

고지우의 난문현답

[기출 + 킬러]

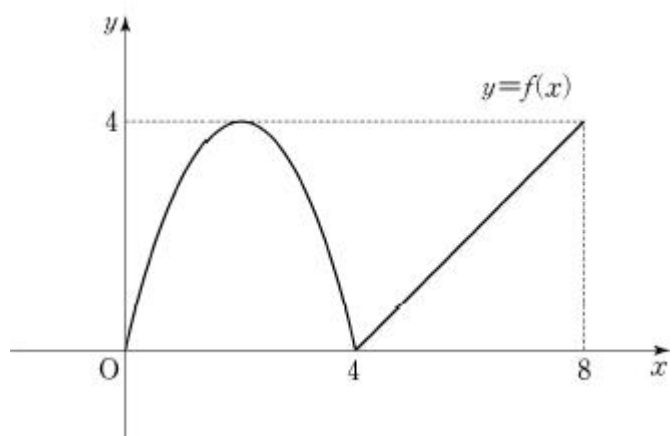
제 1 회

1. 2016년 9월 평가원
2. 2017년 수능
3. 2017년 7월 교육청
4. 2018년 사관학교
5. 규토 고득점 N제
6. 규토 고득점 N제
7. 규토 고득점 N제
8. 2016년 9월 평가원
9. 2017년 6월 평가원
10. 2016년 3월 교육청
11. 2018년 사관학교
12. 2016년 10월 교육청
13. 2018년 사관학교
14. 2017년 수능
15. 2015년 경찰대

1. 구간 $[0, 8]$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} -x(x-4) & (0 \leq x < 4) \\ x-4 & (4 \leq x \leq 8) \end{cases}$$

이다. 실수 a ($0 \leq a \leq 4$)에 대하여 $\int_a^{a+4} f(x)dx$ 의 최솟값은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)



[추가문항 1]

함수 $f(x) = \int_2^x (t^2 - 4t + 3)dt$ 는 $x=a$ 에서 극댓값 b 를 갖는다. $a+b$ 의 값은?

- ① $\frac{5}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ $\frac{11}{3}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ $\frac{17}{3}$

2. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값, $x=k$ 에서 극솟값을 가진다. (단, k 는 상수이다.)

(나) 1보다 큰 모든 실수 t 에 대하여

$$\int_0^t |f'(x)| dx = f(t) + f(0)$$

이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보기 >

㉠. $\int_0^k f'(x) dx < 0$

㉡. $0 < k \leq 1$

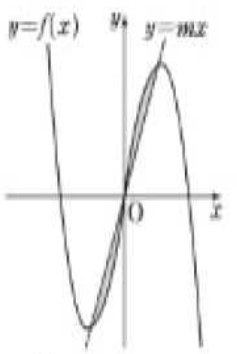
㉢. 함수 $f(x)$ 의 극솟값은 0이다.

① ㉠ ② ㉢ ③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

[추가문항 2]

그림과 같이 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시키는 삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=mx$ 가 서로 다른 세 점에서 만난다. 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) - mx = -x(x+1)(x-1)$ 일 때, 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=mx$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, $m > 0$)



- ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

3. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여

$$g(x) = \int_0^x tf(t)dt$$

라 할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

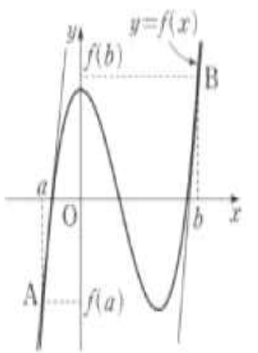
[보 기]

- ㄱ. $g'(0)=0$
 ㄴ. 양수 α 에 대하여 $g(\alpha)=0$ 이면 방정식 $f(x)=0$ 은
 열린 구간 $(0, \alpha)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
 ㄷ. 양수 β 에 대하여 $f(\beta)=g(\beta)=0$ 이면
 모든 실수 x 에 대하여 $\int_{\beta}^x tf(t)dt \geq 0$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[추가문항 3]

그림과 같이 함수 $f(x)=x^3-3x^2+2$ 의 그래프 위의 두 점 $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ 에서의 접선의 기울기가 모두 9이다. $a+10b$ 의 값을 구하시오. (단, $a < b$ 이고 a, b 는 상수이다.)



4. $a \leq 35$ 인 자연수 a 와 함수 $f(x) = -3x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 4$ 에

대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = |f(x) - a|$$

라 할 때, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 직선 $y = b (b > 0)$ 이 서로 다른 4개의 점에서 만난다.
 (나) 함수 $|g(x) - b|$ 가 미분가능하지 않은 실수 x 의 개수는 4이다.

두 상수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값을 구하시오.

[추가문항 4]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f(3) = 0$
 (나) 모든 실수 x 에 대하여 $(x + 3)f(x) \geq 0$ 이다.

함수 $f(x)$ 의 극댓값은?

- ① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

[추가문항 5]

함수 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ 에 대하여 $f(3) - f(0) = 3f'(c)$ 를 만족시키는 실수 c 의 값은?
(단, $0 < c < 3$)

- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

[추가문항 6]

모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^4 - 4x^3 + a \geq 0$ 이 항상 성립하기 위한 실수 a 의 최솟값은?

- ① 26 ② 27 ③ 28 ④ 29 ⑤ 30

[추가문항 7]

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시간 t 일 때의 위치는 각각 $f(t)=t^4-8t^3$, $g(t)=2at$ 이다. $t>0$ 에서 두 점 P, Q의 속도가 서로 같을 때가 단 한 번 되기 위한 정수 a 의 최솟값을 구하시오.

8. 좌표평면에서 자연수 n 에 대하여 영역

$$\left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{x+3}}{2} \right\}$$

에 포함되는 정사각형 중에서 다음 조건을 만족시키는 모든 정사각형의 개수를 $f(n)$ 이라 하자.

- (가) 각 꼭짓점의 x 좌표, y 좌표가 모두 정수이다.
 (나) 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$ 이하이다.

예를 들어 $f(14)=15$ 이다. $f(n) \leq 400$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최댓값을 구하시오.

【추가문항 8】

함수 $y=x^2+\frac{1}{2}$ 의 그래프와 직선 $y=2x+\frac{s}{5}$ 가 서로 다른 두 점 A, B 에서 만나도록 하는 실수 s 에 대하여 이 두 점 A, B 사이의 거리를 $f(s)$ 라 하자. 함수 $t=f(s)$ 에 대하여 연립부등식 $t < f(s)$, $t > 0$, $-2.5 < s < 0$ 이 나타내는 영역을 D 라 할 때, 영역 D 에 포함된 점 중에서 s 좌표와 t 좌표가 모두 정수인 점의 개수를 구하시오.

2. 함수

$$f(x) = \frac{k}{x-11} + 6 \quad (k \geq 36)$$

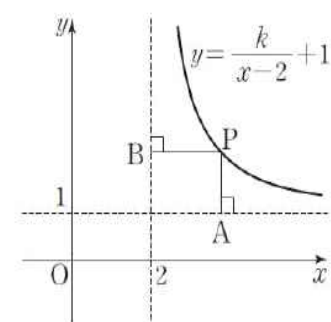
에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k 의 개수는?

$|f(x)| \leq y \leq -x+5$ 인 두 자연수 x, y 의 모든 순서쌍 (x, y) 의 개수는 2 이상 4 이하이다.

- ① 18 ② 21 ③ 24
④ 27 ⑤ 30

【추가문항 9】

함수 $y = \frac{k}{x-2} + 1 (x > 2)$ 의 그래프 위의 한 점 P에서 두 점근선에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하자. $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 값이 최솟값이 6일 때, 점 P의 x 좌표는?



- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

10. 2 이상의 자연수 x 에 대하여

$\log_x n$ (n 은 $1 \leq n \leq 300$ 인 자연수)

가 자연수인 n 의 개수를 $A(x)$ 라 하자. 예를 들어, $A(2)=8$, $A(3)=5$ 이다.

집합 $P = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합 X 에 대하여 집합 X 에서 집합 X 로의 대응 f 를

$$f(x) = A(x) \quad (x \in X)$$

로 정의하면 어떤 대응 f 는 함수가 된다. 함수 f 가 일대일 대응이 되도록 하는 집합 X 의 개수를 구하시오.

[추가문항 10]

집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 함수 $f: X \rightarrow X$ 가 다음 조건 (i), (ii)을 만족할 때 옳은 것을 모두 고르면?

- (i) 집합 X 의 임의의 서로 다른 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ 이다.
- (ii) 집합 X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 이다.

$\neg$. $f(0)=0$
 $\neg$. $f(-x)=-f(x)$
 $\supset$. $f(x_1)=f(x_2)$ 이면 $x_1=x_2$ 이다.

- ① $\neg$ ② $\neg, \neg$ ③ $\neg, \supset$ ④ $\neg, \supset$ ⑤ $\neg, \neg, \supset$

11. 전체집합 $U = \{x | x \text{는 } 7 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$ 에 대하여 $A \cap X \neq \emptyset$, $B \cap X \neq \emptyset$ 을 모두 만족시키는 U 의 부분집합 X 의 개수는?

- ① 102 ② 104 ③ 106
④ 108 ⑤ 110

[추가문항 11]

전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 U 의 부분집합 A 의 개수는?

(가) $\{1, 2, 3\} \cap A \neq \emptyset$	(나) $\{4, 5\} \cap A = \emptyset$
---	-----------------------------------

- ① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

12. 1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 9개의 공이 주머니에 들어 있다. 이 주머니에서 공을 한 개씩 모두 꺼낼 때, i 번째 ($i=1, 2, \dots, 9$) 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 a_i 라 하자. $1 < p < q < 9$ 인 두 자연수 p, q 에 대하여 a_i 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $1 \leq i < p$ 이면 $a_i < a_{i+1}$ 이다.

(나) $p \leq i < q$ 이면 $a_i > a_{i+1}$ 이다.

(다) $q \leq i < 9$ 이면 $a_i < a_{i+1}$ 이다.

$a_1=2, a_p=8$ 인 모든 경우의 수를 구하시오. (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

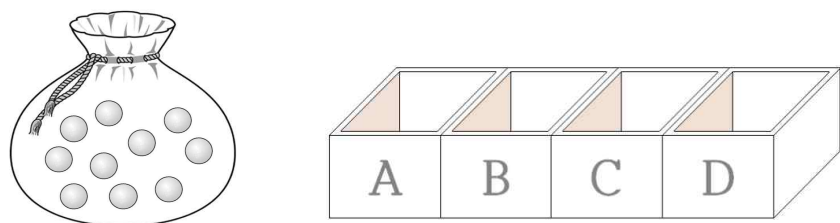
[추가문항 12]

두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \rightarrow Y$ 의 개수를 구하시오.

(가) $f(3)$ 은 3의 배수이다.

(나) 집합 X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 이다.

13. 그림과 같이 10개의 공이 들어 있는 주머니와 일렬로 나열된 네 상자 A, B, C, D가 있다. 이 주머니에서 2개의 공을 동시에 꺼내어 이웃한 두 상자에 각각 한 개씩 넣는 시행을 5회 반복할 때, 네 상자 A, B, C, D에 들어 있는 공의 개수를 각각 a, b, c, d 라 하자. a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는? (단, 상자에 넣은 공은 다시 꺼내지 않는다.)



- ① 21 ② 22 ③ 23
④ 24 ⑤ 25

[추가문항 13]

좌표평면 위에서 다음 조건을 만족시키는 서로 다른 두 직선 $y=mx+n$, $y=ax+b$ 를 정하는 경우의 수는?

- (가) m, n, a, b 는 모두 짝수인 자연수이다.
(나) $m+n+a+b=24$ 이다.

- ① 160 ② 164 ③ 168 ④ 172 ⑤ 176

14. 확률변수 X 는 평균이 m , 표준편차가 5인 정규분포를 따르고, 확률변수 X 의 확률밀도함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f(10) > f(20)$
(나) $f(4) < f(22)$

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.6	0.226
0.8	0.288
1.0	0.341
1.2	0.385
1.4	0.419

m 이 자연수일 때, $P(17 \leq X \leq 18)$ 의 값을 오른쪽 정규분포표를 이용하여 구한 것은?

- ① 0.044 ② 0.053 ③ 0.062
④ 0.078 ⑤ 0.097

[추가문항 14]

확률변수 X 는 정규분포 $N(100, 2^2)$ 을 따른다. 실수 t 에 대하여 $f(t) = P(t \leq X \leq 3+t)$ 라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} f(3n+c) = 0.8413$ 을 만족시키는 상수 c 의 값을 표준정규분포표를 이용하여 구하시오.

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

15. 15 이하의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 수를 뽑을 때, 어느 두 수도 3 이상 차이가 나도록 뽑는 방법의 수는?

- ① 108 ② 120 ③ 126
④ 132 ⑤ 144

[추가문항 15]

집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow X$ 의 개수를 구하시오.

- (가) $f(4) = 4$
(나) $x < 4$ 이면 $f(x) \geq f(4)$ 이다.

[기출 + 킬러 정답]

1. 43
2. 5
3. 5
4. 36
- 5.
- 6.
- 7.
8. 65
9. 1
10. 7
11. 4
12. 243
13. 1
14. 3
15. 3

[추가문항 정답]

1. 1
2. 4
3. 29
4. 2
5. 2
6. 2
7. -64
8. 3
9. 1
10. 2
11. 5
12. 252
13. 1
14. 95
15. 972