2018학년도 대학수학능력시험 대비

2018학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가 정답 및 해설 - 수학가형

문항번호	정 답	배 점	문항번호	정 답	배 점	문항번호	정 답	배 점	문항번호	정 답	배 점
1	④	2	9	④	3	17	④	4	25	12	3
2	⑤	2	10	②	3	18	①	4	26	25	4
3	②	2	11	③	3	19	⑤	4	27	29	4
4	④	3	12	③	3	20	①	4	28	50	4
5	③	3	13	①	3	21	②	4	29	27	4
6	③	3	14	②	4	22	210	3	30	6	4
7	⑤	3	15	④	4	23	1	3			
8	①	3	16	③	4	24	4	3			

14번

[풀이]

$\mathrm{E}(Y)=\sum_{k=1}^{5} k\cdot \mathrm{P}(Y=k)$

$=\sum_{k=1}^{5} k\cdot\left\{\frac{1}{2}\mathrm{P}(X=k)+\frac{1}{10}\right\}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{5} k\cdot \mathrm{P}(X=k)+\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{5} k$

$=\frac{1}{2}\mathrm{E}(X)+\frac{1}{10}\cdot 15$

$=\frac{7}{2}$

15번

[풀이]

$\mathrm{P}(t,\ 1-t^2)$이라 하면 $\tan\theta_1=\frac{1-(1-t^2)}{t}=t=\frac{1}{2}$이므로

$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right)$이고 $\tan\theta_2=(\overline{\mathrm{OP}}$ 기울기$)=\frac{3}{2}$이다.

$\tan(\theta_1+\theta_2)=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}=8$ 이다.

16번

[풀이]

두 점 P, Q의 좌표를 각각

$\mathrm{P}(\alpha,\ \log_a\alpha)$, $Q(\beta,\ \log_a\beta)$ (단, $\alpha>\beta$)라 하면 선분 PQ의 중점이

원 C의 중심 $\left(\frac{5}{4},\ 0\right)$이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{5}{4}\ \Rightarrow\ \alpha+\beta=\frac{5}{2}$ ⋯㉠

$\frac{\log_2\alpha+\log_2\beta}{2}=0\ \Rightarrow\ \alpha\beta=1$ ⋯㉡

㉠, ㉡에서 $\alpha=2,\ \beta=\frac{1}{2}$ ($\because\ \alpha>\beta$)이다.

두 점 $\mathrm{P}(2,\ \log_a 2)$, $\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2},\ -\log_a 2\right)$가 원 C: $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+y^2=\frac{13}{16}$

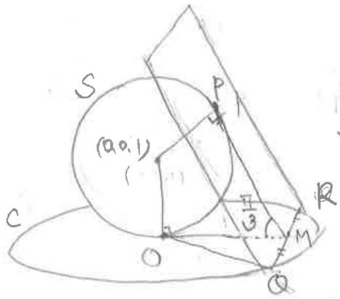
위의 점이므로

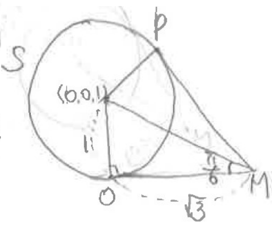
$\frac{9}{16}+(\log_a 2)^2=\frac{13}{16}\ \Rightarrow\ \log_a 2=-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\ \Rightarrow\ a=4$ ($\because\ a>4$)

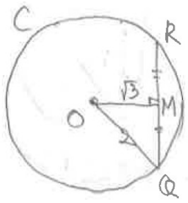
17번

[풀이]

선분 PQ의 중점을 M이라 하면



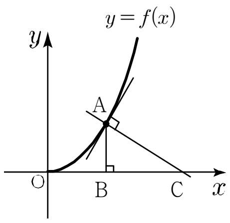




$\therefore\ \overline{\mathrm{QR}}=2\overline{\mathrm{QM}}=2\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=2$

18번

[풀이]



점 A에서 x축에 내린 수선의 발 B의 좌표는 $(t,\ 0)$이고, $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(t,\ f(t))$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)$이므로 점 A를 지나고 접선에 수직인 직선의 방정식은 $y=-\dfrac{1}{f'(t)}(x-t)+f(t)$이다.

이 직선이 x축과 만나는 교점 C의 좌표는 $(t+f'(t)f(t),\ 0)$이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{1}{2}f'(t)\{f(t)\}^2$

이고, 이 값이 $\dfrac{1}{2}(e^{3t}-2e^{2t}+e^t)=\dfrac{1}{2}e^t(e^t-1)^2$과 같으므로

$f(t)=e^t-1$이다.

따라서 구하는 값은

$\displaystyle\int_0^1(e^x-1)dx=\left[e^x-x\right]_0^1=e-2$

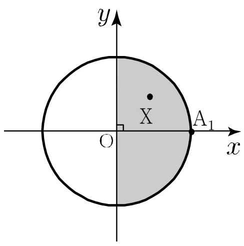
19번

[풀이]

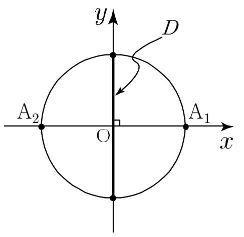
$|\overrightarrow{\mathrm{OX}}|\le 1$은 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원의 둘레 및 내부이고,

$\overrightarrow{\mathrm{OX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}\ge 0$은 $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}$가 이루는 각이 $\dfrac{\pi}{2}$ 이하라는 뜻이다.

ㄱ. $\mathrm{A}_1=\mathrm{A}_2=\mathrm{A}_3$이므로 영역 D는 아래 그림과 같이 반원이 되어 넓이는 $\dfrac{\pi}{2}$이다. (참)

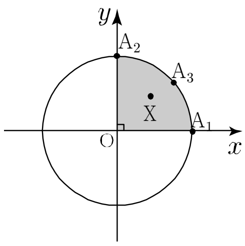


ㄴ. 아래 그림과 같이 점 X는 선분 $\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}$에 수직인 지름이 되어 길이는 2이다. (참)

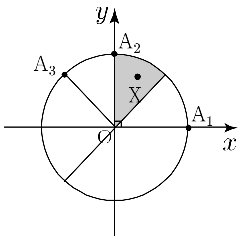


ㄷ. $\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}$인 경우 영역 D는 사분원이 되어 넓이는 $\dfrac{\pi}{4}$이다.

이 경우 점 A_3가 영역 D에 포함되어도 넓이는 여전히 $\dfrac{\pi}{4}$가 된다. (참)



만약 점 A_3가 영역 D에 포함되지 않는 경우 아래 그림과 같이 영역 D의 넓이는 $\dfrac{\pi}{4}$보다 작게 된다.



따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

20번

[풀이]

(가) ${}_3\mathrm{H}_n=f(n)$

(나) $\dfrac{n}{2}+1=g(n)$

(다) ${}_3\mathrm{H}_n-(1+\dfrac{3}{2}n)=h(n)$이므로

$$\begin{aligned}\frac{f(30)}{g(30)}+h(30)&=\frac{{}_3\mathrm{H}_{30}}{16}+{}_3\mathrm{H}_{30}-46\\&=31+31\times16-46\\&=31\times17-46\\&=527-46\\&=481\end{aligned}$$

21번

[풀이]

$-1=a_1\le x\le 0$ 에서 $f(x)=\sin(2\pi x)$ 주기는 1이고

$0\le x\le a_2=1$ 에서 $f(x)=\sin(2\pi x)$ 주기는 1

$a_n\le x\le a_{n+1}$ 에서 구간의 길이 $a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}$이고

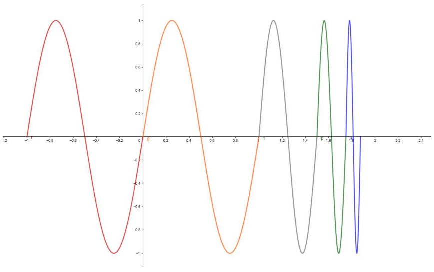
$f(x)=\sin(2^n\pi x)$의 주기는 $\dfrac{1}{2^{n-1}}$,

$f(a_n)=f(a_{n+1})=0$이다.

$g(t)=\displaystyle\int_{-1}^t f(x)dx$라 하면 주어진 조건 $\displaystyle\int_\alpha^t f(x)dx=0$은

$g(t)-g(\alpha)=0,\ g(t)=g(\alpha)$

$y=f(x)$그래프의 개형은 다음과 같다.



$-1=a_1 \le x \le 2=a_2$ 에서 $g(t)=-\dfrac{1}{2\pi}\cos(2\pi t)+\dfrac{1}{(2\pi)}$

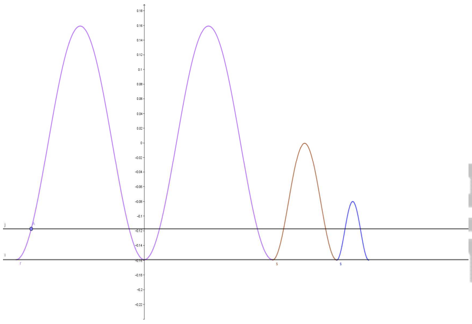
주기는 1이고 $a_n \le x \le a_{n+1}$에서

$$g(t)=\int_{-1}^{a_s} f(x)dx+\int_{a_s}^{t} f(x)dx=0+\int_{a_s}^{t} f(x)dx$$

$$=\int_{a_s}^{t}\sin(2^s\pi x)dx=-\frac{1}{2^s\pi}\cos(2^s\pi t)+\frac{1}{2\pi}$$

(단 $a_s \le t \le a_{s+1}$)

$y=g(t)$그래프의 개형은 다음과 같다.



이때 $g(t)=g(\alpha)$의 해의 개수가 $0<t<2$에서 103개이기 위해서는 $g(\alpha)$가 구간 $[a_{52},\ a_{53}]$에서 극댓값이면 된다. 즉

$$g\left(\frac{a_{52}+a_{53}}{2}\right)=\int_{-1}^{\frac{a_{52}+a_{53}}{2}} f(x)dx=\int_{-1}^{\alpha}\sin(2\pi x)dx=g(\alpha)$$

$$\int_{0}^{\frac{a_{52}+a_{53}}{2}} f(x)dx=\int_{a_{52}}^{\frac{a_{52}+a_{53}}{2}}\sin(2^{52}\pi x)dx=\frac{1}{2^{50}}$$

$\displaystyle\int_{-1}^{\alpha}\sin(2\pi x)dx=-\int_{\alpha}^{0}\sin(2\pi x)dx=1-\cos(2\pi\alpha)$ 이므로

$\log_2(1-\cos(2\pi\alpha))=-50$

26번

[풀이]

$$\bar{x}=\frac{1.73+1.87}{2}=1.8$$

$$1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{49}}=0.07$$

$$\therefore \sigma=\frac{0.07\times7}{1.96}=\frac{1}{4}$$

$$k=\frac{\sigma}{x}=\frac{1}{1.8\times4}=\frac{1}{7.2}=\frac{5}{36}$$

$$180k=180\times\frac{5}{36}=25$$

27번

[풀이]

이등변삼각형 PAF의 점 P에서 변 AF에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$A(a,\ 0)$에 대하여 $\overline{AH}=1$이므로 점 P의 x좌표는 $a+1$이다.

포물선 $y^2=4ax$의 준선 $x=-a$에 대하여 점 P에서 준선까지의 거리가 $2a+1$이므로 $\overline{AP}=2a+1$이다.

직각삼각형 PAH에서

$\overline{PH}=\sqrt{(2a+1)^2-1^2}=2\sqrt{a^2+a}$

$\overline{FF'}=2(\overline{OA}+\overline{AF})=2(a+2) \Rightarrow \overline{PF'}=2(a+2)$

직각삼각형 PF′H에서

$\{2(a+2)\}^2=(2a+3)^2+\left(2\sqrt{a^2+a}\right)^2 \Rightarrow a=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

구하는 장축의 길이는

$\overline{PF}+\overline{PF'}=(2a+1)+2(a+2)=4a+5=4\times\dfrac{\sqrt{7}}{2}+5=5+2\sqrt{7}$

$\therefore\ p=5,\ q=2 \Rightarrow p^2+q^2=29$

28번

[풀이]

갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 을이 꺼낸 카드에 적힌 수보다 큰 경우를 정리하면 아래 표와 같으므로 경우의 수는

$(1\times1+1\times2+3\times3)\times3=36$

갑	을	병
2	1	1, 2, 3
3	1, 2	
4, 5, 6	1, 2, 3	

갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 을, 병이 꺼낸 카드에 적힌 수의 합보다 큰 경우를 표로 정리하면 아래 표와 같으므로 경우의 수는

$1+3+6+8=18$

갑	(을, 병)
3	(1, 1)
4	(1, 1), (1, 2), (2, 1)
5	(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)
6	(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)

$\therefore\ k=\dfrac{18}{36}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow 100k=50$

29번

[풀이]

세 점 O, A$(1,\ 0,\ 0)$, B$(0,\ 0,\ 2)$에 대하여

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}=0$, $|\overrightarrow{OP}|\le 4$를 만족하는 점 P의 자취는 xy평면 위에서 점 O를 중심으로 반지름의 길이가 4인 원의 경계 및 내부이다.

$|\overrightarrow{PQ}|=1 \Rightarrow \overline{PQ}=1$

두 벡터 $\overrightarrow{PQ}$와 $\overrightarrow{OA}$가 이루는 각을 θ라 하면

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OA}\ge\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 1\times1\times\cos\theta\ge\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \cos\theta\ge\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{6}$

i) $|\overrightarrow{BQ}|$가 최대일 때,

점 P의 위치는 P$(4,\ 0,\ 0)$이고 점 Q는 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 구에서 선분 PQ가 x축의 양의 방향과 $\dfrac{\pi}{6}$를 이루는 구면에서 직선 BP의 연장선 위의 점이다.

$M=\overline{BP}+\overline{PQ}=\sqrt{4^2+2^2}+1=1+2\sqrt{5}$

ii) $|\overrightarrow{BQ}|$가 최소일 때, 두 점 P, Q의 좌표는

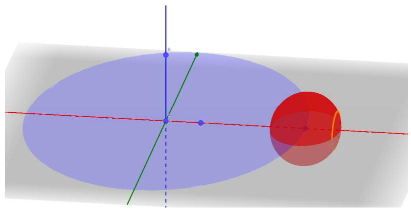
P$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ 0\right)$, Q$\left(0,\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$이므로

$m=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

i), ii)에서

$M+m=(1+2\sqrt{5})+\dfrac{3}{2}=\dfrac{5}{2}+2\sqrt{5}$

$\therefore\ a=\dfrac{5}{2},\ b=2 \Rightarrow 6(a+b)=27$



30번

[풀이]

$h(x)=|g(x)-f(x-k)|$가 $x=k$에서 최솟값을 $g(k)$로 가지므로

$h(k)=|g(k)-f(0)|=|g(k)-(\ln2+2)|=g(k)$이므로

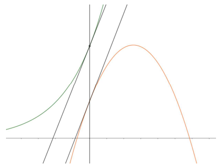
$-g(k)+\ln2+2=g(k)$이므로

$g(k)=1+\dfrac{1}{2}\ln2$ ⋯ ㉠

또한, $h(k)$의 최솟값이 0이 아니므로 두함수 $g(x), f(x-k)$는 만나지 않는다. 따라서 $h(x)=f(x-k)-g(x)$이다. 이때 $x=k$에서 $h'(k)=f'(0)-g'(k)=0$이므로(극소)

$g'(k)=\dfrac{5}{2}$ ⋯ ㉡

함수 $f(x-k)$의 그래프는 아래로 볼록, 함수 $g(x)$는 위로 볼록한 이차함수이다.



따라서, 닫힌구간 $[k-1,\ k+1]$에서 함수 $h(x)$의 최댓값은 $h(k-1)$ 또는 $h(k+1)$이다.

$h(k-1)=f(-1)-g(k-1)=\left\{\ln\left(\dfrac{1}{e}+1\right)+\dfrac{2}{e}\right\}-g(k-1)$

$h(k+1)=f(1)-g(k+1)=\{\ln(e+1)+2e\}-g(k+1)$

$h(k+1)-h(k-1)=\left\{1+2\left(e-\dfrac{1}{e}\right)\right\}-\{g(k+1)-g(k-1)\}$

$\dfrac{5}{2}<e<3$에서 $\dfrac{26}{5}<1+2\left(e-\dfrac{1}{e}\right)<\dfrac{19}{3}$이고 $g'(k)=\dfrac{5}{2}$이므로

구하는 최댓값은 $h(k+1)$이다.

$h(k+1)=2e+\ln\left(\dfrac{1+e}{\sqrt{2}}\right)$

$\Rightarrow f(1)-g(k+1)=2e+\ln\left(\dfrac{1+e}{\sqrt{2}}\right)$

$\Rightarrow \{\ln(e+1)+2e\}-g(k+1)=2e+\ln(1+e)-\dfrac{\ln2}{2}$

$\Rightarrow g(k+1)=\dfrac{\ln2}{2}$ ⋯㉢

$g(x)=ax^2+bx+c$라 하면 $g'(x)=2ax+b$이다.

$g(k+1)-g(k)=a(2k+1)+b=-1$

$g'(k)=2ak+b=\dfrac{5}{2} \Rightarrow a=-\dfrac{7}{2}$

$g'\left(k-\dfrac{1}{2}\right)=2a\left(k-\dfrac{1}{2}\right)+b=(2ak+b)-a=\dfrac{5}{2}-\left(-\dfrac{7}{2}\right)=6$