\le t\le 2-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)\\ \quad\vdots & \quad\vdots\end{cases}$$

(단, $n\ge 2$)

그리고 $\lim\limits_{t\to 0+}g(t)=\lim\limits_{t\to 0+}\int_0^t f(x)dx=0$이므로

함수 $g(t)$의 그래프는



방정식 (*)을 다시 쓰면

$g(t)=g(\alpha)$ (단, $0<t<2$) ($\Leftrightarrow$(*))

열린구간 $(0,\ 2)$에서 곡선 $y=g(t)$와 직선 $y=g(\alpha)$는 103개의 점에서 만나야 한다.

$g(\alpha)$의 범위에 따른 곡선 $y=g(t)$와 직선 $y=g(\alpha)$의 교점의 개수를 표로 정리하면 다음과 같다.

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://atom.ac/books/3888

$g(\alpha)$의 값 또는 범위	교점의 개수
$g(\alpha)>\frac{1}{\pi}$	0
$g(\alpha)=\frac{1}{\pi}(=\frac{1}{2^0\pi})$	$1(=2\times0+1)$
$\frac{1}{2\pi}<g(\alpha)<\frac{1}{\pi}$	2
$g(\alpha)=\frac{1}{2\pi}(=\frac{1}{2^1\pi})$	$3(=2\times1+1)$
$\frac{1}{4\pi}<g(\alpha)<\frac{1}{2\pi}$	4
$g(\alpha)=\frac{1}{4\pi}(=\frac{1}{2^2\pi})$	$5(=2\times2+1)$
⋮	⋮
$g(\alpha)=\frac{1}{2^{51}\pi}$	$103(=2\times51+1)$
⋮	⋮

미적분의 기본 정리에 의하여

$$\int_0^{\alpha} f(x)dx=\int_0^{\alpha}\sin(2\pi x)dx=\left[-\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi x)\right]_0^{\alpha}$$

$$=\frac{1}{2\pi}(1-\cos(2\pi\alpha))=\frac{1}{2^{51}\pi}$$

정리하면

$$1-\cos(2\pi\alpha)=\frac{1}{2^{50}}$$

로그의 정의에 의하여

$\therefore\ \log_2(1-\cos(2\pi\alpha))=-50$

답 ②

[참고1]

함수 $g(t)$의 방정식을 유도할 때,

구간 $(0,\ 2)$에서 함수 $g(t)$가 연속임을 이용해야 한다.

부정적분의 정의에 의하여

$$g(t)=\begin{cases}-\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi t)+C_1 & (0<t\le 1)\\ -\frac{1}{4\pi}\cos(4\pi t)+C_2 & \left(1\le t\le\frac{3}{2}\right)\\ -\frac{1}{8\pi}\cos(8\pi t)+C_3 & \left(\frac{3}{2}\le t\le\frac{7}{4}\right)\\ \quad\vdots & \quad\vdots\\ -\frac{1}{2^n\pi}\cos(2^n\pi t)+C_n & \left(2-\frac{1}{2^{n-2}}\le t\le 2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\\ \quad\vdots & \quad\vdots\end{cases}$$

(단, $n\ge2$, C_1, C_2, C_3, $\cdots$, C_n은 적분상수이다.)

$\lim_{t\to0+} g(t)=-\frac{1}{2\pi}+C_1=0$에서 $C_1=\frac{1}{2\pi}$

함수 $g(t)$가 $t=1$에서 연속이므로

$\lim_{t\to1-} g(t)=-\frac{1}{2\pi}+C_1=0$,

$\lim_{t\to1+} g(t)=-\frac{1}{4\pi}+C_2$

에서 $-\frac{1}{4\pi}+C_2=0$ 즉, $C_2=\frac{1}{4\pi}$

마찬가지의 방법으로

모든 자연수 n에 대하여 $C_n=\frac{1}{2^n\pi}$이다.

[참고2]

문제의 조건을 만족시키는 α의 값의 개수가 2임을 보이자.

문제에서 주어진 조건을 만족시키는 α에 대하여

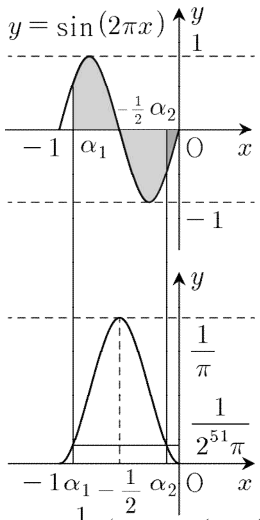
아래의 필요충분조건을 생각할 수 있다.

$$\int_{\alpha}^{0} f(x)dx=-\frac{1}{2^{51}\pi}\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{2\pi}(1-\cos(2\pi\alpha))=\frac{1}{2^{51}\pi}$$

열린구간 $(-1,\ 0)$에서

곡선 $y=\frac{1}{2\pi}(1-\cos(2\pi x))$와 직선 $y=\frac{1}{2^{51}\pi}$이

만나는 두 점의 x좌표를 각각 α_1, α_2라고 하자.



$y=\frac{1}{2\pi}(1-\cos(2\pi x))$

(단, $-1<\alpha_1<\alpha_2<0$)

열린구간 $(-1,\ 0)$에서

곡선 $y=\frac{1}{2\pi}(1-\cos(2\pi x))$는

직선 $x=-\frac{1}{2}$에 대하여 대칭이므로

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}=-\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2\pi}(1-\cos(2\pi\alpha_1))=\frac{1}{2\pi}(1-\cos(2\pi\alpha_2))$$

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://atom.ac/books/3888

열린구간 $(-1,\ 0)$에서 곡선 $y=\sin(2\pi x)$는 점 $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}=-\frac{1}{2},\ \frac{\sin(2\pi\alpha_1)+\sin(2\pi\alpha_2)}{2}=0$

미적분의 기본 정리에 의하여

$\int_{\alpha_1}^{-\frac{1}{2}} f(x)dx=-\int_{-\frac{1}{2}}^{\alpha_2} f(x)dx,\ \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)dx=0,$

$\int_{\alpha_1}^{0} f(x)dx=\int_{\alpha_2}^{0} f(x)dx=-\frac{1}{2^{51}\pi}$

[참고3]

방정식 $\int_{\alpha}^{t} f(x)dx=0$의 서로 다른 실근을 가장 작은 수부터 크기순으로 나열하면

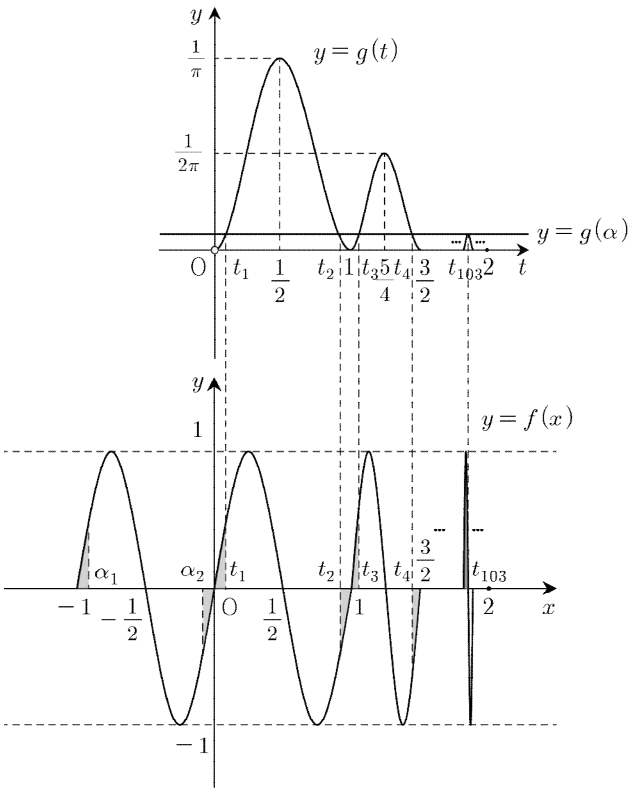
$t_1,\ t_2,\ t_3,\ \cdots,\ t_{103}\left(=2-\frac{3}{2^{52}}\right)$

(단, $0<t_i<2$, i는 103 이하의 자연수)

미적분의 기본 정리에 의하여 아래의 필요충분조건이 성립한다.

$\int_{\alpha}^{t} f(x)dx=0 \Leftrightarrow g(t)=g(\alpha)$

(이때, α가 갖는 값의 개수는 2이고, $g(\alpha)=\frac{1}{2^{51}\pi}$이다.)



위의 그림에서 어둡게 색칠된 도형들의 넓이는 $g(\alpha)$로 모두 같다.

예를 들어 $t=t_{103}$일 때,

정적분의 성질과 미적분의 기본 정리에 의하여

$\int_{\alpha}^{t_{103}} f(x)dx$

$=\int_{\alpha}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a_2} f(x)dx+\int_{a_2}^{a_3} f(x)dx$

$+\ \cdots\ +\int_{a_{52}}^{t_{103}} f(x)dx$

$=\int_{\alpha}^{0} f(x)dx+\underbrace{0+0+\ \cdots\ +0}_{51\text{개}}+\int_{a_{52}}^{t_{103}} f(x)dx=0$

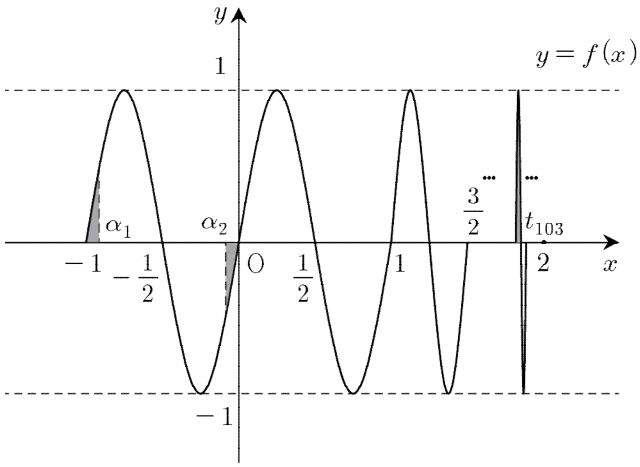
($\because$ 구간 $[0,\ a_2]$에서 함수 $f(x)$는 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$에 대하여 대칭이고,

2 이상의 자연수 n에 대하여 구간 $[a_n,\ a_{n+1}]$에서 함수 $f(x)$는 점 $\left(2-\frac{3}{2^n},\ 0\right)$에 대하여 대칭이다.)

이므로

$\int_{a_{52}}^{t_{103}} f(x)dx=-\int_{\alpha}^{0} f(x)dx$ ⋯㉠

따라서 아래 그림에서 색칠된 세 도형의 넓이는 같다.



만약 이 문제를 정적분(넓이)의 관점에서 풀이한다면 등식 ㉠을 찾으면 된다.

22

[풀이]

순열의 수에 대한 공식에 의하여

${}_7\mathrm{P}_3=7\times6\times5=210$

답 210

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://atom.ac/books/3888

23

[풀이]

합성함수의 미분법에 의하여

$f'(x)=-2\cos x(-\sin x)=2\cos x\sin x$

$\therefore\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$

답 1

24

[풀이]

음함수의 미분법에 의하여

$5+y+x\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}=0$

정리하면

$\frac{dy}{dx}=-\frac{5+y}{x+2y}$ (단, $x+2y\neq 0$)

$x=1,\ y=-1$을 대입하면

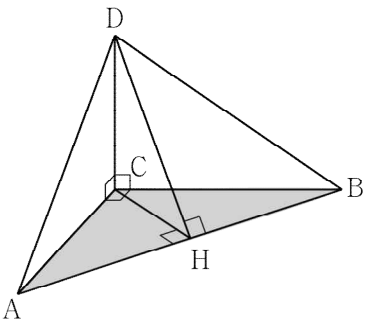
$\therefore\ \frac{dy}{dx}=4$

답 4

25

[풀이1]

점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



$\overline{DC}\perp ABC$, $\overline{CH}\perp\overline{AB}$이므로

삼수선의 정리❶에 의하여

$\overline{DH}\perp\overline{AB}$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$(\triangle ABD\text{의 넓이})=\frac{1}{2}\overline{AB}\,\overline{DH}$

$=\frac{1}{2}\times 8\times\overline{DH}=20$ 즉, $\overline{DH}=5$

직각삼각형 DCH에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{CH}=\sqrt{\overline{DH}^2-\overline{DC}^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

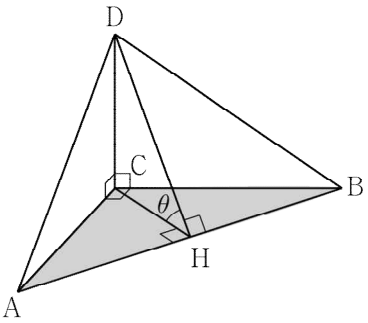
$(\triangle ABC\text{의 넓이})=\frac{1}{2}\overline{AB}\,\overline{CH}=\frac{1}{2}\times 8\times 3=12$

답 12

[참고]

정사영의 넓이에 대한 공식을 이용하여 삼각형 ABC의 넓이를 구해도 좋다.

두 평면 ABD, ABC가 이루는 예각의 크기를 θ라고 하자.



이면각의 정의에 의하여

$\angle DHC=\theta$

정사영의 넓이에 대한 공식에 의하여

$(\triangle ABC\text{의 넓이})=(\triangle ABD\text{의 넓이})\times\cos\theta$

$=20\times\frac{3}{5}=12$

[풀이2]

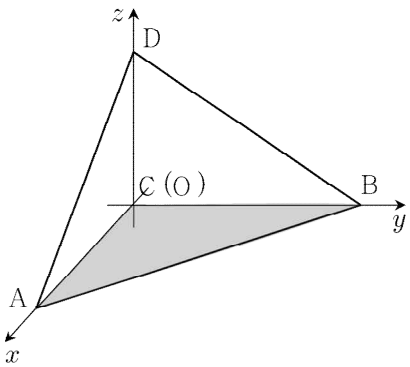
$\overline{AC}=a$, $\overline{BC}=b$으로 두자. (단, $a>0$, $b>0$)

네 점 A, B, C, D의 좌표가 각각

$A(a,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ b,\ 0)$, $C(0,\ 0,\ 0)$,

$D(0,\ 0,\ 4)$

가 되도록 좌표공간을 도입하자.



평면 ABD의 방정식을 다음과 같이 두자.

$px+qy+rz+s=0$ (단, $pqrs\neq 0$)

평면 ABD는 세 점 A, B, D를 지나므로

$pa+q\times 0+r\times 0+s=0$ 즉, $p=-\frac{s}{a}$

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://atom.ac/books/3888

$p\times 0+qb+r\times 0+s=0$ 즉, $q=-\dfrac{s}{b}$

$p\times 0+q\times 0+4r+s=0$ 즉, $r=-\dfrac{s}{4}$

평면 ABD의 방정식은

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{4}=1$

두 평면 ABD, ABC의 법선벡터를 각각

$\overrightarrow{n_1}=\left(\dfrac{1}{a},\ \dfrac{1}{b},\ \dfrac{1}{4}\right)$, $\overrightarrow{n_2}=(0,\ 0,\ 1)$

두 평면 ABD, ABC가 이루는 예각의 크기를 θ라고 하자.

두 평면이 이루는 각의 크기를 구하는 공식에 의하여

$$\cos\theta=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{1}{4\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{16}}}$$

한편 xy평면에 포함되는 선분 AB의 길이가 8이므로 두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{a^2+b^2}=8$ 즉, $a^2+b^2=64$ …㉠

정사영의 넓이에 대한 공식에 의하여

(△ABC의 넓이)=(△ABD의 넓이)$\times\cos\theta$

$$=\frac{5}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{16}}}=\frac{5}{\sqrt{\dfrac{64}{a^2b^2}+\dfrac{1}{16}}}\ (\because ㉠)$$

(△ABC의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AC}}\,\overline{\mathrm{CB}}=\dfrac{1}{2}ab$

$$\frac{5}{\sqrt{\dfrac{64}{a^2b^2}+\dfrac{1}{16}}}=\frac{1}{2}ab$$

양변을 제곱하여 정리하면

$ab=24$

$\therefore$ (△ABC의 넓이)$=\dfrac{1}{2}ab=12$

답 12

[풀이3] 교육과정 외

$\overline{\mathrm{AC}}=a$, $\overline{\mathrm{BC}}=b$으로 두자. (단, $a>0$, $b>0$)

네 삼각형 ABD, ACD, ABC, BDC의 넓이를 각각 S, S_1, S_2, S_3

으로 두면 아래의 등식이 성립한다.

$S^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2$ …㉠

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$S_1=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AC}}\,\overline{\mathrm{CD}}=2a$, $S_3=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}\,\overline{\mathrm{CD}}=2b$

이를 ㉠에 대입하면

$20^2=(2a)^2+S_2^2+(2b)^2$ …㉡

직각삼각형 ABC에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{a^2+b^2}=8$ 즉, $a^2+b^2=64$ …㉢

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$\therefore\ S_2=\sqrt{20^2-4(a^2+b^2)}=\sqrt{20^2-4\times 64}=12$

답 12

26

[풀이]

모집단의 초콜릿 한 개의 무게는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 이 회사에서 생산하는 초콜릿 중에서 임의 추출한 49개의 초콜릿의 평균을 $\overline{X}$라고 하면, $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\dfrac{\sigma}{7}\right)^2\right)$을 따른다.

평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x}-1.96\times\frac{\sigma}{7}\le m\le\bar{x}+1.96\times\frac{\sigma}{7}$$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$\bar{x}+1.96\times\dfrac{\sigma}{7}=1.87$ …㉠

$\bar{x}-1.96\times\dfrac{\sigma}{7}=1.73$ …㉡

㉠−㉡: $2\times 1.96\times\dfrac{\sigma}{7}=0.14$

풀면

$\sigma=\dfrac{1}{4}$

㉠에 대입하여 정리하면

$\bar{x}=1.80$

$$\therefore\ 180k=180\frac{\sigma}{\bar{x}}=180\times\frac{\dfrac{1}{4}}{1.80}=25$$

답 25

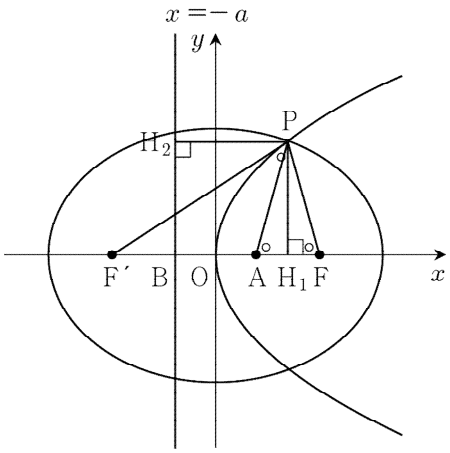
27

[풀이]

문제에서 주어진 포물선의 준선은 $x=-a$이다.

점 P에서 x축과 준선 $x=-a$에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2, 준선 $x=-a$가 x축과 만나는 점을 B라고 하자.

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://atom.ac/books/3888



문제에서 주어진 조건 $\overline{PA}=\overline{PF}$에 의하여

두 직각삼각형 PAH_1, PFH_1은 서로 RHS합동이므로

$\overline{AH_1}=\overline{FH_1}=1$

선분 PH_2의 길이는

$\overline{PH_2}=\overline{BH_1}=\overline{BO}+\overline{OA}+\overline{AH_1}=2a+1$

포물선의 정의에 의하여

$\overline{PA}=\overline{PH_2}=2a+1$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$\overline{PF'}=\overline{F'F}=2c$

서로 닮음인 두 삼각형 PAF, F′FP에서

$\overline{PA}:\overline{AF}=\overline{F'F}:\overline{FP}$ 즉, $2a+1:2=2c:2a+1$

그런데

$\overline{OF}=c=a+2$ …㉠

이므로

$(2a+1)^2=4(a+2)$

정리하면

$a^2=\frac{7}{4}$ 풀면 $a=\frac{\sqrt{7}}{2}$

이를 ㉠에 대입하면

$c=2+\frac{\sqrt{7}}{2}$

타원의 정의에 의하여

(타원의 장축의 길이)

$=\overline{PF}+\overline{PF'}=2a+1+2c=4a+5=2\sqrt{7}+5$

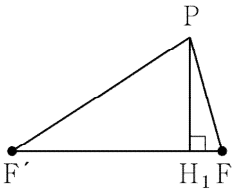
$p=5$, $q=2$이므로

$\therefore\ p^2+q^2=29$

답 29

[참고1]

피타고라스의 정리를 이용하여 a의 값을 구해도 좋다.



두 직각삼각형 $PF'H_1$, PFH_1에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{PH_1}=\sqrt{\overline{PF'}^2-\overline{F'H_1}^2}=(2c)^2-(2c-1)^2$,

$\overline{PH_1}=\sqrt{\overline{PF}^2-\overline{FH_1}^2}=(2a+1)^2-1^2$

이므로

$(2c)^2-(2c-1)^2=(2a+1)^2-1^2$

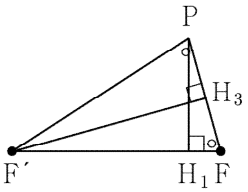
$c=a+2$를 대입하여 정리하면

$a^2=\frac{7}{4}$ 풀면 $a=\frac{\sqrt{7}}{2}$

[참고2]

서로 닮음인 두 직각삼각형에서 유도되는 비례식을 이용하여 a의 값을 구해도 좋다.

점 F′에서 선분 PF에 내린 수선의 발을 H_3이라고 하자.



서로 닮음인 두 직각삼각형 PH_1F, $F'H_3P$에서

$\frac{\overline{FH_1}}{\overline{PF}}=\frac{\overline{PH_3}}{\overline{F'P}}$ 즉, $\frac{1}{2a+1}=\frac{a+\frac{1}{2}}{2c}$

정리하면

$2c=\frac{1}{2}(2a+1)^2$

$c=a+2$를 대입하여 정리하면

$a^2=\frac{7}{4}$ 풀면 $a=\frac{\sqrt{7}}{2}$

28

[풀이]

갑, 을, 병이 꺼낸 카드에 적힌 숫자를 각각 a, b, c라고 하자.

(단, $1\le a\le 6$, $1\le b\le 3$, $1\le c\le 3$)

$a>b$인 경우를 표로 정리하면 다음과 같다.

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://atom.ac/books/3888

a	b	c	$(a,\ b,\ c)$
1	×	×	0개
2	1	1, 2, 3	3개
3	1, 2	1, 2, 3	6개
4	1, 2, 3	1, 2, 3	9개
5	1, 2, 3	1, 2, 3	9개
6	1, 2, 3	1, 2, 3	9개

$a>b$일 때, $a>b+c$인 경우를 표로 정리하면 다음과 같다.

c	b	a	$(a,\ b,\ c)$
1	1	3, 4, 5, 6	9개
	2	4, 5, 6	
	3	5, 6	
2	1	4, 5, 6	6개
	2	5, 6	
	3	6	
3	1	5, 6	3개
	2	6	
	3	×	

구하는 확률을 p라고 하자.
조건부 확률의 정의와 수학적 확률의 정의에 의하여

$$p=\frac{9+6+3}{3+6+9+9+9}=\frac{1}{2}$$

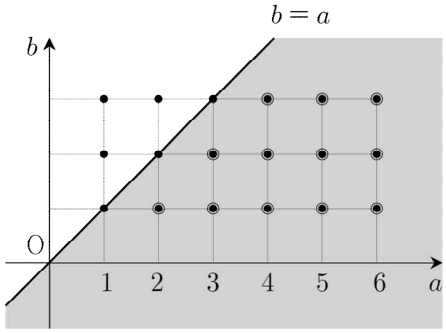
$\therefore\ 100k=50$
답 50

[참고1]
여사건의 확률을 이용하여 p의 값을 구해도 좋다.
$a>b$일 때, $a\le b+c$인 경우를 표로 정리하면 다음과 같다.

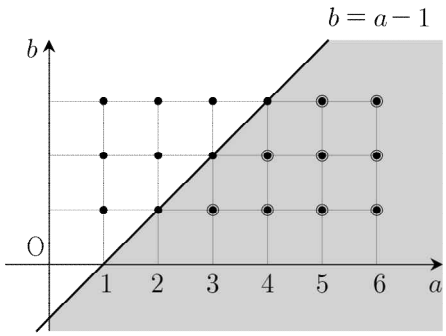
c	b	a	$(a,\ b,\ c)$
1	1	2	3개
	2	3	
	3	4	
2	1	2, 3	6개
	2	3, 4	
	3	4, 5	
3	1	2, 3, 4	9개
	2	3, 4, 5	
	3	4, 5, 6	

여사건의 확률의 정의와 조건부 확률의 정의에 의하여
$1-p=\frac{3+6+9}{36}=\frac{1}{2}$이므로 $p=\frac{1}{2}$이다.

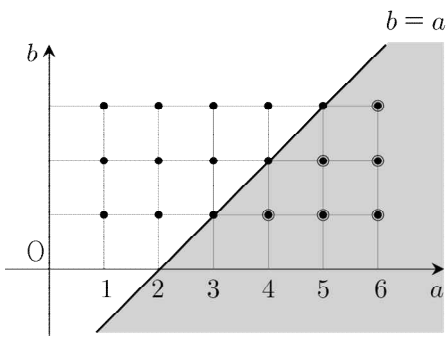
[참고2]
좌표평면을 이용하여 경우의 수를 세도 좋다.
$a>b+c$인 경우를 다음과 같이 구분할 수 있다.
$a>b+1$인 경우, $a>b+2$인 경우, $a>b+3$인 경우
(1) $a>b$인 경우 ($c=1$ 또는 $c=2$ 또는 $c=3$인 경우)



(단, 경계는 제외)
좌표평면에서 부등식 $a>b$의 영역에 속하는 점 $(a,\ b)$의 개수는 12이다.
이때, 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 $12\times3=36$이다.
(2) $a>b+1$인 경우 ($c=2$인 경우)



(단, 경계는 제외)
좌표평면에서 부등식 $a>b+1$의 영역에 속하는 점 $(a,\ b)$의 개수는 9이다.
이때, 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 $9\times1=9$이다.
(3) $a>b+2$인 경우 ($c=3$인 경우)

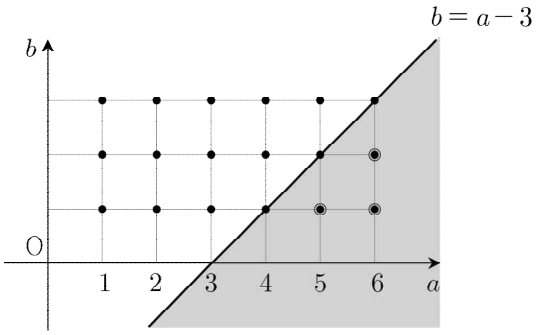


(단, 경계는 제외)
좌표평면에서 부등식 $a>b+2$의 영역에 속하는 점 $(a,\ b)$의 개수는 6이다.

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://atom.ac/books/3888

이때, 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $6\times1=6$이다.

(4) $a>b+3$인 경우 ($c=1$인 경우)



(단, 경계는 제외)

좌표평면에서 부등식 $a>b+3$의 영역에 속하는 점 (a, b)의 개수는 3이다.

이때, 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $3\times1=3$이다.

조건부 확률의 정의와 수학적 확률의 정의에 의하여 구하는 확률은 $p=\dfrac{9+6+3}{36}=\dfrac{1}{2}$이다.

29

[풀이1]

점 P의 좌표를 $P(x, y, z)$로 두자.

성분으로 주어진 벡터의 내적을 하면

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}=(0, 0, 2)\cdot(x, y, z)=2z=0$

에서 $z=0$이므로 $P(x, y, 0)$이다.

즉, 점 P는 xy평면 위의 점이다.

성분으로 주어진 벡터의 크기를 구하는 공식에 의하여

$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{x^2+y^2+0^2}\le 4$ 정리하면 $x^2+y^2\le 4^2$

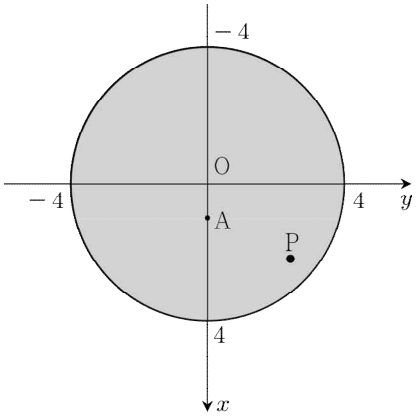
xy평면에서 점 P는 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 4인 원의 둘레 및 내부에 있다.

이제 점 P의 좌표를

$P(r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$

(단, $0\le r\le 4$, $0\le\theta<2\pi$)

으로 두자.



점 Q의 좌표를 $Q(x, y, z)$로 두자.

성분으로 주어진 벡터의 크기를 구하는 공식에 의하여

$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{(x-r\cos\theta)^2+(y-r\sin\theta)^2+z^2}=1$

정리하면

$(x-r\cos\theta)^2+(y-r\sin\theta)^2+z^2=1$

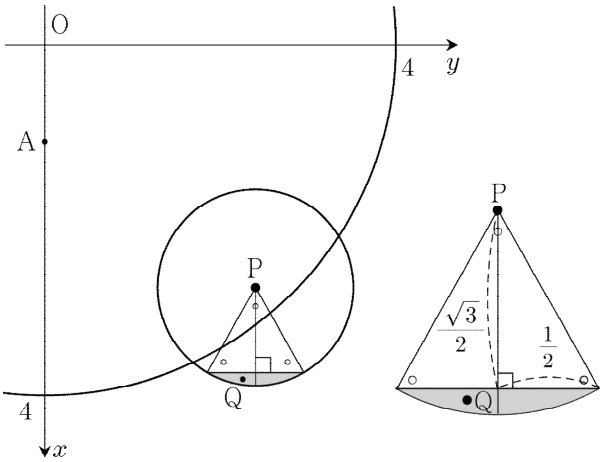
좌표공간에서 점 Q는 중심이 P이고 반지름의 길이가 1인 구 위에 있다.

성분으로 주어진 벡터의 내적을 하면

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OA}=(x-r\cos\theta, y-r\sin\theta, z)\cdot(1, 0, 0)$

$=x-4\cos\theta\ge\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 즉, $x\ge r\cos\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

즉, (점 Q의 x좌표)$\ge$(점 P의 x좌표)$+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

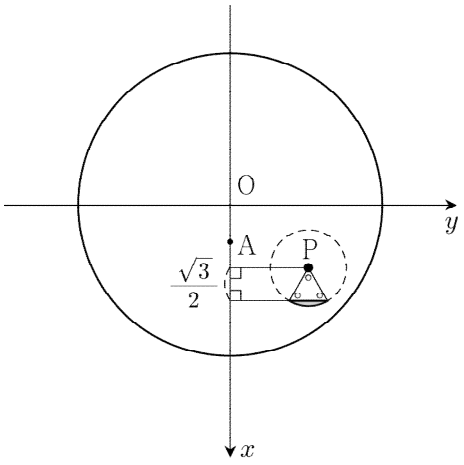


(단, $\bigcirc=60^\circ$이다.)

점 Q는 점 $P(r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 구를 평면 $x=r\cos\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$으로 잘랐을 때 생기는 두 도형 중에서 작은 도형…(*) 위에 있다. 이때, 단면에 생기는 원의 반지름의 길이는 피타고라스의 정리에 의하여 $\dfrac{1}{2}$이다.

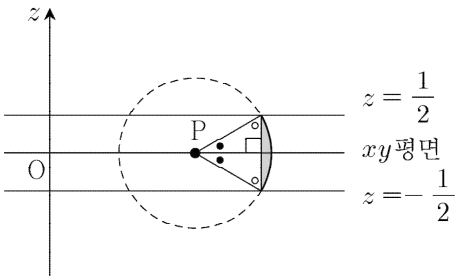
도형 (*)을 xy평면에 수직인 방향으로 바라보면 아래 그림과 같다.

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://atom.ac/books/3888



(단, ○=60° 이다.)

도형 (*)을 zx평면에 수직인 방향으로 바라보면 아래 그림과 같다.



(단, ○=60° . ●=30° 이다.)

위의 그림처럼 도형 (*)은 두 평면

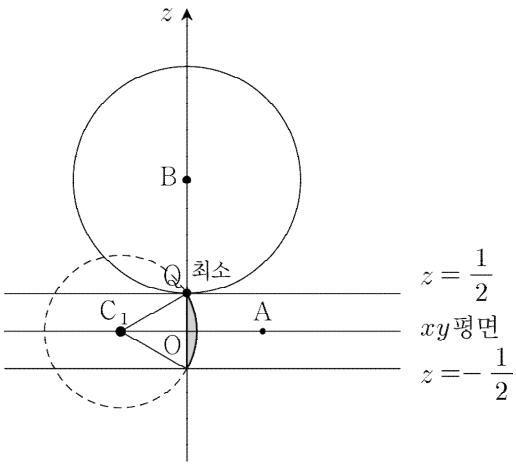
$z=\frac{1}{2}$, $z=-\frac{1}{2}$의 사이에 있으며,

두 평면과 각각 한 점에서 만난다.(접한다.)

$|\overrightarrow{BQ}|$=(정점 B와 점 Q 사이의 거리)이므로

중심이 정점 B인 구를 그려서

선분 BQ의 길이의 최댓값과 최솟값을 구하자.

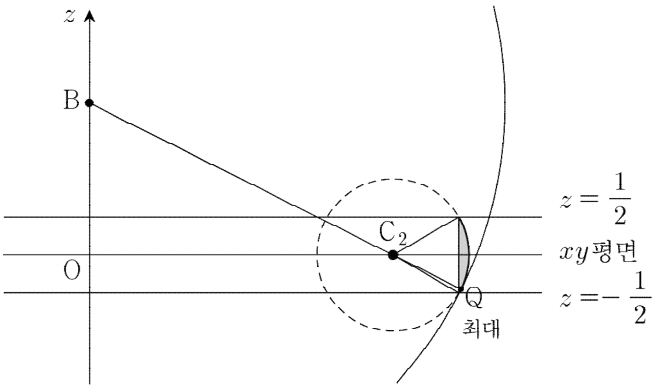


위의 그림처럼 점 Q가 원점에 오면 선분 BQ의 길이가 최소가 된다.

이때, 점 P를 점 C_1이라고 하면, $C_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ 0\right)$이다.

$(r=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \theta=\pi)$

m=(점 B와 평면 $z=\frac{1}{2}$ 사이의 거리)$=\frac{3}{2}$



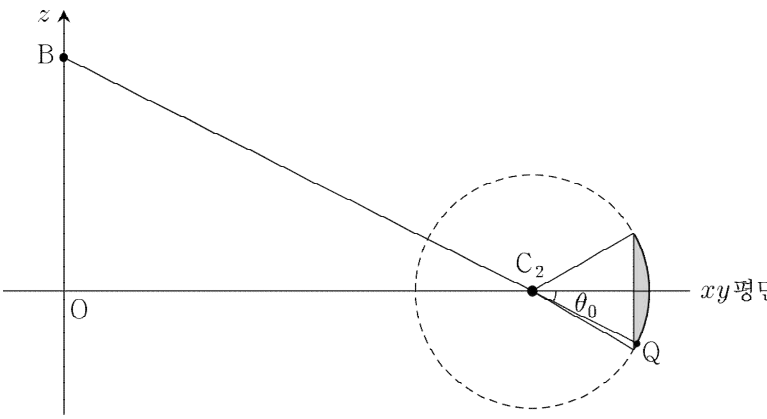
(단, 위의 그림은 zx평면에 수직인 방향으로 바라본 것이다.)

$\overline{BQ}\le\overline{BP}+\overline{PQ}=\overline{BP}+1=2\sqrt{5}+1=M$

(등호성립조건) 점 P가 원 $x^2+y^2=4^2$ 위에 있고 $(r=4)$, 세 점 B, P, Q가 한 직선 위에 있을 때 선분 BQ의 길이는 최대가 된다. 이때, 점 P를 점 C_2라고 하자.

선분 BQ의 길이가 최대일 때, 직선 BQ가 xy평면과 이루는 각의 크기를 θ_0라고 하자.

(단, $0\le\theta_0<\frac{\pi}{2}$)



$\tan\theta_0=\frac{\overline{OB}}{\overline{C_2O}}=\frac{1}{2}$, $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

에서 $\tan\theta_0<\tan\frac{\pi}{6}$이므로 $\theta_0<\frac{\pi}{6}$이다.

따라서 선분 BQ의 길이는 실제로 최댓값을 가질 수 있다.

그런데 원 $x^2+y^2=4^2$ 위의 모든 점 P에 대하여 세 점 B, P, Q가 한 직선 위에 있을 수 있는 것은 아니다. 이제 점 C_2의 자취를 구하자.

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://atom.ac/books/3888

점 C_2의 좌표를 $C_2(4\cos\theta,\ 4\sin\theta,\ 0)$로 두자.
(단, $r=4,\ 0\le\theta<2\pi$)
직선 BC_2의 방정식은

$$\frac{x}{4\cos\theta}=\frac{y}{4\sin\theta}=\frac{z-2}{-2}(=t)$$

점 Q의 좌표를 다음과 같이 두자.
$Q((4\cos\theta)t,\ (4\sin\theta)t,\ -2t+2)$
(단, 점 Q의 z좌표는 음수이므로 $t>1$이다.)
두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$$\overline{C_2Q}$$
$$=\sqrt{(4\cos\theta)^2(t-1)^2+(4\sin\theta)^2(t-1)^2+(2t-2)^2}$$
$$=2\sqrt{5}(t-1)=1 \text{ 풀면 } t=1+\frac{\sqrt{5}}{10}$$

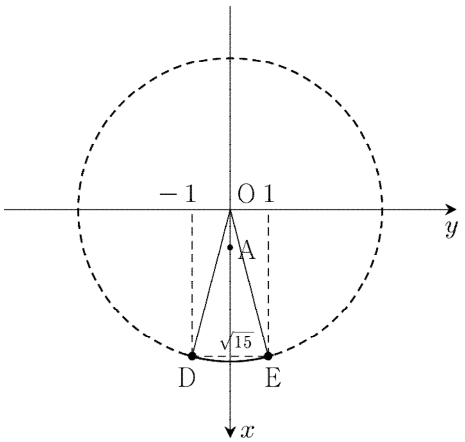
$$(\text{점 Q의 } x\text{좌표})=(4\cos\theta)t\ge 4\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이므로
$$(\text{점 } C_2\text{의 } x\text{좌표})=4\cos\theta\ge\sqrt{15}$$
$4\cos\theta=\sqrt{15}$, $4\sin\theta=-1$일 때,
점 C_2를 점 D라고 하면 $D(\sqrt{15},\ -1,\ 0)$이고,
점 Q의 좌표는

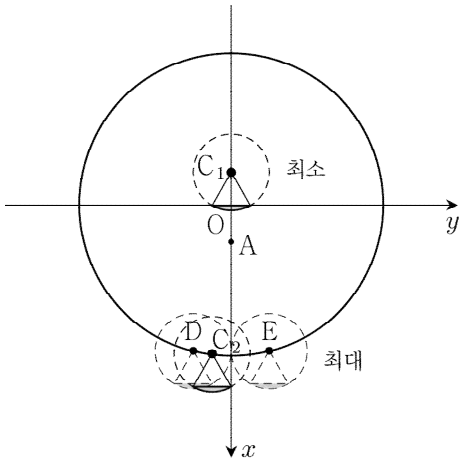
$$Q\left(\sqrt{15}+\frac{\sqrt{3}}{2},\ -1-\frac{\sqrt{5}}{10},\ -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

$4\cos\theta=\sqrt{15}$, $4\sin\theta=1$일 때,
점 C_2를 점 E라고 하면 $E(\sqrt{15},\ 1,\ 0)$이고,
점 Q의 좌표는

$$Q\left(\sqrt{15}+\frac{\sqrt{3}}{2},\ 1+\frac{\sqrt{5}}{10},\ -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$



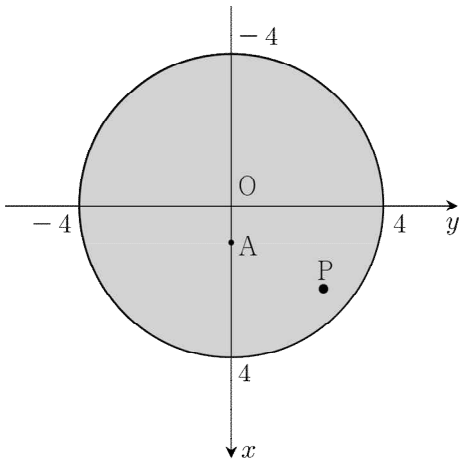
선분 BQ의 길이가 최솟값, 최댓값을 가질 때의 상황을 xy평면에 수직인 방향으로 바라보면 아래 그림과 같다.



$M+m=2\sqrt{5}+\frac{5}{2}$에서 $a=\frac{5}{2}$, $b=2$

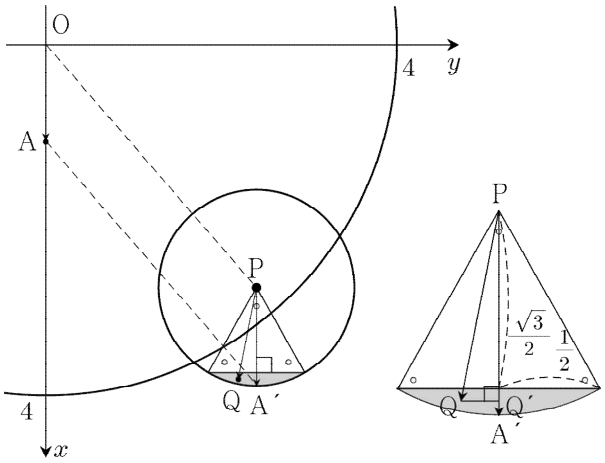
$\therefore\ 6(a+b)=27$
답 27

[풀이2]
$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}=0$이므로
점 P는 원점을 지나고 법선벡터가 $\overrightarrow{OB}$인 평면 위에 있다.
즉, 점 P는 xy평면 위의 점이다.
$|\overrightarrow{OP}|\le 4$이므로
xy평면에서 점 P는 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 4인 원의 둘레 및 내부에 있다.
이때, 점 P의 좌표를 $P(a,\ b,\ 0)$으로 두면
$a^2+b^2\le 4^2$
이 성립한다.



$|\overrightarrow{PQ}|=1$이므로
좌표공간에서 점 Q는 중심이 P이고 반지름의 길이가 1인 구 위에 있다.
$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{PA'}$이 되도록 점 A′을 잡자.
그리고 점 Q에서 직선 PA′에 내린 수선의 발을 Q′라고 하자.

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://atom.ac/books/3888



(단, ○=60° 이다.)

벡터의 내적의 정의에 의하여

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PA'}$

$=|\overrightarrow{PQ'}||\overrightarrow{PA'}|$

$=|\overrightarrow{PQ'}|\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$

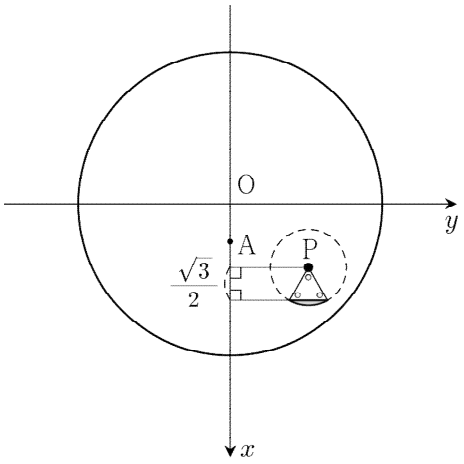
두 점 Q, Q′의 x좌표가 같으므로

(점 Q의 x좌표)−(점 P의 x좌표)$\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$

즉, (점 Q의 x좌표)$\geq a+\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

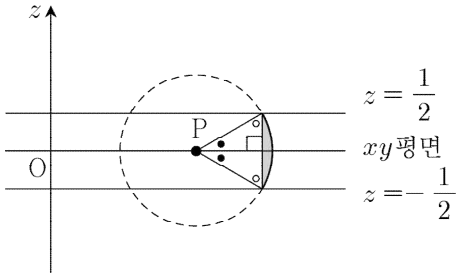
점 Q는 점 P$(a,\ b,\ 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 구를 평면 $x=a+\frac{\sqrt{3}}{2}$으로 잘랐을 때 생기는 두 도형 중에서 작은 도형…(*) 위에 있다. 이때, 단면에 생기는 원의 반지름의 길이는 피타고라스의 정리에 의하여 $\frac{1}{2}$이다.

도형 (*)을 xy평면에 수직인 방향으로 바라보면 아래 그림과 같다.



(단, ○=60° 이다.)

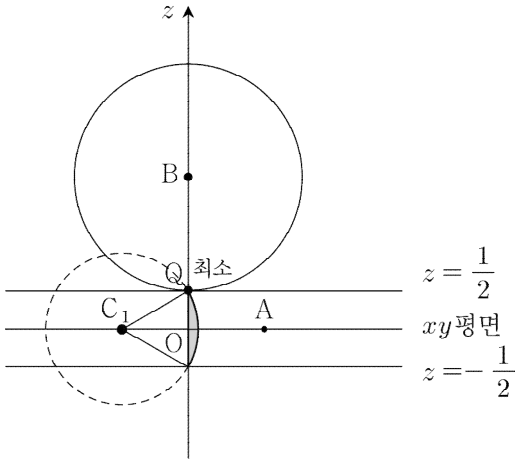
도형 (*)을 zx평면에 수직인 방향으로 바라보면 아래 그림과 같다.



(단, ○=60° , ●=30° 이다.)

위의 그림처럼 도형 (*)은 두 평면 $z=\frac{1}{2}$, $z=-\frac{1}{2}$의 사이에 있으며, 두 평면과 각각 한 점에서 만난다.(접한다.)

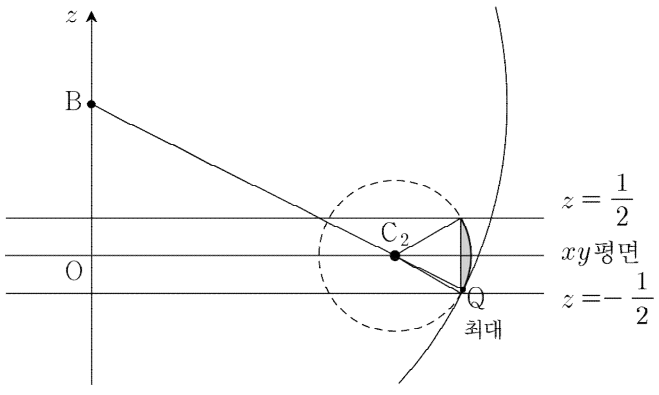
$|\overrightarrow{BQ}|$=(정점 B와 점 Q 사이의 거리)이므로 중심이 정점 B인 구를 그려서 선분 BQ의 길이의 최댓값과 최솟값을 구하자.



위의 그림처럼 점 Q가 원점에 오면 선분 BQ의 길이가 최소가 된다.

이때, 점 P를 점 C_1이라고 하면, $C_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ 0\right)$이다.

m=(점 B와 평면 $z=\frac{1}{2}$ 사이의 거리)$=\frac{3}{2}$



(단, 위의 그림은 zx평면에 수직인 방향으로 바라본 것

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://atom.ac/books/3888

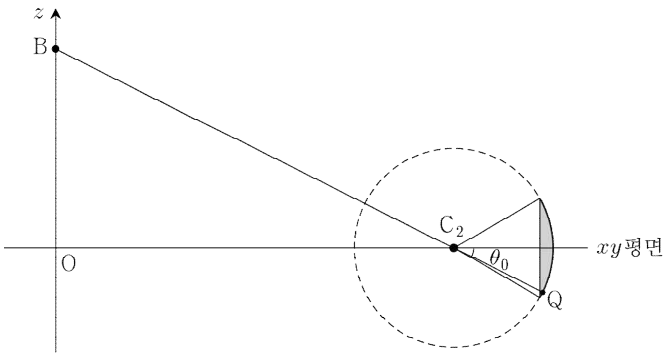
이다.)

$\overline{BQ} \le \overline{BP} + \overline{PQ} = \overline{BP} + 1 = 2\sqrt{5} + 1 = M$

(등호성립조건) 점 P가 원 $x^2+y^2=4^2$ 위에 있고, 세 점 B, P, Q가 한 직선 위에 있을 때 선분 BQ의 길이는 최대가 된다. 이때, 점 P를 점 C_2라고 하자.

선분 BQ의 길이가 최대일 때, 직선 BQ가 xy평면과 이루는 각의 크기를 θ_0라고 하자.

(단, $0 \le \theta_0 < \frac{\pi}{2}$)



$\tan\theta_0 = \frac{\overline{OB}}{\overline{C_2O}} = \frac{1}{2}$, $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

에서 $\tan\theta_0 < \tan\frac{\pi}{6}$이므로 $\theta_0 < \frac{\pi}{6}$이다.

따라서 선분 BQ의 길이는 실제로 최댓값을 가질 수 있다.

그런데 원 $x^2+y^2=4^2$ 위의 모든 점 P에 대하여 세 점 B, P, Q가 한 직선 위에 있을 수 있는 것은 아니다. 이제 점 C_2의 자취를 구하자.

점 C_2의 좌표를 $C_2(4\cos\theta,\ 4\sin\theta,\ 0)$로 두자.

(단, $0 \le \theta < 2\pi$)

직선 BC_2의 방정식은

$\frac{x}{4\cos\theta} = \frac{y}{4\sin\theta} = \frac{z-2}{-2} (= t)$

점 Q의 좌표를 다음과 같이 두자.

$Q((4\cos\theta)t,\ (4\sin\theta)t,\ -2t+2)$

(단, 점 Q의 z좌표는 음수이므로 $t>1$이다.)

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{C_2Q}$

$= \sqrt{(4\cos\theta)^2(t-1)^2 + (4\sin\theta)^2(t-1)^2 + (2t-2)^2}$

$= 2\sqrt{5}(t-1) = 1$ 풀면 $t = 1 + \frac{\sqrt{5}}{10}$

(점 Q의 x좌표) $= (4\cos\theta)t \ge 4\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}$

이므로

(점 C_2의 x좌표) $= 4\cos\theta \ge \sqrt{15}$

$4\cos\theta = \sqrt{15}$, $4\sin\theta = -1$일 때,

점 C_2를 점 D라고 하면 $D(\sqrt{15},\ -1,\ 0)$이고,

점 Q의 좌표는

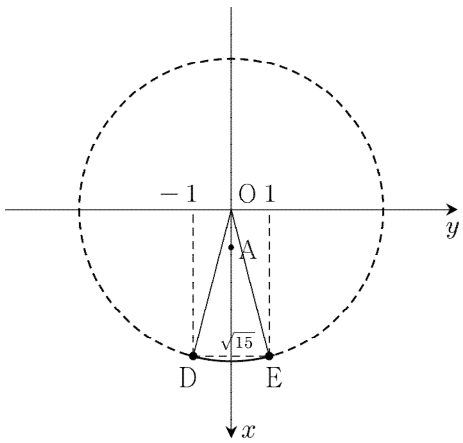
$Q\left(\sqrt{15} + \frac{\sqrt{3}}{2},\ -1 - \frac{\sqrt{5}}{10},\ -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

$4\cos\theta = \sqrt{15}$, $4\sin\theta = 1$일 때,

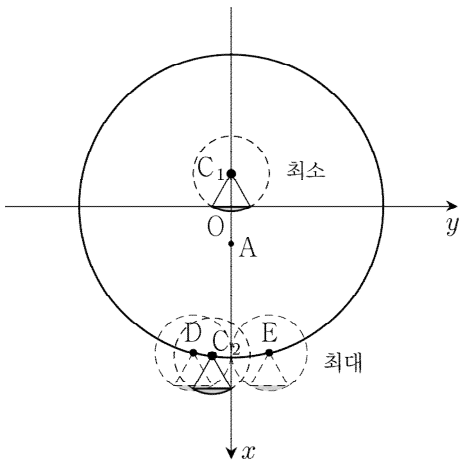
점 C_2를 점 E라고 하면 $E(\sqrt{15},\ 1,\ 0)$이고,

점 Q의 좌표는

$Q\left(\sqrt{15} + \frac{\sqrt{3}}{2},\ 1 + \frac{\sqrt{5}}{10},\ -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$



선분 BQ의 길이가 최솟값, 최댓값을 가질 때의 상황을 xy평면에 수직인 방향으로 바라보면 아래 그림과 같다.



$M+m = 2\sqrt{5} + \frac{5}{2}$에서 $a = \frac{5}{2}$, $b = 2$

$\therefore\ 6(a+b) = 27$

답 27

[풀이3]

$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$이므로

점 P는 원점을 지나고 법선벡터가 $\overrightarrow{OB}$인 평면 위에 있다.

즉, 점 P는 xy평면 위의 점이다.

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://atom.ac/books/3888

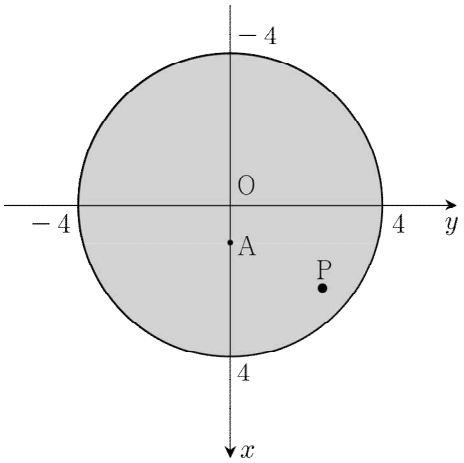
$|\overrightarrow{OP}| \le 4$이므로

xy평면에서 점 P는 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 4인 원의 둘레 및 내부에 있다.

이때, 점 P의 좌표를 $P(a, b, 0)$으로 두면

$a^2+b^2 \le 4^2$

이 성립한다.

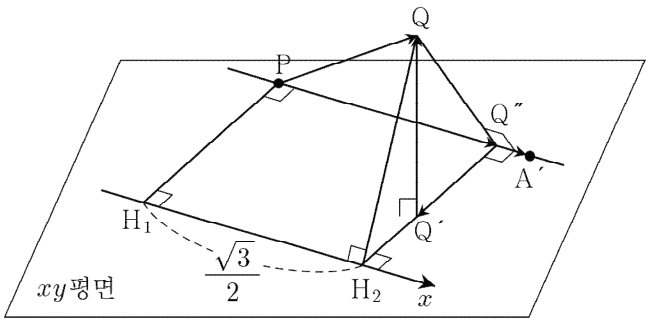


$|\overrightarrow{PQ}|=1$이므로

좌표공간에서 점 Q는 중심이 P이고 반지름의 길이가 1인 구 위에 있다.

$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{PA'}$이 되도록 점 A′을 잡자.

점 Q에서 xy평면 위에 내린 수선의 발을 Q′, 점 Q′에서 직선 PA′에 내린 수선의 발을 Q″이라고 하자. 그리고 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H_1, 직선 Q″Q′가 x축과 만나는 점을 H_2라고 하자.



평행선의 성질에 의하여

$\angle Q''PH_1=90^\circ$, $\overline{Q''Q'} \perp (x$축$)$

이므로 $\square PH_1H_2Q''$는 직사각형이다.

점 P에서 x축에 내린 수선의 발이 H_1이므로

(점 P의 x좌표)=(점 H_1의 x좌표)

$\overline{QQ'} \perp (xy$평면$)$, $\overline{Q'H_2} \perp (x$축$)$이므로

삼수선의 정리 ❶에 의하여

$\overline{QH_2} \perp (x$축$)$

세 점 Q, Q′, Q″에서 x축에 내린 수선의 발이 H_2로 일치하므로

(점 Q의 x좌표)=(점 Q′의 x좌표)

=(점 Q″의 x좌표)=(점 H_2의 x좌표)

$\overline{QQ'} \perp (xy$평면$)$, $\overline{Q'Q''} \perp \overline{PA'}$이므로

삼수선의 정리 ❶에 의하여

$\overline{QQ''} \perp \overline{PA'}$

벡터의 덧셈의 정의에 의하여

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PQ''}+\overrightarrow{Q''Q'}+\overrightarrow{Q'Q}$

벡터의 내적의 성질에 의하여

$\overrightarrow{PA'} \cdot \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA'} \cdot (\overrightarrow{PQ''}+\overrightarrow{Q''Q'}+\overrightarrow{Q'Q})$

$=\overrightarrow{PA'} \cdot \overrightarrow{PQ''}+0+0$

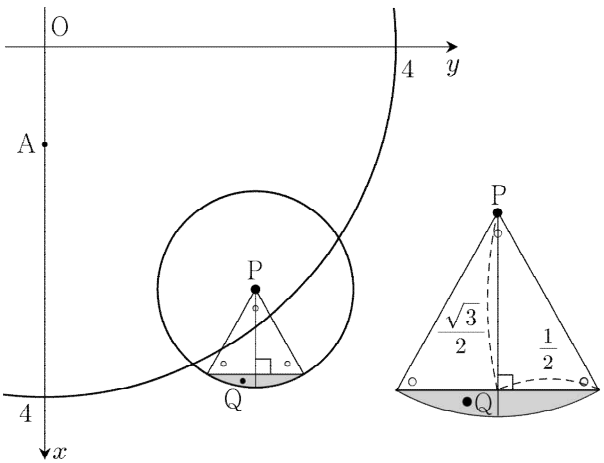
$(\because \overrightarrow{PA'} \perp \overrightarrow{Q''Q'}, \overrightarrow{PA'} \perp \overrightarrow{Q'Q})$

$=|\overrightarrow{PA'}||\overrightarrow{PQ''}|=|\overrightarrow{PQ''}| \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$

$(\because |\overrightarrow{PA'}|=1)$

즉, $\overline{H_1H_2} \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

(점 Q의 x좌표)≥(점 P의 x좌표)$+\frac{\sqrt{3}}{2}$

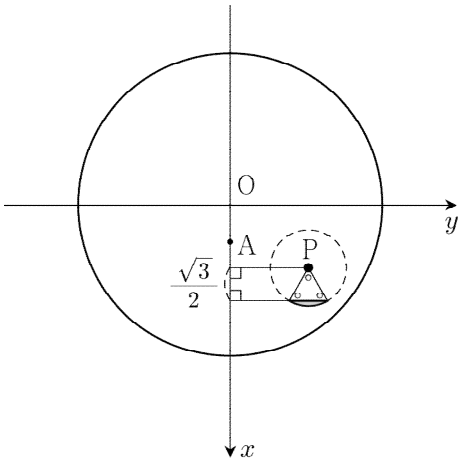


(단, ○=60° 이다.)

점 Q는 점 $P(a, b, 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 구를 평면 $x=a+\frac{\sqrt{3}}{2}$으로 잘랐을 때 생기는 두 도형 중에서 작은 도형…(*) 위에 있다. 이때, 단면에 생기는 원의 반지름의 길이는 피타고라스의 정리에 의하여 $\frac{1}{2}$이다.

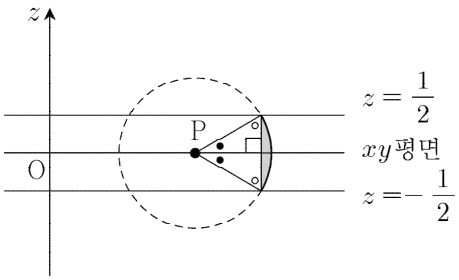
도형 (*)을 xy평면에 수직인 방향으로 바라보면 아래 그림과 같다.

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://atom.ac/books/3888



(단, ○=60° 이다.)

도형 (*)을 zx평면에 수직인 방향으로 바라보면 아래 그림과 같다.



(단, ○=60° . ●=30° 이다.)

위의 그림처럼 도형 (*)은 두 평면

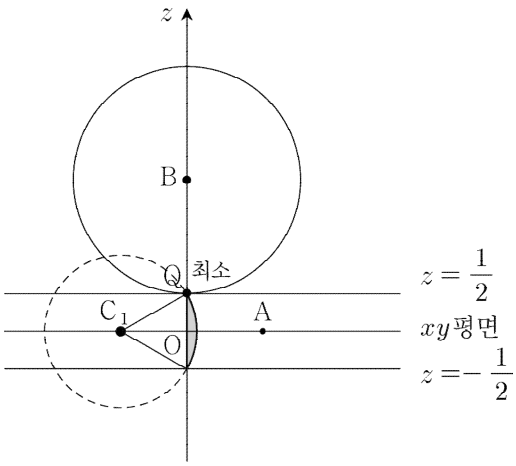
$z=\frac{1}{2}$, $z=-\frac{1}{2}$의 사이에 있으며,

두 평면과 각각 한 점에서 만난다.(접한다.)

$|\overrightarrow{BQ}|$=(정점 B와 점 Q 사이의 거리)이므로

중심이 정점 B인 구를 그려서

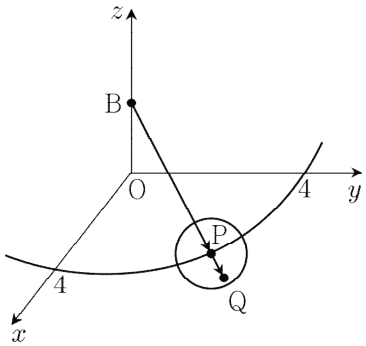
선분 BQ의 길이의 최댓값과 최솟값을 구하자.



위의 그림처럼 점 Q가 원점에 오면 선분 BQ의 길이가 최소가 된다.

이때, 점 P를 점 C_1이라고 하면, $C_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ 0\right)$이다.

m=(점 B와 평면 $z=\frac{1}{2}$ 사이의 거리)$=\frac{3}{2}$



벡터의 내적의 성질에 의하여

$|\overrightarrow{BQ}|^2=|\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}|^2$

$=4+|\overrightarrow{OP}|^2+1+0+2\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BP}$

($\because |\overrightarrow{BO}|=2$, $|\overrightarrow{PQ}|=1$, $\overrightarrow{BO}\perp\overrightarrow{OP}$,

$\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{BP}$)

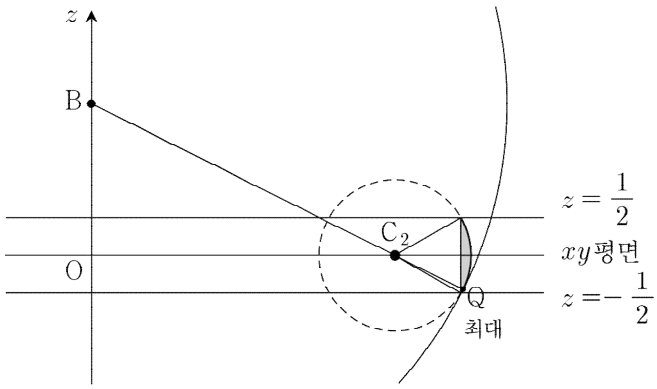
점 P가 원 $x^2+y^2=4^2$ 위에 있을 때,

$|\overrightarrow{OP}|$는 최댓값을 갖고,

두 벡터 $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{BP}$의 방향이 같을 때,

두 벡터의 내적 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BP}$는 최댓값을 갖는다.

요컨대 점 P가 원 $x^2+y^2=4^2$ 위에 있고, 세 점 B, P, Q가 한 직선 위에 있을 때, 선분 $\overline{BQ}$의 길이는 최대가 된다. 이때, 점 P를 점 C_2라고 하자.



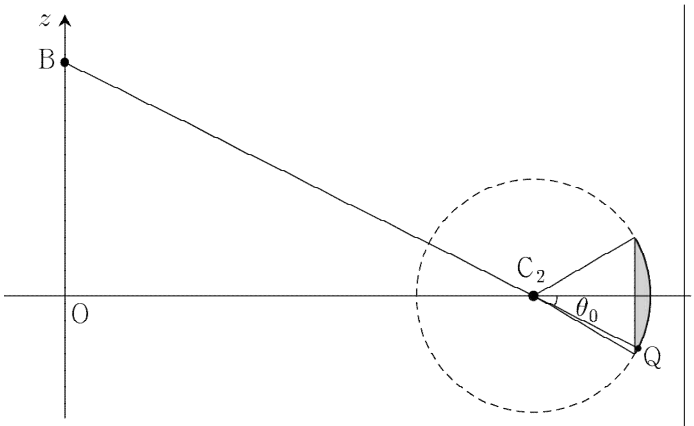
(단, 위의 그림은 zx평면에 수직인 방향으로 바라본 것이다.)

$\overline{BQ}\le\overline{BC_2}+\overline{C_2Q}=2\sqrt{5}+1=M$

선분 BQ의 길이가 최대일 때, 직선 BQ가 xy평면과 이루는 각의 크기를 θ_0라고 하자.

(단, $0\le\theta_0<\frac{\pi}{2}$)

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://atom.ac/books/3888



$\tan\theta_0=\dfrac{\overline{OB}}{\overline{C_2O}}=\dfrac{1}{2}$, $\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

에서 $\tan\theta_0<\tan\dfrac{\pi}{6}$이므로 $\theta_0<\dfrac{\pi}{6}$이다.

따라서 선분 BQ의 길이는 실제로 최댓값을 가질 수 있다.

그런데 원 $x^2+y^2=4^2$ 위의 모든 점 P에 대하여 세 점 B, P, Q가 한 직선 위에 있을 수 있는 것은 아니다. 이제 점 C_2의 자취를 구하자.

점 C_2의 좌표를 $C_2(4\cos\theta,\ 4\sin\theta,\ 0)$로 두자.

(단, $0\le\theta<2\pi$)

직선 BC_2의 방정식은

$\dfrac{x}{4\cos\theta}=\dfrac{y}{4\sin\theta}=\dfrac{z-2}{-2}(=t)$

점 Q의 좌표를 다음과 같이 두자.

$Q((4\cos\theta)t,\ (4\sin\theta)t,\ -2t+2)$

(단, 점 Q의 z좌표는 음수이므로 $t>1$이다.)

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{C_2Q}$

$=\sqrt{(4\cos\theta)^2(t-1)^2+(4\sin\theta)^2(t-1)^2+(2t-2)^2}$

$=2\sqrt{5}(t-1)=1$ 풀면 $t=1+\dfrac{\sqrt{5}}{10}$

(점 Q의 x좌표)$=(4\cos\theta)t\ge 4\cos\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

이므로

(점 C_2의 x좌표)$=4\cos\theta\ge\sqrt{15}$

$4\cos\theta=\sqrt{15}$, $4\sin\theta=-1$일 때,

점 C_2를 점 D라고 하면 $D(\sqrt{15},\ -1,\ 0)$이고,

점 Q의 좌표는

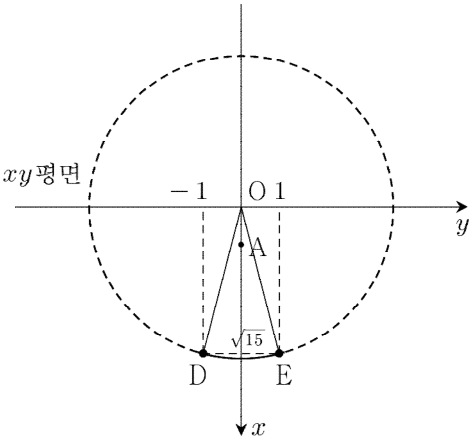
$Q\left(\sqrt{15}+\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -1-\dfrac{\sqrt{5}}{10},\ -\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$

$4\cos\theta=\sqrt{15}$, $4\sin\theta=1$일 때,

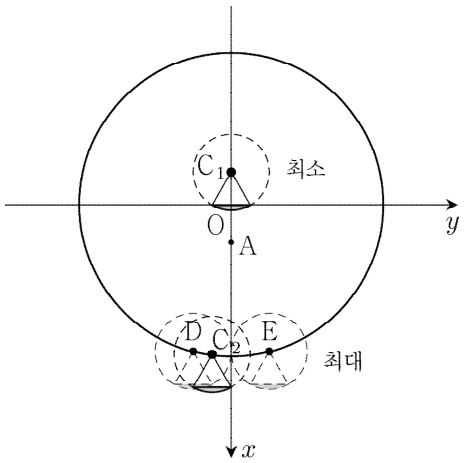
점 C_2를 점 E라고 하면 $E(\sqrt{15},\ 1,\ 0)$이고,

점 Q의 좌표는

$Q\left(\sqrt{15}+\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 1+\dfrac{\sqrt{5}}{10},\ -\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$



선분 BQ의 길이가 최솟값, 최댓값을 가질 때의 상황을 xy평면에 수직인 방향으로 바라보면 아래 그림과 같다.



$M+m=2\sqrt{5}+\dfrac{5}{2}$에서 $a=\dfrac{5}{2}$, $b=2$

$\therefore\ 6(a+b)=27$

답 27

30

[풀이1]

함수 $f(x-k)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-k$만큼 평행이동시키면 함수 $f(x)$의 그래프와 일치한다.

두 함수 $g(x)$, $h(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-k$만큼 평행이동시키면 각각 함수 $g(x+k)$, $h(x+k)$의 그래프와 일치한다. 이때, 다음과 같이 두자.

$g_0(x)=g(x+k)$, $h_0(x)=h(x+k)$

문제를 다시 쓰자.

[문제] 함수 $f(x)=\ln(e^x+1)+2e^x$에 대하여 이차함수 $g_0(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $h_0(x)=|g_0(x)-f(x)|$는 $x=0$에서 최솟값

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://atom.ac/books/3888

$g_0(0)$를 갖고, 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 최댓값 $2e+\ln\left(\frac{1+e}{\sqrt{2}}\right)$를 갖는다.

$(g_0)'\left(-\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오. (단, $\frac{5}{2}<e<3$이다.)

문제에서 주어진 조건에 의하여

$h_0(0)=|g_0(0)-f(0)|=g_0(0)$

이고, $f(0)=\ln 2+2$이다.

$g_0(0)>f(0)$이라고 가정하자.

$h_0(0)=g_0(0)-f(0)=g_0(0)$에서 $f(0)=0$

이는 가정에 모순이다. 따라서 $g_0(0)\le f(0)$이다.

$h_0(0)=f(0)-g_0(0)=g_0(0)$에서

$$g_0(0)=\frac{1}{2}f(0)=\frac{1}{2}\ln 2+1 \quad \cdots ㉠$$

이차함수 $g_0(x)$의 방정식을

$g_0(x)=ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$

$a>0$이라고 가정하자.

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-g_0(x))$$

$$=\lim_{x\to\infty}(\ln(e^x+1)+2e^x-ax^2-bx-c)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\ln(e^x+1)+e^x\left(2-\frac{ax^2+bx+c}{e^x}\right)\right\}=\infty$$

$$\left(\because \lim_{x\to\infty}\ln(e^x+1)=\infty,\ \lim_{x\to\infty}e^x=\infty,\right.$$

$$\left.\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{ax^2+bx+c}{e^x}\right)=2\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-g_0(x))$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left\{\ln(e^x+1)+2e^x+x^2\left(-a-\frac{b}{x}-\frac{c}{x^2}\right)\right\}$$

$$=-\infty$$

$$\left(\because \lim_{x\to-\infty}(\ln(e^x+1)+2e^x)=0,\right.$$

$$\left.\lim_{x\to-\infty}x^2\left(-a-\frac{b}{x}-\frac{c}{x^2}\right)=-\infty\right)$$

사이값 정리에 의하여 함수 $y=f(x)-g_0(x)$의 그래프는

x축과 하나 이상의 점에서 만난다.

이때, 한 교점의 x좌표를 α라고 하면

$f(\alpha)-g_0(\alpha)=0$에서

$h_0(x)=|g_0(x)-f(x)|\ge 0$이므로

(단, $x=\alpha$일 때, 등호가 성립한다.)

이는 가정에 모순이다. 따라서 $a<0$이다.

$a<0$일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g_0(x)$가 만난다고 가정하면 위와 마찬가지의 방법으로 가정에 모순임을 보일 수 있다. 따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g_0(x)$는 만나지 않는다.

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}+2e^x$$

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이므로

함수 $f(x)$는 증가함수이다.

함수 $f(x)$의 이계도함수는

$$f''(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}+2e^x$$

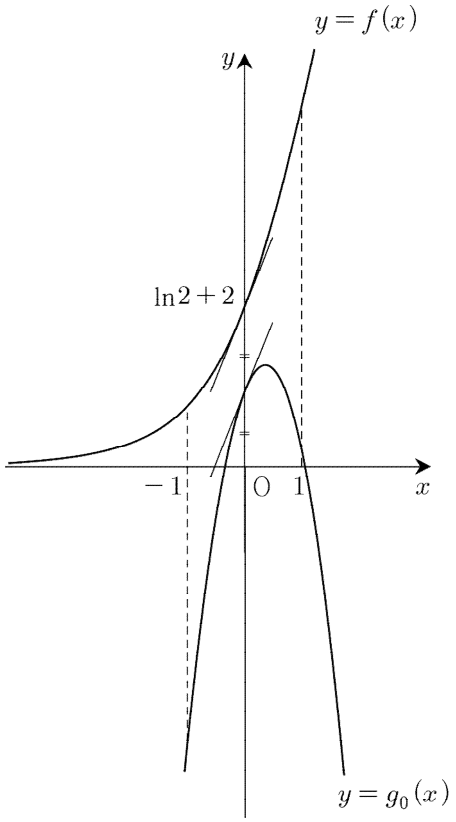
모든 실수 x에 대하여 $f''(x)>0$이므로

함수 $f(x)$는 아래로 볼록이다.

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 x축을 점근선으로 갖는다.

두 함수 $f(x)$, $g_0(x)$의 그래프는



위의 그림처럼 모든 실수 x에 대하여

$f(x)>g_0(x)$이므로

함수 $h(x)$는

$h(x)=f(x)-g_0(x)$

함수 $h(x)$의 도함수는

$$h'(x)=f'(x)-(g_0)'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}+2e^x-2ax-b$$

미분가능한 함수 $h(x)$가 $x=0$에서 극솟값을 가지므로

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://atom.ac/books/3888

$h'(0)=\frac{5}{2}-b=0$ 즉, $b=\frac{5}{2}$ …㉡

㉠, ㉡에 의하여 함수 $g_0(x)$의 방정식은

$g_0(x)=ax^2+\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}\ln 2+1\,(a<0)$

이제 두 수 $h(-1)$, $h(1)$의 대소를 비교하자.

$h(1)=\ln(e+1)+2e-a-\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\ln 2$

$h(-1)=\ln(e+1)+\frac{2}{e}-a+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2$

두 식을 변변히 빼면

$h(1)-h(-1)=2e-\frac{2}{e}-4>0$

($\because$ 양의 실수 전체의 집합에서 정의된

함수 $y=2x-\frac{2}{x}-4$에 대하여

$y'=2+\frac{2}{x^2}>0$이므로, 이 함수는 증가한다.

그런데 $x=\frac{5}{2}$에서의 함숫값이 $\frac{1}{5}$이므로

$2e-\frac{2}{e}-4>\frac{1}{5}$이다.)

즉, $h(1)>h(-1)$

이제 열린구간 $(-1,\ 1)$에서

함수 $h(x)$가 극댓값을 갖지 않음을 증명하자.

함수 $h(x)$의 이계도함수는

$h''(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}+2e^x-2a$

모든 실수 x에 대하여 $h''(x)>0$($\because a<0$)이므로

함수 $h(x)$의 그래프는 아래로 볼록이다.

(즉, 열린구간 $(-1,\ 1)$에서 함수 $h(x)$는 극댓값을 갖지 않는다.)

따라서 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서

함수 $h(x)$는 $x=1$일 때, 최댓값을 갖는다.

$h(1)=f(1)-g_0(1)$

$=\ln(e+1)+2e-a-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\ln 2-1$

$=2e+\ln\left(\frac{1+e}{\sqrt{2}}\right)$

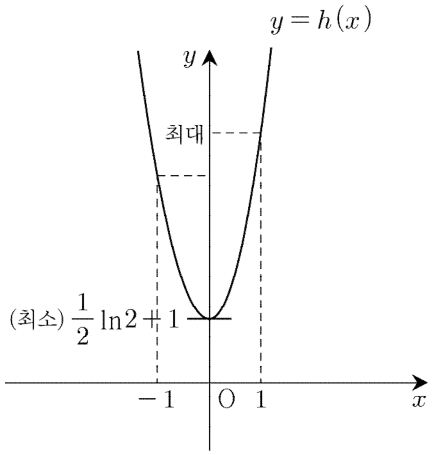
정리하면

$a=-\frac{7}{2}$

함수 $g_0(x)$의 방정식은

$g_0(x)=-\frac{7}{2}x^2+\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}\ln 2+1$

함수 $h(x)$의 그래프는



함수 $g_0(x)$의 도함수는

$(g_0)'(x)=-7x+\frac{5}{2}$

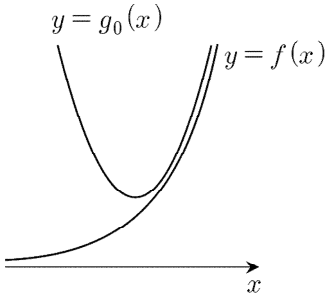
$\therefore\ (g_0)'\left(-\frac{1}{2}\right)=6$

답 6

[참고1]

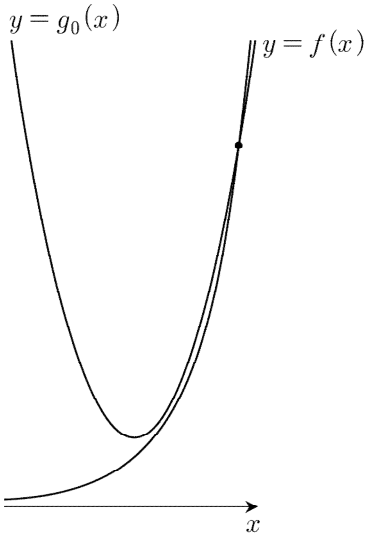
$a>0$일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g_0(x)$는 반드시 하나 이상의 점에서 만난다.

두 곡선을 아래 그림과 같이 그리면 서로 만나지 않는 것처럼 보인다.



하지만 아래 그림처럼 두 곡선은 서로 만날 수밖에 없다.

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://atom.ac/books/3888



[참고2]

$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$에 대한 증명은 다음과 같다.

(증명1)

우선 $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$임을 증명하자.

$f(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}$으로 두자.

함수 $f(x)$의 도함수와 이계도함수는 각각

$f'(x)=e^x-1-x$, $f''(x)=e^x-1$

$f'(0)=0$이고, $x>0$일 때, $f''(x)>0$이므로

$x>0$일 때, $f'(x)>0$이다.

$f(0)=0$이고, $x>0$일 때, $f'(x)>0$이므로

$x>0$일 때, $f(x)>0$이다.

열린구간 $(0,\ \infty)$에서

$$0<\frac{x}{e^x}<\frac{x}{1+x+\frac{x^2}{2}}$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}0=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x+\frac{x^2}{2}}=0$$

함수의 극한의 대소 관계에 대한 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$$

(증명2)

이제 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$임을 증명하자.

$g(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}$으로 두자.

함수 $g(x)$의 도함수와 이계도함수는 각각

$g'(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}(=f(x))$,

$g''(x)=e^x-1-x(=f'(x))$

$g'(0)=0$이고, $x>0$일 때, $g''(x)=f'(x)>0$이므로

$x>0$일 때, $g'(x)>0$이다.

$g(0)=0$이고, $x>0$일 때, $g'(x)=f(x)>0$이므로

$x>0$일 때, $g(x)>0$이다.

열린구간 $(0,\ \infty)$에서

$$0<\frac{x^2}{e^x}<\frac{x^2}{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}}$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}0=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}}=0$$

함수의 극한의 대소 관계에 대한 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$$

[참고3]

문제에서 $\frac{5}{2}<e<3$으로 주었으므로

$1<2e-4<2$

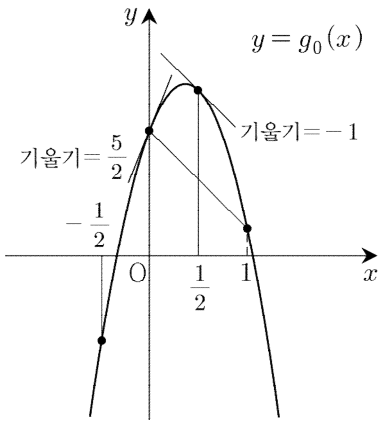
$-\frac{4}{5}<-\frac{2}{e}<-\frac{2}{3}$

위의 두 식을 변변히 더하면

$\frac{1}{5}<2e-\frac{2}{e}-4<\frac{4}{3}$

[참고4]

평균값의 정리를 이용하여 $(g_0)'\left(-\frac{1}{2}\right)$의 값을 구해도 좋다.

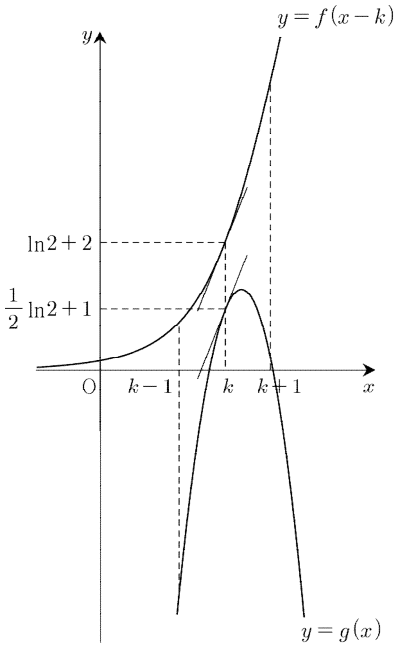


함수 $g_0(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고,

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://atom.ac/books/3888

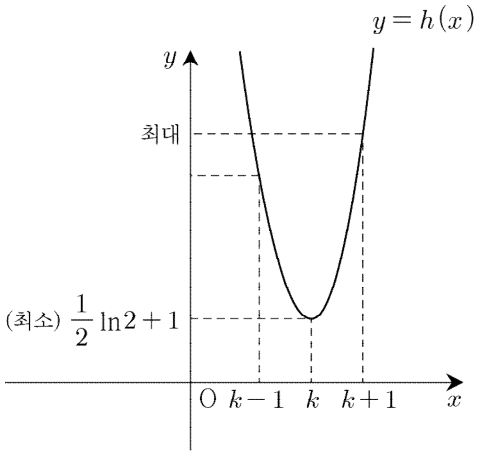
열린구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능하므로
평균값의 정리에 의하여
$$\frac{g_0(1)-g_0(0)}{1-0}=-1=(g_0)'(c)$$
인 c가 구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.
그런데 $g_0(x)$이 이차함수이므로
$$c=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}\text{이다.}$$
$(g_0)'(x)$는 일차함수이므로
$$\frac{(g_0)'\left(-\frac{1}{2}\right)+(g_0)'\left(\frac{1}{2}\right)}{2}=(g_0)'(0)$$
값을 대입하면
$$\frac{(g_0)'\left(-\frac{1}{2}\right)-1}{2}=\frac{5}{2}$$
$$\therefore\ (g_0)'\left(-\frac{1}{2}\right)=6$$

[풀이2]
문제에서 주어진 조건에 의하여
$h(k)=|g(k)-f(0)|=g(k)$
이고, $f(0)=\ln 2+2$이다.
$g(k)>f(0)$이라고 가정하자.
$h(k)=g(k)-f(0)=g(k)$에서 $f(0)=0$
이는 가정에 모순이다. 따라서 $g(k)\le f(0)$이다.
$h(0)=f(0)-g(k)=g(k)$에서
$$g(k)=\frac{1}{2}f(0)=\frac{1}{2}\ln 2+1 \qquad \cdots ㉠$$
이차함수 $g(x)$의 방정식을
$g(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$
$a>0$이라고 가정하자.
$$\lim_{x\to\infty}(f(x-k)-g(x))$$
$$=\lim_{x\to\infty}(\ln(e^{x-k}+1)+2e^{x-k}-ax^2-bx-c)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\ln(e^{x-k}+1)+e^{x-k}\left(2-\frac{ax^2+bx+c}{e^{x-k}}\right)\right\}=\infty$$
$$\left(\because\ \lim_{x\to\infty}\ln(e^{x-k}+1)=\infty,\ \lim_{x\to\infty}e^{x-k}=\infty,\right.$$
$$\left.\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{ax^2+bx+c}{e^{x-k}}\right)=2\right)$$
$$\lim_{x\to-\infty}(f(x-k)-g(x))$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left\{\ln(e^{x-k}+1)+2e^{x-k}+x^2\left(-a-\frac{b}{x}-\frac{c}{x^2}\right)\right\}$$
$$=-\infty$$
$$\left(\because\ \lim_{x\to-\infty}(\ln(e^{x-k}+1)+2e^{x-k})=0,\right.$$
$$\left.\lim_{x\to-\infty}x^2\left(-a-\frac{b}{x}-\frac{c}{x^2}\right)=-\infty\right)$$
사이값 정리에 의하여 함수 $y=f(x-k)-g(x)$의 그래프는
x축과 하나 이상의 점에서 만난다.
이때, 한 교점의 x좌표를 α라고 하면
$f(\alpha-k)-g(\alpha)=0$에서
$h(x)=|g(x)-f(x-k)|\ge 0$이므로
(단, $x=\alpha$일 때, 등호가 성립한다.)
이는 가정에 모순이다. 따라서 $a<0$이다.
$a<0$일 때, 두 곡선 $y=f(x-k)$, $y=g(x)$가 만난다고 가정하면 위와 마찬가지의 방법으로 가정에 모순임을 보일 수 있다. 따라서 두 곡선 $y=f(x-k)$, $y=g(x)$는 만나지 않는다.
함수 $f(x-k)$의 도함수는
$$f'(x-k)=\frac{e^{x-k}}{e^{x-k}+1}+2e^{x-k}$$
모든 실수 x에 대하여 $f'(x-k)>0$이므로
함수 $f(x-k)$는 증가함수이다.
함수 $f(x-k)$의 이계도함수는
$$f''(x-k)=\frac{e^{x-k}}{(e^{x-k}+1)^2}+2e^{x-k}$$
모든 실수 x에 대하여 $f''(x-k)>0$이므로
함수 $f(x-k)$는 아래로 볼록이다.
$$\lim_{x\to-\infty}f(x-k)=0\text{이므로}$$
함수 $f(x-k)$의 그래프는 x축을 점근선으로 갖는다.
두 함수 $f(x-k)$, $g(x)$의 그래프는



이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://atom.ac/books/3888

위의 그림처럼 모든 실수 x에 대하여
$f(x-k)>g(x)$이므로
함수 $h(x)$는
$h(x)=f(x-k)-g(x)$
함수 $h(x)$의 도함수는
$h'(x)=f'(x-k)-g'(x)=$
$\frac{e^{x-k}}{e^{x-k}+1}+2e^{x-k}-2ax-b$
미분가능한 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 극솟값을 가지므로
$h'(k)=\frac{5}{2}-2ak-b=0$ 즉, $b=-2ak+\frac{5}{2}$ …㉡
㉠, ㉡에 의하여 함수 $g(x)$의 방정식은
$g(x)=ax^2+\left(\frac{5}{2}-2ak\right)x+ak^2-\frac{5}{2}k+\frac{1}{2}\ln 2+1$
$(a<0)$
이제 두 수 $h(k-1)$, $h(k+1)$의 대소를 비교하자.
$h(k+1)=f(1)-g(k+1)$
$=\ln(e+1)+2e-$
$\left\{a(k+1)^2+\left(\frac{5}{2}-2ak\right)(k+1)+ak^2-\frac{5}{2}k+\frac{1}{2}\ln 2+1\right\}$
$=\ln(e+1)+2e-a-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{7}{2}$
$h(k-1)=f(-1)-g(k-1)$
$=\ln(e+1)+\frac{2}{e}-1-$
$\left\{a(k-1)^2+\left(\frac{5}{2}-2ak\right)(k-1)+ak^2-\frac{5}{2}k+\frac{1}{2}\ln 2+1\right\}$
$=\ln(e+1)+\frac{2}{e}-a-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}$
두 식을 변변히 빼서 정리하면
$h(k+1)-h(k-1)=2e-\frac{2}{e}-4>0$
($\because$ 양의 실수 전체의 집합에서 정의된
함수 $y=2x-\frac{2}{x}-4$에 대하여
$y'=2+\frac{2}{x^2}>0$이므로, 이 함수는 증가한다.
그런데 $x=\frac{5}{2}$에서의 함숫값이 $\frac{1}{5}$이므로
$2e-\frac{2}{e}-4>\frac{1}{5}$이다.)
즉, $h(k+1)>h(k-1)$
이제 열린구간 $(k-1,\ k+1)$에서
함수 $h(x)$가 극댓값을 갖지 않음을 증명하자.
함수 $h(x)$의 이계도함수는
$h''(x)=\frac{e^{x-k}}{(e^{x-k}+1)^2}+2e^{x-k}-2a$
모든 실수 x에 대하여 $h''(x)>0$($\because a<0$)이므로
함수 $h(x)$의 그래프는 아래로 볼록이다.
(즉, 열린구간 $(k-1,\ k+1)$에서 함수 $h(x)$는 극댓값을 갖지 않는다.)
따라서 닫힌구간 $[k-1,\ k+1]$에서
함수 $h(x)$는 $x=k+1$일 때, 최댓값을 갖는다.
$h(k+1)=f(1)-g(k+1)$
$=\ln(e+1)+2e-a-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{7}{2}$
$=2e+\ln\left(\frac{1+e}{\sqrt{2}}\right)$
정리하면
$a=-\frac{7}{2}$
함수 $g(x)$의 방정식은
$g(x)=-\frac{7}{2}x^2+\left(\frac{5}{2}+7k\right)x+ak^2-\frac{5}{2}k+\frac{1}{2}\ln 2+1$
함수 $h(x)$의 그래프는



함수 $g(x)$의 도함수는
$g'(x)=-7x+\frac{5}{2}+7k$
$\therefore\ g'\left(k-\frac{1}{2}\right)=6$
답 6

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://atom.ac/books/3888