제 2 교시

수학 영역(나 형)

5지선다형

1. $3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}}$의 값은? [2점] 3

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = 3^1$

2. 두 집합

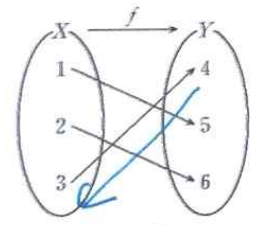
$A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1, 3, 5\}$

에 대하여 집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합은? [2점] 1

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

$A\cap B = \{1, 3\}$

3. 그림은 함수 $f: X \to Y$를 나타낸 것이다.



$f^{-1}(4)$의 값은? [2점] 3

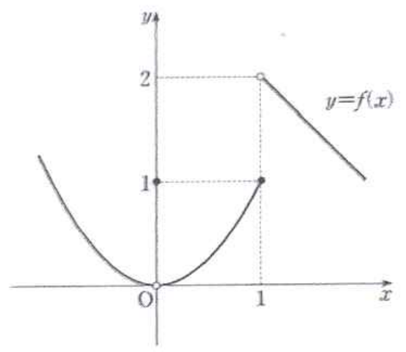
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. $\lim_{n\to\infty} \frac{4\times 3^{n+1}+1}{3^n}$의 값은? [3점] 5

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

$\lim_{n\to\infty} 4\times 3 + \left(\frac{1}{3}\right)^n = 12$

5. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은? [3점] ④

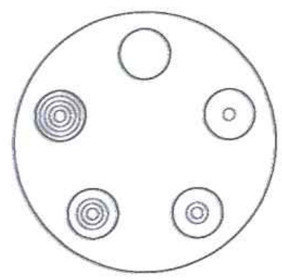
① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

$0+2$

6. 서로 다른 5개의 접시를 원 모양의 식탁에 일정한 간격을 두고 원형으로 놓는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 6 ② 12 ③ 18 ④ 24 ⑤ 30

④

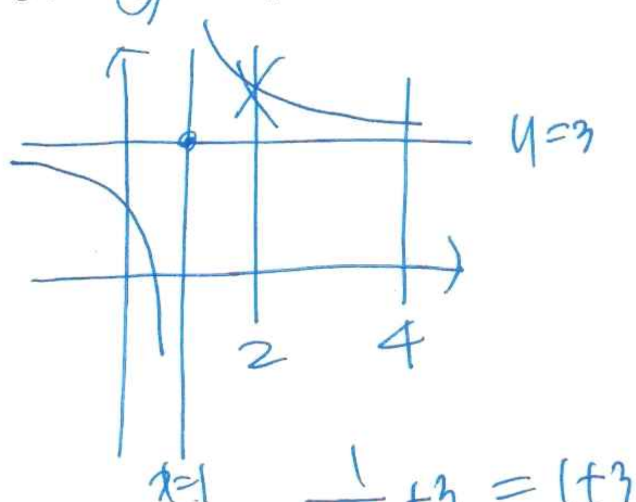


사람5명 앉히는 것과 같음

$(5-1)! = 4\times3\times2 = 24$

7. 닫힌 구간 [2, 4]에서 함수 $y=\frac{1}{x-1}+3$의 최댓값은? [3점] ②

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7



$\frac{1}{2-1}+3 = 1+3 = 4$

8. 함수 $f(x)=\int_1^x (t-2)(t-3)\,dt$ 에 대하여 $f'(4)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2

$f'(x)=(x-2)(x-3)$

$f'(4)=2\times1=2$

9. 실수 x에 대하여 두 조건 p, q가 다음과 같다.

$p: (x+2)(x-4)\neq 0$,
$q: -2\leq x\leq 4$

다음 중 참인 명제는? [3점]

① $p\to q$ ② $\sim p\to\sim q$ ③ $q\to\sim p$
④ $q\to p$ ⑤ $\sim p\to q$

$(x+2)\neq0$ 이고, $(x-4)\neq0$

p: $x\neq-2$ 이고, $x\neq4$ → 부정하니까 ($\neq$이 부정) 부정하는것이 쉬움.

$\sim p$: $x=-2$ 또는 $x=4$

q: $-2\leq x\leq 4$

$\sim p\to q$ (o) 답⑤

10. 14개의 공에 각각 검은색과 흰색 중 한 가지 색이 칠해져 있고, 자연수가 하나씩 적혀 있다. 각각의 공에 칠해져 있는 색과 적혀 있는 수에 따라 분류한 공의 개수는 다음과 같다.

(단위 : 개)

구분	검은색	흰색	합계
홀수	5	3	8
짝수	4	2	6
합계	9	5	14

조건

14개의 공 중에서 임의로 선택한 한 개의 공이 검은색일 때, 이 공에 적혀 있는 수가 짝수일 확률은? [3점]

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{5}{18}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{7}{18}$ ⑤ $\frac{4}{9}$

5

$P(\text{짝}|\text{검})=\dfrac{P(\text{검}\cap\text{짝})}{P(\text{검})}$

$=\dfrac{n(\text{검}\cap\text{짝})}{n(\text{검})}$

$=\dfrac{4}{9}$

11. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n+b_n=10$을 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{10}(a_k+2b_k)=160$일 때, $\sum_{k=1}^{10}b_k$의 값은? [3점]

① 60 ② 70 ③ 80 ④ 90 ⑤ 100

1

모르면 대입

$a_1+b_1=10$
$a_2+b_2=10$
$a_3+b_3=10$
⋮
$a_{10}+b_{10}=10$.

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+2b_k)=160$

a_1+2b_1
a_2+2b_2
a_3+2b_3
⋮
$a_{10}+2b_{10}$ $=160$

b_1+b_1
b_2+b_2
⋮
$b_{10}+b_{10}$

$10\times10+\sum_{k=1}^{10}b_k=160$ $\therefore \sum_{k=1}^{10}b_k=60$

12. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2$
(나) $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=3$

$f(2)$의 값은? [3점]

① 11 ② 14 ③ 17 ④ 20 ⑤ 23

2

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2$

f(x)는 최고차항 계수 2인 이차함수

$f(x)=2x^2+ax+b$

(나) $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=3$ (응골)

f(x)는 x를 인수로 가짐

$f(x)=2x^2+ax$. (상수항 0)
$=x(2x+a)$

$\lim_{x\to0}\frac{x(2x+a)}{x}=3$ $\therefore a=3$

$\therefore f(x)=2x^2+3x$. $f(2)=8+6=14$

답 ②

13. 두 실수 a, b가

$$ab=\log_3 5,\quad b-a=\log_2 5$$

를 만족시킬 때, $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$의 값은? [3점]

① $\log_5 2$ ② $\log_3 2$ ③ $\log_3 5$ ④ $\log_2 3$ ⑤ $\log_2 5$

4

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}=\frac{\log_2 5}{\log_3 5}=\frac{\frac{\log 5}{\log 2}}{\frac{\log 5}{\log 3}}=\frac{\log 3}{\log 2}=\log_2 3$$

14. 확률변수 X는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르고 다음 등식을 만족시킨다.

$$P(m\le X\le m+12)-P(X\le m-12)=0.3664$$

오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 σ의 값을 구한 것은? [4점]

z	$P(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

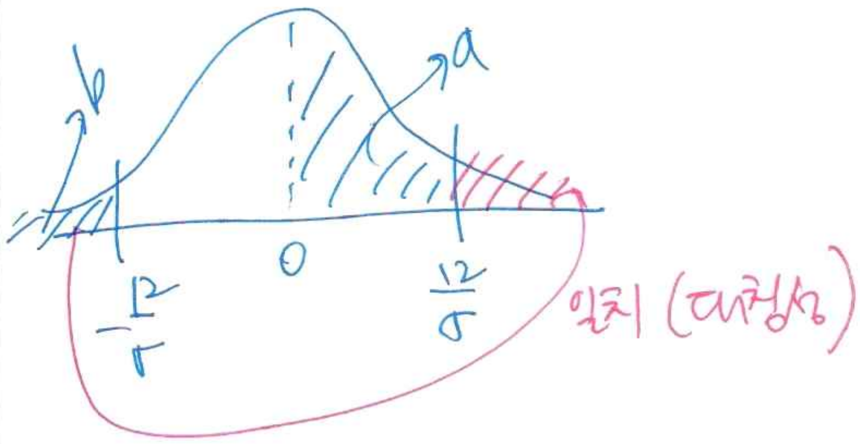
3

$X \sim N(m, \sigma^2)$

$P(m\le X\le m+12)-P(X\le m-12)=0.3664$

(표준화)

$P(0\le Z\le \frac{12}{\sigma})-P(Z\le \frac{-12}{\sigma})=0.3664$



$a-b=0.3664$
$a+b=0.5$

$2a=0.8664$ $a=0.4332$

$z=1.5$ $\frac{12}{\sigma}=1.5$ $\sigma=8$

15. A, A, A, B, B, C의 문자가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 양 끝 모두에 A가 적힌 카드가 나오게 나열될 확률은? [4점]

① $\frac{3}{20}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{7}{20}$

2

A ABBC A → 고정

$$P = \frac{\text{A양끝}}{\text{전체경우}} = \frac{\frac{4!}{2!}}{\frac{6!}{3!2!}} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$$

16. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는? [4점]

(가) $x+y+z=10$
(나) $0<y+z<10$

4

① 39 ② 44 ③ 49 ④ 54 ⑤ 59

가) $x+y+z=10$

나) $0<y+z<10$

(나)를 만족하려면 $x=0, 10$ 이 불가능

$x=1$ $y+z=9$ ${}_2H_9 = {}_{10}C_9$

$x=2$ $y+z=8$ ${}_2H_8 = {}_9C_8$

$x=3$ $y+z=7$ ${}_2H_7 = {}_8C_7$

⋮

$x=9$ $y+z=1$ ${}_2H_1 = {}_2C_1$

${}_2C_1 + {}_3C_2 + \cdots + {}_8C_7 + {}_9C_8 + {}_{10}C_9$

$= 2+3+4+\cdots+8+9+10$

1~10까지 합 $\frac{10 \cdot 11}{2} = 55$

$55-1=54$

17. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여

$x<0$일 때, $f(x)+g(x)=x^2+4$

$x>0$일 때, $f(x)-g(x)=x^2+2x+8$

이다. 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이고 $\lim_{x\to 0-} g(x)-\lim_{x\to 0+} g(x)=6$일 때, $f(0)$의 값은? [4점]

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

5

$f(x)$가 $x=0$에서 연속 $f(0)=f(0^-)=f(0^+)$

$x<0$ $f(x)+g(x)=x^2+4$

① $f(0^-)+g(0^-)=4$

$x>0$ $f(x)-g(x)=x^2+2x+8$

② $f(0^+)-g(0^+)=8$

①-② 하면 $g(0^-)+g(0^+)=-4$

문제에서 $g(0^-)-g(0^+)=6$

$2g(0^-)=2$

$g(0^-)=1$ $g(0^+)=-5$

$g(0^+)=-5$ 대입하면

$f(0^+)=3$ 이가되

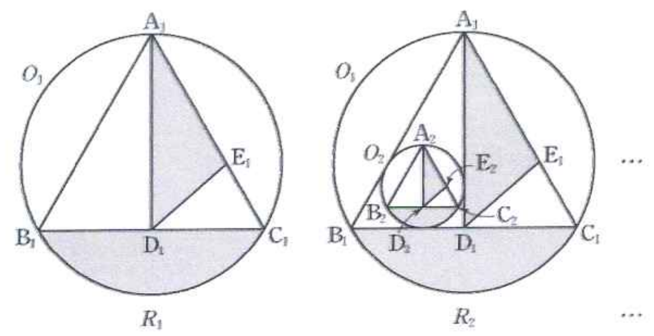
$f(0^+)=f(0)$ (연속) 이므로

$f(0)=3$

18. 그림과 같이 반지름의 길이가 2인 원 O_1에 내접하는 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 점 A_1에서 선분 B_1C_1에 내린 수선의 발을 D_1이라 하고, 선분 A_1C_1을 $2:1$로 내분하는 점을 E_1이라 하자. 점 A_1을 포함하지 않는 호 B_1C_1과 선분 B_1C_1로 둘러싸인 도형의 내부와 삼각형 $A_1D_1E_1$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 삼각형 $A_1B_1D_1$에 내접하는 원 O_2와 원 O_2에 내접하는 정삼각형 $A_2B_2C_2$를 그리고, 점 A_2에서 선분 B_2C_2에 내린 수선의 발을 D_2, 선분 A_2C_2를 $2:1$로 내분하는 점을 E_2라 하자. 점 A_2를 포함하지 않는 호 B_2C_2와 선분 B_2C_2로 둘러싸인 도형의 내부와 삼각형 $A_2D_2E_2$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

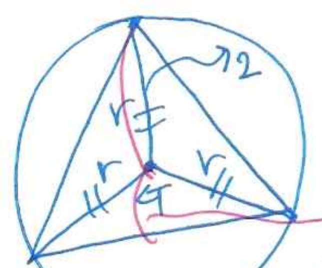


① $\frac{16(3\sqrt{3}-2)\pi}{69}$ ② $\frac{16(3\sqrt{3}-1)\pi}{65}$ ③ $\frac{32(3\sqrt{3}-2)\pi}{69}$

④ $\frac{32(3\sqrt{3}-1)\pi}{69}$ ⑤ $\frac{32(3\sqrt{3}-1)\pi}{65}$

①(초항구하기) 정삼각형이므로

내접원 중심 = 무게중심 = 외접원중심



2:1 내분이므로

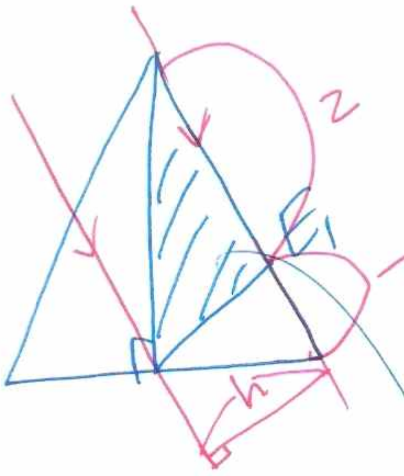
길이가 1,

△높이가 3.

$\frac{\sqrt{3}}{2}a=3$

$a=\frac{6}{\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$

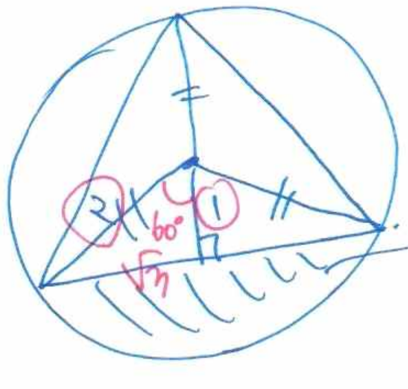
정삼각형 한변길이 $2\sqrt{3}$



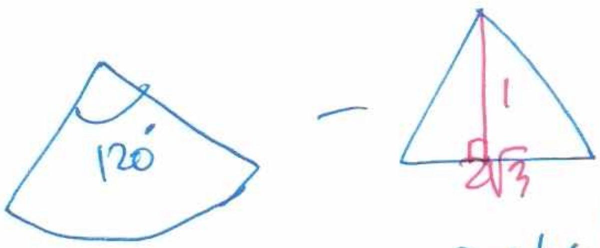
밑변의 길이의 비 = 넓이의 비 (높이가 같으니까)

삼각형넓이 $\frac{\sqrt3}{4}(2\sqrt3)^2 = \frac{\sqrt3}{4}\times 12 = 3\sqrt3$

→ 넓이 $3\sqrt3 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \sqrt3$.



→ 활꼴)

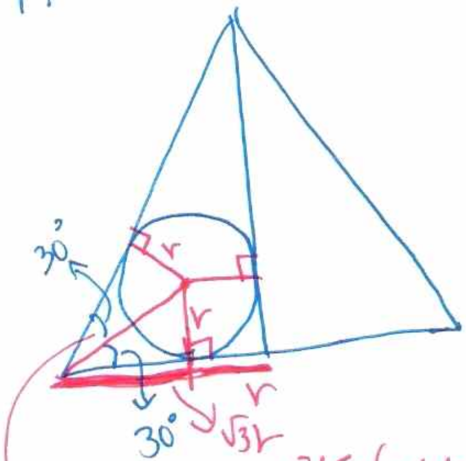


$4\pi \times \frac{1}{3} - 2\sqrt3 \times 1 \times \frac{1}{2}$

$\frac{4}{3}\pi - \sqrt3$

$S_1 = \sqrt3 + \frac{4}{3}\pi - \sqrt3 = \frac{4}{3}\pi$. //

② 공비. → 두번째 원 반지름 구하기



2개 삼각형 RHS 합동 (직각, 빗변공통, 반지름 r)

$\sqrt3 r + r = \sqrt3$

$r(1+\sqrt3) = \sqrt3$

$r = \frac{\sqrt3}{1+\sqrt3} = \frac{\sqrt3(\sqrt3-1)}{2} = \frac{3-\sqrt3}{2}$

→ 길이의 비

$2 : \frac{3-\sqrt3}{2}$

넓이비

$4 : \frac{(3-\sqrt3)^2}{4}$ $\quad 1 : \frac{(3-\sqrt3)^2}{16}$

공비

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{4}{3}\pi}{1-\frac{(3-\sqrt3)^2}{16}}$

계산하면

$\frac{32(3\sqrt3-2)\pi}{69}$ 답 ③

19. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 $a_1 = a_2 = 1$, $b_1 = k$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2} = (a_{n+1})^2 - (a_n)^2, \qquad b_{n+1} = a_n - b_n + n$$

을 만족시킨다. $b_{20} = 14$일 때, k의 값은? [4점]

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

1

항번호가 20인데
규칙안나오면 20번 다해야겠다
라고 생각해야 합니다.

$a_3 = a_2^2 - a_1^2 = 1 - 1 = 0$

$a_4 = a_3^2 - a_2^2 = 0 - 1 = -1$

$a_5 = a_4^2 - a_3^2 = 1 - 0 = 1$

$a_6 = a_5^2 - a_4^2 = 1 - (-1)^2 = 0$

$a_7 = a_6^2 - a_5^2 = 0 - 1 = -1$

규칙나옴 $1 \; 1 \; 0 \; -1 \; 1 \; 0 \; -1 \; 1$
$a_1 \; a_2 \; a_3 \; a_4 \; a_5 \; a_6 \; a_7 \; a_8$

3개씩반복됨 → a_n이 규칙이 있으니까 a_n+n도 규칙이 생겨버림

3개씩 반복

→ $-k, k, -k, k$ 반복

$b_2 = a_1 - b_1 + 1 = 2 - k$

$b_3 = a_2 - b_2 + 2 = 3 - (2-k) = 1+k$

$b_4 = a_3 - b_3 + 3 = 3 - (1+k) = 2-k$

$b_5 = a_4 - b_4 + 4 = 3 - (2-k) = 1+k$

$b_6 = a_5 - b_5 + 5 = 6 - (1+k) = 5-k$

$b_7 = a_6 + 6 - b_6 = 6 - (5-k) = 1+k$

$b_8 = a_7 + 7 - b_7 = 6 - (1+k) = 5-k$

$b_9 = a_8 + 8 - b_8 = 9 - (5-k) = 4+k$

$b_{10} = 9 - 4 - k = 5-k$

$b_{11} = 9 - 5 + k = 4+k$

$b_{12} = 12 - 4 - k = 8-k$

$b_{13} = 12 - 8 + k = 4+k$

$b_{14} = 12 - 4 - k = 8-k$

$b_{15} = 15 - 8 + k = 7+k$

$b_{16} = 15 - 7 - k = 8-k$

$b_{17} = 15 - 8 + k = 7+k$

$b_{18} = 18 - 7 - k = 11-k$

$b_{19} = 18 - 11 + k = 7+k$

$b_{20} = 18 - 7 - k = 11-k$

$\therefore 11 - k = 14$

$k = -3$

20. 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = -x + t$의 교점의 개수를 $g(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(x) = x^3$이면 함수 $g(t)$는 상수함수이다.

ㄴ. 삼차함수 $f(x)$에 대하여, $g(1) = 2$이면 $g(t) = 3$인 t가 존재한다.

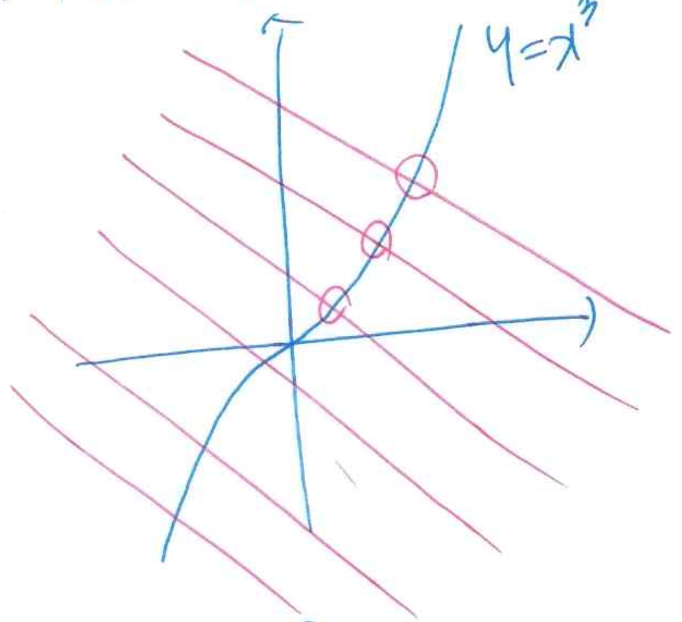
ㄷ. 함수 $g(t)$가 상수함수이면, 삼차함수 $f(x)$의 극값은 존재하지 않는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 삼차함수 $f(x)$.

실수 t. $y=f(x)$와 직선 $y=-x+t$의 교점의 개수 $g(t)$

ㄱ. $f(x)=x^3$ 이면 $g(t)$는 상수함수?



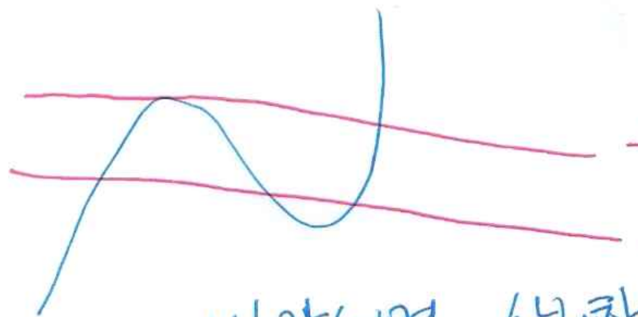
t가 어떻게 되건 항상 한점에서 만난다

$\therefore$ $g(t)=1$
상수함수 맞음.

ㄴ. 삼차함수 $f(x)$.

$g(1)=2$이면 $g(t)=3$인 t가 존재?

↳ $y=-x+1$



ㄴ. (O)

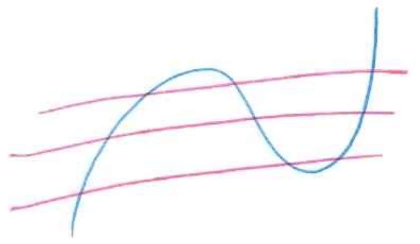
ㄷ. $g(t)$가 상수함수이면, 삼차함수 $f(x)$의 극값은 존재 X?

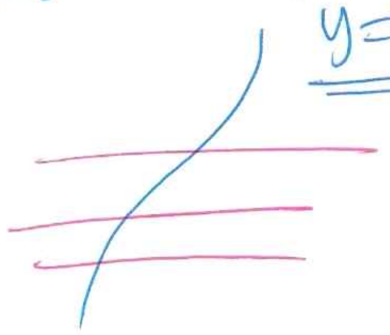
↳ 교점이 항상 1개. → 그래프로 판단이 조금 어려움 → 수식적접근

$f(x)=-x+t$

$\underbrace{f(x)+x}_{\text{삼차함수}}=\underbrace{t}_{\text{상수함수}}$ 의 교점이 항상 1개.

삼차함수 나올수 있는 개형





$y=f(x)+x$

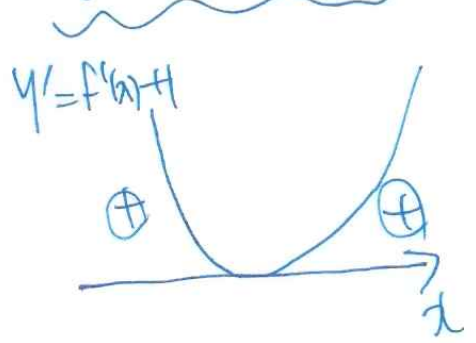
↑ 교점이 항상 1개인 형태 → 극값이 없다.

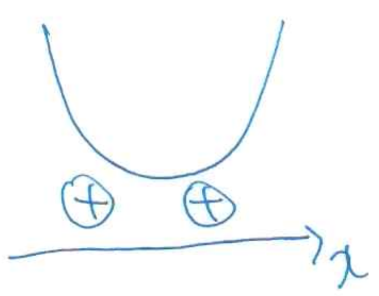
↓

이차함수 도함수로 접근해본다

$y=f(x)+x$는 극값을 갖지 않는다

$y'=f'(x)+1$ 는 중근이나 허근을 가진다





$f'(x)+1=x^2$ 으로 잡아본다.

$f'(x)=x^2-1$, $\boxed{f(x)=\frac{1}{3}x^3-x}$ → 이 그래프는 극값을 갖는다

∴ (ㄷ)은 극값을 갖는 삼차함수로 존재할수 있기 때문에 틀린보기.

답 ㄱ.ㄴ

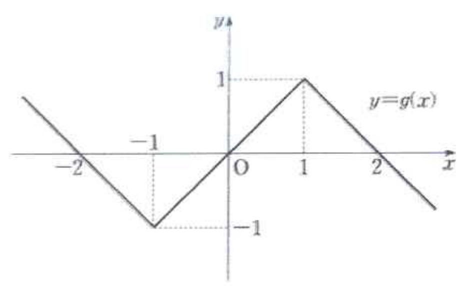
21. 실수 a, b, c와 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+a & (x<-1) \\ bx & (-1\le x<1) \\ x+c & (x\ge 1) \end{cases},$$

$$g(x)=|x+1|-|x-1|-x$$

에 대하여, 합성함수 $g\circ f$는 실수 전체의 집합에서 정의된 역함수를 갖는다. $a+b+2c$의 값은? [4점]

① 2　② 1　③ 0　④ -1　⑤ -2



단답형

22. ${}_7\mathrm{P}_3$의 값을 구하시오. [3점]

$7\times6\times5=210$

23. 함수 $f(x)=3x^2-2x$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

$f'(x)=6x-2$

$f'(1)=6-2=4$

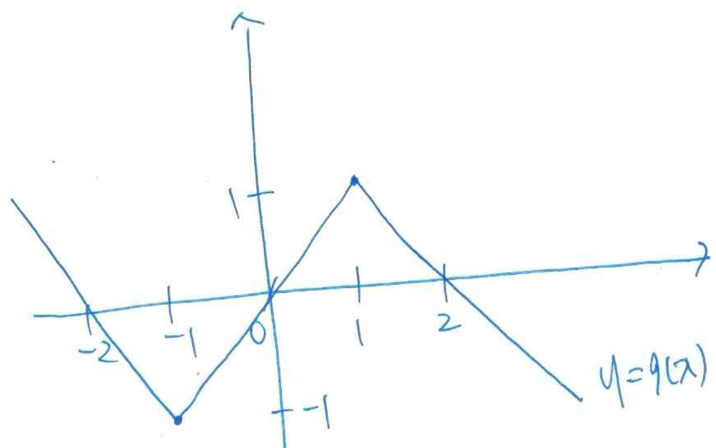
답) 4

$$f(x)=\begin{cases} x+a & (x<-1) \\ bx & (-1\le x<1) \\ x+c & (x\ge 1)\end{cases}$$

$g\circ f$ 실수전체 정의된 집합에서 정의된 역함수를 가진다. $a+b+2c=?$

→ 일대일 대응 ☆☆이 될수있는지 합성함수를 관찰해본다.

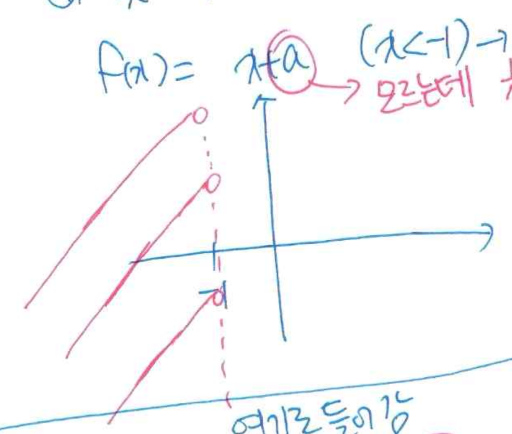
$g(f(x))$ → $f(x)$의 치역이 g의 정의역이다!!!! ☆



① $x<-1$ 에서 생각해보기

$f(x)=x+a$ $(x<-1)$ → 증가하는 일차함수.

→ 모르는데 치역이 <-1 인 부분은 반드시존재.



여기로 들어감

그래프 보고 식 쓰기

$$y=g(x)=\begin{cases} -(x+2)=-x-2 & (x<-1) \\ x & (-1\le x<1) \\ -(x-2)=-x+2 & (x\ge 1)\end{cases}$$

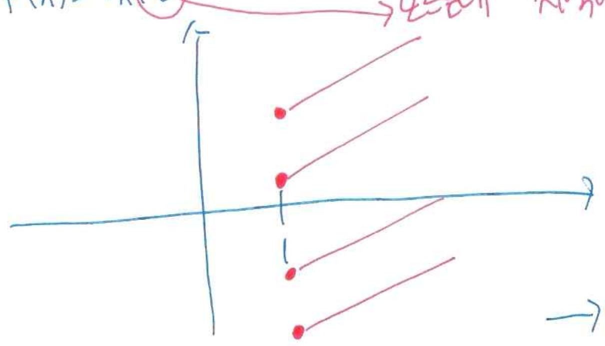
$-(x+a)-2$ → 감소하는 일차함수가 나온다.

→ 만약에 $x+a\ge -1$ (치역) 인 부분이생기면 $g(x)=x$ $(-1\le x<1)$ 로 들어가는데 $g(f(x))=x+a$ 가되고

감소→증가가 되어버리니 일대일대응 X ☆☆

② $x\ge 1$에서 생각해보기

$f(x)=x+c$ $(x\ge 1)$ → 모르는데 치역이 ≥ 1인 부분이 반드시 존재☆☆



$g(x)=-x+2$ $(x\ge 1)$ 로 들어간다.

$g(f(x))=-(x+c)+2=-x-c+2$ → 감소함수

→ 만약에 $x+c<1$ (치역) 인 부분이 생기면 $g(x)=x$ $(-1\le x<1)$

로 들어가게 되고 $g(f(x))=x+c$ 가 되는데

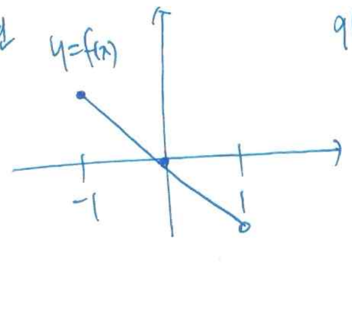
증가→감소하는 모양이 되니 일대일대응 X

③ $-1\le x<1$ 에서 생각해보기

$f(x)=bx$ $(-1\le x<1)$ → ⊖인지 ⊕인지 모름, but bx의 치역은 $-1\le\ <1$ 이 맞음. (∵ bx의 치역이 1보다 크거나 같아지면 합성시 기울기가 $+\to-$ 이거나 $-\to+$ 으로 되어 일대일대응X)

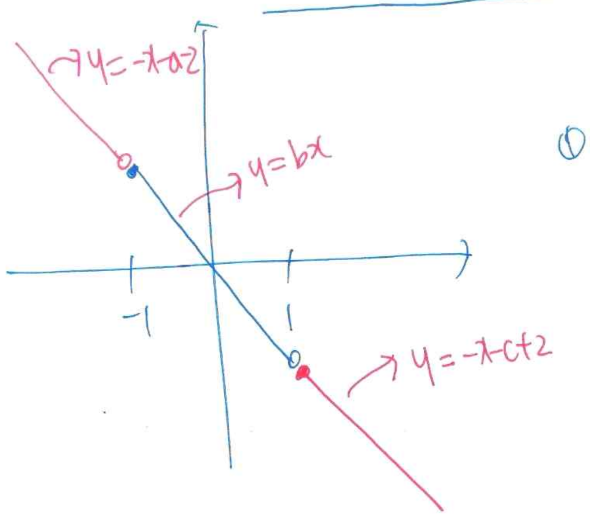
$g(f(x))=bx$ $(-1\le x<1)$

① b가 음수면



9(f(x)) 함수는

실수전체의 집합에서 일대일 대응이 되려면



x=-1, 1에서 연속.

① x=-1에서

$1-a-2=-b$

$-1=a-b$

② x=1에서

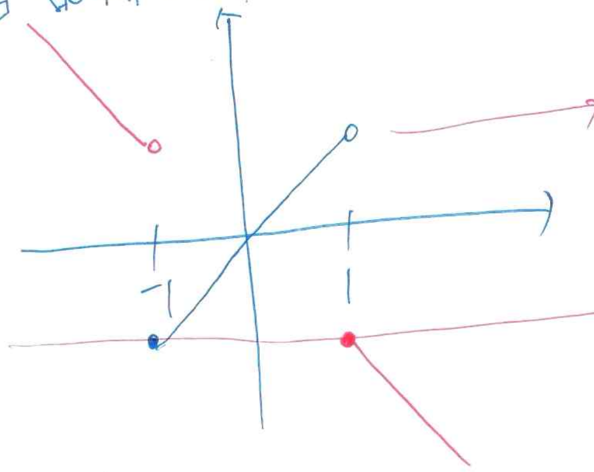
$b=+1-c$

$\therefore a+b+2c=-1+2b+2c$

$=-1+2(1)=1$

답) ②

② 만약에 b가 양수면??



y의 정의가 안됨

y=-1에서는 x가 2개걸림.

∴ 일대일대응 X

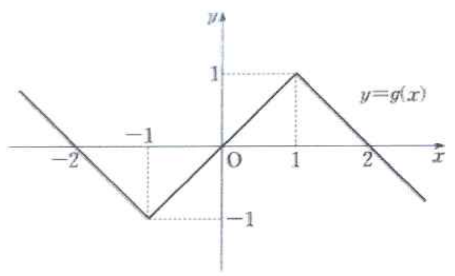
21. 실수 a, b, c와 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+a & (x<-1) \\ bx & (-1\le x<1) \\ x+c & (x\ge 1) \end{cases},$$

$$g(x)=|x+1|-|x-1|-x$$

에 대하여, 합성함수 $g\circ f$는 실수 전체의 집합에서 정의된 역함수를 갖는다. $a+b+2c$의 값은? [4점]

① 2 ② 1 ③ 0 ④ −1 ⑤ −2



단답형

22. ${}_7\mathrm{P}_3$의 값을 구하시오. [3점]

$7\times6\times5=210$

23. 함수 $f(x)=3x^2-2x$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

$f'(x)=6x-2$

$f'(1)=6-2=4$

답) 4

24. 함수 $y=2\sqrt{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동시킨 그래프가 점 (1, 5)를 지난다. 상수 k의 값을 구하시오. [3점]

$y = 2\sqrt{x} + k$

(1,5) 대입

$5 = 2 + k$ $\boxed{k=3}$

25. 첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$이

$$a_2 + a_4 = 24$$

를 만족시킬 때, a_5의 값을 구하시오. [3점]

$a+d+a+3d=24$

$2a+4d=24$

→ a와 d 같으니까

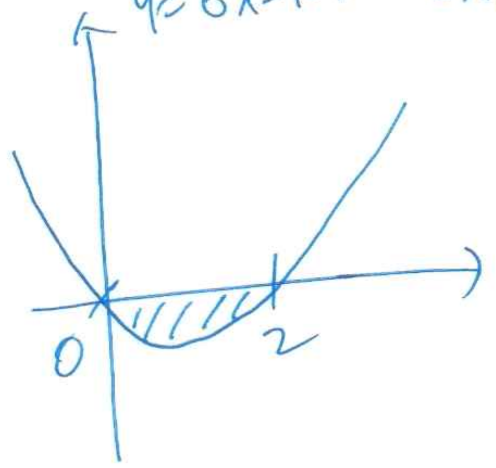
$6a=24$ $a=4$.

$a_5 = a+4d = 5a = 20$

답) 20

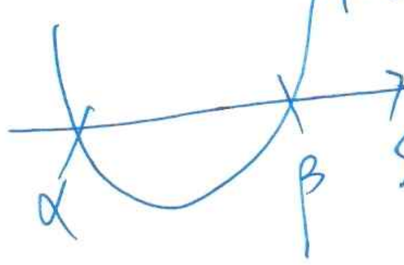
26. 곡선 $y=6x^2-12x$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [4점]

$y=6x^2-12x = 6x(x-2)$



이차함수와 x축 둘러싸인 넓이 공식

$y=ax^2+bx+c$



$S = \dfrac{|a|(\beta-\alpha)^3}{6}$

$S = \dfrac{6(2-0)^3}{6} = 8$.

답) 8.

27. 대중교통을 이용하여 출근하는 어느 지역 직장인의 월 교통비는 평균이 8이고 표준편차가 1.2인 정규분포를 따른다고 한다. 대중교통을 이용하여 출근하는 이 지역 직장인 중 임의추출한 n명의 월 교통비의 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때,

$$P(7.76 \le \overline{X} \le 8.24) \ge 0.6826$$

이 되기 위한 n의 최솟값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. (단, 교통비의 단위는 만 원이다.) [4점]

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

$X \sim N(8, 1.2^2)$

$\overline{X} \sim N\left(8, \left(\frac{1.2}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$

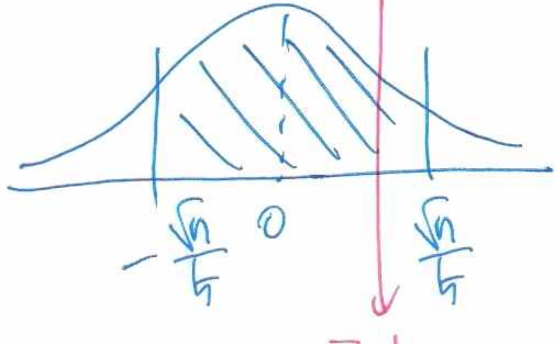
$P(7.76 \le \overline{X} \le 8.24) \ge 0.6826$

표준화

$P\left(\frac{7.76-8}{\frac{1.2}{\sqrt{n}}} \le Z \le \frac{8.24-8}{\frac{1.2}{\sqrt{n}}}\right) \ge 0.6826$

$= P\left(-\frac{\sqrt{n}}{5} \le Z \le \frac{\sqrt{n}}{5}\right) \ge 0.6826$

만나면 0.3413이 나오는 Z값이 1이다



$1 \le \frac{\sqrt{n}}{5}$

$5 \le \sqrt{n}$

$25 \le n$

(답) 25

28. 두 이산확률변수 X와 Y가 가지는 값이 각각 1부터 5까지의 자연수이고

$$P(Y=k) = \frac{1}{2}P(X=k) + \frac{1}{10} \quad (k=1, 2, 3, 4, 5)$$ 대입

이다. $E(X)=4$일 때, $E(Y)=a$이다. $8a$의 값을 구하시오. [4점]

구하기위해 X, P 확률분포표를 그린다

X	1	2	3	4	5
P	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5

$E(X) = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + 5p_5 = 4$

Y	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{2}p_1+\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}p_2+\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}p_3+\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}p_4+\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}p_5+\frac{1}{10}$

$E(Y) = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{10} + p_2 + \frac{2}{10} + \frac{3}{2}p_3 + \frac{3}{10}$
$+ \frac{4}{2}p_4 + \frac{4}{10} + \frac{5}{2}p_5 + \frac{5}{10}$

$= \frac{1}{2}(p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + 5p_5) + \frac{15}{10}$ $\to = E(X)$

$= \frac{4}{2} + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$

$8a = 8 \times \frac{7}{2} = 28$

(답) 28

29. 두 삼차함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$$

을 만족시킨다. $g(x)$의 최고차항의 계수가 3이고, $g(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가질 때, $f'(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

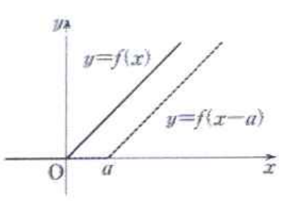
30. 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가

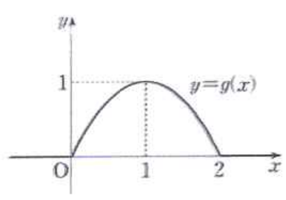
$$f(x)=\begin{cases}0 & (x\le 0)\\ x & (x>0)\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}x(2-x) & (|x-1|\le 1)\\ 0 & (|x-1|>1)\end{cases}$$

이다. 양의 실수 k, a, b $(a<b<2)$에 대하여, 함수 $h(x)$를

$$h(x)=k\{f(x)-f(x-a)-f(x-b)+f(x-2)\}$$

라 정의하자. 모든 실수 x에 대하여 $0\le h(x)\le g(x)$일 때, $\int_0^2\{g(x)-h(x)\}dx$의 값이 최소가 되게 하는 k, a, b에 대하여 $60(k+a+b)$의 값을 구하시오. [4점]





* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

29. $f(x)g(x) = (x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$

$g(x)$ 최고차항 계수 3.

$g(x)$ $x=2$ 극대. $g(x)$는 3차함수 $g'(2)=0$.

$$f'(x)g(x)+f(x)g'(x) = 2(x-1)(x-2)^2(x-3)^2 + 2(x-1)^2(x-2)(x-3)^2 + 2(x-1)^2(x-2)^2(x-3)$$

$\rightarrow$ $f'(2)g(2)+f(2)g'(2)=0$

① $f'(2)g(2)=0$ $\longrightarrow$ $f'(2)$, $g(2)$ 둘다 0일수도있고 둘중하나 0일수도

함숫값 묻기 ② $f(2)g(2)=0$ $\longrightarrow$ 둘다 0 또는 둘중 하나 0.

복잡하니까 반대로 생각.

∵ $g(2)$가 0이 아니라고 가정!!

$g(2)\neq 0$ 이면 $f'(2)=0$ 이고, $f(2)$도 0이다. $\xrightarrow{x=2\text{에서 접한다}}$ $f(x)=\frac{1}{3}(x-2)^2(x-\alpha)$

$g(x)=3(x-1)^2(x-3)$ or $3(x-1)(x-3)^2$

인데 $g'(2)$를 구해보면 0이 아니다!!

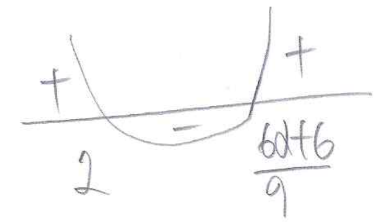
따라서 $g(2)=0$ 이며, $g(2)=0$, $g'(2)=0$ 이므로.

$g(x)=3(x-2)^2(x-\alpha)$ $\quad$ $f(x)=\frac{1}{3}(x-1)^2(x-3)$ or $\frac{1}{3}(x-1)(x-3)^2$ 이다.

그런데 $g(x)$는 $x=2$에서 극대이므로

$$g'(x)=6(x-2)(x-\alpha)+3(x-2)^2 = (x-2)(6x-6\alpha+3x-6)$$
$$= (x-2)(9x-6\alpha-6)$$

$y=g'(x)$



$\rightarrow$ $2 < \frac{6\alpha+6}{9}$

$18 < 6\alpha+6$

$12 < 6\alpha$

$2 < \alpha$

따라서 α는 1이 아니고 3이다.

$g(x)=3(x-2)^2(x-3)$

$f(x)=\frac{1}{3}(x-1)^2(x-3)$ $\quad$ $f'(0)=\frac{7}{3}$ $\quad$ 답 10

(30) $h(x)=k\{f(x)-f(x-a)-f(x-b)+f(x-2)\}$. $f(x)=\begin{cases}0 & (x\le 0)\\ x & (x>0)\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x(2-x) & |x-1|\le 1\\ 0 & |x-1|>1\end{cases}$

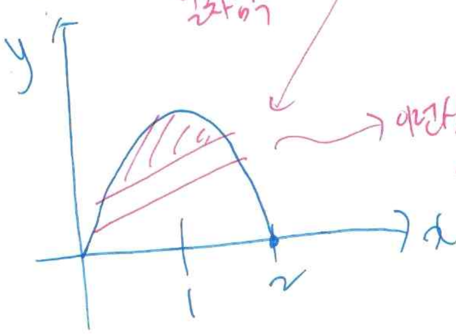
$0\le h(x)\le g(x)$

$\int_0^2\{g(x)-h(x)\}dx$ 의 값이 최소. k, a, b $(a<b<2)$ $60(k+a+b)=?$

(접근) 이식을 보고 당황할수 있는데.
어차피 $f(x-a)$ 는 a만큼평행이동 $f(x-b)$도 b만큼 평행이동 $f(x-2)$도 평행이동

어차피 $h(x)$는 일차함수이다 ☆

$\int_0^2\{g(x)-\underbrace{h(x)}_{\text{일차함수}}\}dx$ 가 최소가 된다??



→ 이런식으로 생각하면
결국 둘러싸인 넓이가 최소가 되도록 해야한다

① $f(x-a)$ 구하기

$f(x-a)=\begin{cases}0 & (x\le a)\\ x-a & (x>a)\end{cases}$
x에 $x-a$대입

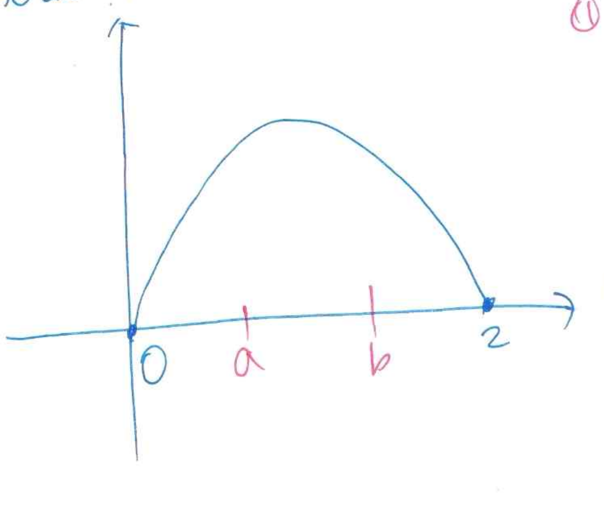
$f(x-b)=\begin{cases}0 & (x\le b)\\ x-b & (x>b)\end{cases}$
x에 $x-b$대입

$f(x-2)=\begin{cases}0 & (x\le 2)\\ (x-2) & (x>2)\end{cases}$

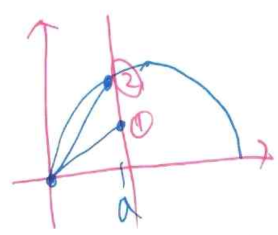
② $h(x)$ 구하기. (범위가 나뉘게 된다)

$h(x)=kf(x)=kx\ (x\le a)$ → k는 양수니까 증가하는 일차함수.
$=k(f(x)-(x-a))\ (a<x\le b)$
$=k(x-x+a)=ak$ (상수함수).
$=k\{x-(x-a)-(x-b)\}\ (b<x\le 2)$
$=k(a+b-x)$ 감소하는 일차함수

③ 적분값이 최소가 되게 하는.



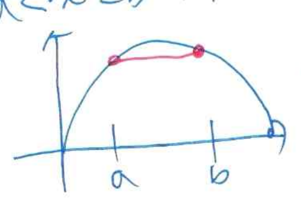
① $x\le a$ 에서



넓이가 최소가 되려면
① ② 비교해볼때 당연히
②의 상황임 //

→ $h(a)=g(a)$
$ak=a(2-a)$ $k=2-a$

② $a<x\le b$에서



b에서의 함숫값일치
→ $h(b)=g(b)$
$ak=b(2-b)$

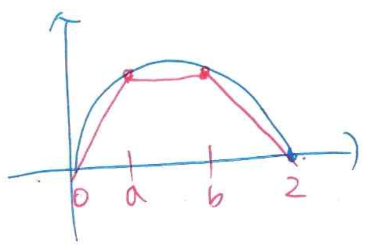
→ $a(2-a)=b(2-b)$
$-a^2+2a=-b^2+2b$
$b^2-a^2=2b-2a$

$(b+a)\underbrace{(b-a)} = 2(b-a)$

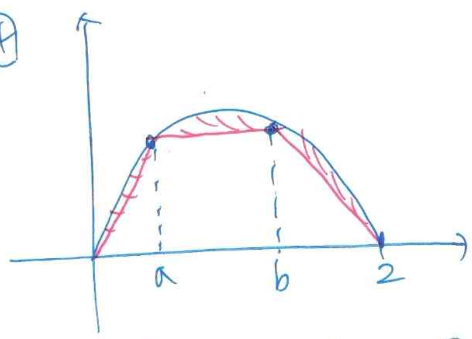
($a \neq b$이므로 약분)

$\boxed{b+a=2}$

㉮ $x>b$

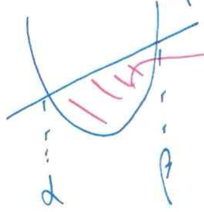


④



넓이가 최소가 되게하는 a.b.k를 구한다.

$y=ax^2+bx+c$



$\rightarrow S=\dfrac{|a|(\beta-\alpha)^3}{6}$ 공식이용

$$\int_0^2 g(x)-h(x)dx = S = \frac{|1|(a-0)^3}{6} + \frac{|1|(b-a)^3}{6} + \frac{|1|(2-b)^3}{6}$$

②에서 $b+a=2$이므로 $b=2-a$ 대입

$$S = \frac{a^3}{6} + \frac{(2-2a)^3}{6} + \frac{a^3}{6}$$ 이 최소가 되는 a찾기

⑤ $S' = \dfrac{3a^2}{6} + \dfrac{3(2-2a)^2(-2)}{6} + \dfrac{3a^2}{6} = 0$

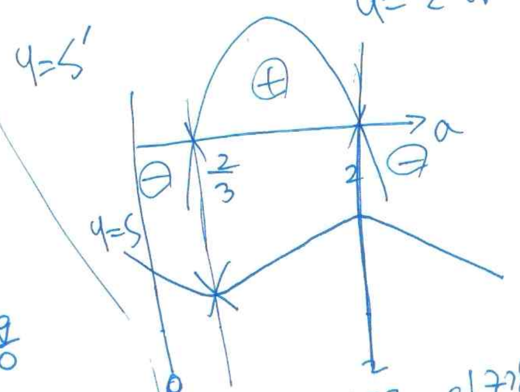
정리하면 $S' = \frac{1}{6}(-3a^2+8a-4)$

$3a^2-8a+4=0$

$\begin{matrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{matrix}$

$(a-2)(3a-2)=0$

$a=2$ or $\frac{2}{3}$임



$0<a<2$ 이므로 이구간에서 최솟값 만족!!

$a=\frac{2}{3}$일때 최소 가진다

$\therefore a=\frac{2}{3}$ $b=\frac{4}{3}$ $k=\frac{4}{3}$

$60\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}\right)$

$=\boxed{200}$