제 2 교시

수학 영역(가 형)

5지선다형

1. 두 벡터 $\vec{a}=(6, 2)$, $\vec{b}=(0, 4)$에 대하여 벡터 $\vec{a}-\vec{b}$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4

$\vec{a}-\vec{b}=(6.-2)$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{4x}$의 값은? [2점]

① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

5

3. 좌표공간의 두 점 A$(2, 0, 4)$, B$(5, 0, a)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이 x축 위에 있을 때, a의 값은? [2점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

2

(204) (50a)

2:1

$\left(\frac{12}{3}, \frac{0}{3}, \frac{2a+4}{3}\right)$

$\Downarrow$

0

$a=-2$

4. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3},\quad \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{5}$$

일 때, $\mathrm{P}(B|A)$의 값은? [3점]

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{7}{15}$ ③ $\frac{8}{15}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

4

$$\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{5}$$

5. 곡선 $y=2^x+5$의 점근선과 곡선 $y=\log_3 x+3$의 교점의 x좌표는? [3점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

③

$y=2^x+5$의 점근선 $y=5$

$5=\log_3 x+3$

$2=\log_3 x$

$x=9$

6. $0 \le x \le \pi$일 때, 방정식

$$1+\sqrt{2}\sin 2x=0$$

의 모든 해의 합은? [3점]

③

① π ② $\frac{5\pi}{4}$ ③ $\frac{3\pi}{2}$ ④ $\frac{7\pi}{4}$ ⑤ 2π

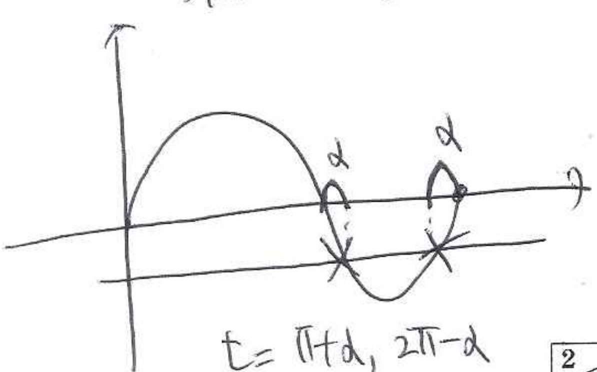
$\sqrt{2}\sin 2x=-1$

$\sin 2x=\frac{-1}{\sqrt{2}}$

t

$0 \le t \le 2\pi$

$\sin t = -\frac{1}{\sqrt{2}}$



$t=\pi+\alpha,\ 2\pi-\alpha$

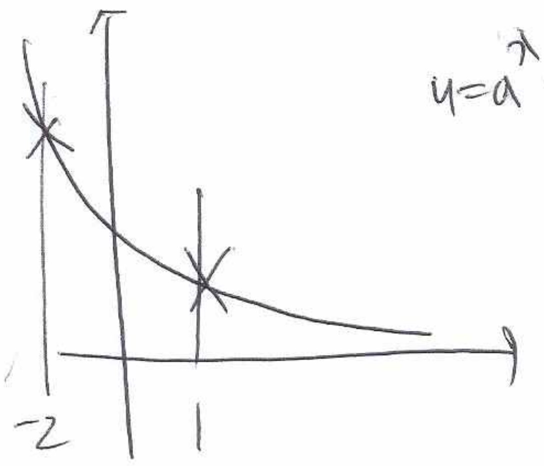
$x=\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\quad \pi-\frac{\alpha}{2}$

합) $\frac{3}{2}\pi$

7. $0<a<1$인 실수 a에 대하여 함수 $f(x)=a^x$은 닫힌 구간 $[-2,\ 1]$에서 최솟값 $\frac{5}{6}$, 최댓값 M을 갖는다. $a \times M$의 값은? [3점]

⑤

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ 1 ⑤ $\frac{6}{5}$



최대) $f(-2)=a^{-2}$

최소) $f(1)=a=\frac{5}{6}$

$a \times M = a^{-1} = \frac{6}{5}$

8. $\int_1^e \frac{3(\ln x)^2}{x}dx$의 값은? [3점]

1

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

$\int_1^e \frac{3(\ln x)^2}{x}dx$ → 미분된형태 O
→ 치환가능

$\ln x = t$

$\frac{1}{x} = \frac{dt}{dx}$

$\int_0^1 3t^2 dt = [t^3]_0^1 = 1$

9. 다음 조건을 만족시키는 쌍곡선의 주축의 길이는? [3점]

4

(가) 두 초점의 좌표는 $(5, 0)$, $(-5, 0)$이다. ↳ 주축이 x축위
(나) 두 점근선이 서로 수직이다.

① $2\sqrt{2}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $5\sqrt{2}$ ⑤ $6\sqrt{2}$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

나) 점근선 수직 → 기울기 곱) -1

$y = \frac{b}{a}x \quad y = -\frac{b}{a}x$

$\frac{b}{a}\left(-\frac{b}{a}\right) = -1$

$\frac{b^2}{a^2} = 1 \quad a^2 = b^2$

$a^2 + b^2 = 25$

$2a^2 = 25$

$a = \frac{5}{\sqrt{2}}$

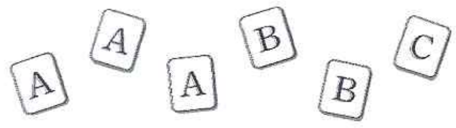
주축길이) $2a$

$= \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$

10. A, A, A, B, B, C의 문자가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 양 끝 모두에 A가 적힌 카드가 나오게 나열될 확률은? [3점]

2

① $\frac{3}{20}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{7}{20}$



$\boxed{A}$ ABBC $\boxed{A}$

$P = \frac{\text{양끝 A}}{\text{전체경우}} = \frac{\frac{4!}{2!}}{\frac{6!}{3!2!}} = \frac{1}{5}$

11. 함수 $f(x)=x^3+5x+3$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(3)$의 값은? [3점]

3

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

$$g'(3)=\frac{1}{f'(g(3))}$$

$x^3+5x+3=3$

$x(x^2+5)=0$

$x=0$

$$=\frac{1}{f'(0)}$$

$$=\frac{1}{5}$$

$f'(x)=3x^2+5$

12. 확률변수 X는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르고 다음 등식을 만족시킨다.

$$\mathrm{P}(m \le X \le m+12)-\mathrm{P}(X \le m-12)=0.3664$$

오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 σ의 값을 구한 것은? [3점]

3

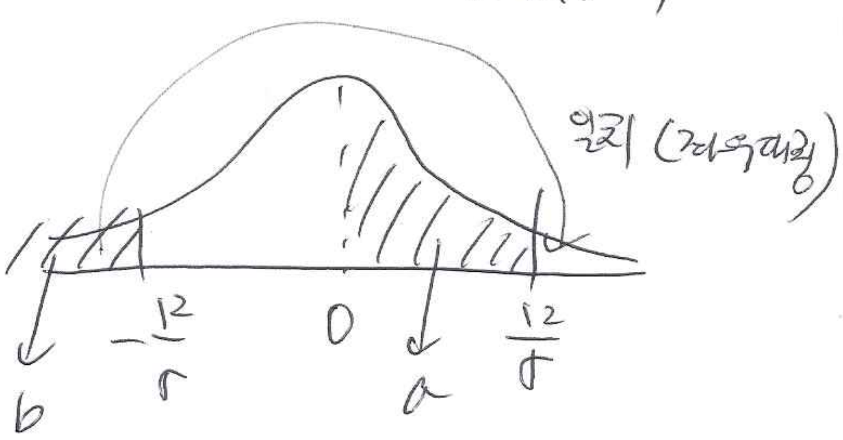
① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

$X \sim N(m, \sigma^2)$

표준화.

$p(0 \le Z \le \frac{12}{\sigma}) - p(Z \le \frac{-12}{\sigma})$
$=0.3664$



$a-b=0.3664$
$a+b=0.5$

$2a=0.8664$

$a=0.4332 \to z$가 1.5

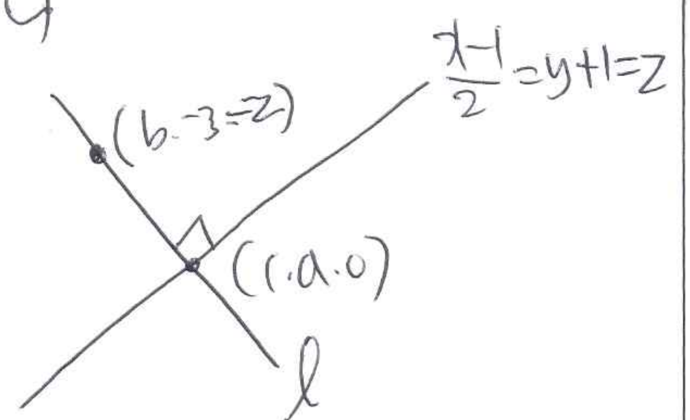
$\frac{12}{\sigma}=1.5$

$\sigma=8$

13. 좌표공간에서 직선 $\frac{x-1}{2}=y+1=z$와 직선 l이 점 $(1, a, 0)$에서 수직으로 만난다. 직선 l이 점 $(b, -3, -2)$를 지날 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

①



① (1.a.0)이 $\frac{x-1}{2}=y+1=z$ 지남

$a+1=0 \quad a=-1$

② 수직조건.

두 직선의 두 방향벡터가 수직 → 내적 0

$\vec{u_1}=(1-b.\ a+3\ {-2})=(1-b.2.+2)$

$\vec{u_2}=(2.1.1)$

$2(1-b)+2+2=0$

$2-2b+4=0$

$6-2b=0 \quad b=3$

$a+b=2$

14. 두 이산확률변수 X와 Y가 가지는 값이 각각 1부터 5까지의 자연수이고

$$P(Y=k)=\frac{1}{2}P(X=k)+\frac{1}{10}\quad(k=1, 2, 3, 4, 5)$$

→ 대입

이다. $E(X)=4$일 때, $E(Y)$의 값은? [4점]

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{7}{2}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ $\frac{13}{2}$

②

① $E(X)=4$

X	1	2	3	4	5
P	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5

$E(X)=P_1+2P_2+3P_3+4P_4+5P_5=4$

②

Y	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{2}P_1+\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}P_2+\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}P_3+\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}P_4+\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}P_5+\frac{1}{10}$

$E(Y)=\frac{1}{2}P_1+\frac{1}{10}+P_2+\frac{2}{10}+\frac{3}{2}P_3+\frac{3}{10}+\frac{4}{2}P_4+\frac{4}{10}+\frac{5}{2}P_5+\frac{5}{10}$

$=\frac{1}{2}\underbrace{(P_1+2P_2+3P_3+4P_4+5P_5)}_{=E(X)}+\frac{15}{10}$

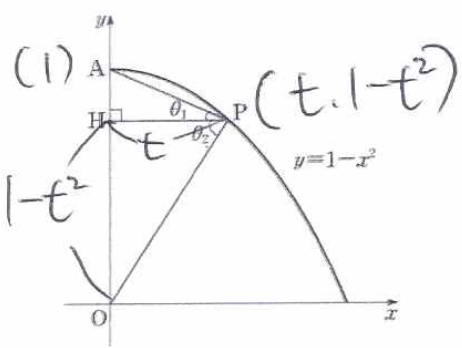
$=\frac{1}{2}\times 4+\frac{3}{2}=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$

답 ②

15. 곡선 $y=1-x^2(0<x<1)$ 위의 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하고, 원점 O와 점 A(0, 1)에 대하여 $\angle APH=\theta_1$, $\angle HPO=\theta_2$라 하자. $\tan\theta_1=\frac{1}{2}$일 때, $\tan(\theta_1+\theta_2)$의 값은? [4점]

4

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10



$\tan\theta_1 = \frac{1}{2}$ 이니까

$\overline{AH} = \frac{t}{2}$

$\overline{AH} + \overline{OH} = 1$

$\frac{t}{2} + (1-t^2) = 1$

$t + 2t - 2t^2 = 2$

$-2t^2 + 3t - 2 = 0$

$2t^2 - 3t + 2 = 0$ $\quad \frac{1}{2} \quad -1$

$t = 2$ or $\frac{1}{2}$

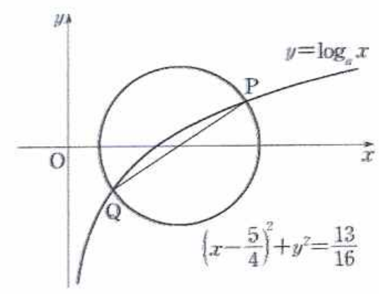
t는 2가될수x. $(t<1)$ $\quad t = \frac{1}{2}$

$\tan\theta_2 = \frac{1-t^2}{t} = \frac{1-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$

$\tan(\theta_1+\theta_2) = \frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{1-\frac{3}{4}} = \frac{2}{\frac{1}{4}} = 8$

16. $a>1$인 실수 a에 대하여 곡선 $y=\log_a x$와 원 $C: \left(x-\frac{5}{4}\right)^2+y^2=\frac{13}{16}$의 두 교점을 P, Q라 하자. 선분 PQ가 원 C의 지름일 때, a의 값은? [4점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5



선분 PQ는 지름이니 원의중심을 지난다.

PQ의 중점은 원의중심 $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$

$P(\alpha, \log_a\alpha)$ $Q(\beta, \log_a\beta)$

$\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{5}{4}$. $\quad \frac{\log_a\alpha + \log_a\beta}{2} = 0$

$\alpha+\beta = \frac{5}{2}$, $\alpha\beta = 1$

$\alpha\left(\frac{5}{2}-\alpha\right) = 1 \rightarrow \alpha = 2$ or $\frac{1}{2}$

α는 2이다. $\because$ (점 P의 x좌표는 $\frac{5}{4}$보다 크니

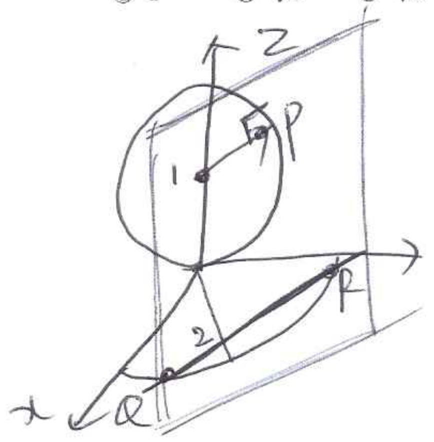
$P(2, \log_a 2)$는 원을지나므로

$\left(2-\frac{5}{4}\right)^2 + (\log_a 2)^2 = \frac{13}{16}$

$\log_a 2 = \frac{1}{2}$ $\quad \sqrt{a} = 2$ $\quad a = 4$

17. 좌표공간에 구 $S: x^2+y^2+(z-1)^2=1$과 xy평면 위의 원 $C: x^2+y^2=4$가 있다. 구 S와 점 P에서 접하고 원 C 위의 두 점 Q, R를 포함하는 평면이 xy평면과 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이다. 점 P의 z좌표가 1보다 클 때, 선분 QR의 길이는? [4점]

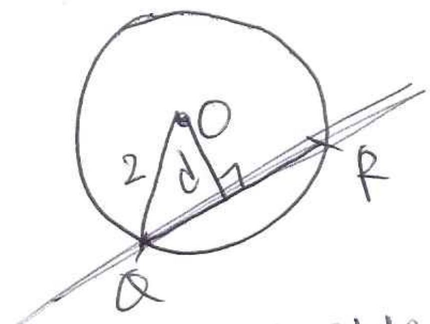
① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$



→ 접평면과 xy평면의 교선은 두점 Q, R을 포함하는 것밖에 없다.

→ QR의 길이 → 현의 길이 구하는것

d를 구하면 끝.



QR을 포함하는 직선은 접평면과 xy평면의 교선.

① 평면의 방정식 구하기

P(a.b.c)로 잡고

$\vec{n} = (a\ b\ c) - (0\ 0\ 1) = (a, b, c-1)$

$\alpha: a(x-a)+b(y-b)+(c-1)(z-c)=0$

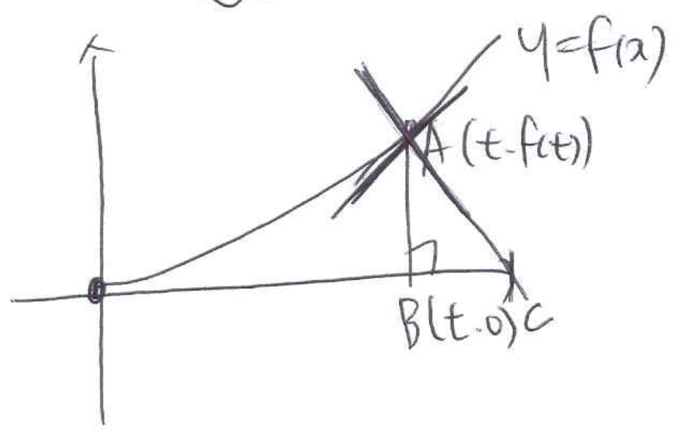
$ax+by+(c-1)z-a^2-b^2+c^2+c=0$

18. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(t, f(t))$ $(t>0)$에서 x축에 내린 수선의 발을 B라 하고, 점 A를 지나고 점 A에서의 접선과 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하자. 모든 양수 t에 대하여 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{1}{2}(e^{3t}-2e^{2t}+e^t)$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

1

① $e-2$ ② e ③ $e+2$ ④ $e+4$ ⑤ $e+6$

$f(0)=0.$ $f'(x)>0$ $f(x)$는 증가함수



(수직직선)

$y = -\frac{1}{f'(t)}(x-t)+f(t)$

(C구하기) $y=0$대입 $C = t+f(t)f'(t)$

(삼각형 넓이)

$S = \frac{1}{2}(f(t))^2 f'(t) = \frac{1}{2}(e^{3t}-2e^{2t}+e^t)$

↳ 미분된 형태 → 치환적분 가능!!

$\frac{1}{3}(f(t))^3 = \frac{1}{3}e^{3t}-e^{2t}+e^t+C$

$f(0)=0$ 이니까 $C=-1$

$(f(t))^3 = e^{3t}-3e^{2t}+3e^t-1 = (e^t-1)^3$

$f(t) = e^t-1$ $\int_0^1 e^x-1\,dx = e-2$

답) ①

② (001)와 점 P 사이거리는 반지름 1
(abc)

$a^2+b^2+(c-1)^2=1$

③ 접평면와 xy평면이 이루는각 60°

$\vec{n_1}=(a\ b\ c-1)$

$\vec{n_2}=(0\ 0\ 1)$

$$\frac{|c-1|}{\underbrace{\sqrt{a^2+b^2+(c-1)^2}}_{1}\times 1}=\frac{1}{2}$$

$|c-1|=\frac{1}{2}$인데

c는 z좌표가 1보다크다고 했다.

$c=\frac{3}{2}$이다.

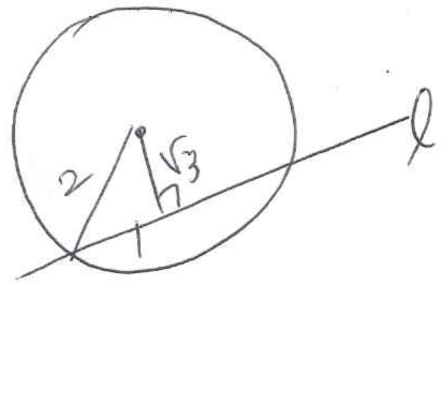
따라서 평면의방정식은

$ax+by+\frac{1}{2}z-(a^2+b^2)-\frac{3}{4}=0$

②에서 $a^2+b^2=\frac{3}{4}$이니까 $\alpha: ax+by+\frac{1}{2}z-\frac{3}{2}=0$ 이다.

xy평면과 교선은 $z=0$ 대입 $l: ax+by-\frac{3}{2}=0$

l과 중심$(0,0)$ 사이거리$=\frac{|-\frac{3}{2}|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}$



현의길이) 2

답) ④

19. 좌표평면에서 원점 O가 중심이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 세 점 A_1, A_2, A_3에 대하여

$$|\overrightarrow{OX}| \le 1 \text{이고 } \overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OA_k} \ge 0 \quad (k=1, 2, 3)$$

을 만족시키는 모든 점 X의 집합이 나타내는 도형을 D라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

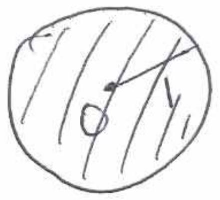
ㄱ. $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA_3}$이면 D의 넓이는 $\frac{\pi}{2}$이다.

ㄴ. $\overrightarrow{OA_2} = -\overrightarrow{OA_1}$이고 $\overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OA_1}$이면 D는 길이가 2인 선분이다.

ㄷ. $\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_2} = 0$인 경우에, D의 넓이가 $\frac{\pi}{4}$이면 점 A_3은 D에 포함되어 있다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$|\overrightarrow{OX}| \le 1$



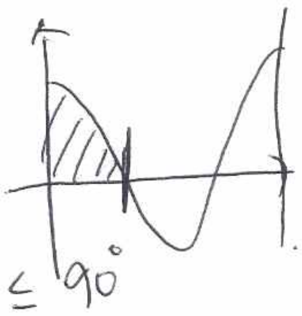
≤ 이므로 내부도 포함

$\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OA_k} \ge 0 \ (k=1,2,3)$ → 대입

$\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OA_1} \ge 0$ $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OA_2} \ge 0$ $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OA_3} \ge 0$

$\underbrace{|\overrightarrow{OX}||\overrightarrow{OA_1}|}_{\ge 0 \text{ 양수}} \cos\theta_1 \ge 0$

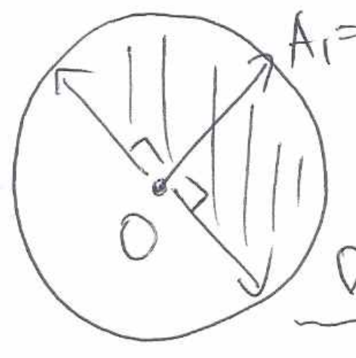
$\cos\theta_1 \ge 0$



$0° \le \theta_1, \theta_2, \theta_3 \le 90°$

ㄱ. $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA_3}$ D의 넓이 $\frac{\pi}{2}$?

같은위치



$A_1 = A_2 = A_3$

$\overrightarrow{OX}$는 90°까지 벌어질수있음

D: $\frac{\pi}{2}$ 맞음 (o)

20. 다음은 n명의 사람이 각자 세 상자 A, B, C 중 2개의 상자를 선택하여 각 상자에 공을 하나씩 넣을 때, 세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우의 수를 구하는 과정이다. (단, n은 6의 배수인 자연수이고 공은 구별하지 않는다.)

세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우는 '(i) 세 상자에 공이 들어가는 모든 경우'에서 '(ii) 세 상자에 모두 같은 개수의 공이 들어가는 경우'와 '(iii) 세 상자 중 두 상자에만 같은 개수의 공이 들어가는 경우'를 제외하면 된다.

(i)의 경우 :

n명의 사람이 각자 세 상자 중 공을 넣을 두 상자를 선택하는 경우의 수는 n명의 사람이 각자 공을 넣지 않을 한 상자를 선택하는 경우의 수와 같다. 따라서 세 상자에서 중복을 허락하여 n개의 상자를 선택하는 경우의 수인 $\boxed{(가)}$이다.

(ii)의 경우 :

각 상자에 $\frac{2n}{3}$개의 공이 들어가는 경우뿐이므로 경우의 수는 1이다.

(iii)의 경우 :

두 상자 A, B에 같은 개수의 공이 들어가면 상자 C에는 최대 n개의 공을 넣을 수 있으므로 두 상자 A, B에 각각 $\frac{n}{2}$개보다 작은 개수의 공이 들어갈 수 없다. 따라서 두 상자 A, B에 같은 개수의 공이 들어가는 경우의 수는 $\boxed{(나)}$이다.

그러므로 세 상자 중 두 상자에만 같은 개수의 공이 들어가는 경우의 수는 ${}_3C_2 \times (\boxed{(나)} - 1)$이다.

따라서 세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우의 수는 $\boxed{(다)}$이다.

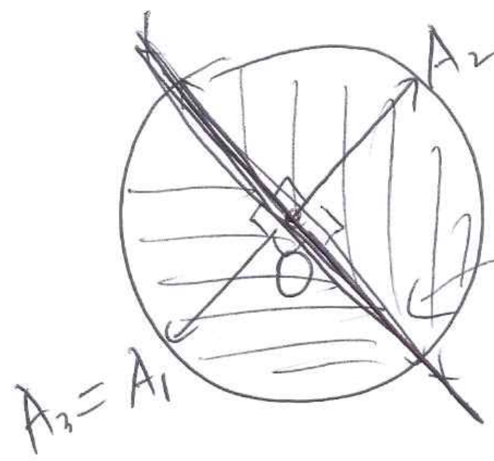
위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$이라 할 때, $\frac{f(30)}{g(30)} + h(30)$의 값은? [4점]

① 481 ② 491 ③ 501 ④ 511 ⑤ 521

ㄴ.

$\underbrace{\overrightarrow{OA_2} = -\overrightarrow{OA_1}}_{\text{역방향}}$, $\underbrace{\overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OA_1}}_{\text{같은위치}}$

D는 길이가 2인 선분?



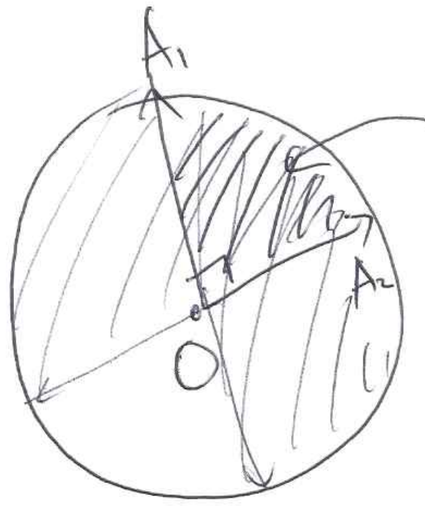
동시에만족하는 영역은

지름이다.

길이 2인 선분 맞음. (○)

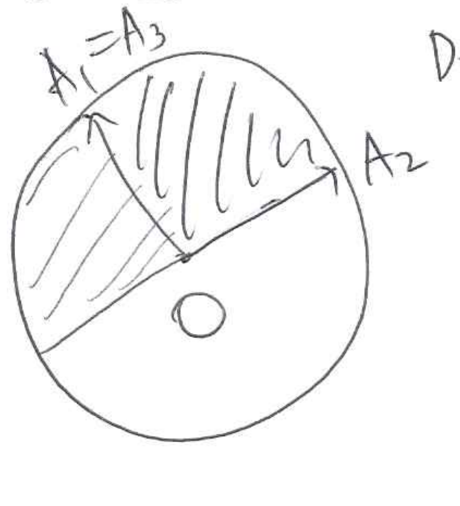
ㄷ. $\underbrace{\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}=0}_{\text{수직}}$. D의넓이 $\frac{\pi}{4}$

A_3는 D에 포함?



동시만족영역 넓이가 $\frac{\pi}{4}$ 임.

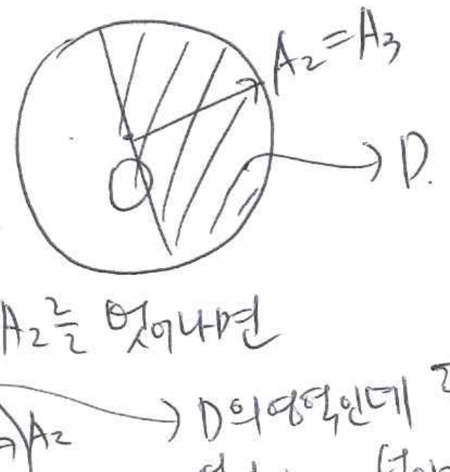
$\overrightarrow{OA_3}$의 위치 추론



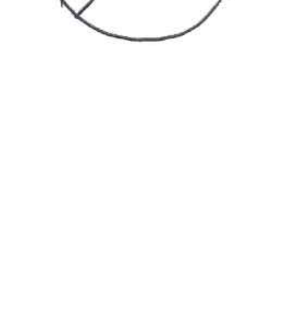
A_3가 A_1 위치면

D의영역이 왼쪽부분

A_3가 A_2 위치면



A_3가 호 A_1A_2를 벗어나면



D의영역인데 동시에 겹치는 영역의 넓이가 $\frac{\pi}{4}$가 될수 X

→ A_3은 $\overset{\frown}{A_1A_2}$ 위에 있다. (○)

20.

(i) n명의 사람이 공을 넣지 않을 한 상자를 선택한다. (중복가능)

A B C

→ 뽑아진 상태를 생각해보면 된다.

n명
1번사람 → A
2번사람 → B
3번 → C
4번사람 → A
⋮
n번사람

→ AAABBCCAA … A → 나열의 의미가 없음.
(n개) 그냥 뽑고 끝나는 것임.

따라서는 A, B, C 세개 중 중복해서 n개 뽑는 수

$_3H_n$

(참고) 서로다른 a, b 중 3개 뽑아 (중복허용) 나열하는 수는

$_2H_3$ = aaa bbb aab abb 4개 → 나열 X.

$_2\Pi_3$ = aaa bbb aab aba baa bab bba abb 8개 → 나열 O

→ 차이를 이해해보세요.

(iii) 두 상자 A, B에 같은 공의 개수 들어간다.

$\boxed{\text{상자 C에는 최대 n개의 공이 들어간다}}$ ☆

→ (의미) n명의 사람이 모두 A B C 중 2상자에 1개씩 넣는데 전부 다 C를 다 선택한 것.
C에 1개씩 다 들어가니까 C에 들어가는 공의 개수는 n개다.

$\frac{n}{2}$ $\frac{n}{2}$ n
A B C

A.B.C 모두 들어가는 공의 개수 = n명 × 2 = 2n개

→ 이 구조인데 n으로 생각하면 힘드니까
n=6으로 생각해본다 (n은 6의 배수)

① n=6

A	B	C
3	3	6
4	4	4
5	5	2
6	6	0

총 4가지 = 3+1

② n=12

6	6	12
7	7	10
8	8	8
9	9	6
10	10	4
11	11	2
12	12	0

총 7가지 = 6+1

③ 일반화시키면
n일 때 $\frac{n}{2}+1$ 개이다.

④ 세 상자 중 두 상자에만 같은 개수의 공이 들어가는 경우
→ 세 상자 중 두 상자 고르기 $_3C_2$
→ 세 상자 모두 같은 공이 들어가는 경우 ☆☆☆
빼야 된다 $_3C_2\left(\frac{n}{2}+1-1\right)$

ex) ① n=6 4 4 4 ② n=12 8 8 8

21. $a_1=-1 \quad a_n = 2 - \frac{1}{2^{n-2}} \ (n \geq 2)$

$[-1, 2)$ $f(x) = \sin(2^n \pi x) \quad (a_n \leq x \leq a_{n+1})$

$-1 < \alpha < 0 \quad \int_{\alpha}^{t} f(x)\,dx = 0 \quad t$ ($0 < t < 2$) 의 개수 103 개. $\log_2(1-\cos 2\pi\alpha) = ?$

$f(x) = \sin(2^n \pi x) \quad (a_n \leq x \leq a_{n+1})$

↑ $n=1.2.3$ 대입 계속가능

$f(x) = \sin 2\pi x \quad (a_1 \leq x \leq a_2) \quad (-1 \leq x \leq 1)$

$= \sin 4\pi x \quad (a_2 \leq x \leq a_3) \quad (1 \leq x \leq \frac{3}{2})$

$= \sin 8\pi x \quad (a_3 \leq x \leq a_4) \quad (\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{7}{4})$

$\int_{\alpha}^{t} f(x)\,dx = 0$

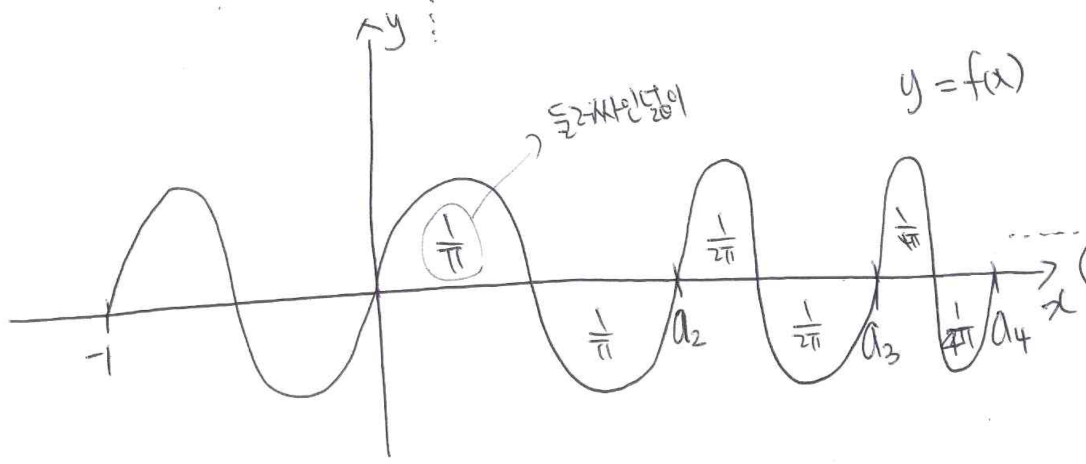
↑ 뭔지 모르니까 적분이 0이되는 t를 생각하기 힘들다.

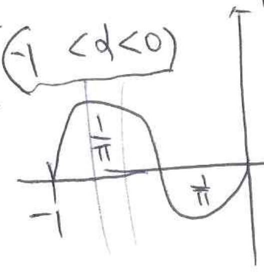
따라서 $\int_{\alpha}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{t} f(x)\,dx = 0$

이 상태에서 생각해본다.

$\boxed{\int_{\alpha}^{0} f(x)\,dx} = -\int_{0}^{t} f(x)\,dx$

☆ 적분해왔자 무조건 음수이다 ☆





$-\int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx = -\int_{0}^{t} f(x)\,dx$

무조건양수 ☆

$\int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx = \int_{0}^{t} f(x)\,dx$

무조건 양수.

$k = \int_{0}^{t} f(x)\,dx = g(t) \quad y=g(t)$랑 $y=k$ 교점의 개수가 103개

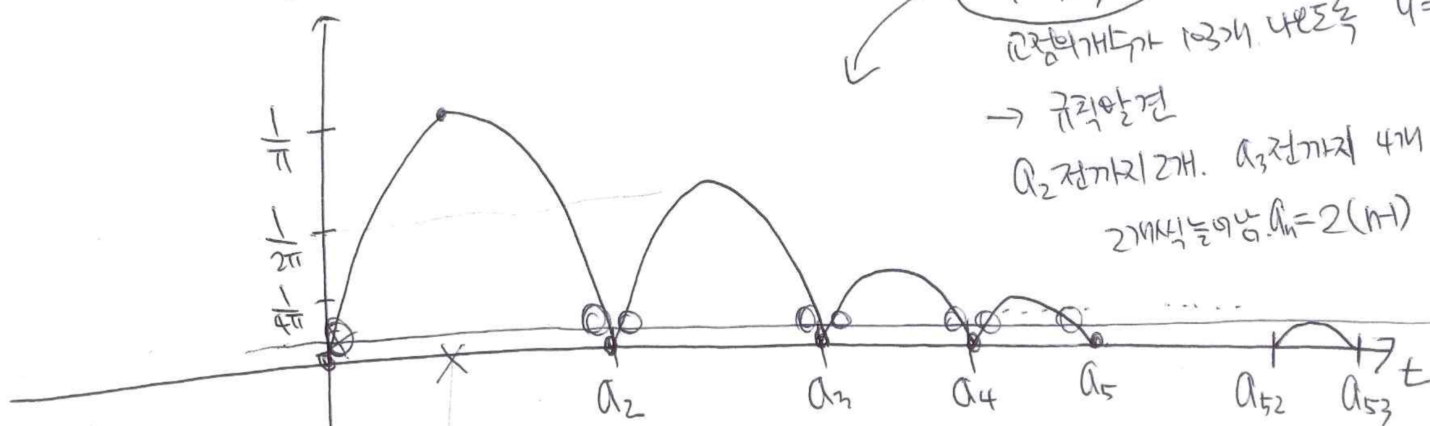
$y=g(t)$

교점의개수가 103개 나오도록 $y=k$를 그려본다.

→ 규칙발견

a_2 전까지 2개. a_3 전까지 4개 a_4 전까지 6개

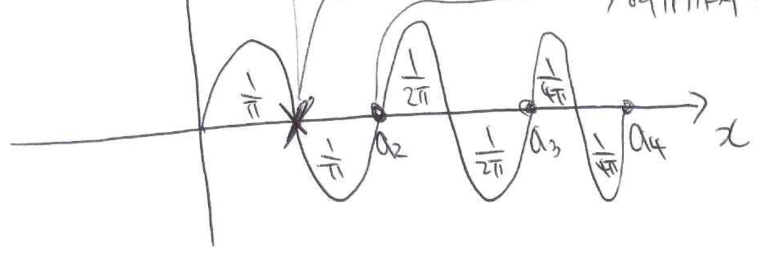
2개씩 늘어남. $a_n = 2(n-1) \quad a_{52} = 102$임.

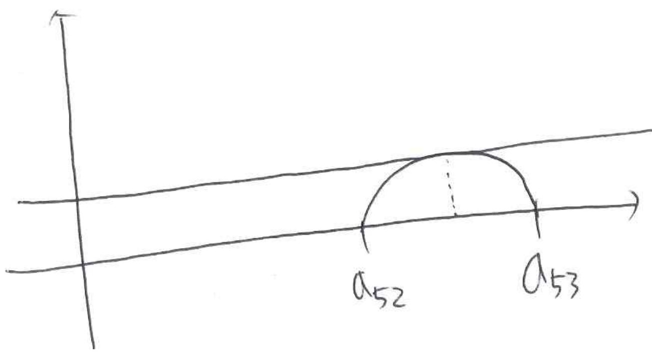


103개가 되려면 접하는 경우밖에 없다.

$y=f(x)$ 이점까지 적분하면 y값이 $\frac{1}{\pi}$까지 올라간다.

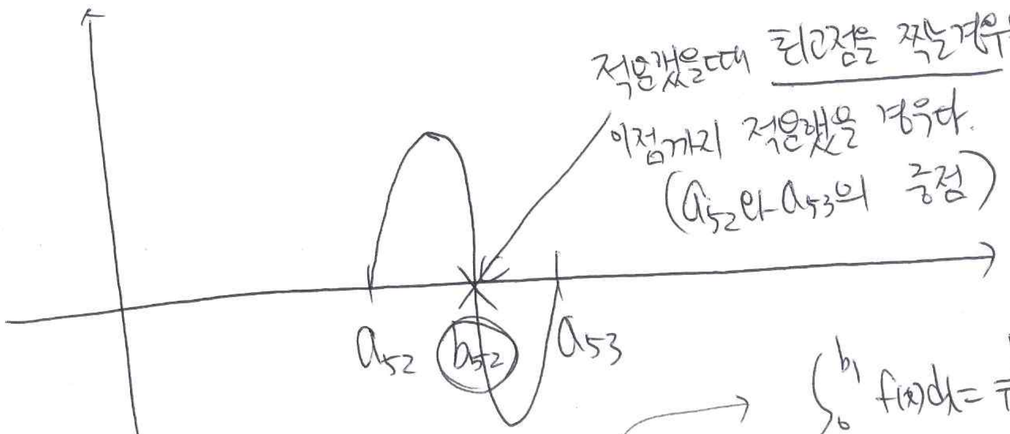
여기까지 적분하면 y값이 0이다. $(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} = 0)$





접하는시점찾기

적분했을때 최고점을 찍는경우는
이점까지 적분했을 경우다.
(a_{52}와 a_{53}의 중점)



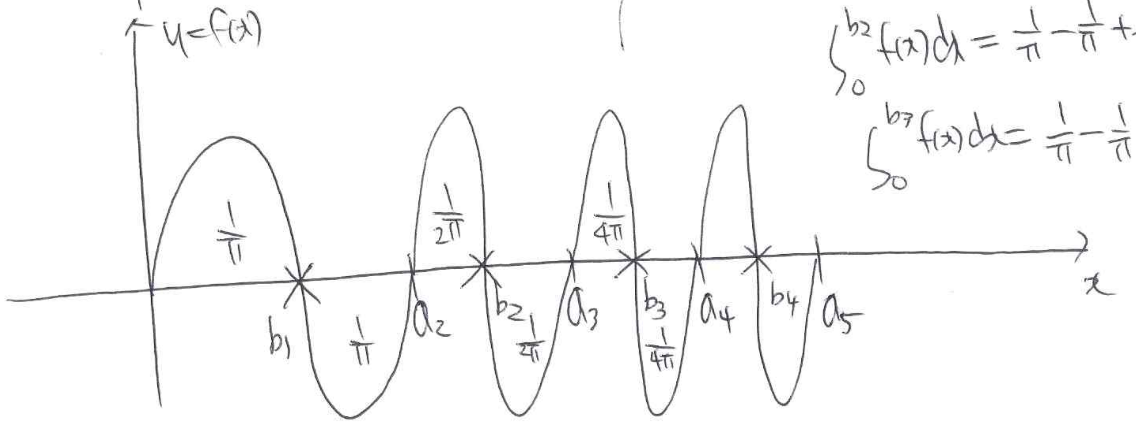
$$\int_0^{\alpha} f(x)\,dx = \int_0^{b_{52}} f(x)\,dx$$

$$\int_0^{\alpha} \sin 2\pi x\,dx = \frac{1}{2^{51}\pi}$$

$$\frac{1}{2\pi}(1-\cos 2\pi\alpha) = \frac{1}{2^{51}\pi}$$

$$\underbrace{1-\cos 2\pi\alpha = 2^{-50}}$$

답 ②



$$\int_0^{b_1} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}$$

$$\int_0^{b_2} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}$$

$$\int_0^{b_3} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{4\pi} = \frac{1}{4\pi}$$

$\boxed{\text{규칙발견}}$

$$\int_0^{b_{52}} f(x)\,dx = \frac{1}{2^{51}\pi} ☆$$

21. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 = -1, \quad a_n = 2 - \frac{1}{2^{n-2}} \ (n \geq 2)$$

이다. 구간 $[-1, 2)$에서 정의된 함수 $f(x)$가
모든 자연수 n에 대하여

$$f(x) = \sin(2^n \pi x) \ (a_n \leq x \leq a_{n+1})$$

이다. $-1 < \alpha < 0$인 실수 α에 대하여 $\int_{\alpha}^{t} f(x)dx = 0$을
만족시키는 $t\,(0 < t < 2)$의 값의 개수가 103일 때,
$\log_2(1 - \cos(2\pi\alpha))$의 값은? [4점]

① -48 ② -50 ③ -52 ④ -54 ⑤ -56

단답형

22. ${}_7\mathrm{P}_3$의 값을 구하시오. [3점]

$7 \times 6 \times 5 = 210$

23. 함수 $f(x) = -\cos^2 x$에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값을 구하시오. [3점]

$f'(x) = +2\cos x \sin x$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$

답 1.

24. 곡선 $5x+xy+y^2=5$ 위의 점 $(1,\,-1)$에서의 접선의 기울기를 구하시오. [3점]

$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=1}$

음함수미분

$5+y+xy'+2yy'=0$

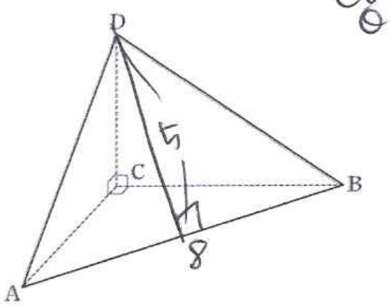
($x=1$, $y=-1$ 대입) $5-1+y'-2y'=0$

$4-y'=0$

$y'=4$ 답)4

25. $\overline{AB}=8$, $\angle ACB=90^\circ$인 삼각형 ABC에 대하여 점 C를 지나고 평면 ABC에 수직인 직선 위에 $\overline{CD}=4$인 점 D가 있다. 삼각형 ABD의 넓이가 20일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. [3점]

답)12

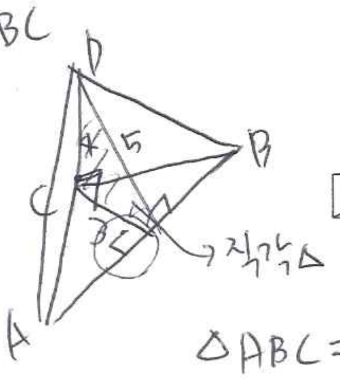


$\overline{CD}\perp\overline{AC}$, $\overline{CD}\perp\overline{CB}$

$\overline{CD}$는 $\overline{AC}$, $\overline{CB}$를 포함하는 평면과 수직.

$\overline{CD}\perp\triangle ABC$

삼수선정리에 의해



$\triangle ABC = 8\times3\times\frac{1}{2}=12$

26. 어느 회사에서 생산하는 초콜릿 한 개의 무게는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산하는 초콜릿 중에서 임의추출한, 크기가 49인 표본을 조사하였더니 초콜릿 무게의 표본평균의 값이 $\overline{x}$이었다. 이 결과를 이용하여, 이 회사에서 생산하는 초콜릿 한 개의 무게의 평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간을 구하면 $1.73\le m\le 1.87$이다. $\frac{\sigma}{\overline{x}}=k$일 때, $180k$의 값을 구하시오.
(단, 무게의 단위는 g이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때 $P(0\le Z\le 1.96)=0.475$로 계산한다.) [4점]

$n=49.$ 답)25

$1.73\le m\le 1.87$

$\overline{x}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{x}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\left[\overline{x}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

→ 둘의 중점이 $\overline{x}$

$\therefore\ \overline{x}=1.8.\quad k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=0.07$

$1.96\frac{\sigma}{7}=0.07$

$1.96\sigma=0.49$

$\sigma=\frac{1}{4}$

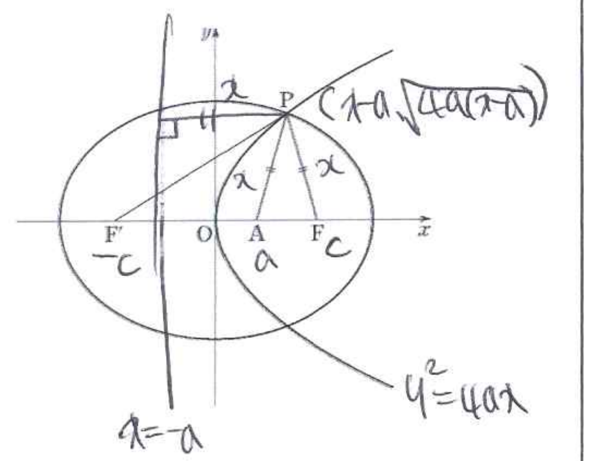
$\frac{\sigma}{\overline{x}}=\frac{\frac{1}{4}}{1.8}=\frac{1}{4\times1.8}=k$

$180k=180\times\frac{1}{4\times1.8}=25$

27. 좌표평면에서 초점이 A$(a, 0)$ $(a>0)$이고 꼭짓점이 원점인 포물선과 두 초점이 F$(c, 0)$, F$'(-c, 0)$ $(c>a)$인 타원의 교점 중 제1사분면 위의 점을 P라 하자.

$\overline{AF}=2$, $\overline{PA}=\overline{PF}$, $\overline{FF'}=\overline{PF'}$

일 때, 타원의 장축의 길이는 $p+q\sqrt{7}$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) [4점]



① $c-a=2$

② $x-2a=1$

③ 직각△

$1+4a(x-a)=x^2$

④ 직각△

$(a+c+1)^2+4a(x-a)=4c^2$

c, x를 a에대해서 나타냄

$(2a+3)^2+(2a+1)^2-1=4(a+2)^2$

계산하면 $a^2=\frac{7}{4}$

(장축의길이)

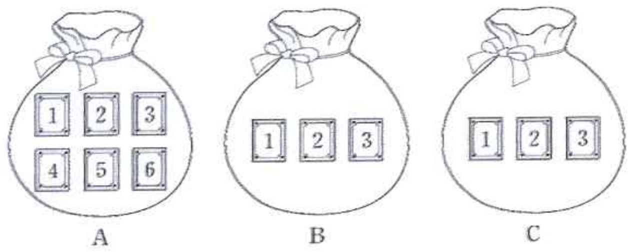
→타원의정의 : 초점으로부터 거리의합

$2c+x=2(a+2)+2a+1$
$=4a+5=4\frac{\sqrt{7}}{2}+5$

답) 29

28. 그림과 같이 주머니 A에는 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적힌 6장의 카드가 들어 있고 주머니 B와 C에는 1부터 3까지의 자연수가 하나씩 적힌 3장의 카드가 각각 들어 있다. 갑은 주머니 A에서, 을은 주머니 B에서, 병은 주머니 C에서 각자 임의로 1장의 카드를 꺼낸다. 이 시행에서 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 을이 꺼낸 카드에 적힌 수보다 클 때, 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 을과 병이 꺼낸 카드에 적힌 수의 합보다 클 확률이 k이다. $100k$의 값을 구하시오. [4점]

→조건



①

$P(갑 > 을+병 \mid 갑 > 을)$

$$= \frac{P(갑 > 을+병 \cap 갑 > 을)}{P(갑 > 을)} = \frac{n(갑 > 을+병 \cap 갑 > 을)}{n(갑 > 을)}$$

① $n(갑 > 을)$

그냥 다써도 얼마 안걸림

갑	을
1	X
2	1
3	1, 2
4	1, 2, 3
5	1, 2, 3
6	1, 2, 3

병 → 1.2.3 모두 가능

→ 1가지 경우당 병은 3가지 가능. → 곱한다.

총 12가지 × 3 (병 1.2.3 가능)
= 36가지

② $n((갑 > 을+병) \cap (갑 > 을))$

그대로 끌고옴

갑	을	병
1	1	X
2	1	X
	2	X
3	1	1
	2	X
4	1	1,2
	2	1
	3	X
5	1	1,2,3
	2	1,2
	3	1

①번 상황도 만족하면서 (갑 > 을+병) 만족

갑	을	병
6	1	1,2,3,~~4~~
	2	1,2,3
	3	1,2

총) 18가지

$\therefore \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ 답) 50

29. 좌표공간에 세 점 O(0, 0, 0), A(1, 0, 0), B(0, 0, 2)가 있다. 점 P가 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$, $|\overrightarrow{OP}| \le 4$를 만족시키며 움직일 때,

$$|\overrightarrow{PQ}| = 1, \quad \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{OA} \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$$

을 만족시키는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{BQ}|$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M + m = a + b\sqrt{5}$일 때, $6(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]

30. 함수 $f(x) = \ln(e^x + 1) + 2e^x$에 대하여 이차함수 $g(x)$와 실수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $h(x) = |g(x) - f(x-k)|$는 $x = k$에서 최솟값 $g(k)$를 갖고, 닫힌 구간 $[k-1, k+1]$에서 최댓값 $2e + \ln\left(\frac{1+e}{\sqrt{2}}\right)$를 갖는다.

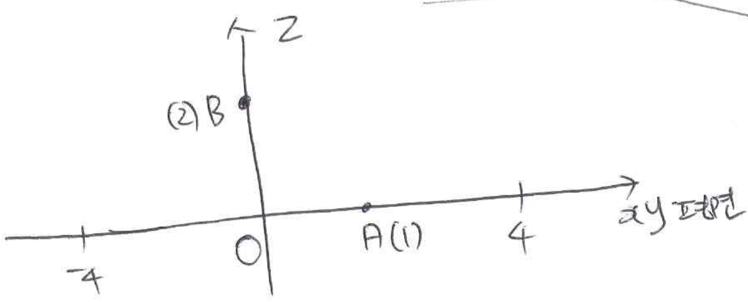
$g'\left(k - \frac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오. (단, $\frac{5}{2} < e < 3$이다.) [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

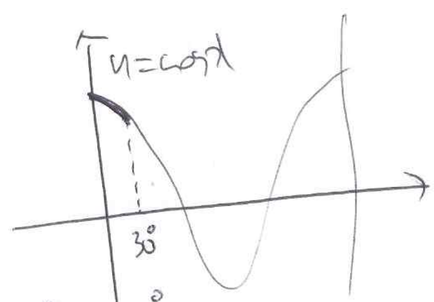
29. $\vec{OB}\cdot\vec{OP}=0$ $\quad |\vec{OP}|\le 4$ → P는 xy평면 위의점이고, 중심이 O, 반지름길이 4인 원과 내부에 위치.

$|\vec{PQ}|=1$. $\quad \vec{PQ}\cdot\vec{OA}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad |\vec{BQ}|$ 최대, 최소 =?



→ $|\vec{PQ}||\vec{OA}|\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\theta\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$

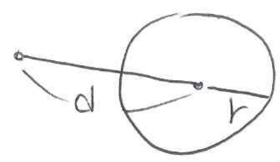


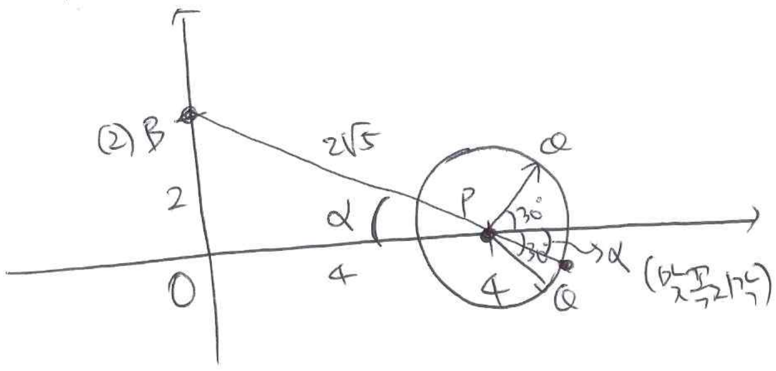
$0\le\theta\le 30°$

① $|\vec{BQ}|$ 최대.

Q가 B로부터 제일 멀리 떨어져 있다. → P를
→ P도 B로부터 제일 멀리 떨어져야 된다

(원밖의한점과 원위의 한점사이의 거리의 최대는 d+r)





따라서 $d+r=2\sqrt{5}+1$ 을생각할수 있는데

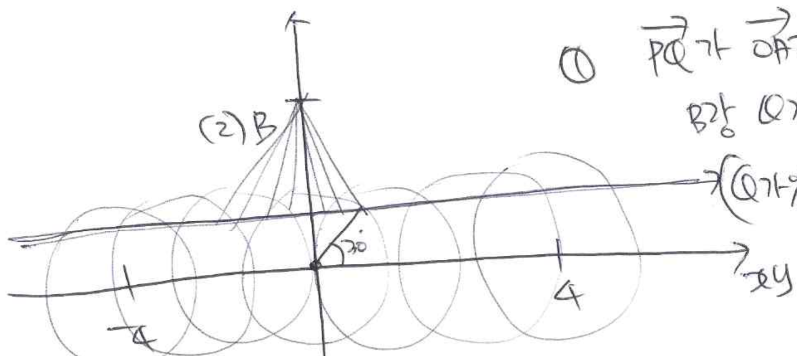
Q가 그위치가 가능한지 검토를 해볼수 있음.

$\cos\alpha=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$인데 $<\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 α는 30°보다 작은각이다

따라서 Q는 이 위치가 가능. $|\vec{BQ}|$ 최대는 $2\sqrt{5}+1$

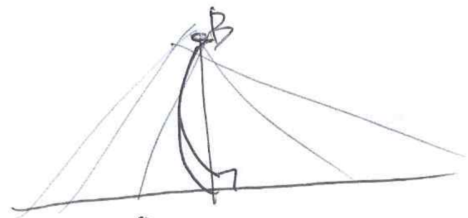
② $|\vec{BQ}|$ 최소=?

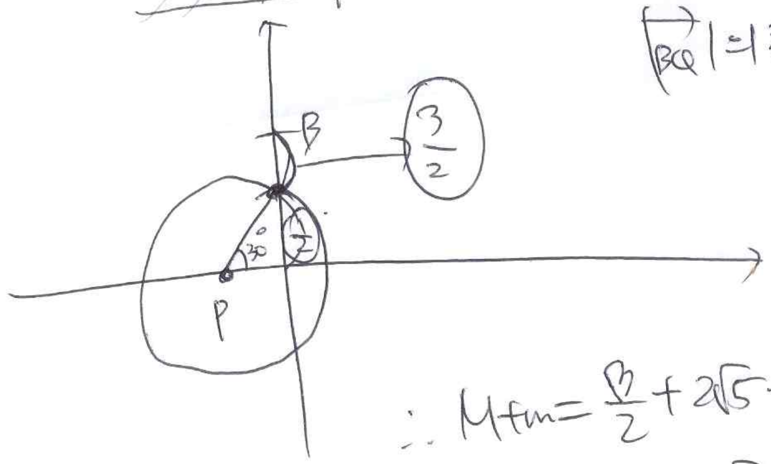
Q가 B로부터 제일 가깝다.



① $\vec{PQ}$가 $\vec{OA}$랑 이루는각이 30°가 되어야
B랑 Q가 가까워진다

→(Q가 있을수있는선) $|\vec{BQ}|$ 최소가 되려면 수직거리를 택해야함





$|\vec{BQ}|$의 최소는 $\frac{3}{2}$

$\therefore M+m=\frac{3}{2}+2\sqrt{5}+1$

$=\frac{5}{2}+2\sqrt{5}$

$6(a+b)=27$ $\quad$ 답) 27

가형 30 $f(x)=\ln(e^x+1)+2e^x$

$h(x)=|g(x)-f(x-k)|$ ① $x=k$에서 최솟값 $g(k)$

② $[k-1, k+1]$ 최댓값 $2e+\ln\left(\frac{1+e}{\sqrt{2}}\right)$

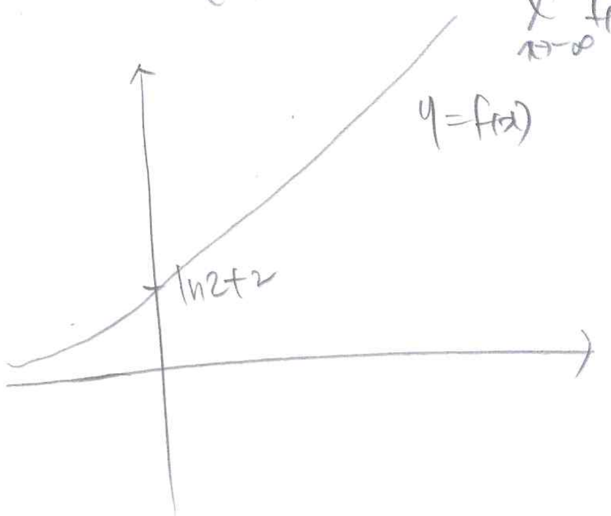
→ $h(x)$는 최대랑 최소를 가진다는 것을 이용하기 위해

$f(x)$ 그래프를 그려보다.

$f(x)=\ln(e^x+1)+2e^x$

$f'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}+2e^x>0$ $f(x)$는 증가함수.

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$ $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$



① $x=k$에서 최솟값 $g(k)$를 가진다.

$|g(k)-f(0)|=g(k)$

→ $g(k)-f(0)\geq 0$ 이면 $g(k)-f(0)=g(k)$

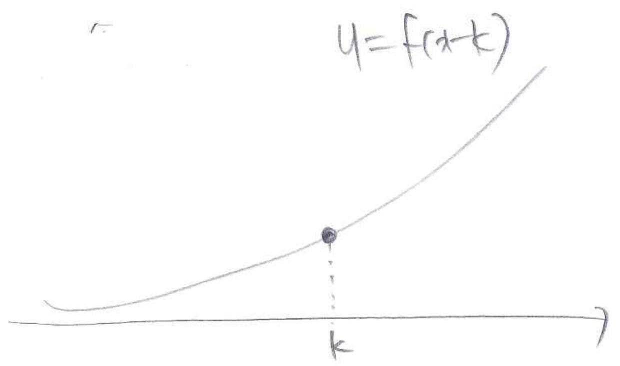
$f(0)=0$ 인데

$f(0)=\ln 2+2$ 니까 모순

∴ $-g(k)+f(0)=g(k)$ 이고 $\underline{f(0)=2g(k)}$ //

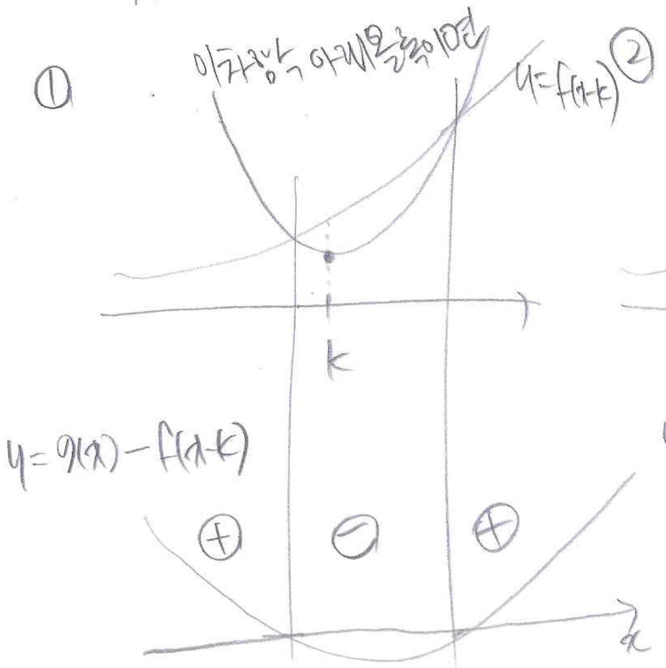
$g(k)<f(0)$ //

② 그래프 관찰

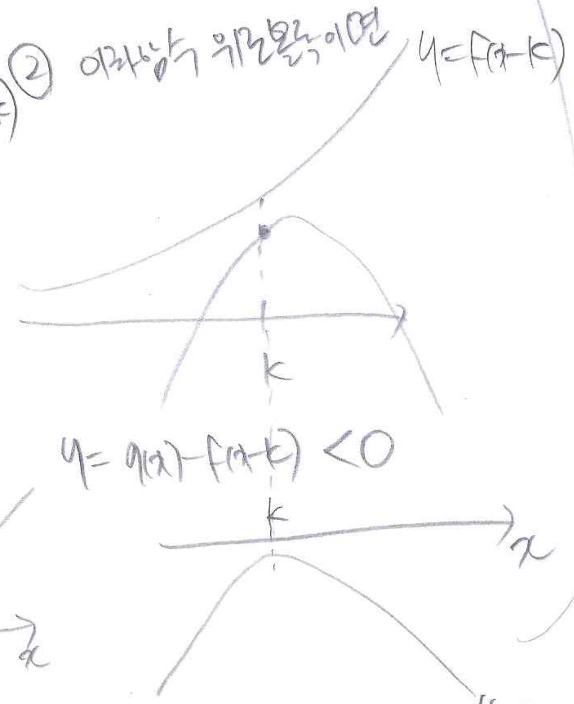


$g(k)$는 $f(0)$보다 작아야 한다.

① 이차함수 아래로볼록이면



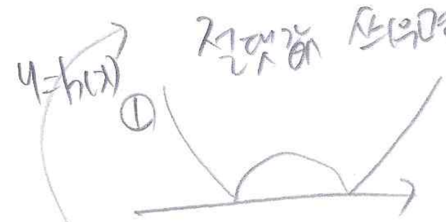
② 이차함수 위로볼록이면



→ k에서 극대가짐 $g'(k)-f'(0)=0$

$\boxed{g'(k)=\frac{5}{2}}$

절댓값 씌우면



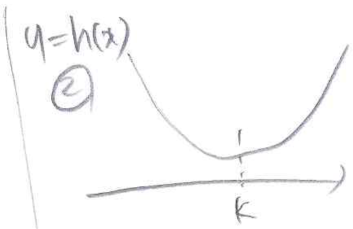
↑

최솟값이 아님

$g(k)=\frac{f(0)}{2}$ 인데

$f(0)=0$ 이 아니니까

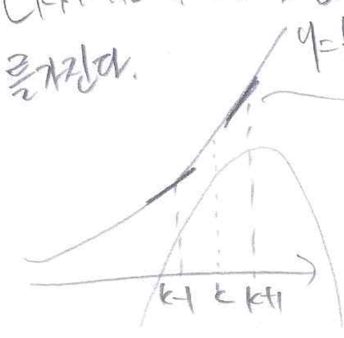
모순임



→ 이경우가 맞음

$[k-1, k+1]$ 에서 최댓값 $2e+\ln\left(\frac{1+e}{\sqrt{2}}\right)$

를 가진다.



→ 증가량이 k+1일때 더 크니까

k+1에서 최대를 가질것이라고 추론가능

∴ $h(k+1)=f(1)-g(k+1)$

$=2e+\ln\left(\frac{1+e}{\sqrt{2}}\right)$

$h(k+1)$ 과 $h(k-1)$ 비교

(원래 올렸던 해설에서 그래프만 보고 추론했는데

포기원이 $\frac{5}{2}<e<3$ 조건을 줬으니 덧붙입니다)

① $h(k+1) = f(1) - g(k+1) = \ln(e+1) + 2e - g(k+1)$

② $h(k-1) = f(-1) - g(k-1) = \ln\left(\frac{1}{e}+1\right) + \frac{2}{e} - g(k-1)$

① − ② 하면 $\ln\left(\frac{e+1}{\frac{1}{e}+1}\right) + 2e - \frac{2}{e} - g(k+1) + g(k-1)$

$1 + 2e - \frac{2}{e} - 5 = 2e - \frac{2}{e} - 4$

$g(x) = ax^2 + bx + c$

(1) $g(k+1) = a(k+1)^2 + b(k+1) + c$

(2) $g(k-1) = a(k-1)^2 + b(k-1) + c$

(1) − (2) $= 4ak + 2b = \frac{5}{2} \times 2 = 5$

$\boxed{g'(k) = \frac{5}{2}}$ 를 이용하면

$g'(k) = 2ak + b = \frac{5}{2}$

$\frac{5}{2} < e < 3$

$5 < 2e < 6$

$1 < 2e - 4 < 2$

$1 - \boxed{\frac{2}{e}} < 2e - 4 - \frac{2}{e} < 2 - \boxed{\frac{2}{e}}$

1보다 작다

0보다 크다

① − ② > 0 이므로 $h(k+1) > h(k-1)$

$h(k+1)$ 이 최댓값 맞음

정리

① $g(k) = \frac{f(0)}{2} = \frac{\ln 2 + 2}{2} = \ln\sqrt{2} + 1$

② $g'(k) = \frac{5}{2}$

③ $h(k+1) = f(1) - g(k+1) = 2e + \ln\left(\frac{1+e}{\sqrt{2}}\right)$

$g(x) = ax^2 + bx + c$

① $ak^2 + bk + c = \ln\sqrt{2} + 1$

② $2ak + b = \frac{5}{2}$

③ $\ln(e+1) + 2e - g(k+1) = 2e + \ln\left(\frac{1+e}{\sqrt{2}}\right)$

$-g(k+1) = \ln\frac{1}{\sqrt{2}}$

$g(k+1) = \ln\sqrt{2}$

$a(k+1)^2 + b(k+1) + c = \ln\sqrt{2}$

$ak^2 + 2ak + a + bk + b + c = \ln\sqrt{2}$

$\ln\sqrt{2} + 1 + \frac{5}{2} + a = \ln\sqrt{2}$

$a = -\frac{7}{2}$

$g'(k - \frac{1}{2}) = 2a(k - \frac{1}{2}) + b$

$= 2ak - a + b$

$= 2ak + b - a$

$= \frac{5}{2} + \frac{7}{2} = 6$

답) 6